

## Capitolo 3

### DUTTILITA' DELL'ELEMENTO TESO

#### 1. Modellazione dell'elemento soggetto a trazione

La valutazione delle caratteristiche di resistenza e di duttilità di elementi in cemento armato è strettamente connessa allo studio del fenomeno fessurativo e delle caratteristiche anelastiche dei materiali, soprattutto dell'acciaio. L'analisi in oggetto, che si propone come primo obiettivo la definizione di un legame tra sollecitazioni e deformazioni medie, è effettuata con riferimento ad un elemento teso, distinguendo le successive fasi dalla fessurazione fino alla crisi, al crescere della deformazione imposta alle estremità.

Il comportamento strutturale è caratterizzato da un primo stadio elastico in cui è lecito supporre una perfetta aderenza tra i materiali, cui segue, al raggiungimento della deformazione limite nel calcestruzzo, la formazione e successiva diffusione di lesioni.

L'elemento teso è modellato come insieme di blocchi separati da successive lesioni. Anche se tali conci interagiscono nelle zone di contatto tra il conglomerato e l'armatura conducendo ad un problema iperstatico la cui risoluzione richiederebbe una modellazione tridimensionale, le sperimentazioni su elementi isostatici hanno mostrato che la formazione di una lesione non modifica molto lo stato tensionale e deformativo dei blocchi (Fantilli et al.<sup>59</sup>, Giuriani<sup>13</sup>).

Si suppone, dunque, che ogni singolo concio sia indipendente e di lunghezza pari alla distanza tra le lesioni, come riportato in Fig.3.2.

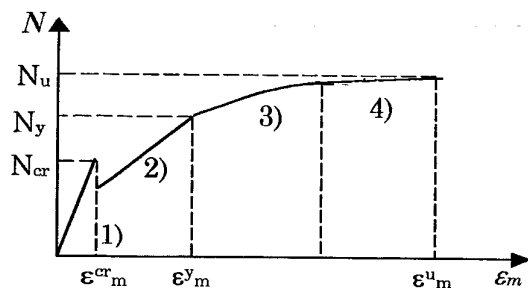


Fig. 3.1 – Comportamento di un elemento teso in c.a.

All'atto della fessurazione si verifica uno scorrimento tra acciaio e calcestruzzo e una redistribuzione di tensioni e deformazioni (Fase 2), che non risultando più costanti all'interno del concio, comportano che l'analisi sia eseguita facendo riferimento ai loro valori medi. Al crescere della deformazione imposta si raggiunge lo snervamento nella barra d'armatura nella sezione lesionata, quindi la plasticizzazione si diffonde all'interno dell'elemento (Fase 3) fino al raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio, che può verificarsi in condizioni di acciaio parzialmente snervato all'interno del concio, o in corrispondenza di deformazioni maggiori di quella di snervamento in ogni sezione (Fase 4).

Definito il legame tra tensioni e deformazioni medie è possibile analizzare, seppure in maniera semplificata, l'influenza dei principali parametri che caratterizzano il comportamento di tiranti in c.a., soggetti a deformazioni imposte alle estremità.

Viste le incertezze su tutti i fattori in gioco, si ritiene indispensabile, per una formulazione sufficientemente approssimata, ma che consenta immediate valutazioni, utilizzare relazioni costitutive dei materiali piuttosto semplici.

L'acciaio è schematizzato con una bilatera definita dai parametri tensione di snervamento  $\sigma_s^y$ , dal modulo di elasticità elastico  $E_s$ , dal rapporto di incrudimento  $\sigma_s^u / \sigma_s^y$ , e dall'allungamento ultimo  $\varepsilon_s^u$ ; il calcestruzzo teso è caratterizzato da un comportamento di tipo fragile con un ramo lineare delimitato da una soglia tensionale  $\sigma_{ct}^u$ , mentre per

l'aderenza si è fatto riferimento ad una relazione costitutiva di tipo rigido - plastico.

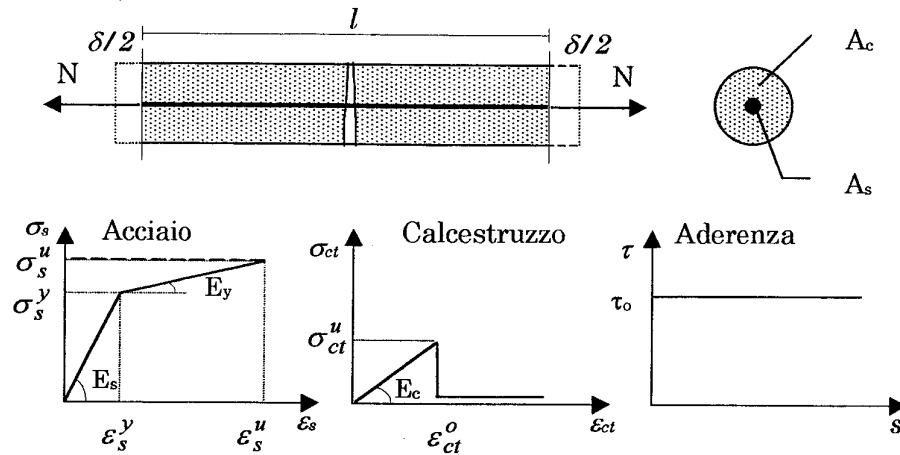


Fig.3.2 - Modello e relazioni costitutive

### 1.1. Distribuzione di tensioni e deformazioni nell'elemento

Si analizza il comportamento dell'elemento rappresentato in Fig.3.2, soggetto a deformazione  $\delta/l$  imposta alle estremità. L'origine dell'asse  $z$  orizzontale è posta nella lesione e in virtù della simmetria del modello si studierà solo metà concio di lunghezza pari a  $l/2$ . Il comportamento elastico lineare è definito completamente dalle condizioni di equilibrio alla traslazione e dalla planeità delle sezioni che comporta l'uguaglianza delle deformazioni tra acciaio e calcestruzzo. Raggiunta la deformazione massima nel calcestruzzo si forma la prima lesione, legata ad uno sforzo di trazione  $N_{cr}$  pari a:

$$N_{cr} = \varepsilon_{ct}^o (E_c A_c + E_s A_s)$$

ed alle tensioni nei materiali:

$$\sigma_{c,cr} = \sigma_{ct}^u \qquad \sigma_{s,cr} = (N_{cr} - \sigma_{ct}^u A_c) / A_s .$$

A causa della formazione della fessura, nella zona immediatamente adiacente si annulla la tensione nel calcestruzzo e nasce uno scorrimento tra i due materiali. La tensione di aderenza passa istantaneamente da un valore nullo nella sezione lesionata, al suo massimo valore, che si mantiene costante all'interno del concio (Fig.3.3).

In corrispondenza della fessurazione piccoli incrementi di deformazione modificano la configurazione dell'elemento che è caratterizzato da una minore rigidezza e descritto da un secondo ramo d'equilibrio. In tale fase, la valutazione delle tensioni e deformazioni nel concio in esame può essere condotta, con le ipotesi poste, risolvendo il seguente sistema di condizioni di equilibrio:

a) equilibrio alla traslazione della sezione trasversale:

$$\int_{Ac} \sigma_{cl} dA + \sigma_s A_s = N; \quad \sigma_{cl} A_c + \sigma_s A_s = N \quad (3.1)$$

b) equilibrio alla traslazione della barra di armatura:

$$\frac{d\sigma_s}{dz} = -\frac{4\tau}{\phi} \quad \sigma_s(z) = -\frac{4\tau}{\phi} z + k \quad (3.2)$$

La seconda equazione è risolvibile aggiungendo la condizione al contorno nella sezione lesionata in cui si è supposto che la tensione nel calcestruzzo abbia valore nullo.

