

Capitolo 3

La tecnica *PIV*

La tecnica di fotogrammetria *PIV*, nella sua variante digitale, figura in questo lavoro come lo strumento di misura *possibilmente* utile allo studio della cinematica dei flussi di materiale granulare, e sulla cui applicabilità si vuole esprimere un giudizio o dare indicazioni. Data la complessità degli elementi teorici che ne sono alla base, si ritiene utile — se non necessario — introdurre alcuni aspetti essenziali, dapprima in maniera semplificata (Par. 3.2), poi con approfondimenti successivi (Parr. 3.3–3.5). Il suo inquadramento e la sua differenziazione nell'ambito di una famiglia di altri strumento simili, è oggetto del paragrafo che segue.

Sebbene la letteratura in materia attenda ancora una sistemazione, ci si può riferire, per approfondimenti sui concetti essenziali, ad articoli di *review* o testi applicativi di sintesi (*Adrian*, 1991; *Grant*, 1994, 1999; *Raffel et al.*, 1998).

3.1 PIV: ambiti di applicazione

La tecnica *PIV* è una tecnica di fotogrammetria sviluppata in origine per la misurazione dei campi di velocità nei fluidi; ma, al passo con la sua evoluzione, le sue applicazioni si sono moltiplicate e diversificate; è utilizzata oggi correntemente in aerodinamica e idrodinamica, o per lo studio di gas, fiamme, solidi.

In Fig.3.1 è illustrata una sua tipica applicazione in camera del vento. Il

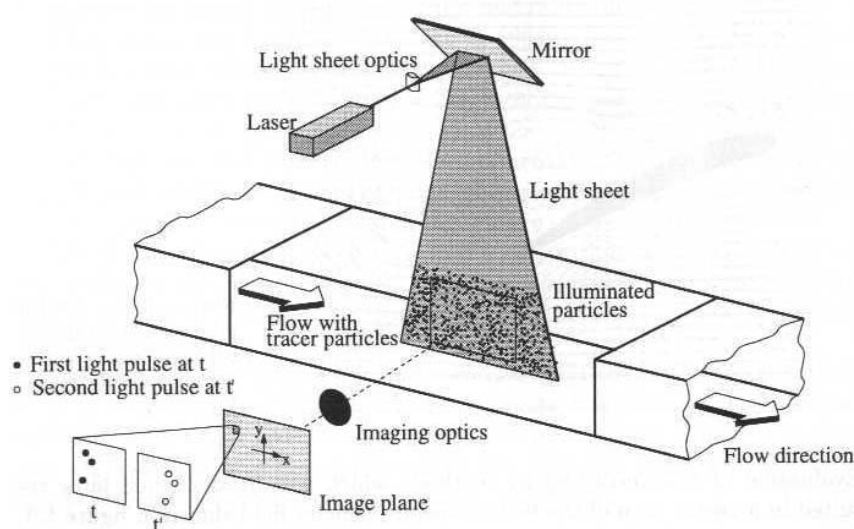


Figura 3.1: (Da *Raffel et al., 1998*) Applicazione della tecnica *PIV* in galleria del vento.

flusso è iniettato di particelle traccianti, neutre rispetto alla fisica del fenomeno in osservazione, illuminate da un fascio piano di luce laser emesso ai tempi t e t' . Ad ogni emissione è acquisita l'immagine riflessa dalle particelle: le costellazioni di particelle ai tempi t e t' possono essere fissate sullo stesso fotogramma (metodo di *auto-correlazione*) o su due fotogrammi distinti (metodo di *correlazione incrociata*). Su questa base di informazione, con i procedimenti di correlazione di immagine caratteristici della tecnica *PIV*, è

possibile misurare un campo di velocità; più precisamente è possibile ottenere la misurazione di un campo discreto di spostamenti incrementali \mathbf{S}_{ij} (Fig. 3.2) e stimare di conseguenza il campo di velocità (media locale) istantanea \mathbf{u}_{ij} :

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{u}_{ij} (t' - t) + o(|t' - t|) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_{ij} \simeq \frac{\mathbf{s}_{ij}}{t' - t}.$$

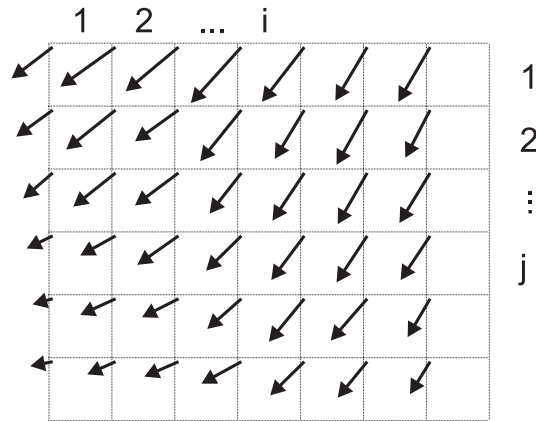


Figura 3.2: Campo di spostamenti incrementali \mathbf{s}_{ij} . Per ogni area di selezione il vettore rispettivo è associato alla posizione del suo vertice in alto a sinistra.

La densità della distribuzione di particelle traccianti nell'immagine è uno dei parametri più rilevanti e determina l'ambito stesso di applicazione di questa tecnica (*Adrian, 1991; Grant, 1997; Raffel et al., 1998*). In Fig. 3.3 sono riprodotti tre fotogrammi, corrispondenti a tre diverse densità; in ognuno di essi sono sovrapposte le immagini delle costellazioni di particelle traccianti fissate a due istanti sufficientemente vicini. Nel caso relativo al primo fotogramma da sinistra, la concentrazione di particelle traccianti è estremamente bassa, tanto da rendere improbabile l'interferenza (una parziale o totale sovrapposizione) tra immagini di particelle diverse. Nel fotogramma, le particelle sono facilmente distinguibili visivamente, e si possono riconoscere le posizioni di ciascuna ai tempi t e t' : in questo contesto è possibile tracciare

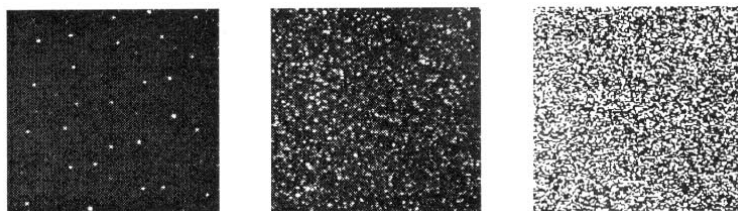


Figura 3.3: (Da *Raffel et al.*, 1998) Ambiti applicativi delle tecniche di fotogrammetria. In ciascuno dei tre fotogrammi sono fissate le immagini delle costellazioni di particelle traccianti in corrispondenza di due illuminazioni successive (metodo di auto-correlazione); da sinistra a destra, le caratteristiche delle immagini ricadono negli ambiti applicativi, rispettivamente, delle tecniche *PTV*, *PIV*, ed *LSV*.

il moto di ogni singola particella. Nel fotogramma centrale, le singole particelle sono ancora distinguibili e le rispettive immagini non si sovrappongono, ma le coppie di particelle corrispondenti (la stessa particella ai tempi t e t') non sono più immediatamente riconoscibili ad occhio nudo. Infine, nel fotogramma di destra, è dominante l'interferenza tra le due costellazioni; questa produce un'immagine a chiazze in cui non sono più neanche distinguibili le singole particelle. Il primo caso rappresenta l'ambito di applicazione della tecnica detta "*Particle Tracking Velocimetry*" (*PTV*), con cui si ottiene il tracciamento del moto di ogni singola particella. Nel caso di media densità, si fa riferimento alla tecnica *PIV*, in cui il campo di spostamenti incrementali è riferito agli spostamenti medi di gruppi di particelle limitrofe. Questi gruppi di particelle sono individuati scegliendo sotto-regioni dell'immagine complessiva: chiameremo nel seguito queste regioni *aree di selezione*, con riferimento alla denominazione inglese "*interrogation windows*". Infine, alle densità più elevate è dedicata la tecnica detta "*Laser Speckle Metrology*" (*LSM*); i vettori di spostamento incrementale sono ottenuti, in questo caso, in base all'analisi

delle immagini di singole chiazze — da cui l’uso del termine inglese “*speckle*”, ovvero “macchiolina” — estratte dall’immagine complessiva attraverso aree di selezione. La tecnica *PIV* sarebbe in particolare originata dalla tecnica *LSM*, utilizzata per misurazioni su superfici solide ruvide, distinguendosi da essa nei primi anni ’Ottanta (*Adrian*, 1984; *Pickering e Halliwell*, 1984; *Grant*, 1997).

