

Capitolo 2

Flussi granulari asciutti

La categoria dei fenomeni in cui i materiali granulari esibiscono un comportamento di tipo fluido è oggetto, oggi, di un notevole interesse da parte di ricercatori nei campi della fisica, della meccanica, e della geotecnica; si presenta però come un insieme estremamente eterogeneo, la cui classificazione non è ancora consolidata.

Una prima luce fu gettata da *Bagnold* (1954). A partire da un modello concettuale estremamente semplificato, e completandolo con l'analisi sperimentale, egli indaga il comportamento di un materiale granulare monodisperso, costituito di grani sferici, in condizioni di flusso (bidimensionale) laminare, omogeneo e stazionario. Con riferimento alla notazione in Figura 2, egli osserva l'instaurarsi di una pressione normale σ_{yy} ¹, detta “pressione dispersiva”,² e di una pressione tangenziale σ_{xy} , sui piani paralleli alla dire-

¹Si segue in questo lavoro la convenzione adottata in geotecnica per il *tensore delle pressioni* $\boldsymbol{\sigma}$. Cioè, il segno delle sue componenti normali (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) è preso positivo quando il generico volume è sollecitato da una compressione omogenea; il segno delle componenti tangenziali (σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} , ...) è scelto coerentemente.

²Da “*dispersive pressure*” (*Bagnold*, 1954). Lo stesso *Bagnold* commenta (1966): “*The*

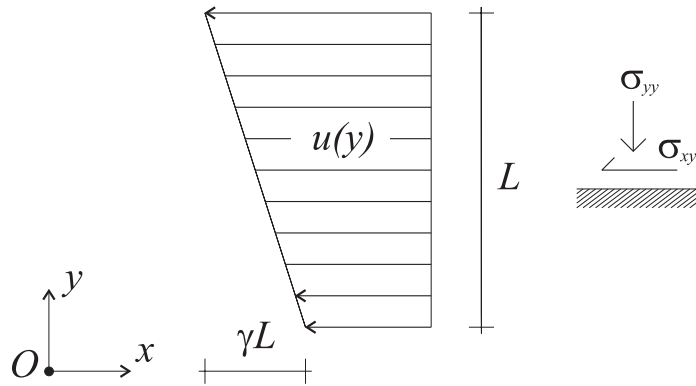


Figura 2.1: Flusso bidimensionale, laminare e omogeneo (con spessore L) di un materiale granulare. È rappresentato il sistema di riferimento (O, x, y) , le componenti σ_{yy} e σ_{xy} del tensore delle sollecitazioni interne, la velocità scalare $u(y)$ in direzione x ed il significato della velocità di scorrimento $\gamma := \frac{\partial u}{\partial y}$.

zione x di scorrimento. Nell’ambito delle densità prese in considerazione per le sperimentazioni, e per velocità di scorrimento sufficientemente elevate, egli osserva un andamento delle pressioni proporzionale al quadrato della velocità di scorrimento:

$$\sigma_{yy}, \sigma_{xy} \propto \gamma^2 .$$

L’insieme di ambiti nei quali il comportamento del materiale granulare è efficacemente descritto da relazioni di questo tipo, è detto talvolta “regime di inerzia granulare”³.

È oramai appurato che, nella classe dei fenomeni in cui i materiali granulari normal stress component $[\sigma_{yy}]$ is dispersive, or dilatant. It is directly measurable as a positive pressure exerted by the solids against the shear boundaries, and were it not for the constraint imposed by these boundaries the solid would disperse indefinitely through the fluid like snooker balls on an infinite table.”

³Da “grain inertia regime” (Bagnold, 1954).

ri sono reminescenti del comportamento dei fluidi, coesistono scenari diversi. La classificazione di questi, come già detto, è ancora carente; nella letteratura contemporanea, ad ogni modo, si fa riferimento più o meno abitualmente a:

- un “regime quasi-statico”, riferendoci a quei fenomeni nei quali le azioni d’inerzia sono trascurabili rispetto ad altre grandezze misurabili;
- un “regime dei gas granulari”, ovvero quei fenomeni nei quali il movimento di agitazione dei grani domina il comportamento fisico macroscopico dell’insieme; con minore proprietà di linguaggio ci si riferisce talvolta a quest’ambito come al “regime dei flussi rapidi di materiale granulare”;
- un regime intermedio, detto anche dei “flussi granulari densi”: quei fenomeni in cui le azioni d’inerzia sono già rilevanti, ma la rete di contatti che costituisce lo scheletro solido non è ancora dissolta.