Per  $z = 0$ :  $\sigma_s(0) = \frac{N}{A_s}$  e quindi  $k = \frac{N}{A_s}$  ed in definitiva:

$$\sigma_s(z) = -\frac{4\tau}{\phi} z + \frac{N}{A_s} \quad (3.3)$$

La tensione nell'acciaio subisce, dunque, una variazione di distribuzione in corrispondenza della fessurazione, passando da un andamento costante ad uno lineare con valore massimo in corrispondenza della lesione. In maniera analoga la tensione nel calcestruzzo assume un andamento ancora lineare caratterizzato da valore nullo nella sezione lesionata, indicata nel seguito con il pedice (i) e massimo in quella di estremità, definita con il pedice (o).

Dalla condizione di equilibrio alla traslazione (3.1) e dalla (3.3), si ottiene, infatti:

$$\sigma_c = \frac{A_s}{A_c} \frac{4\tau}{\phi} z \quad (3.4)$$

Il legame tra le caratteristiche di sollecitazione nell'acciaio nella fase di incipiente fessurazione ed in quella fessurata, è ricavato nell'ipotesi di parità di deformazione media in corrispondenza della formazione della prima lesione. In tal caso la deformazione costante  $\varepsilon = \varepsilon_{ct}^o$ , presente nell'acciaio un istante prima della fessurazione, deve essere pari alla deformazione media nella barra, quindi:

$$\varepsilon_{ct}^o = \frac{\sigma_{s,cr}}{E_s} = \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{s,1} + \varepsilon_{s,o}}{2} = \frac{\sigma_{s,1} + \sigma_{s,o}}{2E_s} = \frac{\sigma_{s,1} - \frac{\tau l}{\phi}}{E_s}$$

$$\bar{\sigma}_{s,1} = \sigma_{s,cr} + \frac{\tau l}{\phi} \quad \bar{\sigma}_{s,o} = \sigma_{s,cr} - \frac{\tau l}{\phi} \quad (3.5)$$

essendo  $\sigma_{s,cr}$  la tensione nell'acciaio in corrispondenza della tensione limite nel calcestruzzo valutata in condizioni di incipiente fessurazione, ossia con entrambi i materiali reagenti. La tensione nell'acciaio nella condizione fessurata, assume il valore  $\sigma_{s,cr}$  ad una distanza dalla lesione pari  $l/4$ .

La tensione massima nel calcestruzzo, nella sezione di estremità è espressa attraverso la (3.4) dalla seguente:

$$\bar{\sigma}_{ct,o} = \frac{2\tau}{\phi} \frac{A_s}{A_c}$$

Incrementi ulteriori di deformazione rendono possibile la formazione di successive lesioni e la loro stabilizzazione.

In tale stadio la tensione di aderenza e la distanza tra le fessure risultano inversamente proporzionali ed il loro prodotto è legato linearmente alla tensione di trazione massima nel calcestruzzo. Dalla condizione di equilibrio alla traslazione nella sezione di estremità si ricavano, infatti, le relazioni:

$$\bar{\sigma}_{ct,o} A_c + \sigma_{s,o} A_s = N; \quad \sigma_{s,o} = \sigma_{s,1} - \frac{4\tau l}{\phi} \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}_{ct,o} = \frac{2\pi l A_s}{\phi A_c} \quad \frac{2\pi l}{\phi} = \frac{\bar{\sigma}_{ct,o} A_c}{A_s} \quad (3.7)$$

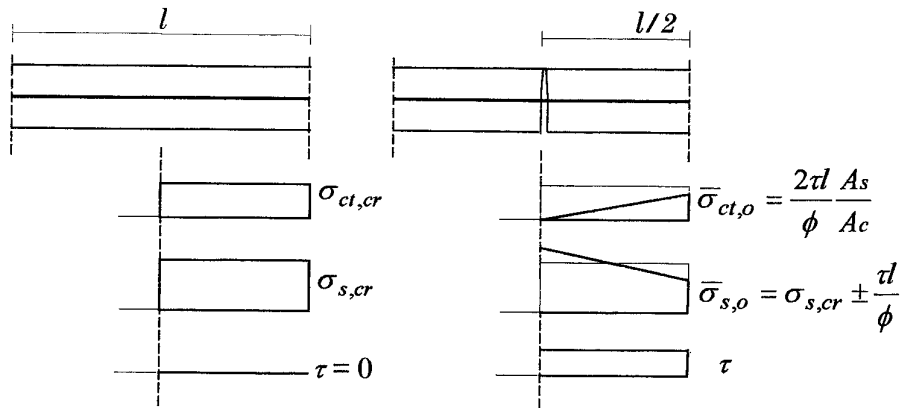


Fig.3.3 – Distribuzione di tensione prima e dopo la fessurazione

Le relazioni finora trattate si riferiscono ad un caso del tutto generale, in cui non è fissata alcuna limitazione alla tensione massima nel calcestruzzo all'estremità. Se tale caratteristica è posta pari a quella limite, ossia  $\bar{\sigma}_{ct,o} = \sigma_{ct}^u$  risulta noto il prodotto tra tensione di aderenza e distanza tra le lesioni ed è così possibile valutare gli andamenti delle tensioni e deformazioni nell'acciaio lungo il concio, nelle fasi seguenti la fessurazione. Appare opportuno anticipare che in tutte le successive formulazioni i termini di aderenza e di distanza tra le lesioni appaiono sempre accoppiati sotto forma di prodotto, e quindi noti in funzione della tensione limite del calcestruzzo, per cui con la presente modellazione non risulta necessario assegnare la tensione di aderenza per la definizione di un legame forza – deformazione media. Il criterio adottato, che garantisce la formazione di fessure solo per raggiungimento di limiti tensionali, equivale ad ipotizzare una distanza massima tra le lesioni, in quanto nella sezione di estremità è imposto un valore della tensione

nel calcestruzzo pari a quello di picco e tale è mantenuto nelle fasi di comportamento successive.

In effetti tale principio rappresenta una condizione necessaria, ma non sufficiente per la fessurazione. Affinché si formi una lesione, infatti, la tensione nel calcestruzzo nella zona lesionata, deve ridursi al valore nullo e, a tal fine, è necessaria una certa quantità di energia. Il criterio energetico, basato sulla valutazione dell'energia di frattura  $G_f$ , consente di individuare una distanza minima tra le lesioni.

L'approccio usuale della meccanica della frattura è basato sul bilancio tra energia rilasciata al raggiungimento della deformazione corrispondente alla tensione di picco nel calcestruzzo e tra energia di frattura (Bazant et al.<sup>20</sup>).

Come già osservato, infatti, raggiunta la deformazione di picco  $\varepsilon_{ct}^o$ , si ottiene una redistribuzione di tensioni e deformazioni nei materiali che causa un rilascio di energia nel calcestruzzo ed un accumulo nell'acciaio, rispetto alla configurazione iniziale. Occorre pertanto valutare la variazione di energia di deformazione nel passaggio dalla condizione non fessurata a quella fessurata, a deformazione impressa costante, ossia nell'ipotesi che  $\varepsilon_m = \varepsilon_{ct}^o$ . L'energia presente nell'elemento all'atto della formazione della lesione può essere espressa semplicemente dalla seguente:

$$\Phi_i = \Phi_{ci} + \Phi_{si}$$

$$\Phi_{ci} = \frac{1}{2} \sigma_{ct}^u \varepsilon_{ct}^o \frac{l}{2} \quad \Phi_{si} = \frac{1}{2} \sigma_{s,cr} \varepsilon_{ct}^o \frac{l}{2}$$

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \sigma_{ct} \varepsilon_{ct} \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \sigma_{s,cr} \varepsilon_{ct} \frac{l}{2} = \frac{l}{4} \varepsilon_{ct}^2 (E_c + E_s)$$

essendo  $\Phi_{ci}$  l'aliquota relativa al calcestruzzo e  $\Phi_{si}$  legata all'acciaio, mentre è necessario definire l'energia immediatamente seguente alla fessurazione. Il rilascio totale di energia di deformazione è quindi calcolato attraverso la seguente differenza :

$$-\Delta\Phi = -(\Delta\Phi)_c - (\Delta\Phi)_s$$

essendo:

$$(\Delta\Phi)_c = \Phi_{cf} - \Phi_{ci} \qquad (\Delta\Phi)_s = \Phi_{sf} - \Phi_{si}$$

e

$\Phi_{cf}, \Phi_{sf}$  = energia di deformazione nel calcestruzzo e nell'acciaio subito dopo la fessurazione

