Capitolo 6
ELEMENTI STRUTTURALI

1. Valutazione della duttilità di elementi trave o pilastro: rotazione plastica

Lo studio della duttilità di strutture complesse richiede l'analisi e la risoluzione di ampie problematiche, essenzialmente legate ai molti parametri che ne influenzano il comportamento post-elastico, quali materiali, carichi e schemi statici.
Spesso per poter effettuare valutazioni sulle capacità plastiche è necessaria la riduzione a schemi semplici, almeno per stimare quali siano effettivamente i fattori che influiscono maggiormente sulla risposta strutturale.

Nel seguito la modellazione proposta per lo studio di un concio tra due fessure è estesa agli schemi più comunemente utilizzate nell'ingegneria civile, al fine di ricavare informazioni ed esprimere considerazioni sull'influenza della modellazione dei materiali, con particolare riferimento alle caratteristiche degli acciai, sulla duttilità globale.

In questo capitolo vengono prima presi in considerazione due classici elementi trave e pilastro isostatici, ossia la trave semplicemente appoggiata soggetta a flessione semplice, e la mensola sollecitata a pressoflessione, quindi l'analisi è estesa a semplici strutture iperstatiche intelaiate.

Per elementi isostatici l'unica fonte di duttilità è fornita dalla possibilità di deformarsi in campo anelastico e, quindi generalmente si assume quale indice di tale capacità la rotazione plastica.

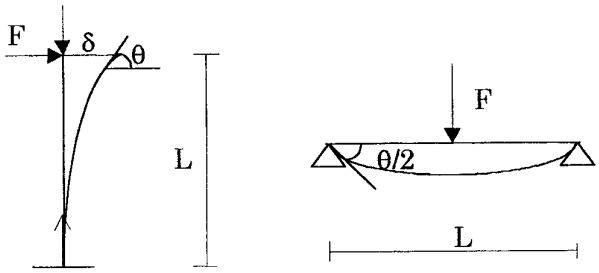


Fig.6.1 – Capacità rotazionale dell'elemento trave e pilastro

Tale parametro, seppur ampiamente utilizzato in letteratura si presta a differenti definizioni.

Negli studi di (Bosco et al.[38]), e nel Model Code '90 la rotazione plastica è definita come l'integrale esteso alla lunghezza della cerniera plastica della differenza tra curvature media (ρ_m) e curvatura corrispondente allo snervamento dell'acciaio (ρ_y). Tale valore, nell'ipotesi di legame trilatero M-ρ_m, risulta proporzionale alla zona tratteggiata in Fig.6.2 (a);

$$\vartheta_{pl} = \int_{lp} (\rho_m - \rho_y) dz$$

Negli studi di (Calvi et al.[39]), (Eibl et al.[40]), (Cosenza et al.[41]), la rotazione plastica è espressa come differenza tra la rotazione ultima e quella in corrispondenza dello snervamento Fig.6.2 (c), inoltre tale indice può anche intendersi come integrale esteso alla zona plasticizzata della curvatura media corrente cui è sottratta la parte elastica, che risulta proporzionale alla zona tratteggiata in Fig.6.2 (b).

I valori della rotazione plastica espressi come in (c) risultano sempre maggiori dei casi (a) e (b).

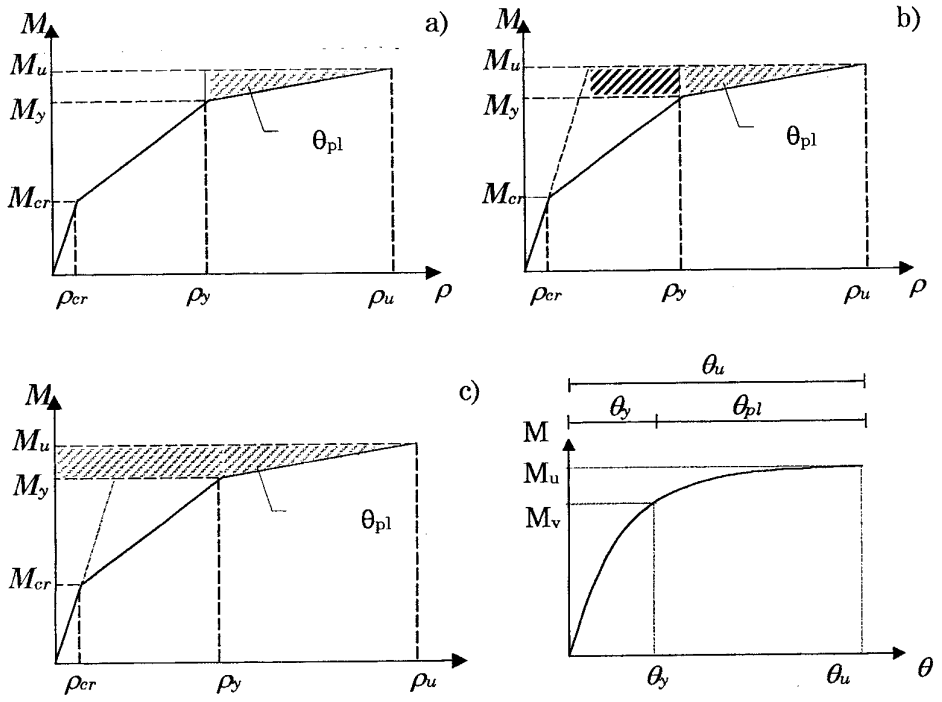


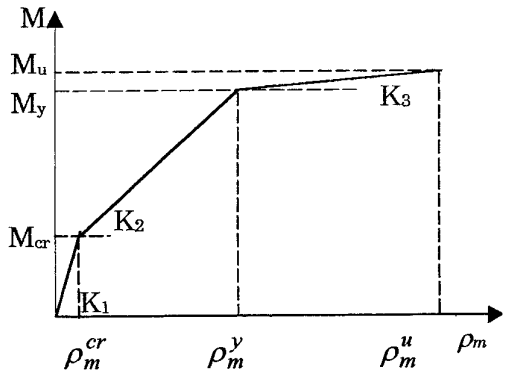
Fig.6.2 – Definizione di rotazione plastica

In ciascun caso, comunque, la curvatura da integrare dovrebbe essere interpretata come media, calcolata tenendo conto del fenomeno di fessurazione e dell'effetto irrigidente del calcestruzzo tra le lesioni (tension stiffning). E' stato già discusso nel Cap I, dell'approccio con cui le norme affrontano tale problema, ossia posta la classica ipotesi di conservazione delle sezioni piane, ed espressa la curvatura media in funzione del rapporto tra $M/E_c I_m$, si ricerca una formulazione dell'inerzia media o efficace, I_m, compresa tra il valore di tale caratteristica nella sezione completamente reagente e quella parzializzata. Sono già state descritte le diverse formulazioni proposte per l'inerzia media in funzione dei parametri che descrivono il "tension stiffning". (CEB[21], ACI[5], EC2[46]).

L'obiettivo della modellazione presentata nei precedenti capitoli è stato quello di poter definire un legame momento curvatura media, per diversi tipi di sollecitazione, rimuovendo l'ipotesi di planeità delle sezio-

ni e tenendo intrinsecamente conto della fessurazione e dell'effetto di tension-stiffening. Nella formula integrale che definisce la rotazione è stata dunque considerata la variazione di curvatura media ottenuta dall'analisi del concio.

Per una semplice valutazione del parametro θ_{pl}, si è ritenuto accettabile approssimare la relazione momento – curvatura media, analizzata nei precedenti paragrafi, con un legame trilatero definito dalla terna di punti legati alla condizione di fessurazione, di primo snervamento ed a quella ultima, $\left(\rho_m^{cr}, M_{cr}\right), \left(\rho_m^{y}, M_y\right), \left(\rho_m^{u}, M_u\right)$, del tipo riportato nella Fig.6.3.