Il regime di inerzia granulare descritto da *Bagnold* è essenzialmente identificabile, secondo la terminologia corrente, con il regime dei gas granulari. Nei paragrafi che seguono, sino alla fine del capitolo, è proposta una sintesi delle principali conoscenze acquisite relativamente a questi tre specifici ambiti, dal punto di vista reologico e con indagini sperimentali di tipo tradizionale e numerico.

2.1 Regime quasi-statico

Un volume di materiale granulare che evolve in condizioni di stato tensionale e deformazione omogenei, se sottoposto ad incrementi eguali, lenti e continui di deformazione deviatorica a pressione sferica costante, reagisce alle azioni

esterne dapprima come compete ad un solido, cioè opponendo incrementi di stato tensionale ad incrementi di deformazione; infine il suo comportamento muta sino ad essere riconducibile a quello dei fluidi comunemente detti: raggiunge una condizione nella quale sono possibili deformazioni deviatoriche praticamente illimitate senza incrementi di stato tensionale.

Casagrande (1936, 1938) osserva per primo questa peculiarità del comportamento dei materiali granulari. Egli esegue prove di compressione triassiale drenata su sabbia e rileva che campioni dello stesso materiale, a parità di pressione efficace⁴ di confinamento, ma indipendentemente dallo stato di addensamento iniziale, se sottoposti ad elevate deformazioni deviatoriche, raggiungono e mantengono il medesimo valore di indice dei vuoti e stato tensionale efficace. Si considerino a tale proposito la notazione in Figura 2.1 ed i grafici in Figura 2.3 in cui sono rappresentati gli andamenti qualitativi delle prove di cui si è detto, nella fase di applicazione del carico deviatorico; in particolare, per lo stesso materiale ed a parità di pressione di confinamento (σ'_{xx} o $\sigma'_{yy} = \sigma'_{xx}$ in figura), sono confrontate le prove effettuate su di un campione di sabbia (originariamente) ben addensata ed uno di sabbia poco addensata. In una prova a velocità di carico controllata sul primo campione si osserva un comportamento del tipo D-E in Figura 2.3a (risp. A-B in Fig. 2.3b); il volume del campione aumenta progressivamente, ed è necessario applica-

⁴In questo paragrafo, eccezionalmente, si fa riferimento a situazioni sperimentali nelle quali è presente un fluido interstiziale al sistema granulare. Si ripristina quindi, limitatamente a questo ambito, la distinzione tra *pressioni totali* e *pressioni efficaci* secondo la terminologia geotecnica: il tensore $\boldsymbol{\sigma}'$ delle pressioni efficaci è definito pari alla differenza $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_{\text{int}}$ tra il tensore $\boldsymbol{\sigma}$ delle pressioni totali (relativo al sistema bi-fasico saturo consistente dei grani e del fluido interstiziale) ed il tensore $\mathbf{P}_{\text{int}} := p_{\text{int}} \mathbf{I}$ delle *pressioni neutre*, dove p_{int} è la pressione nel fluido. Si indicano σ'_{xx} , σ'_{xy} , σ'_{xz} , ..., σ'_{zz} le componenti del tensore delle pressioni efficaci.

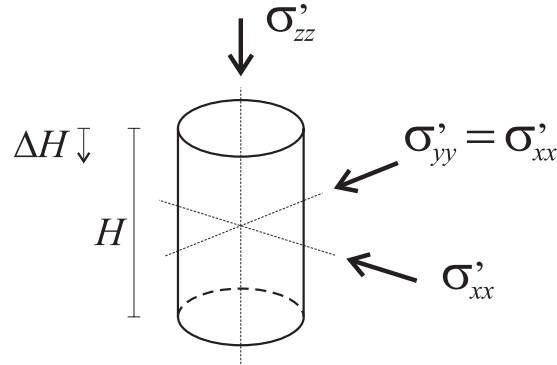


Figura 2.2: Campione di sabbia in una prova di compressione triassiale: componenti principali di pressione efficace σ'_{xx} , σ'_{yy} e σ'_{zz} ; valore iniziale H e variazione ΔH dell'altezza del provino.