$\Phi_{ci}, \Phi_{si}$  = energia di deformazione nel calcestruzzo e nell'acciaio all'atto della fessurazione

La tensione e deformazione nel calcestruzzo diminuiscono subito dopo la fessurazione rispetto ai valori costanti di picco, in particolare la tensione massima risulta funzione dell'aderenza e della distanza tra le lesioni (3.7). Tale variazione dell'andamento delle sollecitazioni lungo il concio genera un diminuzione di energia, esprimibile in funzione della deformazione limite  $\varepsilon_{ct}^o$ . Dalla definizione stessa di energia di deformazione valutata nel rispetto delle distribuzioni di tensione e deformazione rappresentate in Fig.3.3 si ottiene:

$$\Phi_{cf} = \frac{E_c}{2} \int_V \varepsilon_{ct}^2 dV \qquad \varepsilon_c = \frac{\bar{\sigma}_{ct,o}}{E_c} \frac{2}{l} z$$

risolvendo l'integrale per sostituzione:

$$\Phi_{cf} = \frac{A_c}{E_c} \frac{l}{12} (\bar{\sigma}_{ct,o})^2$$

e quindi:

$$-(\Delta\Phi)_c = \left( \frac{A_c}{E_c} \frac{l}{4} (\sigma_{ct}^u)^2 - \frac{A_c}{E_c} \frac{l}{12} (\bar{\sigma}_{ct,o})^2 \right) \qquad (3.8)$$

Ripetendo lo stesso tipo di ragionamento per l'acciaio e sfruttando le relazioni (3.5) e (3.7) si ottiene:

$$\Phi_{sf} = A_s E_s \frac{l}{4} \left[ (\varepsilon_{ct}^o)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\pi d}{\phi E_s} \right)^2 \right]$$

$$-(\Delta\Phi)_s = \frac{A_s}{E_s} \frac{l}{12} \left( \frac{\pi d}{\phi} \right)^2 \qquad -(\Delta\Phi)_s = \frac{A_s}{E_s} \frac{l}{12} \left( \frac{\bar{\sigma}_{ct,o} A_c}{2 A_s} \right)^2$$



Il rilascio totale di energia è dato dalla somma dei due termini relativi ai due materiali e quindi è esprimibile come segue

$$(-\Delta\Phi) = \frac{1}{4} \frac{A_c}{E_c} \left( \bar{\sigma}_{ct,o} \right)^2 l (1 - kl^2) \quad (3.9)$$

con:

$$k = \frac{1}{3(\sigma_{ct}^u)^2} \left( \frac{\tau}{\phi} \right)^2 \left( \frac{As}{Ac} \right)^2 \left( 4 + \frac{1}{\omega} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{4\omega} \right) l_{\max}^2$$

$$\omega = \frac{A_s E_s}{A_c E_c}$$

ed  $l_{\max} = \frac{\phi}{2\tau} \frac{A_c}{A_s} \sigma_{ct}^u$ , come definito dalla (3.7).

Il valore della distanza tra le lesioni relativa al massimo rilascio di energia, è dato dalla condizione di massimo della funzione energia (3.9), ovvero uguagliando a zero la sua derivata rispetto alla variabile distanza tra le lesioni:

$$\frac{d(-\Delta\Phi)}{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{l} = \left( \frac{4\omega}{4\omega + 1} \right)^{1/2} l_{\max};$$

cui corrisponde un valore massimo di energia espresso dalla seguente:

$$(-\Delta\Phi)_{\max} = \frac{1}{6} \frac{Ac}{Ec} \bar{\sigma}_{ct,o}^2 \bar{l}$$

Affinché si possa effettivamente formare una lesione è necessario che sia soddisfatto il criterio di frattura per la fessurazione, ossia che l'energia rilasciata sia maggiore o al più uguale all'energia di frattura  $G_f$ .

$$(-\Delta\Phi)_{\max} \geq G_f A_c$$

e quindi l'espressione di bilancio energetico consente una valutazione dell'unica incognita distanza tra le lesioni.

$$\frac{1}{6} \frac{Ac}{Ec} \bar{\sigma}_{ct,o}^2 \bar{l} \geq G_f A_c \quad l_{\min} = \frac{6G_f E_c}{\bar{\sigma}_{ct,o}^2}$$

La distanza tra le lesioni è in effetti compresa tra i valori  $l_{\min}$  ed  $l_{\max}$ , e dovrebbe essere valutata caso per caso, con notevole onere computazionale. In questo lavoro si ipotizza che nella sezione di estremità del concio si raggiunga la tensione ultima nel calcestruzzo e, quindi, si fa riferimento alla distanza massima tra le lesioni. Tale assunto, come già accennato e come risulterà evidente nel seguito, porta a notevoli semplificazioni delle equazioni risoltrici e, ai fini di una formulazione del legame forza-deformazione media e con le ipotesi poste, non richiede l'assegnazione della tensione di aderenza.

## 2. Valutazione del legame forza – deformazione media

Sfruttando i legami costitutivi proposti e le condizioni di equilibrio (3.1), (3.2) è possibile tracciare i rami di equilibrio forza – deformazione media per ciascuna fase di comportamento dell'elemento. Nel seguito tali successivi stadi saranno discussi separatamente, per spostamento imposto  $\delta$  crescente.

### I RAMO: COMPORTAMENTO ELASTICO:

Per piccoli spostamenti imposti l'elemento si comporta in modo perfettamente elastico; si suppone che sia rispettata l'ipotesi di planeità delle sezioni, e quindi le deformazioni nell'acciaio e nel calcestruzzo risultano uguali e pari al rapporto tra lo spostamento e la lunghezza dell'elemento:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon_s = \frac{\delta}{l}$$

Tale relazione unitamente alla condizione di equilibrio alla traslazione, fornisce la ben nota:

$$N = k\varepsilon_m \quad k = E_c A_c + E_s A_s \quad (3.10)$$

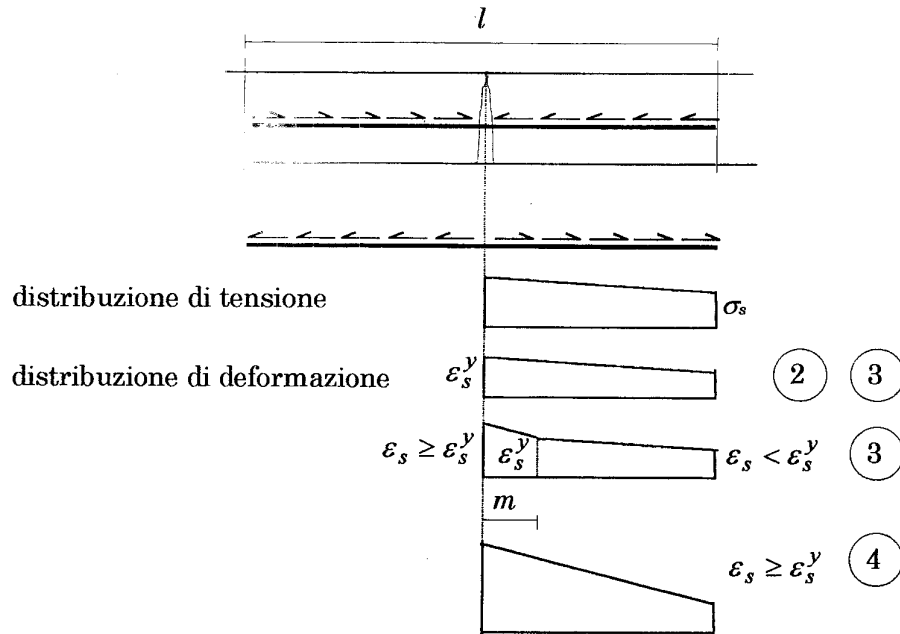


Fig.3.4 – Distribuzione della tensione e deformazione nell'acciaio

II RAMO: CALCESTRUZZO FESSURATO, ACCIAIO ELASTICO

Raggiunta la deformazione relativa alla tensione massima di trazione, posta pari a quella limite, si verifica uno scorrimento tra acciaio e calcestruzzo, le distribuzioni di tensioni lungo l'elemento, come ampiamente discusso, non risultano più costanti, i valori delle deformazioni nei due materiali sono differenti tra loro.

