Appendice A

Cenni di analisi di segnale

La notazione utilizzata in questa appendice va considerata indipendente da quella adottata altrove in questo lavoro.

Si consideri l'insieme $\mathcal{F}^T$ delle funzioni definite sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, a valori nell'insieme dei numeri reali, periodiche di periodo T, tali che per ogni $f \in \mathcal{F}^T$ esista finito l'integrale

$$\int_{\mathbb{I}_{\alpha,T}} |f|^2 \, dx$$

per ogni numero reale α e con

$$\mathbb{I}_{\alpha,T} := [\alpha - \frac{T}{2}, \alpha + \frac{T}{2});$$

chiameremo queste funzioni *segnali.* Sull'insieme $\mathcal{F}_T$ è possibile definire una struttura di spazio vettoriale; di più, è possibile dotare questo spazio vettoriale di prodotto scalare e norma, prendendo ad esempio

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{I}_{\alpha,T}} | \, g \, h|^2 \, dx \tag{A.1}$$

per il prodotto scalare tra due generiche funzioni f e g, e

$$\|g\| := \frac{1}{T} \int_{\mathbb{I}_{\alpha,T}} |g|^2 dx \, . \tag{A.2}$$

per la norma della generica funzione g. Si indichi con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi; la collezione di funzioni

$$\{F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}\} \tag{A.3}$$

tali che

$$F_n(x) = e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi}{T}nx}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è una base completa per lo spazio $\mathcal{F}_T$; cioè ogni funzione $g \in \mathcal{F}_T$ può essere rappresentata in serie di Fourier, ovvero come combinazione lineare delle funzioni della base (A.3). Più precisamente, è lecito scrivere che se $g \in \mathcal{F}^T$, allora

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n\, F_n(x)$$

per *quasi ogni* $x \in \mathbb{R}$, dove i coefficienti g_n ($n \in \mathbb{Z}$) sono i pesi della combinazione lineare. Essi possono essere calcolati come "componenti" della funzione g nelle direzioni della base (A.3):

$$g_n = \langle g, F_n \rangle\ .$$

La base (A.3) è una base ortonormale, nel senso che

$$\langle F_n, F_m \rangle = 0\,, \quad \text{se} \quad n \neq m\,,$$

$$\langle F_n, F_m \rangle = 1\,, \quad \text{se} \quad n = m\,;$$

le sue componenti sono funzioni periodiche con periodo T/n, ovvero con frequenze

$$\omega_n = \frac{n}{T}\,;$$

si può infatti scrivere

$$F_n(x) = cos(2\pi\omega_n x) - \mathbf{i}\, sen(2\pi\omega_n x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

riconoscendole come funzioni trigonometriche complesse.

La *trasformata di Fourier* della funzione $g \in \mathcal{F}^T$ è la funzione $[g]^{\mathrm{F}}$ che associa ad ogni frequenza ω_n nell'insieme

$$\Omega := \left\{ \omega_n \in \mathcal{R} |\ \omega_n = \frac{n}{T}\, , n \in \mathbb{Z} \right\}$$

il valore complesso

$$[g]^F(\omega_n) := \int_{\mathbb{I}_{\alpha,T}} g\, e^{-\mathbf{i}\, 2\pi\omega_n x} dx\ ,$$

La sua definizione giustifica la dizione non rigorosa secondo cui la trasformata di Fourier di un segnale consente di rappresentare l'informazione nello "spazio delle frequenze". È possibile procedere in senso inverso: a partire dalla funzione $h : \Omega \to \mathbb{C}$, definire la funzione $[h]^{-F} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che

$$[h]^{-F}(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} h(\omega_n) e^{-\mathbf{i}\, 2\pi\omega_n x}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

detta *antitrasformata di Fourier* della funzione h poiché vale infatti la seguente proprietà:

$$\left[[g]^F \right]^{-F}(x) = g(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

Preso un generico segnale g, ed indicando con $\Re(\cdot)$ e $\Im(\cdot)$ gli operatori che estraggono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso, è possibile definire in corrispondenza di ogni frequenza ω_n la potenza del segnale

$$P_g(\omega_n) := \Re^2(\, g^F(\omega_n)) + \Im^2(\, g^F(\omega_n))\ ,$$

la sua ampiezza

$$A_g(\omega_n) := \sqrt{P_g(\omega_n)}\ , \tag{A.4}$$

ed il suo angolo di fase

$$\Phi_g(\omega_n) := \arctan \frac{\Im(\, g^F(\omega_n))}{\Re(\, g^F(\omega_n))} \,. \tag{A.5}$$

Il significato delle definizioni (A.4) e (A.5) è nella rappresentazione di $[g]^F$ nella forma

$$[g]^F(\omega_n) = A_g(\omega_n)\, e^{\mathbf{i}\Phi(\omega_n)} \,.$$

Si considerino ora due funzioni f e g in $\mathcal{F}^T$. La generica funzione $g_{\Delta x}$ che associa a $x \in \mathbb{R}$ il valore $g(x + \Delta x)$ con $\Delta x \in \mathbb{R}$, ovvero, impropriamente, la funzione ottenuta traslando g di Δx è ancora una funzione in $\mathcal{F}^T$. È ben definita la funzione $g * f$ che ad ogni $\Delta x \in \mathbb{R}$ associa il valore

$$g * f(\Delta x) = \int_{\mathbb{I}_{\alpha,T}} g_{\Delta x}\, f\, dx$$

ed è detta *convoluzione* di g ed f. Si ottiene inoltre che

$$g * f(\Delta x) = f * g(\Delta x) \,, \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R} \,,$$

ed in particolare vale l'asserto del *teorema di convoluzione* secondo cui

$$g * f(\Delta x) = [[g_{\Delta x}]^F\, [f]^F]^{-F} \,, \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R} \,.$$