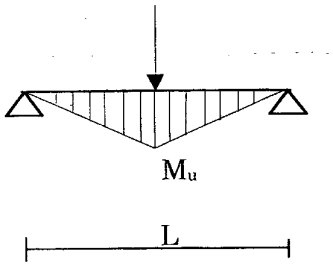
$$K_1 = \frac{M_{cr}}{\rho_m^{cr}}$$

$$K_2 = \frac{M_y - M_{cr}}{\rho_m^{y} - \rho_m^{cr}}$$

$$K_3 = \frac{M_u - M_y}{\rho_m^{u} - \rho_m^{y}}$$

Fig.6.3 – Diagramma momento – curvatura media semplificato

Con riferimento allo schema illustrato in Fig.6.4 si può esplicitare l'espressione della rotazione plastica in condizioni ultime in funzione delle caratteristiche di sollecitazione e delle curvature medie.



$M = M_u\,(2/L)\,z$

$dz = dM\,(L/2M_u)$

Fig.6.4 – Modello trave

Nell'ipotesi di momento variabile linearmente operando una sostituzione di variabili nell'integrale che definisce la rotazione totale ultima si ottiene:

$$\theta_u = 2\int_0^{L/2} \rho(z)dz = \frac{L}{Mu}\int_0^{M_u} \rho(M)dM$$

$$\vartheta_u = \frac{L}{2M_u}\left[\rho_m^{cr} M_y + \rho_m^y (M_u - M_{cr}) + \rho_m^u (M_u - M_y)\right]$$

mentre il valore di tale parametro in corrispondenza dello snervamento è dato dalla seguente:

$$\theta_y = 2\int_0^{L/2} \rho(z)dz = \frac{L}{Mu}\int_0^{My} \rho(M)dM$$

$$\vartheta_y = \frac{L}{2}\left[\rho_m^{cr} + \rho_m^y\left(1 - \frac{M_u}{M_y}\right)\right]$$

Esprimendo la rotazione plastica come integrale della differenza tra la curvatura media e la curvatura relativa allo snervamento, si ottiene:

$$\theta_{pl} = \frac{L}{Mu}\int_{My}^{Mu} [\rho(M) - \rho_y]dM$$

e sostituendo la curvatura media in funzione del momento flettente secondo il legame espresso dalla trilatera di Fig.6.3, si ottiene:

$$\vartheta_{pl} = \int_{lp} (\rho_m - \rho_y) dz = \frac{L}{M_u} \int_{My}^{Mu} \frac{M - M_y}{K_3} dM$$

la cui risoluzione porta alla semplice relazione:

$$\theta_{pl} = \frac{L}{2M_u} \frac{1}{K_3} (M_u - M_y)^2 \tag{6.1}$$

essendo

$$K_3 = \frac{M_u - M_y}{\rho_m^u - \rho_m^y}$$

Volendo definire la rotazione plastica come integrale della curvatura media depurata della sua parte elastica si giunge a:

$$\theta_{pl} = \frac{L}{2M_u} \left(\frac{1}{K_3} - \frac{1}{K_1} \right) (M_u - M_y)^2$$

con

$$K_1 = \frac{M_{cr}}{\rho_m^{cr}}.$$

Nel seguito si considererà la prima definizione di rotazione plastica, indicando con θ_{pl} la relazione (6.1) e si valuterà il parametro θ_u-θ_y, pur essendo molto spesso, negli esempi proposti, le differenze quasi trascurabili.

2. Applicazioni numeriche

Il primo schema considerato è il modello più frequentemente analizzato sia dal punto di vista numerico che sperimentale, costituto da una trave semplicemente appoggiata, soggetta a momento flettente variabile linearmente.

Valutazioni numeriche ed indagini parametriche, analoghe a quelle eseguite per il singolo concio, sono svolte per una trave di lunghezza pari a 6.00m con sezione rettangolare di dimensioni 30x60, al variare della caratteristiche degli acciai, del legame costitutivo del calcestruzzo e delle percentuali di armatura tesa e compressa.

La prima serie di figure si riferisce a calcestruzzi ad alta resistenza o comunque perfettamente elastici con caratteristiche riportate in Tab. 6.1. Le tensioni e deformazioni ultime degli acciai sono fissati e illustrati nella stessa tabella, mentre è fatto variare in rapporto di incrudimento e la percentuale di armatura.

Tab. 6.1 – Caratteristiche del calcestruzzo e degli acciai

E_c [N/mm²]	ε^u_c [%]	σ^u_c [N/mm²]	σ^u_{ct} [N/mm²]	σ^u_s [N/mm²]	ε^u_s [%]
40000	0.3	120	3.5	550	8.0

Nelle Fig.6.5, Fig.6.7 e Fig.6.9 è rappresentato, per la struttura in oggetto, il legame tra il rapporto di incrudimento e la rotazione plastica, al variare della percentuale di armatura (μ), nelle ipotesi di area di acciaio in compressione nulla, pari alla metà di quella in trazione e, infine, nel caso di uguaglianza tra le due.

Nelle Fig.6.6, Fig.6.8 e Fig.6.10 è diagrammato l'andamento delle rotazioni plastiche al variare della percentuale di armatura, per alcuni significativi rapporti di incrudimento, per i tre suddetti valori di armatura in compressione.

Nel caso di sezione semplicemente armata, si individuano distintamente, nella curva delle rotazioni plastiche, due rami legati rispettivamente alla crisi dell'elemento per raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio, e nel calcestruzzo. Nel primo caso le rotazioni plastiche aumentano al crescere della percentuale di armatura fino a raggiungere un picco, intorno allo 0.3%, equivalente a 4.4 cm² nell'esempio di sezione proposto. Nel campo di rottura delle barre metalliche, l'incremento della percentuale di armatura porta ad un miglioramento delle caratteristiche di duttilità dell'elemento, per i motivi discussi nel

Cap.4. Quando si verifica la crisi del calcestruzzo, aumentare la quantità di acciaio provoca sempre effetti negativi sulla capacità rotazionale della sezione, in quanto, abbassandosi sempre più la posizione dell'asse neutro, si raggiunge la deformazione limite in compressione con l'acciaio poco plasticizzato.

Nella Fig.6.6 sono confrontati gli andamenti della rotazione plastiche in funzione della percentuale di armatura, per i tre tipi di acciai considerati, caratterizzati da stesso comportamento ultimo, ma da tre differenti rapporti di incrudimento con valori pari a 1,20, 1.10 e 1.05. Le differenze di comportamento in termini di duttilità risultano evidenti. Passando da un acciaio con valore di σ^u_s/σ^y_s pari a 1.2 ad uno caratterizzato da un rapporto pari a 1.05 si ottiene una riduzione di rotazione plastica mediamente dell'ordine di 1/6 con picchi dell'ordine di 1/10. Il comportamento tende ad uniformarsi per i due tipi di acciai solo per percentuali di armatura superiori all'1%, e quindi, nel caso di elementi comunque poco duttili.

L'influenza della percentuale di armatura, a parità di rapporto di incrudimento, può leggersi in Fig.6.5. Al diminuire del rapporto di incrudimento, la maggiore o minore presenza di armatura metallica diventa un parametro meno importante nella valutazione della capacità rotazionale, mentre assume un ruolo fondamentale per acciai più duttili ($\sigma^u_s/\sigma^y_s = 1.2$).

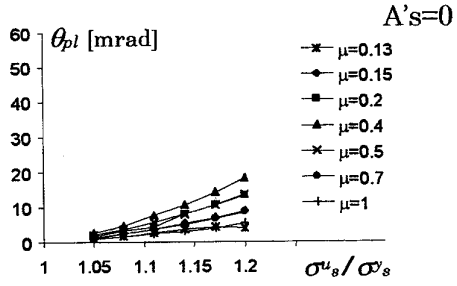


Fig.6.5 – Rapporto di incrudimento – rotazione plastica

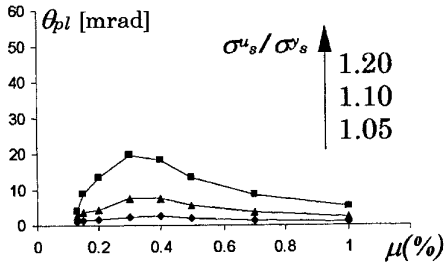


Fig.6.6 – Percentuale di armatura – rotazione plastica

Nel caso in cui sia presente armatura in compressione pari alla metà di quella in trazione, la curva delle rotazioni plastiche assume un aspetto molto differente.