La variazione della deformazione nell'acciaio lungo il concio è lineare e legata all'aderenza attraverso la relazione:

$$\frac{d\epsilon_s}{dz} = -\frac{4\tau}{\phi E_s}$$

Lo spostamento impresso alle estremità rapportato alla lunghezza del concio rappresenta una deformazione media che per le ipotesi fatte è

pari alla media tra le deformazioni nell'acciaio nella sezione fessurata ed in quella d'estremità:

$$\varepsilon_m = \int_0^{l/2} \varepsilon_s dz = \frac{1}{2} (\varepsilon_{s,o} + \varepsilon_{s,1})$$

Dalla condizione di equilibrio alla traslazione nella sezione lesionata e dalle relazioni (3.4) si ottiene l'espressione del secondo ramo di equilibrio:

$$N = k_1 \varepsilon_m + \frac{\tau d}{\phi} A_s \quad k_1 = E_s A_s \quad (3.11)$$

ovvero dalla (3.7):

$$N = k_1 \varepsilon_m + \frac{\sigma_{ct,o}}{2} A_c \quad (3.12)$$

e nell'ipotesi di considerare una distanza massima tra le lesioni:

$$N = k_1 \varepsilon_m + \frac{\sigma_{ct}^u}{2} A_c$$

L'andamento dello sforzo normale in funzione della deformazione media è ancora lineare, con coefficiente angolare minore rispetto al caso elastico della quantità  $E_c A_c$  legata al calcestruzzo, e la presenza di scorrimento fa sì che tale retta non passi più per l'origine.

Dal confronto con la formula relativa al ramo elastico, appare evidente che raggiunta la deformazione di prima fessurazione, per garantire l'equilibrio dell'elemento è indispensabile una riduzione dello sforzo assiale (Fig.3.5, a) pari a:

$$\Delta N = \sigma_{c,o} A_c \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,o}}{2} \right)$$

Se si fosse svolta una analisi per sollecitazione imposta, non potendosi verificare una diminuzione di forza, si sarebbe verificato, in corrispondenza della fessurazione, un incremento di deformazione media a parità di sforzo normale, fino a raggiungere il nuovo ramo di equilibrio. (Fig.3.5, b)

### III RAMO: CALCESTRUZZO FESSURATO, ACCIAIO PARZIALMENTE SNERVATO

Il ramo descritto precedentemente risulta valido fino al raggiungimento, nella sezione lesionata, della deformazione di snervamento. Superato tale valore, l'acciaio entra in campo plastico e, al crescere dello spostamento imposto, si verifica una diffusione della zona snervata all'interno del concio, fino alla rottura della barra in tale condizione o, più raramente in condizione di snervamento in tutte le sezioni. Nel caso in esame l'elemento risulta suddiviso in due parti legate rispettivamente ad un comportamento elastico ed incrudente dell'acciaio.

La deformazione media è pari all'area sottesa al diagramma di deformazione 3) in Fig.3.3, definita dai valori delle  $\varepsilon_s$  nella sezione lesionata, in quella di estremità e quella in cui si verifica la tensione di snervamento dell'acciaio, posta a distanza  $m$  dalla sezione fessurata.

$$\varepsilon_m = \left[ \frac{\varepsilon_{s,1} + \varepsilon_s^y}{2} m + \frac{\varepsilon_s^y + \varepsilon_{s,0}}{2} \left( \frac{l}{2} - m \right) \right] \frac{2}{l} \quad (3.13)$$

$$\frac{m}{l} = (\varepsilon_{s,1} - \varepsilon_s^y) \frac{\phi E_y}{4\tau d} \quad (3.14)$$

Sostituendo nella (3.13) le espressioni delle deformazioni si ricava il legame cercato:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m = & \left( \frac{N}{A_s} \right)^2 \alpha \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{E_s} \right) + \frac{N}{A_s} \left[ \frac{1}{E_s} - 2\alpha \varepsilon_s^y (\beta - 1) \right] + \\ & + (\varepsilon_s^y)^2 \alpha \beta (E_s - E_y) - \frac{\tau d}{\phi E_s} \end{aligned} \quad (3.15)$$

avendo posto:

$$\alpha = \frac{\phi}{4\tau d} \qquad \beta = \frac{E_s}{E_y}$$

L'espressione relativa al III ramo, si presenta non lineare e più complessa delle precedenti. L'analisi della derivata prima della funzione (3.15) può fornire utili indicazioni sull'andamento di tale curva, in parti-

colare in corrispondenza della deformazione di snervamento che segna l'intersezione con il ramo precedente.

Derivando la (3.15) rispetto alla forza  $N$  si ottiene:

$$\frac{d\varepsilon_m}{dN} = \frac{2N}{(A_s)^2} \alpha \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{E_s} \right) + \frac{1}{A_s} \left[ \frac{1}{E_s} - 2\alpha\varepsilon_s^y (\beta - 1) \right] \quad (3.16)$$

e valutando tale funzione in corrispondenza dello sforzo  $N_y$  per cui si ha lo snervamento dell'acciaio nella sezione fessurata si ottiene:

$$\left( \frac{d\varepsilon_m}{dN} \right)_{N_y} = \frac{1}{E_s A_s} \quad \left( \frac{dN}{d\varepsilon_m} \right)_{N_y} = E_s A_s \quad (3.17)$$

Pur non essendo la relazione (3.17) lineare, la tangente in corrispondenza del primo snervamento risulta essere pari a quella del ramo fessurato non snervato, e quindi non si verificano in tale punto discontinuità, né nei valori, né nelle derivate.

#### IV RAMO: CALCESTRUZZO FESSURATO, ACCIAIO COMPLETAMENTE SNERVATO

Nel caso in cui lo snervamento si diffonda a tutto l'elemento prima del raggiungimento della tensione di rottura della barra nella sezione lesionata, il legame costitutivo è rappresentato da un ultimo ramo di equilibrio. La deformazione media è pari alla media dei valori nella sezione fessurata ed in quella di estremità, essendo l'andamento delle deformazioni nuovamente lineare, regolato dal modulo di incrudimento dell'acciaio ((4) in Fig.3.3):

$$\frac{d\varepsilon_s}{dz} = - \frac{4\tau}{\phi E_y}$$

Le condizioni (3.1) e (3.2) di equilibrio forniscono:

$$N = k_4 \varepsilon_m + \gamma A_s$$

$$k_4 = A_s E_y \quad \gamma = E_y \varepsilon_s^y (\beta - 1) + \frac{\tau}{\phi}$$

e la funzione lineare tra sforzo normale e deformazione media si presenta parallela al ramo incrudente del legame sforzo – deformazione del solo acciaio.

A titolo di esempio, il comportamento di un elemento teso è rappresentato in Fig.3.5. Sull'asse delle ascisse è riportato lo sforzo assiale adimensionalizzato rispetto alla forza ultima di trazione nel calcestruzzo, definita come prodotto della tensione limite di tale materiale per la sezione geometrica, e sull'asse delle ordinate è rappresentata la deformazione media.