re continui incrementi del carico (quindi della pressione efficace principale σ'_{zz}) per ottenere corrispondenti incrementi del cedimento ΔH , indice della deformazione deviatorica. Nel punto E (risp. B) la prova è considerata conclusa: non potendo più opporre incrementi dello stato tensionale ad ulteriori incrementi di carico, il provino si deforma a velocità elevata, cioè in maniera inconciliabile con le condizioni quasi-statiche che devono caratterizzare l'esecuzione della prova. Un'esperienza analoga può essere condotta in condizioni di velocità di deformazione controllata. Il comportamento sarà il medesimo sino al punto D; nel tratto D-E, differentemente dal caso precedente, la prova non si interrompe nel punto E (risp. B) ma prosegue lungo il tratto G-E (risp. B-C) poiché le modalità di esecuzione della stessa impediscono l'abbandono delle condizioni di evoluzione quasi-statica. Dunque nel tratto E-G (risp. B-C) il volume del campione e la resistenza che esso oppone al carico esterno si riducono al crescere della deformazione, sino al raggiungimento del

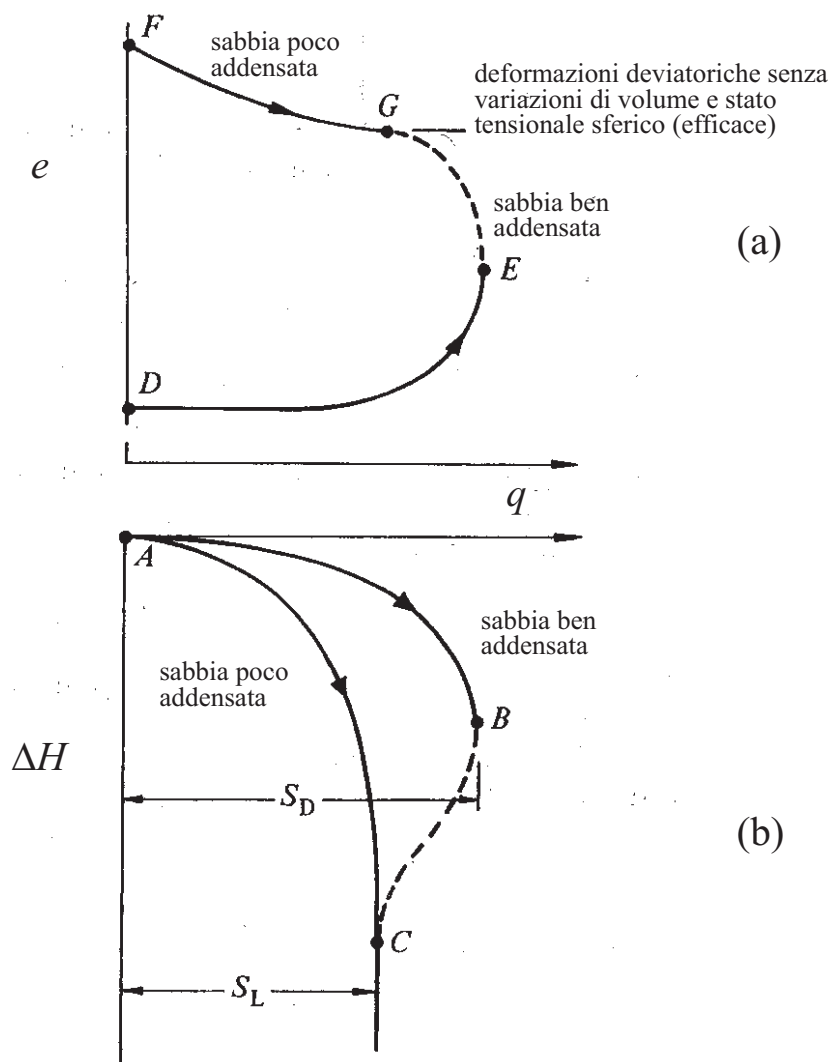


Figura 2.3: (Modificata in base a *Casagrande, 1936*) Andamenti qualitativi nei piani $e - q$ (a) e $\Delta H - q$ (b) , con $q := \sigma_{zz} - \sigma_{xx} = \sigma_{zz} - \sigma_{yy} = \dots = \sigma'_{zz} - \sigma'_{yy}$, per prove di compressione triassiale drenata su sabbia ben addensata (percorsi A-B-C e D-E-G) e poco addensata (risp. A-C e F-G).

punto G nel grafico in Figura 2.3a corrispondente all'asintoto in Figura 2.3b. Si instaura cioè, a partire dal punto iniziale C dell'asintoto, una condizione nella quale la deformazione deviatorica procede a stato tensionale costante e senza soluzione di continuità, come anticipato in apertura di paragrafo.