La crisi dell'elemento è dovuta al raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio anche per valori molto elevati della percentuale di armatura, per cui il primo ramo crescente si prolunga raggiungendo elevate possibilità di rotazione plastica. Essendo tali tratti pressoché rettilinei al variare della percentuale di armatura, le differenze di duttilità che si verificano utilizzando acciai caratterizzati da σ^u_s/σ^y_s =1.05 o da σ^u_s/σ^y_s =1.20, si mantengono quasi costanti e dell'ordine di 1/10 (Fig.6.7).

Molto più marcate si presentano le differenze rispetto alla curva relativa a sezioni semplicemente armate, se la crisi è dovuta al calcestruzzo.

Gli andamenti delle rotazioni plastiche in tale zona si mantengono quasi costanti, e quindi l'influenza delle caratteristiche degli acciai si risente nettamente anche in tale campo.

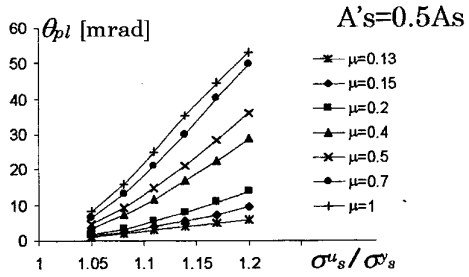


Fig.6.7 – Rapporto di incrudimento– Rotazione plastica

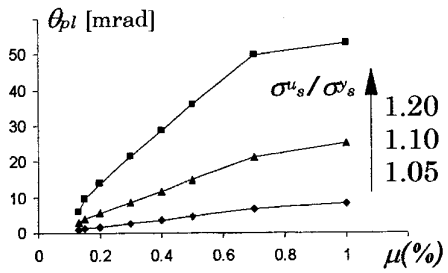


Fig.6.8 – Percentuale di armatura– Rotazione plastica

Ulteriori incrementi di armatura in compressione non modificano sostanzialmente l'andamento delle rotazioni plastiche come mostrato in Fig.6.9 e Fig.6.10.

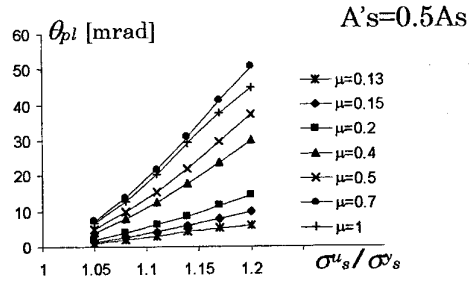


Fig.6.9 – Rapporto di incrudimento–Rotazione plastica

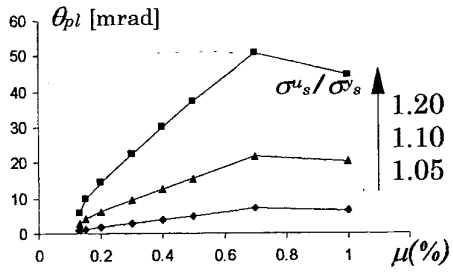


Fig.6.10 – Percentuale di armatura-Rotazione plastica

Nelle successive figure è riportato il parametro (θu-θy) in funzione della percentuale di armatura per tre differenti rapporti di incrudimento e per i tre valori di armatura in compressione analizzati. Pur essendo gli andamenti analoghi a quelli della rotazione plastica, non si verifica il repentino abbattimento di duttilità in corrispondenza di bassissime percentuali di armatura.

I valori sono di poco superiori a quelli valutati precedentemente e si mantengono invariate le forti differenze di comportamento al diminuire del rapporto di incrudimento.

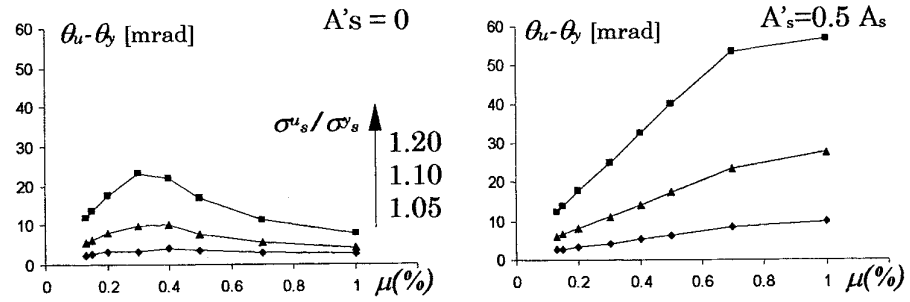


Fig.6.11 – Percentuale di armatura–Rotazione θ_u-θ_y

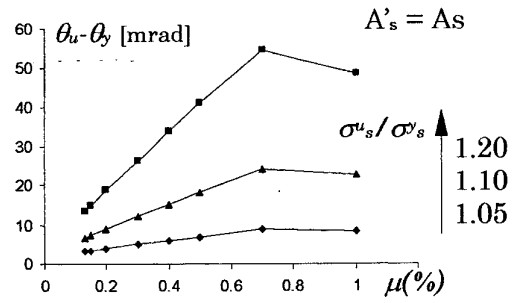


Fig.6.12 – Percentuale di armatura–Rotazione θ_u-θ_y

- *Calcestruzzo parabolico*

Una ulteriore serie di indagini è stata svolta per tener conto di un comportamento duttile del calcestruzzo caratterizzato da un legame costitutivo parabolo-rettangolo, i cui valori limiti sono riportati nella seguente tabella:

Tab. 6.2 – Caratteristiche del calcestruzzo

σ^u_c [N/mm^2]	ε^o_c [%]	ε^u_c [%]
350	0.2	0.6

I casi esaminati sono del tutto analoghi ai precedenti ed i risultati ottenuti sono espressi sottoforma di diagrammi che seguono pedissequamente quelli discussi nell'analisi del singolo concio.

In assenza di armatura in compressione si ritrovano i rami crescenti legati alla crisi dell'acciaio e del calcestruzzo rispettivamente, ed in particolare il secondo tratto decresce molto rapidamente all'incrementarsi della percentuale di armatura.

Le differenze di duttilità massime quindi, si riscontrano per raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio, in cui per σ^s_u/σ^s_y variabile da 1.05 a 1.20 si trovano diminuzioni di rotazione plastica di circa 1/6, in corrispondenza della percentuale di armatura critica.

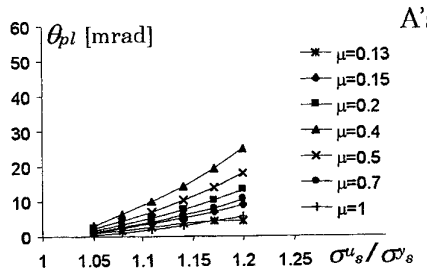


Fig.6.13 – Rapporto di incrudimento– Rotazione plastica

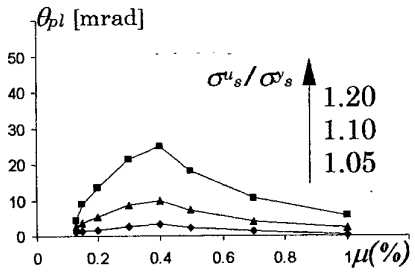


Fig.6.14 – Percentuale di armatura- Rotazione plastica

Un'aggiunta di armatura in compressione pari al 50% di quella in trazione oltre ad incrementare la duttilità, modifica notevolmente il comportamento della trave soprattutto nel campo di crisi imputabile al calcestruzzo.