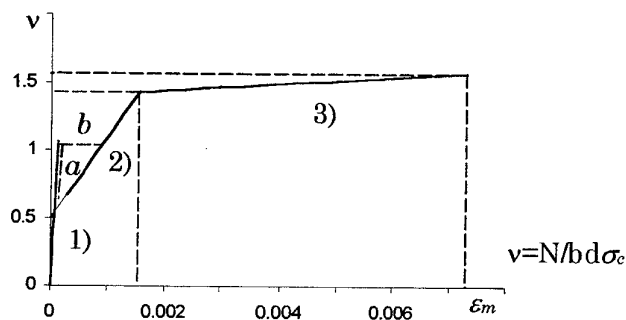


Fig. 3.5 – Legame tra sollecitazione e deformazione media

### 3. Snervamento e localizzazione della deformazione nell'acciaio

Il modello proposto consente di evidenziare il problema della localizzazione della deformazione nell'acciaio in prossimità della lesione, durante la fase di snervamento dell'armatura. Tale fenomeno porta ad un notevole incremento di deformazione nella barra metallica nella zona fessurata, tanto maggiore rispetto a quella media, quanto minore è il modulo di incrudimento.

Esprimendo le deformazioni nelle singole sezioni in funzione di quella media è possibile evidenziare l'influenza delle caratteristiche di incrudimento sul comportamento post-elastico dell'elemento. In corri-

$$\varepsilon_m = \frac{\phi E_s}{4\tau l} \left( \frac{E_s}{E_y} - 1 \right) (\varepsilon_s^y - \varepsilon_{s,o})^2 - \left( \frac{E_s}{E_y} \right) (\varepsilon_s^y - \varepsilon_{s,o}) + \varepsilon_s^y + \frac{\tau l}{\phi E_s}.$$

In condizioni fessurate, con comportamento lineare dell'acciaio, invece, il legame tra deformazione locale nella sezione fessurata e deformazione media si considera  $\varepsilon_{s,o}$ .

Nella Fig.3.6 è diagrammato il legame tra deformazione locale nella sezione lesionata e deformazione media, in condizioni di snervamento dell'acciaio, per alcuni valori limite del rapporto di incrudimento. L'andamento rettilineo tratteggiato, rappresenta lo stadio elastico dell'acciaio, in condizioni di calcestruzzo fessurato. Appare evidente che lo snervamento provoca una notevole localizzazione di deformazione nell'acciaio in corrispondenza della sezione fessurata, tanto più marcata, quanto è minore il rapporto di incrudimento. Gli incrementi di deformazione, rispetto al caso elastico sono circa dieci volte maggiori per acciaio con valori di  $(\sigma_u/\sigma_s)$  pari a 1.2, fino a raggiungere incrementi di circa venti volte per acciai caratterizzati da  $(\sigma_u/\sigma_s)$  pari a 1.05.

Il fenomeno di infragilimento dovuto a bassi rapporti di incrudimento è particolarmente evidente in Fig.3.6. Per  $(\sigma_u/\sigma_s) = 1.05$  incrementi di deformazioni non notevoli nell'acciaio conducono alla crisi dell'elemento per raggiungimento dei limiti di deformazione nell'acciaio. Nell'ipotesi di legame elastico perfettamente plastico, ossia per  $(\sigma_u/\sigma_s)$  tendente all'unità, il ramo  $\varepsilon_{s,l} - \varepsilon_m$  è costante, quindi raggiunto lo snervamento, senza ulteriori incrementi di spostamento applicato, la deformazione nell'acciaio, nella zona fessurata, cresce istantaneamente fino ad attingere la rottura. Tale pericoloso fenomeno può riscontrarsi anche



da un punto di vista analitico, determinando il limite della (3.18) per  $E_y$  tendente a zero, e notando che in tal caso la deformazione media è espressa, per qualsiasi valore di  $\varepsilon_{s,1}$  alla seguente:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_s^y - \frac{d}{\phi}$$

Nella stessa (3.18) ricavando la deformazione locale in funzione di quella media, si può verificare che al diminuire del rapporto di incrudimento fino a valori nulli, la deformazione nella sezione lesionata, in corrispondenza dello snervamento, tende a valori infiniti.

Nella figura Fig.3.7 l'analogo diagramma deformazione locale – deformazione media, è riportato per la sezione di estremità. A parità di deformazione media, le deformazioni risultano inferiori rispetto a quelle legate ad un comportamento elastico dell'acciaio con valori ridotti e quasi indipendenti dal rapporto di incrudimento.

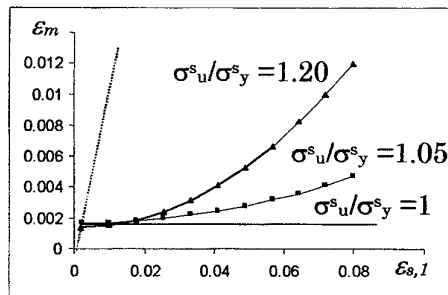


Fig.3.6 – Deformazione nella sezione fessurata – deformazione media

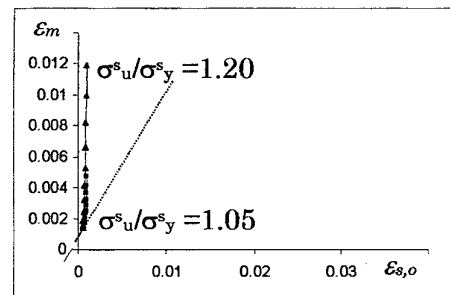


Fig.3.7 – Deformazione nella sezione di estremità – deformazione media

Il fenomeno di localizzazione può essere evidenziato anche differenziando l'espressione della deformazione media relativa al terzo ramo (3.13), rispetto alla deformazione dell'acciaio nella sezione fessurata:

$$\frac{d\varepsilon_m}{d\varepsilon_{s,1}} = 2(\varepsilon_{s,1} - \varepsilon_s^y) \left( \frac{\phi E_y}{4\tau l} \right)^2 \left( 1 - \frac{E_y^2}{E_s^2} \right) + \frac{E_y}{E_s} \tag{3.19}$$

e ricavando dalla (3.19), al tendere della deformazione  $\varepsilon_{s,1}$  a quella di snervamento  $\varepsilon_s^y$ , la seguente relazione:

$$\left( \frac{d\varepsilon_m}{d\varepsilon_{s,1}} \right)_{\varepsilon_s^y} = \frac{E_y}{E_s} \quad \left( \frac{d\varepsilon_{s,1}}{d\varepsilon_m} \right)_{\varepsilon_s^y} = \frac{E_s}{E_y} \quad (3.20)$$

In corrispondenza dello snervamento, per effetto di un incremento di deformazione applicata all'elemento, la variazione di deformazione nella sezione lesionata è una funzione iperbolica del modulo di incrudimento e cresce rapidamente al diminuire di questo, fino a tendere a valori infiniti per legami di tipo elastico perfettamente plastico dell'acciaio.

Risulta, allora fondamentale quantificare la riduzione di duttilità dell'elemento intesa, per esempio, come differenza tra le deformazioni medie ultima e di snervamento, al variare del rapporto di incrudimento.

Nella quasi totalità dei casi la deformazione ultima nell'acciaio è raggiunta in condizione di parziale snervamento della barra all'interno del concio e dunque la deformazione media ultima è calcolata con l'espressione (3.15) e risulta pari a:

$$\varepsilon_m^u = \varepsilon_s^y - \frac{d}{\phi E_s} + (\varepsilon_s^u - \varepsilon_s^y) \frac{E_y}{E_s} \left[ E_y \alpha (\varepsilon_s^u - \varepsilon_s^y) (\beta - 1) + 1 \right]$$

ed essendo:

$$\varepsilon_m^y = \varepsilon_s^y - \frac{d}{\phi E_s}$$

si ottiene:

$$\kappa = \varepsilon_m^u - \varepsilon_m^y = \left( \frac{\sigma_s^u}{\sigma_s^y} - 1 \right) \varepsilon_s^y \left[ \alpha \sigma_s^y (\beta - 1) \left( \frac{\sigma_s^u}{\sigma_s^y} - 1 \right) + 1 \right] \quad (3.21)$$

L'espressione (3.21) evidenzia la forte riduzione di duttilità che si verifica nell'elemento al ridursi del modulo di incrudimento dell'acciaio, ed il suo andamento è riportato nella seguente Fig.3.8. Considerando acciai che presentano uguali caratteristiche di tensione e deformazione ultime, ma differenti rapporti di incrudimento, passando da un valore di tale

variabile pari 1.2 ad uno di 1.05 si ha una differenza di duttilità di più di 1/3 (Fig.3.8).