Si consideri ora una prova eseguita su di un campione di sabbia poco adensata, supponendo che essa avvenga alla stessa pressione di confinamento dell'esempio precedente. Dal punto di vista qualitativo, e indipendentemente dalle condizioni di prova (a velocità di carico o di deformazione controllata), si osserverà un comportamento di tipo contraente, che corrisponde, in Figura 2.3b, alla percorrenza del tratto A-C e dell'asintoto a partire da C. In termini concreti, la reazione del provino agli incrementi di deformazione imposti, dopo una fase iniziale crescente, si stabilizza definitivamente; diviene cioè indipendente dagli incrementi di ΔH e si attesta sul valore corrispondente all'asintoto. Ci si può quindi ricondurre, ancora una volta, allo scenario descritto in apertura di paragrafo e denominato comunemente “stato critico di deformazione”, ovvero alla condizione in cui le deformazioni deviatoriche aumentano con continuità a parità di indice dei vuoti e stato tensionale (efficace). Al variare della pressione efficace di confinamento, per il medesimo materiale, varia il valore critico di indice dei vuoti e lo stato tensionale deviatorico in corrispondenza del quale lo stato critico è raggiunto; si utilizza il termine “linea di stato critico”, (da “*critical state line*”, brev. “*CSL*”) per il luogo di punti (una curva) rappresentativi della condizione di stato critico nei grafici che mettono in relazione le misure dello stato tensionale, tra di loro, o con le misure di deformazione.

In Figura 2.4 la linea di stato critico è tracciata coerentemente con i punti sperimentali di *Vésic e Clough* (1968) nei piani $v-p'$ e $q-p'$, dove v è il *volume specifico* (pari a $1+e$), $p' := \frac{1}{3}(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz})$ è l'*invariante pressione efficace*