È possibile una definizione quantitativa degli ambiti di applicazione di queste tecniche (*Adrian*, 1991; *Grant*, 1997). Si consideri l’illustrazione in Fig. 3.5, in cui è rappresentato un insieme di particelle, in movimento so-

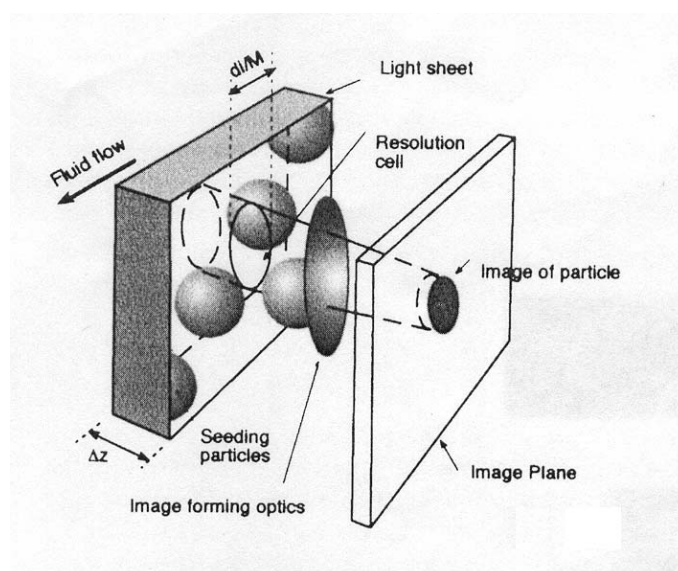


Figura 3.4: (Da *Grant*, 1997) Definizione della densità d’immagine N_I .

lida al fluido, illuminate da un fascio piano di luce laser con spessore Δz . Seguendo la notazione in figura, può essere introdotta la *densità di sorgente*¹

$$N_S := n_p \Delta z \pi \left[\frac{d_I}{2M} \right]^2,$$

in cui n_p è il numero di particelle traccianti per unità di volume, M è il

¹A traduzione della denominazione inglese “*source density*”.

rapporto di conversione tra le dimensioni lineari nel piano fisico e nel piano dell'immagine, e d_I è il diametro della singola particella nel piano dell'immagine. La densità di sorgente rappresenta il numero di particelle che, nel piano dell'immagine, interferiscono con una regione di forma e dimensioni pari all'immagine della singola particella. Per $N_S \gg 1$ si ricade nell'ambito applicativo della tecnica *LSV*, mentre per $N_S \ll 1$ si fa riferimento alle tecniche *PIV* e *PTV*. Tra gli ambiti di quest'ultime, invece, si distingue in base alla *densità d'immagine*²

$$N_I := n_p \Delta z \pi \left[\frac{d_{int}}{2M} \right]^2,$$

(vedi Fig. 3.5) in cui d_{int} è il diametro dell'area di selezione nel piano dell'immagine: la densità d'immagine è una misura del numero medio di particelle all'interno di un'area di selezione. Coerentemente con quanto già riportato sopra, per valori sufficientemente elevati ($N_I \gg 1$) o bassi ($N_I \ll 1$) di questo parametro, si ricade rispettivamente nell'ambito della tecnica *PIV*, o *PTV*. Ciò giustifica in parte una diversa terminologia, seguendo la quale la tecnica *PTV* sarebbe detta “*low-image-density PIV*”, mentre ci si riferirebbe alla tecnica qui semplicemente indicata come *PIV*, con la dizione “*high-image-density PIV*”. La sistemazione degli ambiti di queste tecniche a cui si è appena accennato, è schematizzata in Fig. 3.6.

3.2 Cenni al procedimento di misurazione

La tecnica *PTV* è il risultato dell'assemblaggio di tecnologie diverse e della sintesi di conoscenze sviluppate nell'ambito di più discipline scientifiche. All'atto pratico, per ottenere misure dei campi di velocità o spostamento, è

²Da “*image density*”.

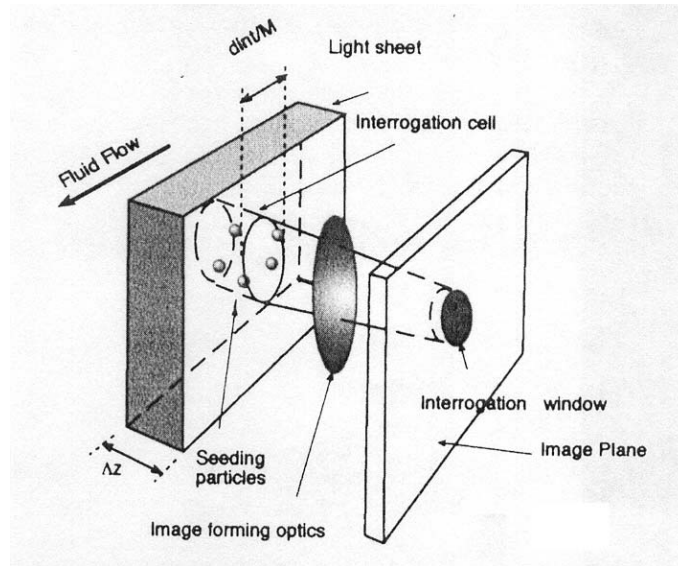


Figura 3.5: (Da Grant, 1997) Definizione della densità di sorgente N_S .

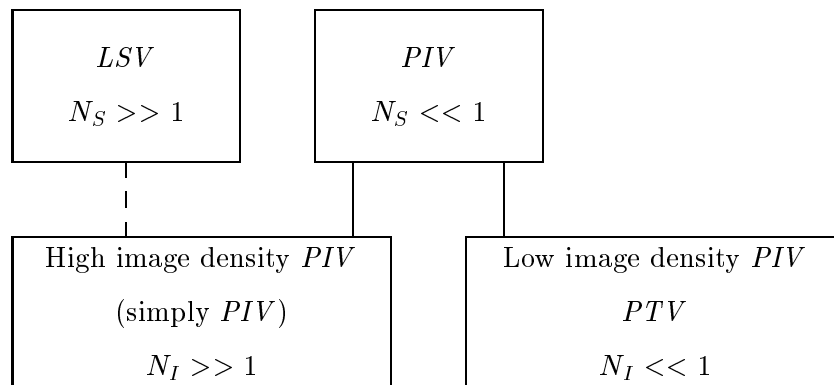


Figura 3.6: Schema sintetico per la distinzione tra gli ambiti delle tecniche *LSV*, *PIV* e *PTV*, in base alla densità d'immagine N_I ed alla densità di sorgente N_S . La tecnica (*high image-density*) *PIV* nasce come variante della tecnica *LSV*.

necessario procedere all'*acquisizione* ed alla successiva *analisi* delle immagini del moto.