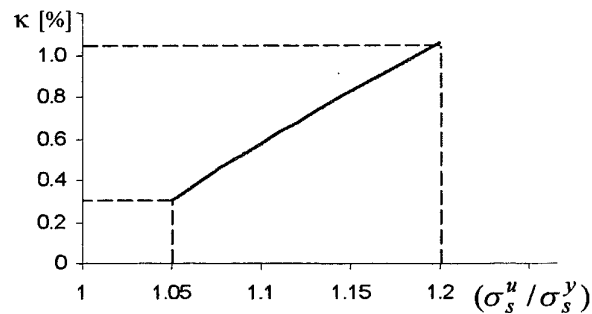


Fig.3.8 – Riduzione di duttilità

Nel caso in cui la crisi dell'elemento si verifica in corrispondenza di un completo snervamento dell'acciaio presente nel concio, la riduzione di duttilità in condizioni ultime può essere espressa molto semplicemente dal rapporto tra la deformazione media e quella ultima nell'acciaio che assume la forma:

$$\frac{\varepsilon_m^u}{\varepsilon_s^u} = 1 - \frac{\pi l}{\phi E_y \varepsilon_s^u}$$

che mostra chiaramente l'effetto di una diminuzione del modulo di incrudimento sulla capacità plastica dell'elemento.

Tre diversi tipi di legame tra sollecitazione adimensionalizzata rispetto alla forza ultima del calcestruzzo e deformazione media, a parità di caratteristiche ultime dell'acciaio, al variare del rapporto di incrudimento sono riportati in Fig.3.10 per un tirante di caratteristiche illustrate in Fig.3.9.

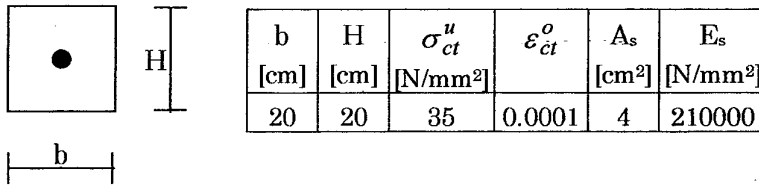


Fig.3.9 – Caratteristiche del tirante

Una riduzione del parametro  $\sigma_s^u / \sigma_s^y$  porta come prima conseguenza un incremento dello sforzo di prima plasticizzazione, ma riduce nettamente le caratteristiche di duttilità dell'elemento.

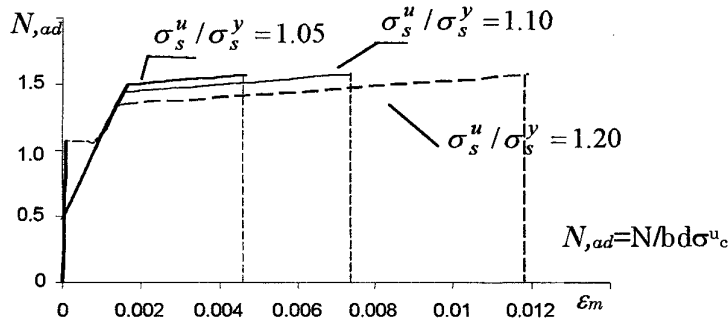


Fig.3.10 – Legame sollecitazione-deformazione media

Riferendosi al massimo valore del rapporto di incrudimento analizzato, l'area sottesa al diagramma tra la deformazione di snervamento e quella ultima è tale da assicurare buone caratteristiche plastiche del tirante; già per un rapporto  $\sigma_s^u / \sigma_s^y = 1.1$  si ha una forte riduzione della deformazione ultima media, mentre per un rapporto di incrudimento pari a 1.05, il comportamento si può definire poco duttile.

Nelle seguenti figure sono riportati gli stessi diagrammi adimensionalizzati per due differenti percentuali meccaniche d'armatura  $\omega$ , pari al rapporto tra l'area di acciaio moltiplicata per la relativa tensione di

snervamento e quella della sezione geometrica per la tensione ultima del calcestruzzo.

Una maggiore quantità di armatura, pur comportando un incremento di resistenza, non fornisce alcun contributo alla duttilità, mantenendosi il rapporto tra deformazione media ultima e di snervamento praticamente costante nei due casi esaminati.

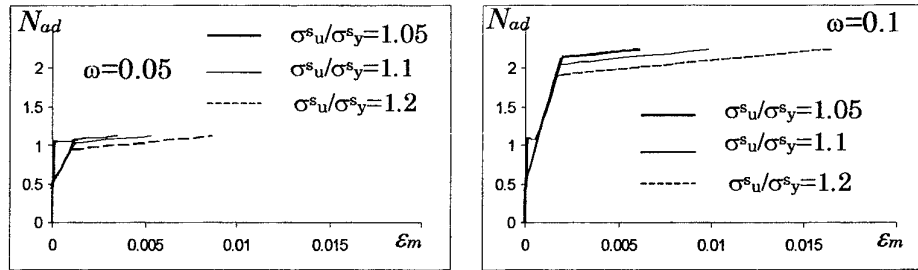


Fig.3.11 - Legame sollecitazione deformazione.

Nella Fig.3.12, infine, è riportato un confronto tra il comportamento di due tiranti di uguale geometria, armati con acciai tipo Feb44k e B500B le cui caratteristiche sono riportate in Tab.3 1.

Tab.3 1 – Caratteristiche degli acciai utilizzati

	Feb 44K	B500B
$\sigma^u_s$ [N/mm <sup>2</sup> ]	550	550
$\sigma^u_s/\sigma^y_s$	1.26	1.08
$\epsilon^u_s$	12%	8.0%

Utilizzando acciai B500B le caratteristiche di resistenza allo snervamento appaiono migliori, ma la duttilità è drasticamente ridotta a valori inferiori di circa  $\frac{1}{4}$  rispetto ai tradizionali Feb44k.

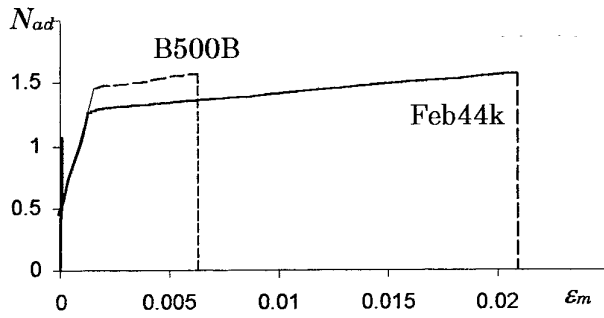


Fig.3.12 – Confronto tra comportamento di acciai FeB44k e B500B

#### 4. Influenza del legame di aderenza

Nella descrizione del comportamento dell'elemento teso, si è finora fatto riferimento ad un legame costitutivo di tipo rigido-plastico per l'aderenza, che equivale a supporre che all'atto della fessurazione tale tensione passa da un valore nullo al suo valore limite proprio in corrispondenza della lesione. In effetti sarebbe opportuno considerare la possibilità che la trasmissione di tensioni tra acciaio e calcestruzzo, cominci a verificarsi solo ad una certa distanza dalla lesione, il che equivale a considerare un legame tensione di aderenza-scorrimento del tipo riportato in figura:

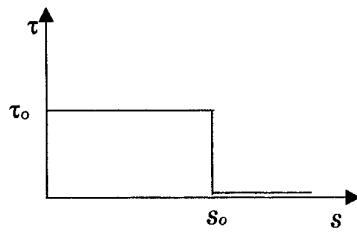


Fig.3.13 – Legame tensione di aderenza-scorrimento

Tale correzione apportata alla precedente modellazione porta come conseguenza una diversa distribuzione di tensione e deformazione nell'elemento e la possibilità, per l'acciaio, di sfruttare le sue caratteristiche plastiche in una zona più ampia, e quindi di ridurre l'effetto di localizzazione.