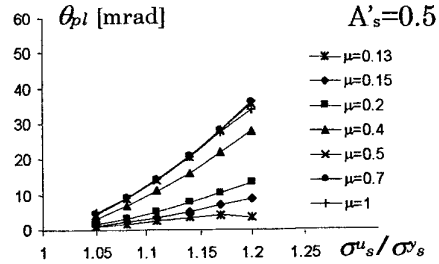


Fig.6.15 – Rapporto di incrudimento– Rotazione plastica

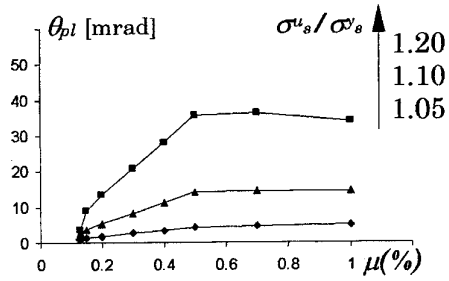


Fig.6.16 – Percentuale di armatura- Rotazione plastica

Lungo tale ramo la rotazione plastica è praticamente costante al variare della percentuale d'armatura, e ciò è dovuto al duplice effetto positivo della presenza di barre compresse che consente di raggiungere un maggiore valore della deformazione nell'acciaio teso in condizioni ultime e una maggiore diffusione della plasticizzazione (Cap.4, par.4)

Tali aspetti favorevoli sono smorzati da bassi valori del rapporto di incrudimento che portano ad una riduzione della zona plasticizzata pro-

ducendo localizzazione delle deformazioni in corrispondenza delle lesioni e generando forti diminuzioni di rotazione plastica.

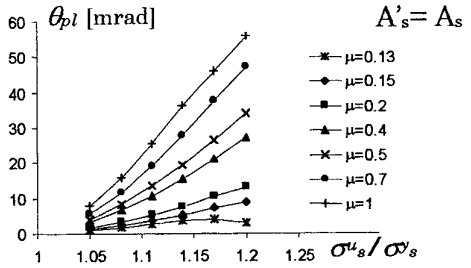


Fig.6.17 – Rapporto di incrudimento– Rotazione plastica

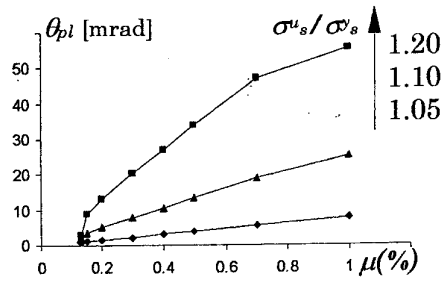


Fig.6.18 – Percentuale di armatura- Rotazione plastica

Tale grave problema si risente ancor più nel caso di armatura in compressione pari a quella in trazione. La crisi della sezione si verifica, infatti per raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio fino a valori armatura in trazione pari all'1% e la riduzione del rapporto di incrudimento annulla del tutto gli effetti positivi sulla duttilità forniti dall'armatura in compressione, portando a riduzioni di duttilità anche superiori a 1/10. Nelle successive figure sono riportate le curve relative alla differenza tra rotazione ultima e in corrispondenza dello snervamento, in funzione delle percentuali di armatura.

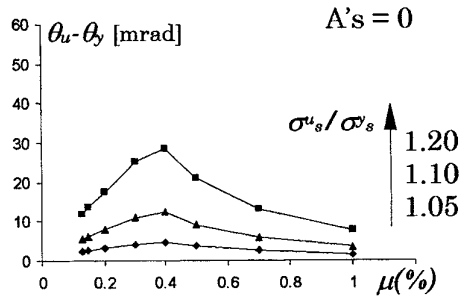


Fig.6.19 – Percentuale di armatura – Rotazione θ_u-θ_y

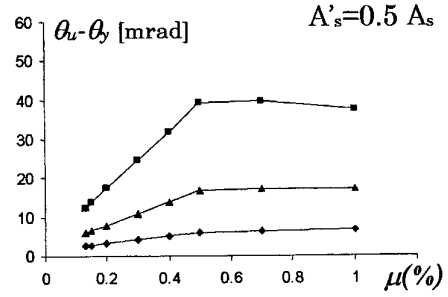


Fig.6.20 – Percentuale di armatura - Rotazione θ_u-θ_y

Si riscontrano, come previsto, gli stessi andamenti ritrovati in precedenza, con valori incrementati di circa il 15%.

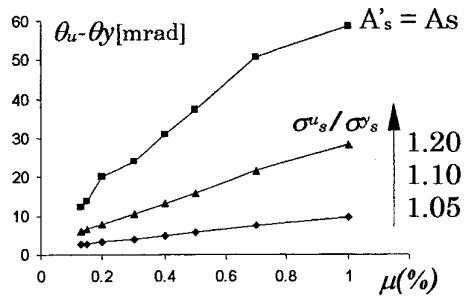


Fig.6.21 – Percentuale di armatura – Rotazione θ_u-θ_y

Si è, infine, analizzata l'influenza dell'allungamento ultimo sulla rotazione plastica, in uno dei casi di crisi dell'acciaio, facendo riferimento ai due rapporti di incrudimento σ^u_s/σ^y_s pari a 1.05 e 1.20.

I risultati ottenuti per una percentuale di armatura semplice pari allo 0.4% sono riportati in Fig.6 22.

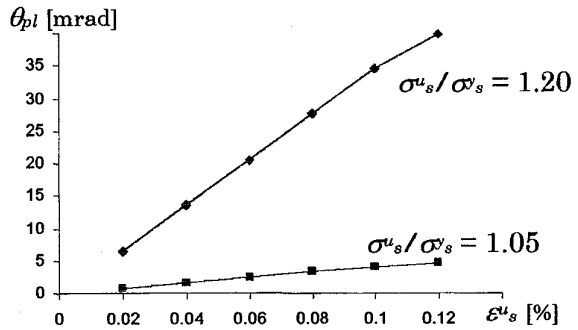


Fig.6 22 – Influenza dell'allungamento ultimo sulla duttilità strutturale

Nel caso di acciai meno duttili risulta prevalente l'effetto del ridotto rapporto di incrudimento, anche se una riduzione di allungamento ultimo da 0.12% a 0.02% comporta diminuzioni di rotazioni plastiche dell'ordine di 1/3.

Notevole è l'influenza di un decremento di ε^u_s sulla capacità di plasticizzazione di elementi armati con acciai caratterizzati da maggiori valori del rapporto σ^u_s/σ^y_s. In tal caso, infatti le riduzioni di duttilità, in un campo di variazione di allungamento ultimo tra 0.02 e 0.12, sono maggiori di 1/5.

3. Confronti

Formulazioni teoriche e sintetiche per la valutazione della rotazione plastica non sono molto numerose, stante la difficoltà del problema ed il numero di parametri in gioco, come illustrato nel Cap.1. Una interessante proposta è riportata in (Cosenza et al.[41])

Sulla base del modello matematico di comportamento di strutture in campo inelastico formulato in (Greco et al.[33]), illustrato nel Cap. 4., è stato condotto dagli autori uno studio parametrico su un elemento trave con momento variabile linearmente, facendo variare gli allungamenti ultimi e i rapporti di incrudimento degli acciai, al fine di valutarne gli effetti sulla rotazione plastica.

I legami costitutivi sono stati definiti attraverso relazioni piuttosto elaborate; per il calcestruzzo in compressione è stata utilizzata la legge di Mander, per il comportamento in trazione il ramo crescente del legame di Madu11. L'acciaio, in prima fase considerato di tipo lavorato a freddo, è caratterizzato dalla legge di Ramberg & Osgood, mentre per il legame di aderenza sono considerate le formulazione di Ciampi et al.[18], e di Shima et al.[23]

I risultati ottenuti, relativi a condizioni di crisi per raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio, sembrano essere ben espressi dalla relazione:

$$\vartheta_{pl} = \gamma \varepsilon_u^{\alpha} \left(\frac{f_u}{f_y} - 1 \right)^{\beta} \tag{6.2}$$

essendo i coefficienti α, β e γ legati al rapporto di snellezza, alla distanza tra le lesioni, alla posizione dell'asse neutro a rottura e alle caratteristiche di aderenza.

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati sono stati assunti dagli autori i valori:

$\gamma = 1.3$ $\alpha = 0.73$ $\beta = 0.92$

che sembrano piuttosto stabili al variare dei parametri da cui dipendono. In definitiva, essendo la rotazione plastica funzione delle sole caratteristiche degli acciai, in (Cosenza et al.[41]) sono definiti equivalenti acciai, che seppur con differente allungamento ultimo e rapporti di incrudimento, forniscono lo stesso valore della capacità rotazionale. Nel caso di acciai lavorati a caldo con un ampio tratto piatto prima del ramo incrudente, è proposta una correzione alla formulazione basata su considerazioni energetiche.