L'operazione di acquisizione può essere estremamente complessa: in questa fase, l'utilizzo di tecnologia *ottica e laser* interfacciate è stato a lungo un elemento caratterizzante della tecnica *PIV*: ci si riferisce alle applicazioni più tradizionali, ad esempio in aerodinamica (vedi Par. 3.1) e in idrodinamica. Con l'affermarsi di questa tecnica, d'altro canto, i suoi campi di applicazione si sono moltiplicati; nel caso, ad esempio, del suo utilizzo per la misura della deformazione dei solidi in genere, l'acquisizione delle immagini è spesso effettuata con comuni apparecchiature di presa video: macchine fotografiche o videocamere di standard professionale associate a sistemi di illuminazione convenzionali, dunque con un minimo sforzo tecnologico e senza necessità di impegnare e coordinare una strumentazione laser. Un sistema di questo tipo (telecamera digitale e illuminazione di tipo convenzionale) è stato utilizzato per questo lavoro, e per una descrizione più approfondita si rimanda al Capitolo 4.

A valle della fase di acquisizione, il procedimento di analisi fotogrammetrica è pressoché il medesimo per ogni applicazione e si basa sui metodi tipici dell'*analisi di segnale*, sviluppati a loro volta a partire dai principali risultati nel campo dell'*analisi di Fourier* (vedi Par. 3.5). Tale procedimento, sino almeno agli inizi degli anni 'Ottanta, era svolto per via analogica o semi-analogica; come per la fase di acquisizione, ci si avvaleva di metodi ottici con impiego di laser³. Da allora, per le stesse operazioni, sono stati

³Ci si riferisce, in modo particolare, al procedimento denominato "*Young Fringe's method*", oramai obsoleto, basato sull'esecuzione attraverso metodi ottici della trasformata di Fourier dell'intensità d'immagine (vedi Par. 3.5). Non è possibile discutere di questo metodo — peraltro complesso — nel presente lavoro; la conoscenza di questo aspetto storico della tecnica *PIV*, ad ogni modo, può essere utile per la comprensione della classificazio-

sviluppati metodi informatici: le procedure di analisi di segnale sono state implementate come algoritmi numerici in software che operano su immagini in formato digitale; questa innovazione ha reso la tecnica *PIV* estremamente più accessibile, in termini economici, e con riferimento ad una molto minore competenza specifica richiesta all'operatore che esegue la misurazione. Per distinguerla dalla tecnica tradizionale, questa sua recente evoluzione è spesso *altrove* denominata “*digital Particle Image Velocimetry*” (*dPIV*). In *Grant* (1994) è contenuta un'interessante collezione di articoli che tracciano l'evoluzione, nel tempo, della tecnica *PIV*; per una descrizione estesa dei fondamenti delle procedure di analisi di immagine, si può fare riferimento a *Hinsch* (1993) per i metodi analogici, o a *Westerweel* (1993) per i metodi digitali. Di seguito nel paragrafo, senza pretese di completezza, è illustrata la logica dell'algoritmo *PIV* implementato nel software *DaVis 6* (*LaVision*, 2001), del quale ci si è avvalsi nel presente lavoro utilizzato; ci si limiterà in particolare al metodo di correlazione incrociata, cioè (vedi Par. 3.1), quello effettivamente utilizzato da chi scrive nella fase di estrazione delle misure.

Si consideri quindi, a titolo esemplificativo, la sequenza in Fig.3.7 relativa ad una di queste prove; ci si soffermi sulla transizione dal fotogramma N al fotogramma $N + 1$. Non è necessario, né opportuno, che la misurazione sia effettuata sull'intero fotogramma; si usa invece selezionare un “dominio d'interesse”⁴, ad esempio la regione Ω in Fig. 3.8, cioè la porzione del fotogramma alla quale verrà effettivamente applicato il procedimento; questa regione è necessariamente la stessa in ogni fotogramma della sequenza. Sovrappo-
nendo al dominio d'interesse un'ideale griglia a maglie quadrate, lo si divide

ne e del linguaggio ereditati dai metodi più recenti; è pertanto richiamato in riferimenti classici, sebbene recenti, introduttivi alla tecnica *PIV* (*Adrian*, 1991; *Grant*, 1997; *Raffel et al.*, 1998). Un sintetico esempio applicativo è riportato in *Grant e Smith* (1988).

⁴A traduzione del termine inglese “*area of interest*”.

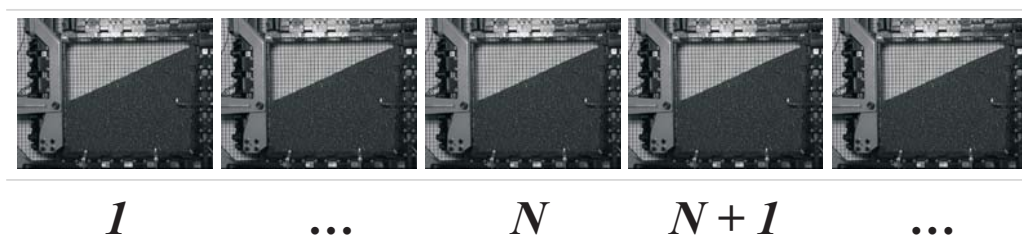


Figura 3.7: Ideale sequenza di immagini della prova.

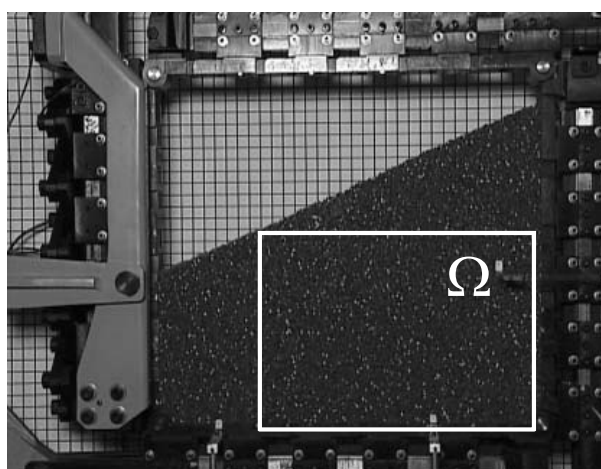


Figura 3.8: Selezione del dominio d'interesse Ω nel generico fotogramma.

in porzioni elementari che chiamiamo “aree di selezione”⁵ (e.g. α in Fig. 3.9); la loro funzione nell’algoritmo di fotogrammetria può essere descritta con le parole con cui usualmente si introduce il concetto di “volume rappresentativo elementare,” come premessa alla meccanica dei continui: una “regione materiale” di dimensioni finite, le minime necessarie ad ottenere misure stabili e rappresentative della quantità oggetto della misurazione — nel nostro caso: lo spostamento. Si consideri il dominio d'interesse Ω nei fotogrammi N ed $N + 1$ (risp. Fig. 3.9 e 3.10); l’immagine di α può essere confrontata con

⁵A traduzione del termine inglese “*interrogation window*”.

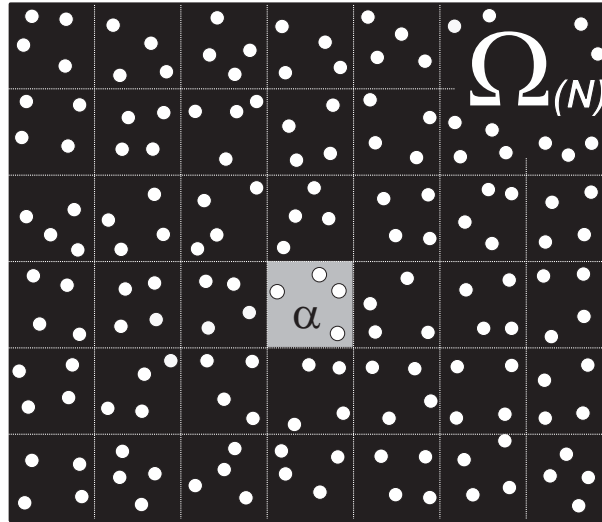


Figura 3.9: Nel fotogramma N è selezionato il dominio d'interesse Ω , al quale è sovrapposta una griglia a maglie quadrate. Ogni maglia della griglia individua un'area di selezione: ad esempio, α .