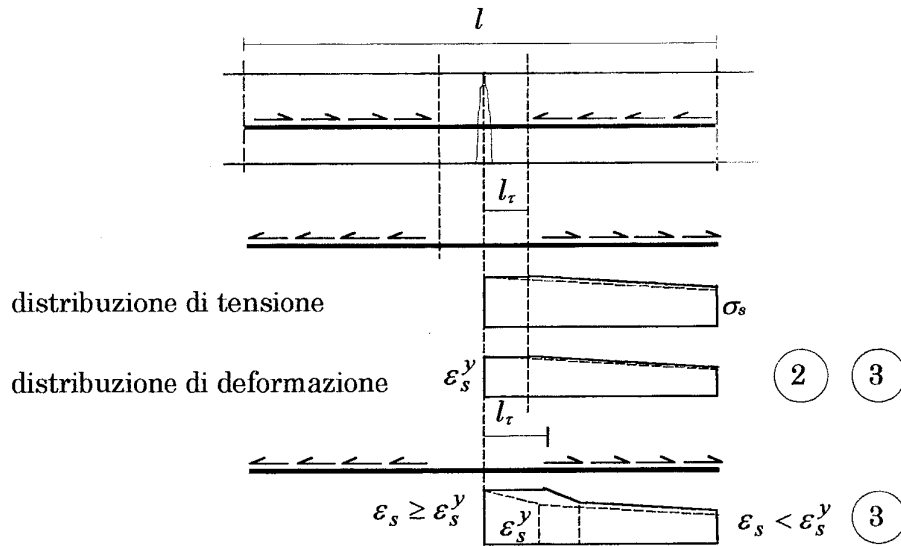


Fig. 3.14 – Distribuzione della tensione e deformazione nell'acciaio

L'ampiezza della zona in cui la tensione di aderenza è nulla ( $l_r$ ) è funzione dello scorrimento limite  $s_0$  e può essere facilmente calcolata sfruttando la definizione stessa di scorrimento, e le espressioni della variazione di deformazione nei due materiali, lungo il concio.

Le tensioni nell'acciaio e nel calcestruzzo possono essere espresse dalle seguenti:

$$0 \leq z \leq l_r$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \qquad \sigma_c = 0 \qquad (3.22)$$

$$z < l_\tau$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} - \frac{4\tau}{\phi} (z - l_\tau) \quad \sigma_c = -\frac{4\tau}{\phi} \frac{A_s}{A_c} (z - l_\tau) \quad (3.23)$$

e quindi per ricercare la sezione in cui si verifica lo scorrimento limite  $s_o$ , può essere imposta l'uguaglianza:

$$s_o = w_s(l_\tau) - w_c(l_\tau)$$

essendo  $w_s$  e  $w_c$  lo spostamento nell'acciaio e nel calcestruzzo, rispettivamente, valutato a partire dalle sezioni di estremità, in cui  $s = 0$ ;

$$s_o = \int_{l/2}^{l_\tau} \varepsilon_s(z) dz - \int_{l/2}^{l_\tau} \varepsilon_c(z) dz$$

Nel caso di comportamento elastico dell'acciaio lungo il concio, ossia nel secondo stadio, sostituendo nell'integrale le relazioni delle deformazioni nei materiali ottenute dalle (3.22), (3.23), si ottiene una equazione di secondo grado del tipo:

$$a \left( \frac{l_\tau}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 + b \left( \frac{l_\tau}{l} - \frac{1}{2} \right) = \gamma_o$$

essendo:

$$a = \frac{2\tau}{\phi} \left( \frac{1}{E_s} - \frac{A_s}{A_c} \right); \quad b = \frac{N}{A_s E_s}; \quad \gamma_o = \frac{s_o}{l}$$

con  $N > N_{cr}$ .

Una più complessa espressione, pur applicando lo stesso procedimento, si ricava per la lunghezza del tratto in cui le tensioni tangenziali sono nulle, quando l'acciaio è parzialmente snervato (Fase 3).

Gli effetti di tale diversa modellazione dell'aderenza si risentono nella valutazione delle deformazioni plastiche ed ultime, come è illustrato nel seguente paragrafo.



### 5. Deformazioni plastiche ultime di elementi tesi

Con riferimento al concio in esame, si valuta l'influenza delle caratteristiche meccaniche dei materiali, in particolare dell'acciaio, sulla deformazione plastica ultima. Ricordando che in condizioni ultime l'andamento delle tensioni nell'acciaio risulta essere lineare (eq. (3.3)), e che la deformazione totale è data dalla somma di un contributo elastico ed uno plastico, si può ricavare una semplice formulazione della deformazione plastica ultima che consente di evidenziare quali siano i parametri determinanti nel conferire duttilità ad un elemento teso.

Lo spostamento imposto alle estremità  $\delta$  è pari all'integrale delle deformazioni nell'acciaio lungo il concio e quindi, risolvendo per sostituzione:

$$\delta/2 = w(l/2) = \int_0^{l/2} \varepsilon_s(z) dz = \frac{\phi}{4tl} \int_{\sigma_{s,l}}^{\sigma_{s,o}} \varepsilon_s(\sigma) d\sigma$$

Sottraendo alle deformazioni che intervengono nell'integrale il contributo elastico ed esprimendo la deformazione plastica ( $\varepsilon_{s,p}$ ) in funzione della tensione:

$$\varepsilon_{s,p}(\sigma) = 0 \quad 0 \leq \sigma_s \leq \sigma_s^y$$

$$\varepsilon_{s,p}(\sigma) = (\sigma_s - \sigma_s^y) \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{E_s} \right) \quad \sigma_s^y < \sigma_s \leq \sigma_s^u$$

si ottiene una formulazione per l'allungamento plastico ultimo ( $w_p$ ) del tipo:

$$w_p(l/2) = \frac{\phi}{4t} (\sigma_s^u - \sigma_s^y) \left( \varepsilon_s^u - \frac{\sigma_s^u}{E_s} \right)$$

e quindi:

$$\varepsilon_{m,p} = \frac{w_p}{l/2} = \frac{\phi}{2tl} (\sigma_s^u - \sigma_s^y) \left( \varepsilon_s^u - \frac{\sigma_s^u}{E_s} \right) \quad (3.24)$$

La formula (3.24) evidenzia l'influenza delle caratteristiche dei materiali sulla deformazione plastica ultima, ed in particolare il fenomeno della localizzazione delle deformazioni in prossimità delle lesioni trova ulteriore conferma. La deformazione plastica risulta essere nulla per acciai a comportamento elastico perfettamente plastico ossia quando la tensione ultima dell'acciaio è uguale a quella di snervamento, a causa della mancata diffusione di plasticizzazione lungo la barra di armatura. La resistenza a trazione limite del calcestruzzo e le caratteristiche di aderenza sono contenute nel primo termine, mentre le proprietà dell'acciaio compaiono nei due fattori successivi. La deformazione plastica risulta inversamente proporzionale alla tensione di aderenza e proporzionale, in modo lineare, alla duttilità dell'acciaio, espresso come differenza tra la sua tensione ultima e quella di snervamento, ed alle sue caratteristiche ultime.

A parità di  $\sigma^u_s$  ed  $\varepsilon^u_s$ , la deformazione plastica ultima si riduce di più di un terzo, passando da valori del rapporto di incrudimento pari a 1.2 a valori di 1.05; riduzioni di deformazione dello stesso ordine di grandezza si ottengono, a parità di tensione di snervamento ed ultima dell'acciaio, per variazioni di allungamento ultimo da 0.12 a 0.05, come evidenziato in Fig.3.15 e in Fig.3.16, dove sono riportate le deformazioni plastiche ultime, rapportate al massimo valore ottenuto, in funzione di  $\sigma^u_s/\sigma_s$  e  $\varepsilon^u_s$ , rispettivamente.