L'elemento trave soggetto a momento variabile linearmente è lo schema più analizzato soprattutto in campo sperimentale ed è possibile trovare diversi riferimenti, già citati nel Cap. 2, al fine di verificare la validità del modello presentato. Eibl et al.[40] eseguirono una serie di prove al fine di valutare l'influenza della proprietà degli acciai sul comportamento di elementi in cemento armato. Lo schema statico cui si riferirono è riportato in Fig.6.23 insieme alle dimensioni della sezione (80x18) e alla luce pari a 200 cm.

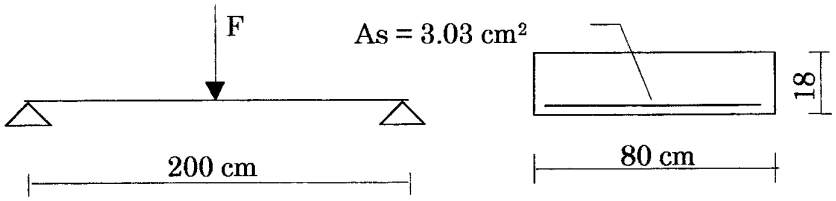


Fig.6.23 – Schema geometrico

Le percentuali di armatura longitudinale erano costanti pari allo 0.24% per ogni campione, e fissa era anche la resistenza a compressione del calcestruzzo. Le caratteristiche degli acciai per alcuni campioni esaminati sono riportati nella successiva Tab.6. 1.

La rotazione plastica era intesa come differenza tra la rotazione ultima, valutata in corrispondenza del 95% del massimo momento sul ramo decrescente del legame M-θ, e quella di snervamento.

Una grande difficoltà nasceva nello stimare il momento di snervamento in corrispondenza del quale leggere il valore di rotazione. Per superare il problema nella sperimentazione il momento di snervamento fu dedotto moltiplicando il momento ultimo misurato per il rapporto σ^u_s/σ^y_s e il rapporto tra il braccio della coppia interna in corrispondenza dello snervamento e del massimo momento ricavati dall'analisi numerica eseguita dagli autori.

Nella tabella sono riportate le rotazioni plastiche sperimentali, quelle calcolate dagli autori impiegando il metodo delle strisce e per confronto la stessa rotazione calcolata con la formula (6.2) e con la procedura in oggetto.

Tab.6. 1 – Confronti con valori sperimentali (Eibl et al.[40])

	RPL1	RPL2	RPL4	RPL5	RPL6
σ^u_c[N/mm^2]	28.1	25.5	28.1	26.4	26.4
σ^u_s/σ^y_s	1.041	1.183	1.075	1.066	1.15
ε^u_s [%]	2.4	10.7	2.6	4.7	4.6
θ_{pl} test [mrad]	9.2	36.1	25.8	13.4	14.9
θ_{pl} a) [mrad]	6.1	48.3	15.6	12.8	22.5
θ_{pl} b) [mrad]	4.5	53.3	8.3	11.4	24
θ_{pl} c) [mrad]	5.2	34.4	7.3	7.2	14.9

a) Modello numerico (Eibl et al.[40])

b) Modello numerico (Cosenza, Greco et al.[41])

c) Modello proposto

I confronti mostrano un buon accordo tra i risultati sperimentali e quelli numerici. Il caso del provino RPL5, per cui vi è discordanza di valori non è molto significativo in quanto, pur essendo il campione identico al tipo RPL4, fornisce rotazioni plastiche maggiori del 65% rispetto a quest'ultimo.

Calvi et al.[39] eseguirono una campagna sperimentale su 36 campioni con schema analogo a quello riportato in Fig.6.23. Le sezioni presentavano dimensioni di 44cm x16 cm e la luce era pari a 200 cm. La tensione caratteristica nel calcestruzzo era fissata e pari a 38 N/mm^2, mentre erano variabili le tensioni e deformazioni ultime e di snervamento negli acciai, come riportato nella seguente Tab.6.2.

Tab.6.2 – Confronti con valori sperimentali (Calvi et al.[39])

	S01	S02	S04	S05	S07
σ^u_c [N/mm^2]	38	38	38	38	38
σ^u_s/σ^y_s	1.10	1.12	1.06	1.21	1.09
ε^u_s [%]	3.4	7.9	2.3	5.6	2.9
θ_{pl} test (l=250mm) [mrad]	17.4	82.8	7.3	28.3	18.4
θ_{pl} (l=250mm)[a)] [mrad]	16.8	39.4	4.4	18.7	12.7
θ_{pl} test (l=450mm) [mrad]	20.9	85.7	8.9	36.8	22.6
θ_{pl} (l=450mm) [a)] [mrad]	18.5	42.8	4.8	28.3	14.1
θ_{pl} [b)] [mrad]	13.2	29	6.22	37.7	10.7
θ_{pl} [c)] [mrad]	22	52.9	5.4	29.7	11.5

a) Modello numerico (Calvi et al.[39])

b) Modello numerico (Cosenza, Greco et al.[41])

c) Modello proposto

Le rotazioni plastiche furono valutate secondo una doppia base di lettura pari a 25 e 45 cm. Il momento di snervamento fu valutato analogamente a quanto sopra descritto.

Anche in questo caso si riscontra un buon accordo tra i diversi risultati, fatta esclusione per il campione S02 per il quale si verifica un comportamento sperimentale anomalo, con valori molto elevati delle rotazioni plastiche rispetto alle aspettative sia numeriche che teoriche.

Le sperimentazione eseguite da Bigaj et al.[37] su elementi trave, comprendevano sezioni di dimensioni variabili, in quanto uno degli obiettivi dello studio era la valutazione dell'influenza degli effetti di scala sulla capacità rotazionale.

Tab.6.3 – Confronti con valori sperimentali (Bigaj et al.[37])

	B.0.1.4	B.0.2.4	B.0.3.4	B.1.1.4	B.1.2.4	B.1.3.4
L[cm]	100	200	500	100	200	520
b [cm]	5	10	25	5	10	25
H [cm]	12	21	49	12	21	49
As (%)	0.28	0.28	0.28	1.12	1.12	1.12
σ^u_c [N/mm^2]	25.4	27.5	26.8	26.5	28.2	25.8
σ^u_s/σ^y_s	1.15	1.14	1.13	1.14	1.15	1.18
ε^u_s [%]	3.7	6.2	6.4	6.2	6.9	7.7
θ_{pl} (test) [mrad]	17	62.0	28.5	38.0	11.0	9.5
θ_{pl} a) [mrad]	10.5	20.7	24.7	43.5	8.3	10.2
θ_{pl} b) [mrad]	20.4	28.0	26.7	28.0	32.2	41.3
θ_{pl} c) [mrad]	13.4	18.0	17.0	40	10.1	10.4

a) Modello numerico (Bigaj et al.[37])

b) Modello numerico (Cosenza, Greco te al.[41])

c) Modello proposto

Furono usate travi di luce variabile e percentuali di armatura pari allo 0.28% e 1.12%, con differenti caratteristiche degli acciai utilizzati.

I risultati sperimentali e analitici degli autori in termini di rotazione plastica, i valori di tale parametro espresso con la formulazioni di Greco et al.[41] e quelle ricavate con il modello proposto sono riportate nella Tab.6.3.

Fatta esclusione per il caso B.0.2.4 che presenta valore sperimentale della rotazione plastica molto elevato rispetto a tutte le formulazioni teoriche, i confronti possono ritenersi più che soddisfacenti.

In definitiva sulla base del buon accordo con i risultati sperimentali ed analitici si ritiene che possa essere confermata la validità della modellazione proposta.

4. Elemento pilastro: influenza dello sforzo normale

Lo schema cui ci si riferisce è una semplice mensola a sezione rettangolare 30x60, di altezza pari a 3.0 m, caricata da sforzo assiale costante e da una forza orizzontale in sommità crescente (Fig.6.1).

Il calcestruzzo è modellato con un legame di tipo parabolo-rettangolo con valori limite riportati in Tab.6.2 e tale scelta è motivata dalla presenza in tali elementi di una adeguata staffatura necessaria a garantire una buona duttilità, soprattutto se questi sono parte di strutture più complesse di cui possono compromettere, per la presenza di sforzo normale, le buone prestazioni post-elastiche.