Definizioni in tutto analoghe possono essere scelte nel caso di funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$, periodiche di periodo T in entrambe le direzioni della base canonica di $\mathbb{R}^2$, integrabili su ogni regione

$$\mathbb{I}_{\alpha,T} := [\alpha - \frac{T}{2}, \alpha + \frac{T}{2}) \times [\alpha - \frac{T}{2}, \alpha + \frac{T}{2}) \,,$$

con α e β due numeri reali qualsiasi. Analogamente al caso monodimensionale si possono scegliere prodotto scalare e norma come nelle (A.1) e (A.2), a patto di considerare $g, f \in \mathcal{F}^T$ e l'insieme d'integrazione $\mathbb{I}_{(\alpha,\beta),T}$. Guardando a $\mathcal{F}$

come spazio vettoriale (dotato di prodotto scalare e norma), si può scegliere la base ortornormale

$$\left\{F_{nm} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ n, m \in \mathbb{Z}\right\}$$

dove

$$F_{nm}(x, y) = e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi}{T}(nx+my)}\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Ogni funzione $g \in \mathcal{F}_T^{(2)}$ può essere rappresentata in serie di Fourier, cioè

$$g(x, y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{nm} F_{nm}(x, y)$$

per *quasi ogni* (x, y), dove per i coefficienti g_{nm} vale la

$$g_{nm} = \langle g, F_{nm}\rangle\ .$$

Le funzioni della base scelta sono funzioni periodiche, con periodi $\frac{T}{n}$ in direzione x e $\frac{T}{m}$ in direzione y per ciascun valore $n, m \in \mathbb{Z}$. Le si può cioè scrivere nella forma di funzioni trigonometriche complesse

$$F_{nm}(x, y) = [cos(2\pi\omega_n x) - \mathbf{i}sen(2\pi\omega_n x)][cos(2\pi\omega_m y) - \mathbf{i}sen(2\pi\omega_m y)] \qquad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

in cui sono implicitamente definite le frequenze

$$\omega_n = \frac{n}{T}\,, \quad \omega_m = \frac{m}{T}\,, \quad n, m \in \mathbb{Z}^2 :\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione $g \in \mathcal{F}_T^{(2)}$ è la funzione $[g]^F$ che associa ad ogni coppia di frequenze (ω_n, ω_m) nell'insieme

$$\Omega^2 := \left\{(\omega_n, \omega_m) \in \mathcal{R}|\ \omega_n = \frac{n}{T}\,, \omega_m = \frac{m}{T}\,, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$$

il valore complesso

$$[g]^F(\omega_n, \omega_m) := \int_{\mathbb{I}_{(\alpha,\beta),T}} g\, e^{-\mathbf{i}\,2\pi(\omega_n x, \omega_m y)} dA\,.$$

Con riferimento alla funzione $g \in \mathcal{F}_T^{(2)}$ ed alla coppia di frequenze $(\omega_n, \omega_m) \in \Omega^2$ è possibile definire

- l'ampiezza $A_g(\omega_n, \omega_m) := \sqrt{\Im^2(g^F(\omega_n, \omega_m)) + \Re^2(g^F(\omega_n, \omega_m))}$;
- la potenza $P_g(\omega_n, \omega_m) := A_g^2(\omega_n, \omega_m)$;
- l'angolo di fase $\Phi_g(\omega_n, \omega_m) := \frac{\Im(g^F(\omega_n,\omega_m))}{\Re(g^F(\omega_n,\omega_m))}$.

La convoluzione di g e f appartenenti a $\mathcal{F}_T^{(2)}$ è l'applicazione $g * f$ che ad ogni $(\Delta x, \Delta x) \in \mathbb{R}^2$ associa il valore

$$g * f(\Delta x) := \int_{\mathbb{I}_{\alpha,T}} g_{(\Delta x, \Delta y)}\, f\, dA\,,$$

in cui si è indicato con $g_{(\Delta x, \Delta y)}$, ed in analogia con il caso monodimensionale, la traslata della funzione g rispetto alla quantità $(\Delta x, \Delta y)$. Si ottiene inoltre che

$$g * u(\Delta x, \Delta y) = u * g(\Delta x, \Delta y)\,, \quad \forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2\;;$$

inoltre, il teorema di convoluzione può essere esteso al caso bidimensionale, ed in particolare permette di affermare che

$$g * f(\Delta x, \Delta y) = \left[\, [g_{(\Delta x, \Delta y)}]^F\, [f]^F\, \right]^{-F}$$

dove l'operatore $[\cdot]^{-F}$ associa alla generica funzione $h : \Omega^2 \to \mathbb{C}^2$ la funzione

$$[h]^{-F} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 | (x, y) \to \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} h(\omega_n, \omega_m) e^{-\mathbf{i}(\omega_n x + \omega_m y)}\,,$$

ovvero l'antitrasformata di Fourier (in due dimensioni) per la funzione h.