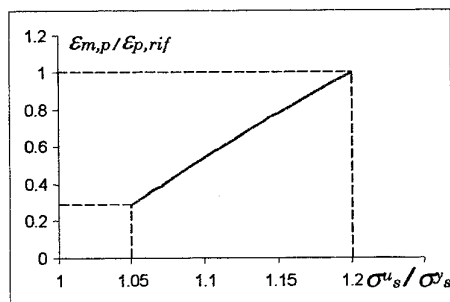


Fig. 3.15 - Rapporto di incrudimento-  
Deformazione plastica ultima

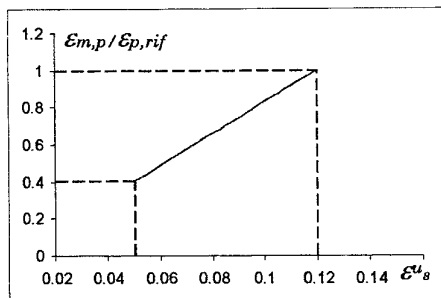


Fig.3.16 - Deformazione ultima acciaio-  
Deformazione plastica ultima

Nell'ipotesi di considerare una zona in prossimità delle fessure in cui le tensioni tangenziali risultano nulle, ossia volendo considerare un legame tensioni di aderenza-scorrimento con una sorta di degrado, del tipo illustrato nel Par.4, la formula assume il seguente aspetto:

$$\varepsilon_{mp} = \left( \varepsilon_s^u - \varepsilon_s^y \frac{\sigma_s^u}{\sigma_s^y} \right) \left[ \left( 1 - \frac{2l_\tau}{l} \right) \frac{(\sigma_s^u - \sigma_s^y)}{(2d/\phi)} + l_\tau \right]$$

avendo indicato con  $l_\tau$  la lunghezza della zona in cui si annullano le tensioni tangenziali, che risulta funzione dello scorrimento limite  $s_0$  (Par. 4). Applicare tale correzione porta come conseguenza che la deformazione plastica ultima, pur riducendosi al diminuire del rapporto di incrudimento, non si annulla per valori unitari di tale parametro. La trasmissione delle tensioni tra acciaio e calcestruzzo si comincia a mobilitare ad una certa distanza dalla lesione, consentendo all'acciaio di estendere il suo comportamento plastico ad una zona maggiore, evitando il picco di deformazione in corrispondenza della lesione, che può portare ad una repentina rottura fragile della barra.

## 6. Confronti

La normativa a disposizione per poter effettuare una prima valutazione sull'accettabilità del modello presentato, risulta piuttosto limitata. Nel seguito si farà riferimento, per l'elemento semplicemente teso, alla modellazione del comportamento non lineare proposto in (CEB "Manual on Cracking and Deformations"<sup>21</sup>), anche se tale manuale si riferisce esclusivamente al fenomeno fessurativo e non alle condizioni ultime. Poiché nella realtà il comportamento del tirante varia, sezione per sezione, il modello proposto dal CEB si basa sulla suddivisione dell'elemento teso in due parti, una relativa allo stato non fessurato, definito stadio I, l'altra a quello completamente fessurato (stadio II), con il solo acciaio resistente a trazione. Lo schema è completamente definito se sono noti il comportamento nella fase I e II e le lunghezze dei tratti in cui si verificano i due diversi comportamenti.

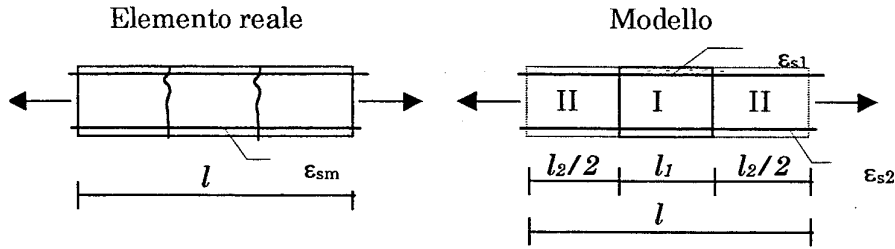


Fig.3.17 – CEB – Modello per elemento soggetto a trazione pura

Per ricavare tali lunghezze si ricorre a risultati sperimentali. Nel dettaglio, definita la deformazione media nell'acciaio:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \Delta\varepsilon_s \quad (3.25)$$

come differenza tra la deformazione  $\varepsilon_{s2}$  nell'acciaio nell'ipotesi che questo sia l'unico materiale reagente a trazione (stadio II) e l'irrigidimento  $\Delta\varepsilon_s$  offerto dal calcestruzzo teso tra le fessure, la legge con cui varia  $\Delta\varepsilon_s$  è ricavata sperimentalmente e risulta pari a:

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{s,max} \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}}$$

essendo  $\Delta\varepsilon_{s,max}$  il massimo effetto irrigidente (vedere Fig.3.18),  $\sigma_{sr}$  la tensione nell'acciaio in corrispondenza della prima fessurazione e  $\sigma_{s2}$  la tensione nell'acciaio nello stadio II.

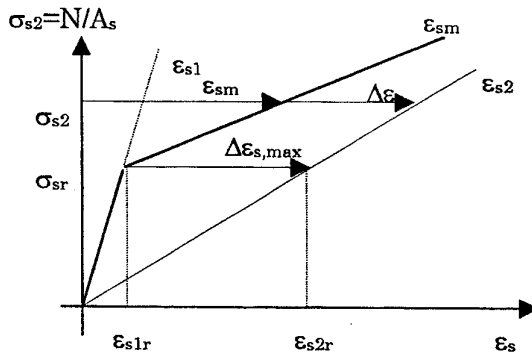


Fig.3.18 – CEB – Diagramma tensione – deformazione per tirante in c.a.

Ricavando dal diagramma stesso, per proporzionalità  $\Delta \varepsilon_{s,\max}$ , e sostituendola nell'equazione (3.25), si ottiene:

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \varepsilon_{s1} + \zeta \varepsilon_{s2}$$

avendo posto:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 = 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{N_r}{N} \right)^2$$

$$\zeta = 0 \quad \text{per } \sigma_{s2} < \sigma_{sr}$$

dove:

$\beta_1 = 1.0$  per barre ad aderenza migliorata

$\beta_1 = 0.5$  per barre lisce

$\beta_2 = 1.0$  per carichi di breve durata

$\beta_2 = 0.5$  per carichi di lunga durata

$N_r$  = sforzo normale relativo alla prima fessurazione.

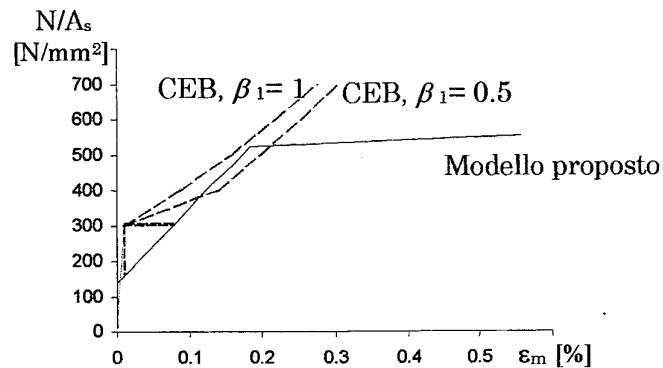


Fig.3.19 – Confronto tra modello presentato e modello CEB

Nella Fig.3.19 sono posti a confronto i diagrammi rappresentanti in ascissa la deformazione media e in ordinata la tensione nell'acciaio

---

nella sezione fessurata, pari a  $N/A_s$ , ottenuti con il modello presentato e con la schematizzazione del CEB.

Raggiunta la fessurazione, nella modellazione CEB non è consentita una diminuzione di sforzo a deformazione costante, per cui le curve sono continue e crescenti. In ogni caso il secondo ramo calcolato con il modello proposto è compreso nel fuso definito dalle curve CEB relative a barre lisce ( $\beta_l = 0.5$ ) e ad aderenza migliorata ( $\beta_l = 1.0$ ), almeno fino al raggiungimento dello sforzo relativo allo snervamento che comporta la definizione di un terzo tratto, con inclinazione funzione del modulo di incrudimento, non previsto dal modello CEB.