Analogamente al caso della trave le caratteristiche ultime degli acciai sono fissate, mentre sono fatti variare i rapporti di incrudimento, le percentuali di armatura a trazione e compressione ed i livelli di sforzo normale, espresso ancora come percentuale di quello ultimo.

I principali risultati ottenuti sono riassunti sotto forma di diagrammi in cui sulle ascisse è riportata la percentuale di armatura e sulle ordinate la rotazione plastica al variare di σ^s_u/σ^s_y. Ciascuna coppia di figure si riferisce ad uno dei tre sforzi normali considerati e la prima colonna è rappresentativa di elementi con percentuale di armatura in compressione pari al 50% di quella in trazione, mentre la seconda è relativa alla condizione di armatura perfettamente simmetrica.

In tutti i casi legati alla presenza di minore entità di acciaio in compressione gli andamenti sono praticamente costanti.

In corrispondenza di ridottissimi valori di sforzo normale ($N=0.05N_u$) si individua ancora una zona in cui la crisi dell'elemento è dovuta la raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio, in corrispondenza di bassissimi valori della percentuale di armatura. L'incremento di armatura in compressione porta ad un miglioramento delle caratteristiche di duttilità, e mantiene inalterate le differenze di comportamento, al variare dei rapporti di incrudimento. In entrambi i casi si verifica, infatti, una riduzione di rotazione plastica superiore ad 1/5 passando da $\sigma^u_s/\sigma^y_s = 1.20$ a $\sigma^u_s/\sigma^y_s = 1.05$.

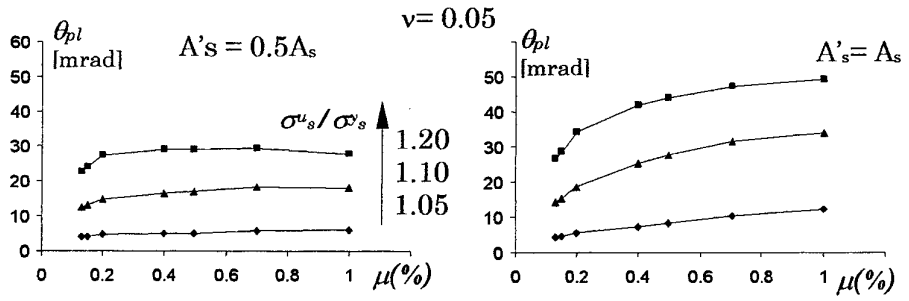


Fig.6.24 – Percentuale di armatura - rotazione plastica

All'aumentare dello sforzo normale si ha una riduzione di duttilità maggiormente sentita per elementi armati con acciai con maggior rapporto σ^s_u/σ^s_y,, per i motivi ampiamente discussi nel Cap. 4, anche se tale infragilimento è in qualche modo evitato dall'aggiunta di armatura in compressione che svolge il duplice compito di favorire una maggiore diffusione della plasticizzazione e di incrementare la deformazione nell'acciaio in corrispondenza della deformazione ultima nel calcestruzzo.

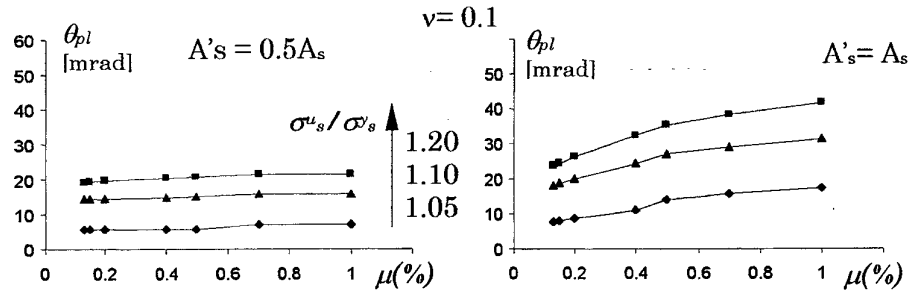


Fig.6.25 – Percentuale di armatura - rotazione plastica

Se lo sforzo normale è portato appena a 0.2 N_u la rottura del calcestruzzo si verifica, soprattutto per il minor valore dell'armatura in compressione, con scarsi valori di plasticizzazione nell'acciaio, e quindi diventano meno importanti le differenze di rapporti di incrudimento.

Le caratteristiche di duttilità migliorano notevolmente aggiungendo ulteriore armatura in compressione.

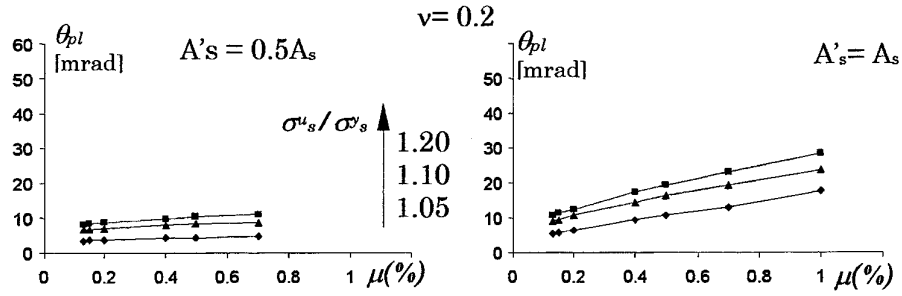


Fig.6 26 – Percentuale di armatura - rotazione plastica

Nelle figure seguenti è illustrato il parametro θ_u-θ_y in funzione della percentuale di armatura in modo del tutto analogo a quanto finora riportato in termini di θ_{pl}.

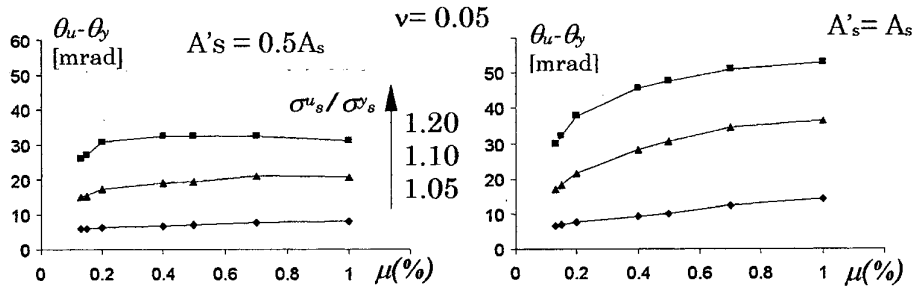


Fig.6 27 – Percentuale di armatura - rotazione θ_u-θ_y

Ancora una volta sono confermati gli stessi andamenti, ma con valori leggermente superiori.

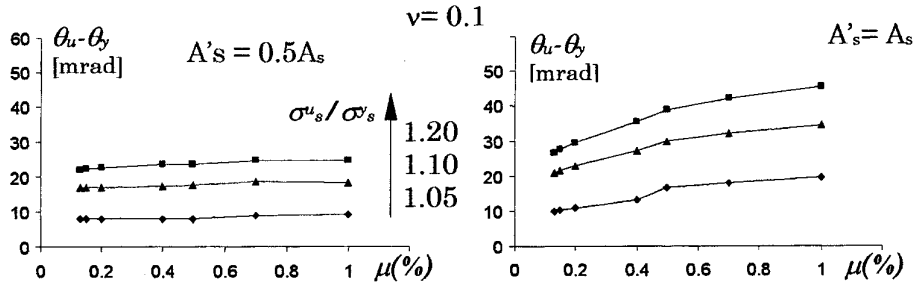


Fig.6.28 – Percentuale di armatura - rotazione θ_u-θ_y

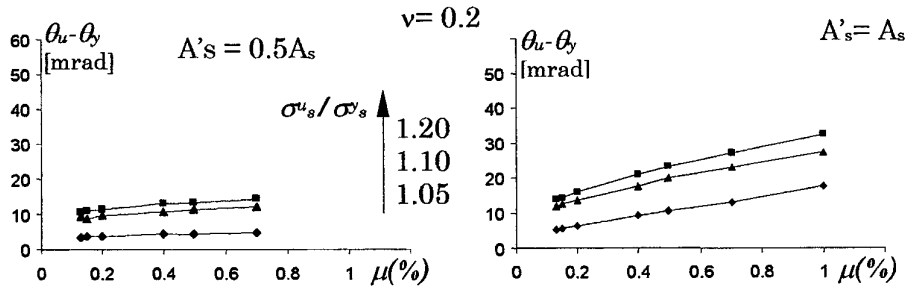


Fig.6.29 – Percentuale di armatura - rotazione θ_u-θ_y

L'influenza della variazione di sforzo normale è evidenziata nelle Fig.6.30 e Fig.6.31, relative ai due rapporti di incrudimento limite, in cui sono diagrammate, per i due valori di armatura in compressione, le rotazioni plastiche in funzione della percentuale di armatura per i livelli di sollecitazione assiale considerati.