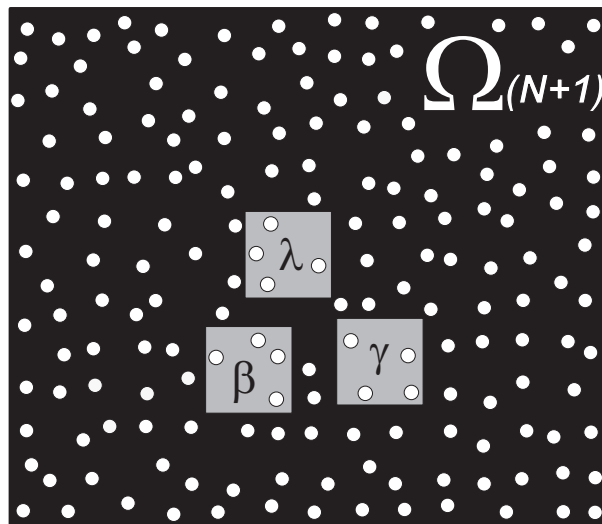


Figura 3.10: Dominio d'interesse e aree di selezione β , γ , e λ , nel fotogramma $N + 1$.

quella di una qualsiasi area di selezione β , γ o λ nel fotogramma successivo; ad un esame visivo possiamo affermare che α e β , in fotogrammi successivi, individuano lo stesso “contesto” di particelle traccianti; marcate differenze sono invece presenti rispetto alle immagini di γ e λ . Confrontando nei rispettivi fotogrammi le posizioni di α e di β , possiamo disegnare un vettore spostamento \mathbf{s}_α (Fig.3.11); più propriamente, il vettore così ottenuto, è “rap-

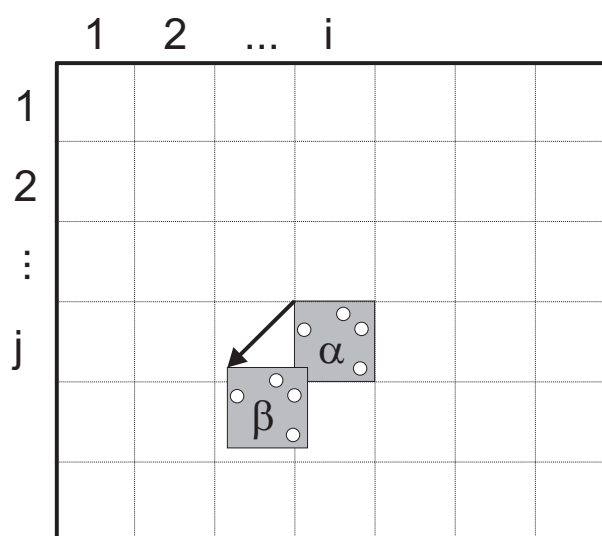


Figura 3.11: Il vettore spostamento \mathbf{s}_α (\mathbf{s}_{ij} secondo la notazione in Fig. 3.2) è determinato in base alla differenza tra le posizioni dell’area di selezione α e della sua omologa β .

presentativo” dello spostamento intercorso, tra i fotogrammi N ed $N + 1$, per il contesto di particelle individuate dall’area di selezione α . Iterando questo procedimento su ogni area di selezione individuata dalla griglia sovrapposta al fotogramma N , si ottiene un campo di spostamenti discreto $\{\mathbf{s}_{ij}\}$ (vedi Par. 3.1 e Fig.3.2) con passo pari a quello della griglia; applicando infine la medesima procedura ad ogni coppia di fotogrammi successivi della sequenza di immagini del moto (e.g. N ed $N + 1$), si giunge infine ad una *sequenza* di

campi di spostamento incrementale. Il passaggio fondamentale del procedimento, cioè il riconoscimento di contesti di particelle omologhi in fotogrammi successivi, è eseguito per via automatica, o, più precisamente, informatica; i fondamenti teorici di questa operazione sono esposti nel Par. 3.5.

3.3 Considerazioni di ottica

La luce riflessa da ogni particella tracciante rimane impressa sul piano dell'immagine: il piano della pellicola, o il piano del sensore CCD nei sistemi digitali. L'onda di luce filtra attraverso apertura e lente del sistema ottico della macchina fotografica o della videocamera, andando soggetta a fenomeni di diffrazione e aberrazione. Si definisce in particolare “aberrazione ottica” ogni caratteristica o difetto di un sistema ottico, che impedisce la formazione perfetta di un'immagine; per sistemi ottici di livello professionale e che operano in condizioni di presa facilitate — dunque nel caso che ci riguarda — questo aspetto può essere trascurato, e ci si riferisce nel seguito e per semplicità ad un sistema ottico ideale, cioè privo di aberrazioni.

Nelle applicazioni tradizionali della tecnica *PIV*, ad esempio per i fluidi, un ulteriore elemento di complessità dovuto a fenomeni ottici, o più precisamente prospettici, è relativo al fatto che le particelle traccianti possono avere velocità con componenti ortogonali al piano a cui è riferita la misurazione; ciò può causare, se il fenomeno è considerevole, l'acquisizione di misure non rappresentative, per effetto di ovvi inganni prospettici. Non è questo il caso dell'applicazione che si descrive nel presente lavoro: la geometria dei modelli utilizzati e la meccanica del materiale stesso escludono *a priori* questa possibilità. Si discuterà pertanto, nel seguito del paragrafo, solamente di diffrazione dell'immagine. Per una trattazione completa degli aspetti di ottica

rilevanti ai fini delle tecniche di fotogrammetria (e non) si rimanda pertanto a testi specifici (e.g. *Hetch e Zajac*, 1974; *Hornel*, 1987; *Lauteborn et al.*, 1995).

Per introdurre in maniera essenziale il fenomeno della diffrazione, si può considerare il caso di un'onda piana di luce, con lunghezza d'onda λ , filtrata da un'apertura circolare di diametro D_a e impressa su di un piano a distanza y_a dall'apertura. A seconda del valore del *numero adimensionale di Fraunhofer*

$$F := \frac{D_a^2}{\lambda y_a}$$

è possibile descrivere il fenomeno facendo riferimento all'approssimazione di Fresnel-Kirchhoff ($F \sim 1$) o all'approssimazione, appunto, di Fraunhofer ($F \ll 1$). In quest'ultimo caso, se cioè il piano dell'immagine è a notevole distanza dall'apertura rispetto al diametro di quest'ultima, l'immagine impressa sul piano alla distanza y_a appare come in Fig. 3.12: è possibile riconoscere un disco di luce principale detto “disco di Airy”, il cui centro è in asse con quello dell'apertura; lo circondano una serie di corone concentriche, di intensità e spessore minori e progressivamente decrescenti. Rispetto alla distanza r dal centro del disco di Airy, la distribuzione d'intensità d'immagine segue l'andamento riportato in Fig. 3.13, secondo la legge:

$$\frac{I(r)}{I_{max}} = Ai\left(\frac{r}{\delta}\right), \quad (3.1)$$

in cui I_{max} è la massima intensità d'immagine pari al valore raggiunto in corrispondenza del centro del disco di Airy, Ai è la *funzione di Airy*⁶, e la

⁶La funzione di Airy associa a $w \in \mathbb{R}^+$, la quantità $Ai(w) := \left[\frac{J_1(w)}{w}\right]^2$, dove J_1 è una funzione di Bessel del primo tipo al primo ordine:

$$J_1 : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad w \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{2k+2}}{k!(k+2)!}.$$



Figura 3.12: (Da <http://dustbunny.physics.indiana.edu>) Diffrazione per un'onda piana attraverso un'apertura circolare: immagine risultante (disco di Airy e corone minori).

lunghezza δ dipende dalle grandezze caratteristiche del problema:

$$\delta := \frac{\lambda}{\pi} \frac{y_a}{D_a}. \quad (3.2)$$

Com'è evidenziato in Fig. 3.13, l'andamento normalizzato di I rispetto ad r nei pressi del disco di Airy, ovvero nella parte significativa dell'immagine, è bene approssimabile ad una curva di Gauss:

$$\frac{I(r)}{I_{max}} \simeq \exp\left(-\frac{r^2}{4\delta^2}\right); \quad (3.3)$$

ciò consente notevoli semplificazioni nei calcoli relativamente alla stima ed alla massimizzazione della correlazione d'immagine, e la descrizione (3.3) viene comunemente adottata in luogo della (3.1).