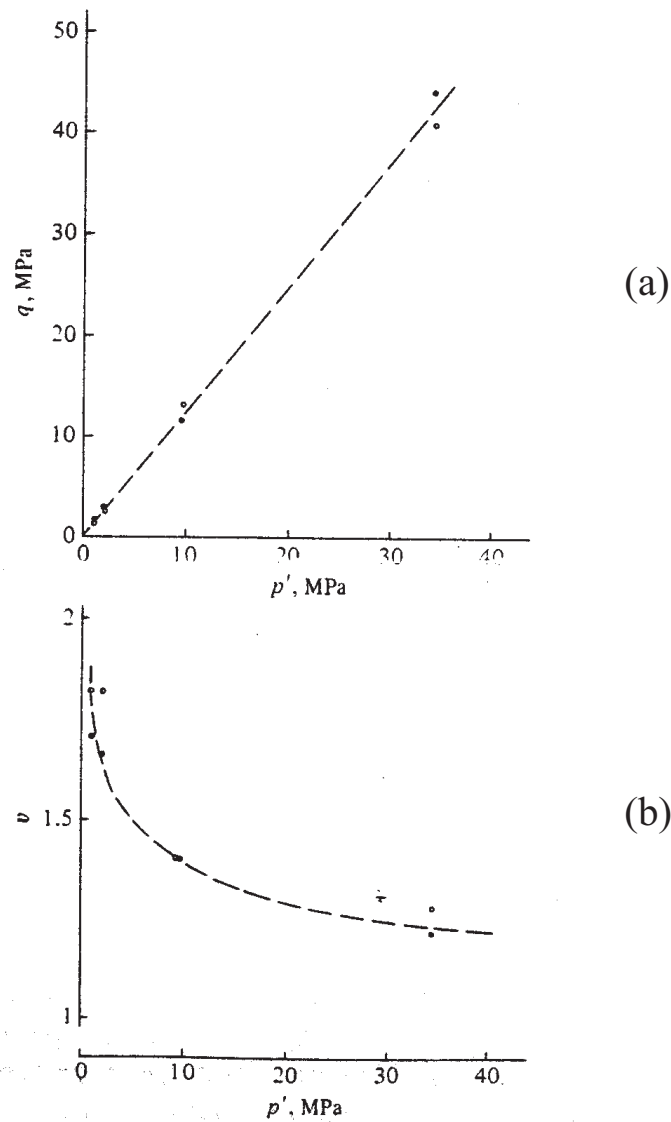


Figura 2.4: (Modificata in base a *Vésic e Clough*, 1968) Campione di Chat-tahochee River Sand sottoposto ad una prova di compressione triassiale drenata; linea di stato critico nei piani piani $v - p'$ (a) e $q - p'$ (b).

sferica e q è l'invariante di pressione deviatorica in condizioni di simmetria assiale, già introdotto in Figura 2. Nel piano delle pressioni, la linea di stato critico è ben approssimata da una retta con coefficiente angolare M_c e passante per l'origine degli assi:

$$q = M_c p' .$$

Andamenti qualitativi simili, per la linea di stato critico, possono essere osservati per materiali granulari sollecitati in condizioni piane di deformazione. Le curve in Figura 2.5 interpolano i punti sperimentali relativi alla condizione di stato critico per un campione, costituito da biglie di acciaio, sottoposto ad una deformazione di taglio semplice nel piano $x - y$, lungo direzione y ; la linea di stato critico nel piano delle pressioni è rappresentabile, anche in questo caso, con una retta per l'origine ed in particolare si ottiene

$$\sigma'_{xy} = \tan \varphi_c \sigma'_{yy} , \quad (2.1)$$

dove φ_c è detto “angolo di attrito allo stato critico”. Non c'è differenza concettuale tra la condizione di stato critico raggiunta in condizione piane o in condizioni assial-simmetriche di deformazione; in particolare, per un materiale isotropo, è possibile mettere in relazione le costanti φ_c e M_c generalizzando la (2.1) a tutte le direzioni attorno all'asse y scelto come asse di simmetria; si ottiene la nota relazione:

$$M_c = \frac{6 \operatorname{sen} \varphi_c}{3 + \operatorname{sen} \varphi_c} .$$

Schofield e Wroth (1968) descrivono lo stato critico come l'effetto macroscopico di un disordine statistico a livello dei grani:

The kernel of our ideas is the concept that soils and other granular materials, if continuously distorted until they flow as a frictional fluid,