Bassi rapporti di incrudimento accompagnati a minori percentuali di armatura in compressione giocano un ruolo fondamentale nel definire la duttilità dell'elemento, che, quindi, è poco influenzato dell'entità dello sforzo normale cui è soggetto.

Se si incrementa l'armatura in compressione possono notarsi differenze di comportamento legate agli effetti positivi che provoca lo sforzo normale sull'ampiezza della zona plasticizzata e negativi sull'entità delle deformazioni plastiche. Come già discusso nel Cap.5 per modestissimi valori dello sforzo normale sembra prevalere il fenomeno della diffusione e quindi si può riscontrare un aumento di duttilità, mentre già per N=0.2 N_u sono decisamente prevalenti le riduzioni di deformazione plastica.

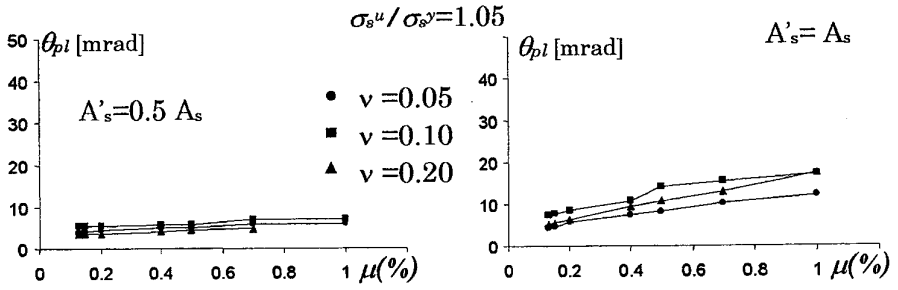


Fig.6.30 – Percentuale di armatura - rotazione θ_u-θ_y

Per elevati valori del rapporto di incrudimento, essendo l'ampiezza della zona plasticizzata non molto limitata in virtù delle caratteristiche di duttilità dell'acciaio, lo sforzo normale interviene sempre negativamente, e in modo più sensibile per basse quantità di armatura in compressione.

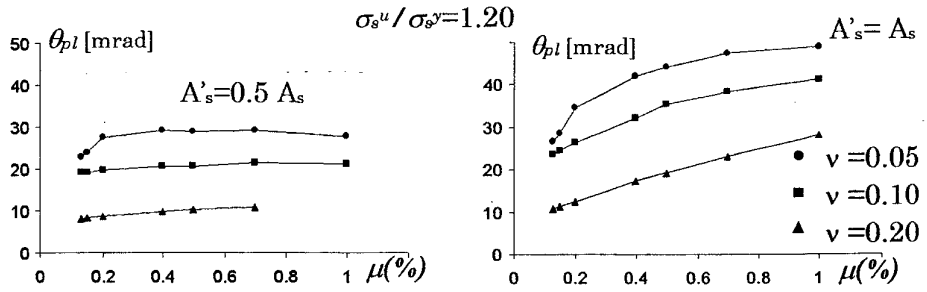


Fig.6.31 – Percentuale di armatura - rotazione θ_u-θ_y

A conclusione di quanto detto nella Fig.6.32 sono riportati gli andamenti delle rotazioni plastiche in funzione del rapporto di incrudimento, al variare dello sforzo normale.

Appare confermato che aumenti di σ^u_s/σ^y_s, portano come conseguenza una maggiore duttilità, essendo le curve sempre crescenti, e si può notare che tali differenze sono molto più sentite per bassi livelli di sforzo normale e per forti percentuali di armatura in compressione.

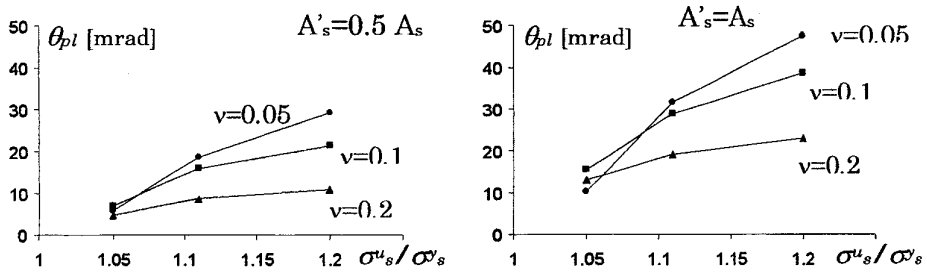


Fig.6.32 – Rapporto di incrudimento - rotazione plastica

5. Strutture intelaiate

A conclusione di questo studio è proposta una breve analisi del comportamento post-elastico di semplici strutture iperstatiche, al fine di evidenziare, in schemi classici dell'ingegneria civile, l'influenza della caratteristiche ultime degli acciai utilizzati.

Sono stati analizzati due tipi di telai in c.a. di assegnate caratteristiche geometriche, con sollecitati da carichi verticali fissi, e forze orizzontali crescenti fino alla crisi, intesa come raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio o nel calcestruzzo. La risposta strutturale è rappresentata da diagrammi forze-spostamenti.

Gli esempi illustrati sono stati elaborati mediante una analisi matriciale non lineare. La soluzione è stata perseguita per via iterativa non essendo noto a priori, per tali strutture iperstatiche, il diagramma del momento per effetto della ridistribuzione di sollecitazione che si verifica in corrispondenza della fessurazione e quindi dello snervamento. Assegnato il legame momento-curvatura media, definito dalla trilatera illustrata nel Par.1, ciascun valore del carico è stato raggiunto attraverso successivi incrementi in corrispondenza dei quali, in funzione dell'entità delle sollecitazioni è verificata o variata la matrice di rigidezza. Il primo esempio si riferisce ad un semplice portale illustrato in Fig.6.34, armato con acciai di uguali caratteristiche ultime, ma differenti rapporti di incrudimento, come riportato nella Tab.6.4.

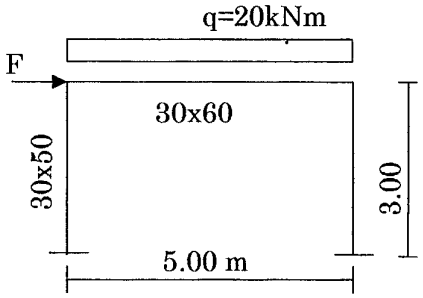


Fig.6.33 – Schema del telaio (P) analizzato

Per tener conto dell'influenza della percentuale di armatura, sono stati considerati, per ciascuno schema due valori di tale parametro corrispondenti circa allo 0.3% ed allo 0.6%. Per semplicità di calcolo sono state poste considerate le stesse aree di acciaio sia nelle travi che nei pilastri.

Ciascun telaio è contraddistinto da una sigla i cui primi due termini si riferiscono alla percentuale di armatura (P1=9 cm^2; P2 = 5 cm^2) gli ultimi due indicano il tipo di acciaio considerato ("05" è riferito ad un rapporto σ^s_u/σ^s_y = 1.05 e "20" a σ^s_u/σ^s_y = 1.20).

Tab.6.4 – Telai analizzati

Telaio	P105	P120	P205	P220
As [cm^2]	9	9	5	5
σ^u_s/σ^y_s	1.05	1.20	1.05	1.20

I risultati ottenuti sono riportate nelle Fig.6.34, Fig.6.35.

Adottando i due differenti tipi di acciaio le condizioni di rottura si raggiungono per livelli di forza orizzontale praticamente identici, ma le differenze di duttilità risultano notevoli.