Si consideri ora il caso dell'immagine di una particella tracciante impressa sulla pellicola dell'apparecchio fotografico o sul sensore CCD, in una ideale

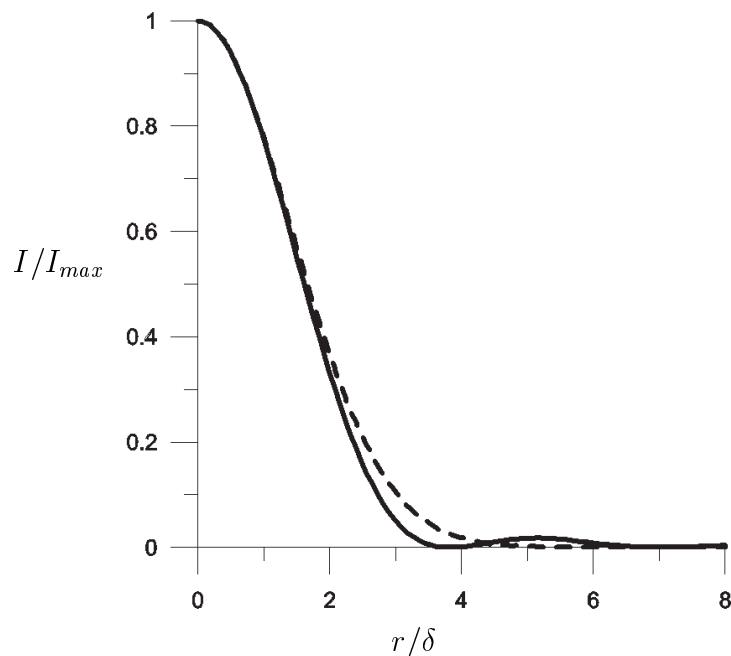


Figura 3.13: Andamento normalizzato della distribuzione d'intensità d'immagine con la distanza dal centro del disco di Airy (linea continua), e approssimazione con un curva di Gauss (linea tratteggiata).

misurazione *PIV*. Se la distanza Y_a tra il piano dell'oggetto — cioè il piano verticale cui appartiene la particella — ed il sistema ottico è sufficientemente grande — nel senso $Z \gg D_a$, dove D_a è in questo caso l'apertura del diaframma nel sistema ottico — l'onda di luce riflessa dalla particella può essere trattata come un'onda piana. Nei comuni sistemi ottici la pellicola fotografica, o il sensore CCD, sono prossimi al piano del diaframma — dunque z è tale che, per valori comuni di D_a e λ , si ha $F \sim 1$ —, ma l'interposizione di una lente consente di proiettare su di essi l'immagine che si otterrebbe su di un piano a notevole distanza. È possibile cioè descrivere l'immagine con riferimento alla modello della diffrazione Fraunhofer, nonostante non sia $F \gg 1$,

e utilizzare ancora le (3.1), (3.2) o l'approssimazione (3.3). Si può considerare, ragionevolmente, il solo disco di Airy come rappresentativo dell'intera immagine della particella; il suo diametro d_{diff} — cioè, con buona approssimazione, il diametro dell'immagine della particella... — è determinato dal primo zero dell'equazione (3.1), e si ottiene

$$d_{diff} \simeq 2.44\pi\delta . \quad (3.4)$$

La particella tracciante è stata sinora considerata come puntiforme; per tenere eventualmente conto del suo diametro d_p , si può fare riferimento all'espressione

$$d_{diff} \simeq \sqrt{(Md_p)^2 + (2.44\pi\delta)^2} , \quad (3.5)$$

(Adrian e Yao, 1985), in cui M è il *fattore d'ingrandimento* della lente:

$$M := \frac{y_a}{Y_a} .$$

È utile riferire le espressioni ottenute sin qui alle grandezze che comunemente sono utilizzate per la classificazione tecnica dei sistemi ottici; oltre al fattore d'ingrandimento M , è necessario quindi introdurre la *distanza focale* f , che vincola la distanza tra il piano dell'immagine ed il piano dell'oggetto, i.e.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{y_a} + \frac{1}{Y_a} ,$$

ed il numero adimensionale $f_{\#}$, come rapporto tra la grandezza appena introdotta ed il diametro dell'apertura del diaframma:

$$f_{\#} := \frac{f}{D_a} .$$

Le (3.1) e (3.2) per la distribuzione dell'intensità d'immagine, o le (3.4) e (3.5) per il diametro rappresentativo dell'immagine della particella, possono

essere allora utilizzate esprimendo la quantità δ in funzione di M , $f_{\#}$, e della lunghezza d'onda λ :

$$\delta = \frac{f_{\#}(M+1)\lambda}{\pi}.$$

Se si considera, anziché l'immagine di una sola sorgente puntiforme, quella di due o più sorgenti, queste si sovrapporranno le une alle altre; se le sorgenti sono estremamente vicine nel piano della misurazione, esse possono apparire indistinguibili una volta proiettate sul piano dell'immagine, per l'esaltazione dell'interferenza tra le rispettive onde. In questo senso, e secondo il *criterio di Rayleigh*, le immagini di due sorgenti puntiformi si dicono *ben risolte* se il centro del disco di Airy della prima cade al più non oltre il primo minimo per la distribuzione d'intensità d'immagine per la seconda. Tale distanza è pari al raggio del disco di Airy per la sorgente puntiforme e dipende dalle caratteristiche del sistema ottico; definendo il *limite di risoluzione* ρ_m come il massimo numero di sorgenti puntiformi “ben risolte” per unità di lunghezza, si ottiene

$$\rho_m = \frac{2}{d_{diff}}; \quad (3.6)$$

nel caso ideale, secondo le (3.4) e (3.2), si ha

$$\rho_m \simeq \frac{2}{2.44\pi\delta} = \frac{1}{1.22} \frac{D_a}{y_a\lambda}$$

La qualità del sistema ottico, in questo senso, può essere espressa, con lo stesso significato, tramite il numero di coppie di linee ben risolte — i.e. una bianca e una nera — per unità di lunghezza nella direzione ortogonale alle linee stesse; ragione per cui il limite di risoluzione si esprime generalmente in *coppie di linee per millimetro* scrivendo lps/mm — dall'inglese “*line pairs per millimeter*”. Per effetto delle imperfezioni della lente, o del sistema ottico in genere, il valore teorico del limite di risoluzione espresso nella (3.6) non può essere raggiunto; in luogo di tale espressione, si può fare riferimento alle

specifiche tecniche che accompagnano usualmente i sistemi ottici. Evidentemente, il limite di risoluzione è un parametro importante per il bilanciamento del sistema di misurazione *PIV*: è necessario che la distanza tra le particelle traccianti, a meno del fattore d'ingrandimento M (i.e. il valore misurato sul piano dell'immagine), si discosti sufficientemente dal valore $2/\rho_m$.

3.4 Formalizzazione del procedimento...

Il procedimento descritto in maniera discorsiva nel Paragrafo 3.2 può essere ora formalizzato, a partire da opportune definizioni. Un'area di selezione α è una qualsiasi regione quadrata, di lato l fissato e centro (x_α, y_α) , nel dominio d'interesse Ω :⁷

$$\alpha := [x_\alpha - l/2, x_\alpha + l/2) \times [y_\alpha - l/2, y_\alpha + l/2)$$

Il sistema di riferimento per le coordinate x e y è orientato e posizionato come in Fig. 3.14: l'origine, per uniformarci alla convenzione utilizzata nel trattamento digitale delle immagini, coincide con il vertice in alto a sinistra del fotogramma. Allo stesso modo è possibile definire l'area di selezione β , a partire dal suo centro (x_β, y_β) . Per un generico fotogramma, si può descrivere l'*immagine del dominio d'interesse* come la funzione

$$I_\Omega : \Omega \rightarrow [0, b]$$

che associa ad ogni punto del dominio d'interesse un *valore d'intensità d'immagine*: un numero reale tra 0 e b in corrispondenza biunivoca con il tono di grigio dell'immagine, rispettivamente da nero a bianco. Si assuma che l'immagine di ogni particella isolata sia ben approssimabile dalla (3.3); allora si

⁷I simboli Ω , λ , m ed n sono utilizzati nel presente paragrafo senza alcun riferimento ai significati dati loro nel capitolo precedente.