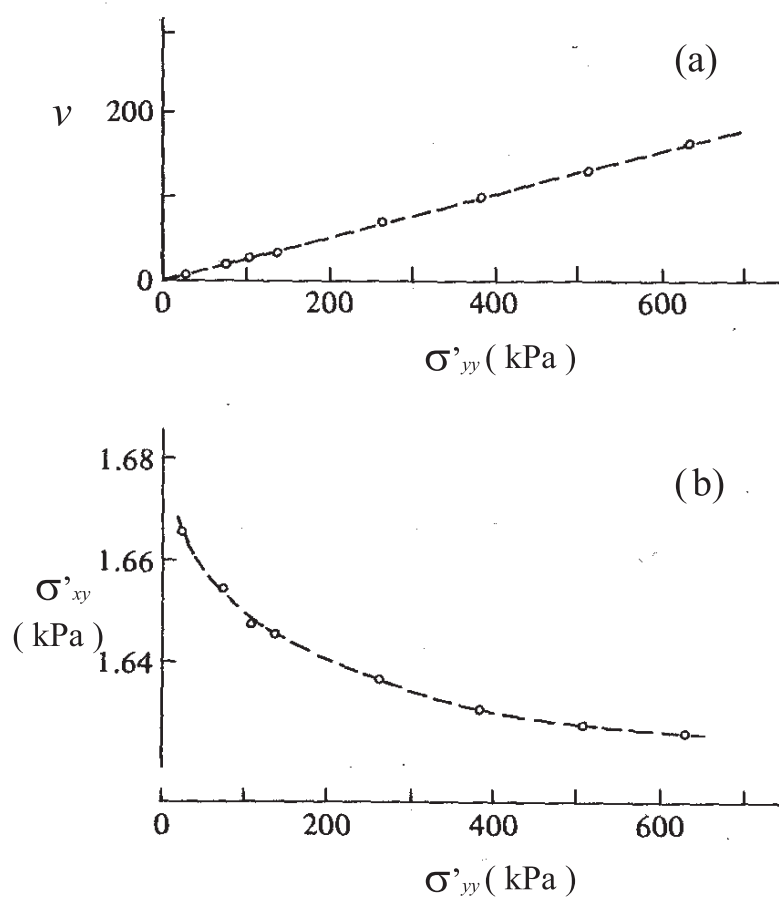


Figura 2.5: (Modificata in base a *Roscoe et al., 1958*) Campione di materiale granulare consistente di sfere di acciaio sottoposto a deformazione di taglio semplice in direzione x lungo i piani di giacitura y ; linea di stato critico nei piani $v - \sigma_{yy}$ (a) e $\sigma_{xy} - \sigma_{yy}$ (b).

will come into a well-defined critical state [...].

Consider a random aggregate of irregular “solid” particles of diverse sizes which tear, rub, scratch, chip and even bounce against each other during the process of continuous deformation. If the motions were viewed at close range we could see a stochastic process of random movements, but we keep our distance and see a continuous flow. At close range we would expect to find many complicated causes of power dissipation and some damage to particles; however, we stand back from the small details and loosely describe the whole power dissipation as “friction,” neglecting the possibilities of degradation or of orientation of particles.

Castro (1969) esegue prove drenate e non drenate di compressione triassiale su sabbie; i punti sperimentali misurati allo stato critico descrivevano curve differenti nei piani $e - p'$ e $q - p'$ a seconda del tipo di prova (i.e. drenata o non drenata). In particolare, in entrambi i grafici, le curve corrispondenti alle prove non drenate erano posizionate al di sotto delle altre: a pari pressione di confinamento efficace ed in condizioni di stato critico, il valore di indice dei vuoti e stato tensionale deviatorico erano quindi sistematicamente inferiori a quelli misurati per le prove drenate. Egli indica, come suggerito da Casagrande, che tra le possibili cause a determinare questo effetto sia il fatto che durante le prove non drenate, successivamente al raggiungimento del picco di resistenza, la velocità di deformazione avesse subito (per ragioni tecniche) variazioni (incrementi) di diversi ordini di grandezza; questo avrebbe indotto, nel materiale, l'organizzazione di una struttura, che Casagrande chiama “*flow structure*”, utile a ridurre la resistenza attritiva. Green e Ferguson riportano in particolare la descrizione di questa struttura da un'orazione di A. Casagrande (Harvard University, 16 novembre 1970) sul fenomeno della

liquefazione dei materiali granulari:

Chiefly on the basis of his investigations of the Fort Peck Dam slide, he evolved the hypothesis that during flow the sand grains keep rearranging themselves so as to create a minimum frictional resistance. He explained this ‘flow structure’ by analogy with a boulder flowing through a hydraulic pipe line which only in one position can be moved by the water without wedging in the pipe; and he suggested that the change from a static structure to a flow structure would explain the very large drop in resistance which is observed in typical liquefaction landslide.

Al di là delle difficoltà sperimentali, i risultati di Castro marcavano la possibilità che un ruolo importante fosse da attribuire alla struttura interna del materiale, a sua volta probabilmente influenzata dalla velocità di deformazione. Queste osservazioni giustificano l’evoluzione dal concetto di stato critico verso quello di “stato stazionario”⁵ (da “*steady state of deformation*”; *Castro e Poulos, 1977; Poulos, 1981*). La definizione di stato stazionario può essere sintetizzata come segue (*Poulos, 1981*) :

The steady state of deformation [...] for any mass of particles is that state at which the mass is continuously deforming at constant volume, constant effective stress, constant shear stress, and constant velocity. The steady state of deformation is achieved after all particle orientation has reached a statistically steady-state condition and after all particle breakage, if any, is complete, so that the shear stress needed to continue deformation and the velocity of deformation remain constant.

⁵Da cui la denominazione “linea di stato stazionario” (da “*steady state line*”, brev. *SSL*) in luogo di “linea di stato critico”.

Le principali differenze rispetto allo stato critico sarebbero quindi il raggiungimento della struttura orientata denominata “*flow structure*”, l’esaurimento di fenomeni transitori come la rottura dei grani, ed il ruolo della velocità di deformazione:

One difference between the steady state and the critical void ratio (CVR) [...] is the explicit requirement that the steady state does not exist unless deformation occurs at constant velocity. In contrast, the implications of the description of critical state in the aforementioned drained case is that, as shear is stopped, after the critical state is reached, the specimen remains in the critical state.