I telai armati con barre più duttili presentano prima della crisi una plasticizzazione maggiormente diffusa e la rottura si verifica al piede del pilastro.

Nel caso di armatura caratterizzata da rapporto di incrudimento più basso, la rottura si verifica immediatamente dopo la plasticizzazione in corrispondenza del nodo tra trave e pilastro, prima che altri elementi possano plasticizzarsi.

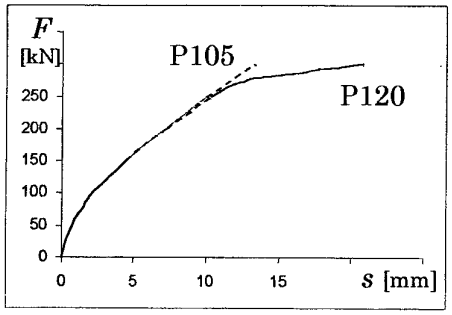


Fig.6.34 – Telai P105, P120,
Legame forza – spostamento

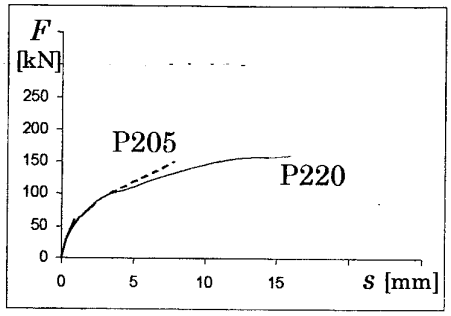


Fig.6.35 – Telai P205, P220,
Legame forza – spostamento

Lo stesso portale di Fig.6.33 è stato, quindi, armato con acciai di tipo Feb44 e Tempcore le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella.

Tab.6.5 – Caratteristiche degli acciai utilizzati

Acciaio	σ^s_y [N/mm²]	σ^s_u [N/mm²]	ε^s_u [%]	E_y [N/mm²]
Feb 44k	430	540	0.120	933
Tempcore	600	655	0.075	762

I risultati ottenuti, relativi ad armatura in compressione pari a quella in trazione uguale a 5 cm², per tutti gli elementi (P2), sono riportati nella Fig.6.36..

I notevoli valori della tensione di rottura e di snervamento che caratterizzano gli acciai Tempcore rispetto agli Feb44, in questo caso conducono ad incrementi di resistenza ultima nella struttura, ma il basso rapporto di incrudimento ed il minore allungamento ultimo comporta una apprezzabile riduzione di duttilità.

In realtà, nella generalità dei casi per effetto di improvvise localizzazioni della deformazione in prossimità delle lesioni potrebbe verificarsi la crisi della struttura in corrispondenza di un carico anche minore di quello legato alla rottura di analoghe strutture armate con barre caratterizzati da minori resistenze, ma maggiore duttilità.

Tale circostanza non si è verificata negli esempi proposti, ma si ritiene siano necessarie ulteriori indagini al fine di evidenziare l'influenza delle caratteristiche degli acciai sulla resistenza strutturale.

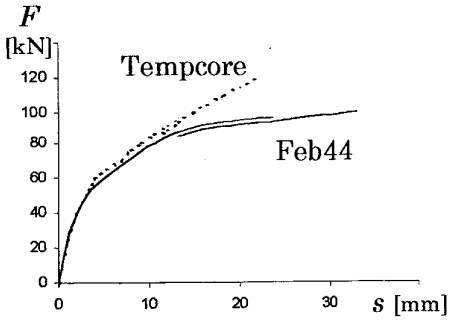


Fig.6.36 – Telaio (P2),
Legame forza – spostamento

Si è infine considerato il caso di un telaio a due piani, del tipo rappresentato in Fig.6 37, armato con acciai Tempcore e Feb con le stesse caratteristiche riportate in Tab.6.5.

I risultati ottenuti, illustrati in confermano la ridotta plasticità dello schema armato con acciai meno duttili.

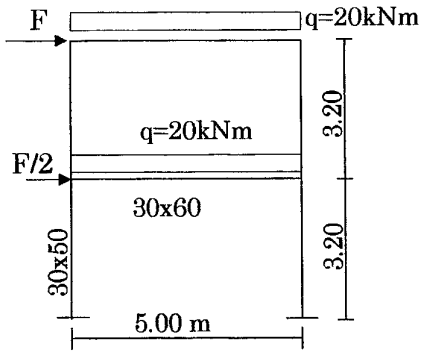


Fig.6 37 – Schema di telaio (T) analizzato

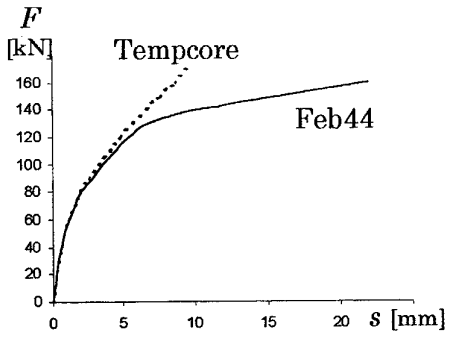


Fig.6.38 – Telaio T
Legame forza – spostamento

6. Osservazioni conclusive

L'analisi svolta e le indagini numeriche sviluppate hanno evidenziato e confermato i diversi aspetti che caratterizzano il comportamento in fase ultima di elementi strutturali in c.a. in relazione alle caratteristiche di incrudimento e di allungamento a rottura dell'acciaio di armatura.

Al crescere del processo di deformazione imposto ad un elemento trave soggetto ad estensione, flessione o pressoflessione, la distribuzione di tensioni e deformazioni nel calcestruzzo e nell'acciaio si modifica sostanzialmente nella fase successiva alla fessurazione.

L'esame dell'elemento in presenza di lesioni stabilizzate evidenzia in una prima fase il ben noto fenomeno di concentrazione della tensione nell'acciaio all'atto della fessurazione. Al crescere della deformazione imposta, in corrispondenza del raggiungimento della condizione di snersnervamento nelle barre metalliche il comportamento dell'elemento risulta influenzato in maniera determinante dalla variazione di rigidezza dell'acciaio, individuata dal rapporto σ^u_s/σ^y_s.

Il modello proposto ha evidenziato che all'atto dello snervamento, in corrispondenza della lesione si verifica un incremento istantaneo di deformazione nell'armatura nella zona fessurata, la cui entità risulta inversamente proporzionale al modulo di incrudimento E_y. Nel caso limite di legame costitutivo dell'acciaio elastico perfettamente plastico, in seguito al raggiungimento dello snervamento si attinge istantaneamente la deformazione ultima in corrispondenza della lesione, con le barre metalliche nell'elemento ancora in campo elastico. Si può verificare, quindi, un fenomeno di rottura fragile per effetto di concentrazioni locali, che in strutture iperstatiche può avere ripercussioni anche sulle resistenze globali.

Le caratteristiche degli acciai influenzano notevolmente il comportamento dell'elemento anche per deformazioni superiori allo snervamento, in quanto definiscono, nelle fasi successive, l'ampiezza della zona interessata dalla diffusione di deformazioni plastiche.

Sono inoltre stati evidenziati gli effetti della presenza ed entità di armatura in compressione, così come quelli indotti dallo sforzo normale sulla duttilità strutturale.

La metodologia proposta ha consentito lo sviluppo di una estesa indagine numerica dalla quale si evidenzia, in definitiva, con riferimento al comportamento di elementi inflessi, che la duttilità può ridursi dino a valori superiori ad 1/5 al diminuire del rapporto di incrudimento da 1.20 a 1.05.

Le espressioni determinate per i valori ultimi della curvatura media consentono, comunque, di valutare volta per volta in modo approssimato, ma immediato, l'influenza dei parametri coinvolti.

L'analisi, svolta in modo esteso con riferimento ad elementi isostatici, è infine stata proposta per alcune applicazioni al caso di strutture intelaiate, risolte per via numerica, sulla base dei legami tra momento e curvatura media precedentemente analizzati.

Lo studio di tali strutture iperstatiche richiede ulteriori approfondimenti diretti alla valutazione dell'influenza dei parametri analizzati sia sulla resistenza che sulla duttilità globale.