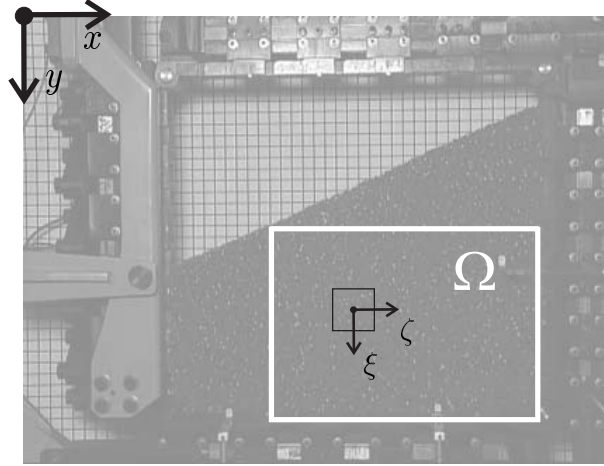


Figura 3.14: Coordinate globali, riferite all'intero fotogramma, o locali, riferite alla singola area di selezione.

può descrivere la distribuzione d'intensità d'immagine per una costellazione di particelle come

$$I_{\Omega}(x, y) = I_{max} \sum_{p=1}^P \exp\left(-\frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{4\delta^2}\right), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (3.7)$$

dove (x_p, y_p) è la posizione nel piano dell'immagine, della generica particella p nell'insieme P delle particelle che contribuiscono alla formazione dell'immagine complessiva nel dominio d'interesse (vedi Fig. 3.15); si è supposto che il valore massimo d'intensità d'immagine I_{max} sia il medesimo per ogni particella, il che è ragionevole se si è garantita un'illuminazione uniforme. Sarà utile poi definire l'immagine di α , ovvero la funzione I_{α} , con dominio

$$\mathcal{D} := [-l/2, l/2) \times [-l/2, l/2),$$

interpretabile come restrizione di I_{Ω} all'area di selezione α , espressa in funzione delle coordinate (ζ, ξ) (vedi fig. 3.14):

$$I_{\alpha}(\zeta, \xi) = I_{\Omega}(\zeta + x_{\alpha}, \xi + y_{\alpha}), \quad \forall (\zeta, \xi) \in \mathcal{D}.$$

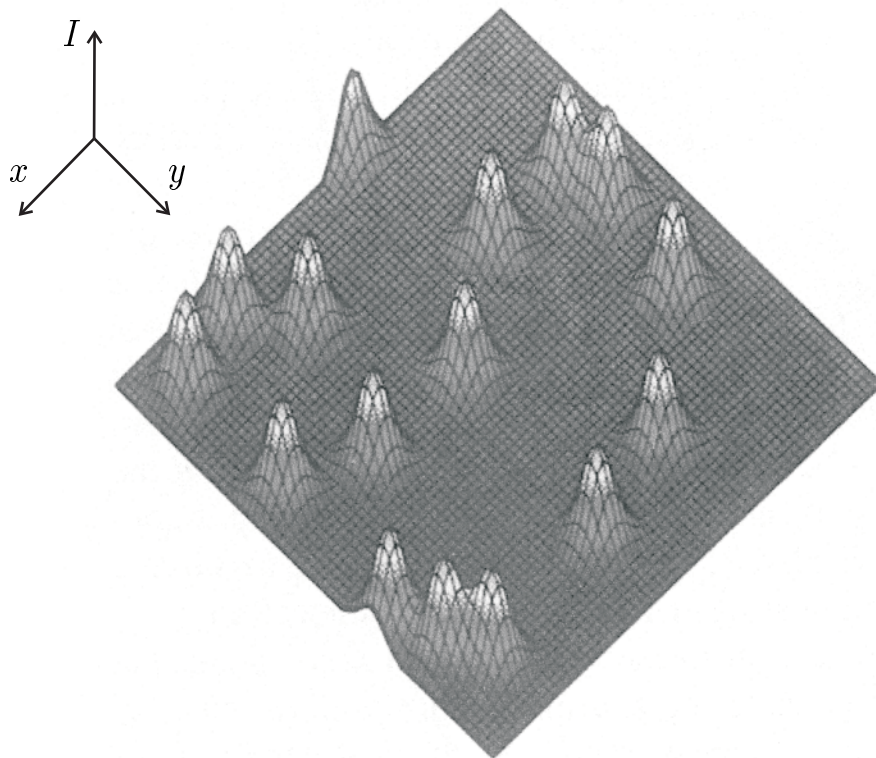


Figura 3.15: (Modificata in base a *Prasad*, 2000) Porzione del grafico della distribuzione d'intensità d'immagine, costruita per composizione dell'immagine "gaussiana" di ogni particella tracciante.

In generale ogni fotogramma è caratterizzato da una diversa funzione d'intensità d'immagine; riferendoci alla sequenza da analizzare dovremmo scrivere ad esempio $I_{\Omega}^{(N)}$ e $I_{\Omega}^{(N+1)}$ con riferimento ai rispettivi fotogrammi, e precisare $I_{\alpha}^{(N)}$, o $I_{\beta}^{(N+1)}$, con l'ovvio significato. Eviteremo per ora questo appesantimento della notazione, e ci occuperemo per il momento delle immagini di aree di selezione in senso astratto; confronteremo le immagini di aree di selezione diverse (e.g. I_{α} , I_{β} , I_{γ} , I_{λ}) senza riferirle ad uno specifico fotogramma. Esse appartengono all'insieme delle funzioni definite sul dominio \mathcal{D} e su di

esso assolutamente integrabili. Come si accenna in Appendice A, è possibile dotare questo insieme di una struttura di spazio vettoriale con norma e prodotto scalare; ad esempio la norma di I_α è

$$\|I_\alpha\| := \left(\int_{\mathcal{D}} I_\alpha \cdot I_\alpha \, d\zeta \, d\xi \right)^{1/2}, \quad (3.8)$$

ed il prodotto scalare tra due qualsiasi I_α e I_β è

$$\langle I_\alpha, I_\beta \rangle := \int_{\mathcal{D}} I_\alpha \cdot I_\beta \, d\zeta \, d\xi \quad (3.9)$$

$$C(I_\alpha, I_\beta) := \frac{\langle I_\alpha, I_\beta \rangle}{\|I_\alpha\| \|I_\beta\|}, \quad (3.10)$$

Con lo stesso spirito introduciamo la quantità detta *correlazione statistica* tra I_α e I_β . La definizione è simmetrica rispetto agli argomenti, nel senso che

$$C(I_\alpha, I_\beta) = C(I_\beta, I_\alpha).$$

È possibile dimostrare che la successione di funzioni $\{C_{mn}\}_{m,n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ con

$$C_{mn} : [0, l) \times [0, l) \mapsto \mathbb{C}$$

tale che

$$C_{mn}(\zeta, \xi) = e^{-i\frac{\pi}{l}(m\zeta+n\xi)}, \quad \forall (\zeta, \xi) \in \mathcal{D}$$

è una base ortonormale e completa per tale spazio, e che quindi I_α (o $I_\beta, I_\gamma, I_\lambda$) può essere rappresentata in serie di Fourier; è lecito affermare che sia, ad esempio,

$$I_\alpha(\zeta, \xi) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} C_{mn}(\zeta, \xi),$$

per *quasi ogni* (ζ, ξ) nel dominio della funzione. I coefficienti c_{mn} possono essere interpretati come le proiezioni della funzione I_α nelle direzioni degli elementi della base ortonormale: per ogni intero relativo m o n ,

$$c_{mn} = \langle I_\alpha, C_{mn} \rangle.$$

Una tale rappresentazione, cioè come combinazione lineare degli elementi di una base con pesi opportuni, dà significato ad analogie con i più “usuali” spazi vettoriali di dimensioni finite. Si consideri ad esempio l’illustrazione in Fig.3.16, in cui appaiono quattro vettori nel piano che rappresentano (rispet-

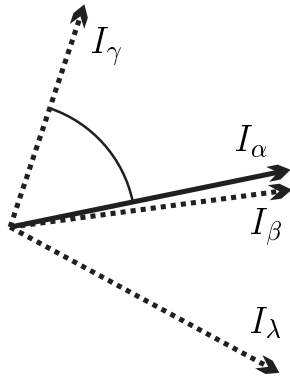


Figura 3.16: Le immagini di α , β , γ , λ sono rappresentati idealmente come vettori nel piano, anziché come vettori dello spazio delle funzioni integrabili sul dominio $[0, l) \times [0, l)$. Il vettore I_β ha pressoché la stessa “direzione” di I_α .

tivamente e idealmente) le funzioni di I_α , I_β , I_γ e I_λ : il valore della correlazione statistica tra I_α e (ad esempio) I_γ corrisponde, tramite l’analogia, al coseno dell’angolo tra i rispettivi vettori in figura. Inoltre, se l’illuminazione è uniforme nel dominio d’interesse e se per ogni area di selezione non è significativo il numero di particelle la cui immagine vi appare solo parzialmente (i.e. tagliata dal bordo), è possibile affermare che, con buona approssimazione: (i) la norma della funzione I_α (o I_β , I_γ , I_λ) dipende unicamente dal numero di particelle traccianti posizionate all’interno dell’area α mentre (ii) “direzione e verso” di I_α (o I_β , I_γ , I_λ), nello spazio funzionale che le compete, dipendono unicamente dalle coordinate delle particelle traccianti nel riferimento locale dell’area di selezione.

Utilizzando con licenza il linguaggio suggerito dall'analogia vettoriale, la parte interessante dell'informazione — cioè quella relativa alla posizione delle particelle nel riferimento locale dell'area di selezione — è contenuta in “direzione e verso” dell'immagine di ciascuna area di selezione: ad esempio, nel caso

$$C(I_\alpha, I_\gamma) = 1, \quad (3.11)$$

le particelle nell'area di selezione α hanno la stessa posizione (nel riferimento locale) delle particelle in γ ; in caso contrario si ha

$$C(I_\alpha, I_\gamma) < 1.$$

Si intuisce inoltre dall'analogia ciò che potrebbe essere dimostrato in maniera rigorosa: l'informazione contenuta nelle immagini di due aree di selezione è tanto più “simile” quanto più il valore della correlazione è “prossimo” all'unità: analogamente tra i vettori in Fig.3.16, quello più simile in direzione ad I_α è I_β , e coerentemente si ha

$$C(I_\alpha, I_\lambda) < C(I_\alpha, I_\gamma) < C(I_\alpha, I_\beta) \simeq 1.$$

Si vuole con questo motivare, non rigorosamente, l'utilizzo di un criterio di massimizzazione della correlazione come criterio di ricerca di aree di selezione omologhe in fotogrammi successivi. Tornando all'analisi di una sequenza di immagini, scelto il fotogramma N e l'area di selezione α , l'individuazione dell'area di selezione β nel fotogramma $N + 1$, la cui immagine sia pressoché identica a quella di α , può essere ottenuta massimizzando la correlazione tra $I_\alpha^{(N)}$ e $I_\beta^{(N+1)}$ al variare l'area di selezione β . Introduciamo il generico vettore spostamento

$$\mathbf{s} := (s_x, s_y)$$

e per comodità, al posto di β , definiamo dell'area di selezione $\alpha + \mathbf{s}$, traslata rispetto ad α del vettore \mathbf{s} : quella il cui centro ha coordinate

$$x_{\alpha+\mathbf{s}} = \alpha + s_x, \quad y_{\alpha+\mathbf{s}} = y_\alpha + s_y.$$

Con questo formalismo, il procedimento consiste nella massimizzazione della correlazione

$$C(I_\alpha^{(N)}, I_{\alpha+\mathbf{s}}^{(N+1)}) \quad (3.12)$$

al variare del vettore spostamento \mathbf{s} . Non si conosce lo spostamento $\mathbf{s}_\alpha^{(N)}$ definito come il valore che massimizza la correlazione indicata sopra — ammesso che ne esista uno solo —, poiché è appunto ciò che si intende determinare; generalmente, se ne ha però una stima in ragione di ulteriori informazioni sul moto ottenute ad esempio tramite misure analoghe, o strumenti diversi. Cioè, come rappresentato in Fig. 3.17, è possibile limitare la ricerca ad un

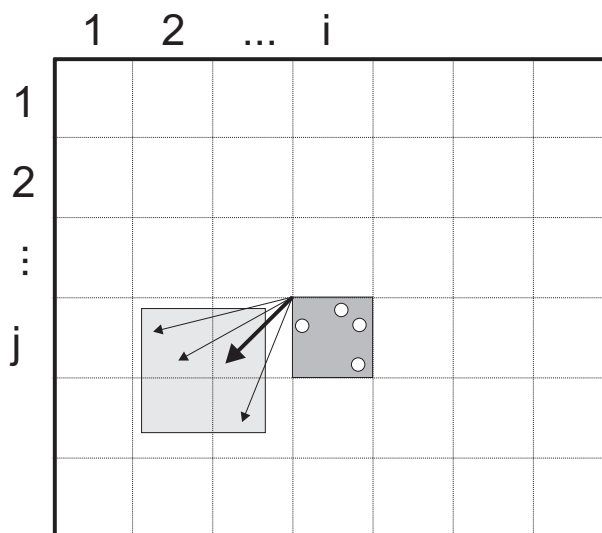


Figura 3.17: La ricerca è limitata, a titolo di esempio, all'insieme Π dei vettori che portano il vertice dell'area di selezione $[i, j]$ nella regione (quadrata) contraddistinta in figura da un grigio più chiaro.

insieme Π_α di vettori tale che, con certezza, $\mathbf{s}_\alpha^{(N)} \in \Pi_\alpha$. La funzione che restituisce il valore di correlazione (3.12) al variare di \mathbf{s} in Π_α è detta *funzione di correlazione* per l'area di selezione α , relativa al fotogramma N . In Fig. 3.18 è rappresentato un suo possibile grafico (detto usualmente *superficie di correlazione*), in cui è evidente il punto di massimo $\mathbf{s}_\alpha^{(N)}$, che determina il vettore traslazione da associare all'area di selezione α . Applicando il procedimento ad ogni area di selezione individuata dalla griglia sul fotogramma N si ottiene un campo (discreto) di spostamenti; ripetendo tale operazione per ogni coppia di fotogrammi consecutivi nella sequenza si ottiene una successione di campi di spostamento.

Manca, nella letteratura nota allo scrivente, un tentativo di sistemazione rigorosa del metodo esposto sopra; ciò che, d'altronde, non è tra i compiti di questo lavoro. Ci si è limitati allora a fare uso di un'analogia vettoriale per rendere immaginabile ciò che è l'impalcato teorico a supporto del metodo. Cionondimeno, si vuole qui segnalare questa lacuna, dovuta ad un tono di generico empirismo che ad alcuni forse appare consentito dall'attributo "statistica" che compare accanto al termine "correlazione". È pratica diffusa, nella letteratura inerente, fare riferimento — o rimandare, demandare —, per chiarimenti specifici, a testi generici. Il riscontro delle misure a fronte di quelle ottenute con altri metodi è dunque a tutt'oggi — almeno secondo lo scrivente — l'unico elemento valido ed eloquente a garanzia della bontà e dell'efficacia del procedimento.

3.5 Correlazione ed analisi di segnale

La correlazione tra le immagini di due aree di selezione può essere calcolata secondo il *metodo spaziale*, cioè per computo diretto della (3.10) a partire

dalle funzioni I_α e I_β ; oppure, secondo la pratica più comune, si può fare uso del *metodo delle frequenze*, con cui si indica qui il procedimento esposto di seguito, caratteristico della disciplina detta *analisi di segnale* (Bendat e Piersol, 1971; Papoulis, 1977). Nella letteratura scientifica il termine *segnale* indica una quantità fisica espressa in funzione di alcune variabili indipendenti. Nel seguito del paragrafo, per utilità, il termine *segnale periodico* sarà riservato per le funzioni definite sul piano reale, periodiche di periodo L in entrambe le variabili spaziali, *integrabili* su ogni regione

$$[nL, (n+1)L) \times [mL, (m+1)L) ,$$

dove n ed m sono numeri interi relativi arbitrariamente scelti. In Appendice A sono presentati in maniera semplificata alcuni strumenti e definizioni propri dell'analisi di segnale, utili alla comprensione del paragrafo, in gran parte derivati dalla branca della matematica denominata *analisi di Fourier*; nella stessa appendice si rende inoltre precisa la richiesta di integrabilità appena espressa.

Nell'area d'interesse Ω , si considerino l'area di selezione α e la regione di ricerca Π_α quadrata di lato L il cui centro coincide con quello dell'area di selezione α :

$$\Pi_\alpha = \{ (x, y) \in \Omega \mid x_\alpha - L/2 \leq x < x_\alpha + L/2, \quad y_\alpha - L/2 \leq y < y_\alpha + L/2 \} .$$

È possibile costruire un segnale $\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}$ come ripetizione periodica dell'immagine I^{N+1} ristretta alla regione di ricerca Π_α , scritta nel sistema di riferimento con origine il centro dell'area di selezione α (vedi Par. 3.4 e Fig. 3.14); il segnale $\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}$ è definito cioè tale che sia

$$\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}(\zeta, \xi) = I^{N+1}(x, y)$$

se

$$\zeta = nL + (x - x_\alpha), \quad \xi = mL + (y - y_\alpha),$$

con n ed m numeri interi relativi arbitrariamente scelti. Nello stesso sistema di riferimento è possibile costruire un segnale \mathcal{S}_α^N come ripetizione periodica dell'immagine dell'area di selezione α nel fotogramma N :

$$\mathcal{S}_\alpha^N(\zeta, \xi) = I^N(x, y)$$

se

$$\zeta = nL + (x - x_\alpha), \quad \xi = mL + (x - x_\alpha), \quad (x, y) \in \alpha,$$

con n ed m numeri interi relativi arbitrariamente scelti, e

$$\mathcal{S}_\alpha^N(\zeta, \xi) = 0$$

altrimenti. Il segnale $\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}$ può essere banalizzato come la “pavimentazione” di \mathbb{R}^2 con l'immagine della regione Π_α nel fotogramma $N + 1$, mentre il segnale \mathcal{S}_α^N è costruito invece seguendo la procedura denominata in inglese “*zero-padding*”: esso è la ripetizione periodica nel piano reale, con periodo L , dell'immagine dell'area di selezione α (di lato l) nel fotogramma N : essendo $l < L$, vi sono regioni del piano non “riempite” con l'immagine di α ed in tali regioni il segnale \mathcal{S}_α^N viene posto uguale a zero. Si può verificare che il prodotto scalare tra le immagini delle aree di selezione α e $\alpha + \mathbf{s}$, rispettivamente nei fotogrammi N ed $N + 1$, sia pari al prodotto di convoluzione dei segnali \mathcal{S}_α^N e $\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}$ valutato in corrispondenza dello spostamento \mathbf{s} :

$$\langle I_\alpha^N, I_{\alpha+\mathbf{s}}^{N+1} \rangle = \mathcal{S}_\alpha^N * \mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}(\mathbf{s}).$$

dove l'operatore $(\cdot) * (\cdot)$ indica la convoluzione tra i due segnali. Per l'omonimo teorema si ottiene

$$\langle I_\alpha^N, I_{\alpha+\mathbf{s}}^{N+1} \rangle = [[\mathcal{S}_\alpha^N]^F [(\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1})_{\mathbf{s}}]^F]^{-F}, \quad (3.13)$$

dove gli operatori $[\cdot]^F$ e $[\cdot]^{-F}$ rappresentano rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata di Fourier, mentre $(\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1})_{\mathbf{s}}$ rappresenta il segnale $\mathcal{S}_{\Pi_\alpha}^{N+1}$ *traslato* di \mathbf{s} .

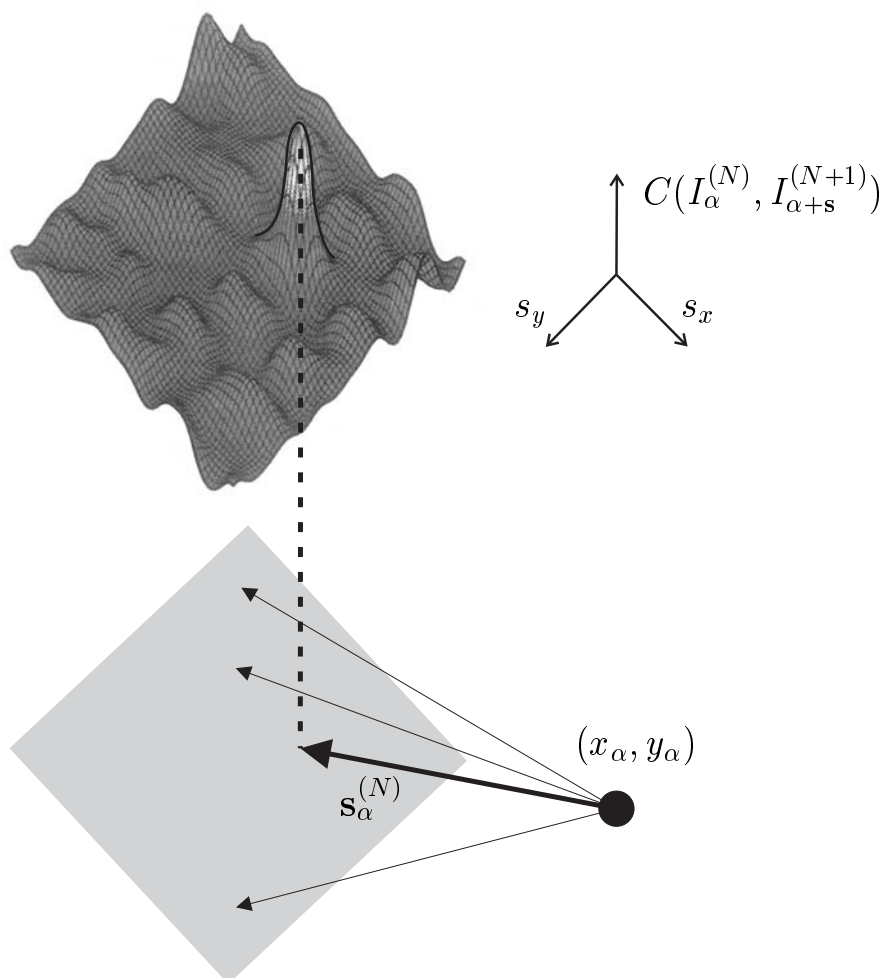


Figura 3.18: (Modificata in base a *Prasad*, 2000) È rappresentata la superficie di correlazione per l'area di selezione α e il fotogramma N . La ricerca del vettore spostamento è limitata all'insieme Π dei vettori traslazione che trasformano il vertice (x_α, y_α) in un punto qualsiasi della regione (quadrata) in grigio chiaro (vedi Fig. 3.17).