Risulta evidente che alcuni aspetti di questa figura fenomenologica siano ancora poco chiari o, comunque, passibili di interpretazioni diverse. Un ulteriore elemento di complessità è nel fatto che il comportamento di cui si è appena discusso interessa, nella maggior parte dei casi, regioni estremamente ridotte del volume complessivo di materiale sollecitato; questo fenomeno è comunemente noto come “localizzazione della deformazione”. Per campioni di materiale granulare sottoposti a continui incrementi dello stato tensionale deviatorico, successivamente ad una prima fase di deformazione omogenea, si osserva (con poche eccezioni, ed anche con condizioni al contorno “omogenee”) la formazione di *bande di taglio*; con il termine appena introdotto ci si riferisce a regioni essenzialmente bidimensionali del volume di materiale, cioè regioni che si estendono lungo superfici, o interne al materiale, sviluppando spessori estremamente ridotti, nelle quali è concentrata la deformazione. Diverse tecniche di osservazione sono state applicate allo studio di questo particolare aspetto dei flussi quasi-statici di materiale granulare. Con riferimento allo scenario di spinta passiva sulle opere di sostegno, *Roscoe* (1970) utilizza il metodo di osservazione più semplice — ma non per

questo il meno efficace — cioè quello che consiste nel marcare il materiale con un'alternanza di strati colorati; un impiego della stessa tecnica è riportato in Figura 2.6a, assieme all'esemplificazione di una tecnica simile (Fig. 2.6b). Tecniche più evolute sono state ampiamente impiegate a questo scopo,

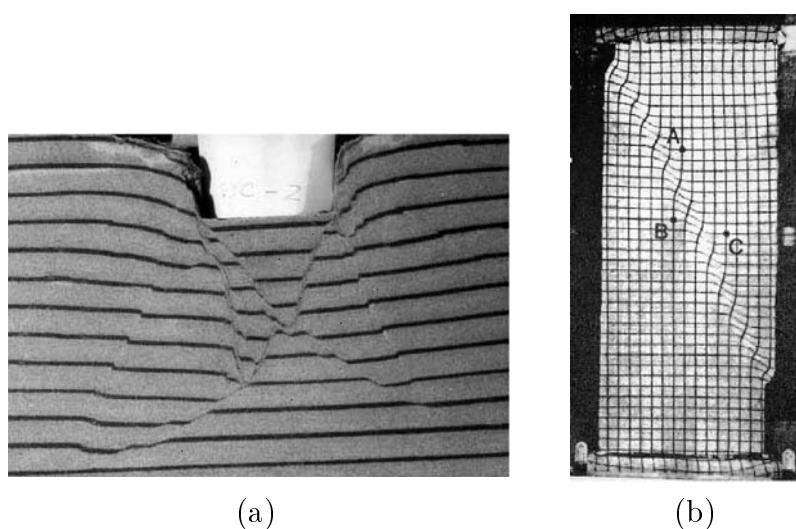


Figura 2.6: Tecniche di visualizzazione per la localizzazione della deformazione. Con l'inserimento di strati di grani colorati (a) in una prova su fondazione modello in piccola scala (da *Tatsuoka et al.*, 1997); con il tracciamento di una griglia (b) sulla faccia del campione in una prova in cella biassiale (da *Yoshida et al.*, 1994).

come la tomografia a raggi-X (*Han e Vardoulakis*, 1991; *Lésniewska e Mróz*, 1994; *Oda e Kazama*, 1998; *Viggiani et al.*, 2004) o la stereofotogrammetria (*Butterfield et al.*, 1970; *Desrue et al.*, 1985; *Finno et al.*, 1996, 1997; *Harris et al.*, 1995; *Mooney et al.*, 1997). *Nübel e Huang* (2004) utilizzano invece la tecnica PIV; in Figura 2.7 sono riportate le immagini di un provino di materiale granulare di forma parallelepipedica per il quale viene traslata una delle pareti laterali di confinamento allo scopo di indurre una condizione di

rottura passiva. Al variare dei toni di grigio è apprezzabile l'escursione dei valori della misura di deformazione deviatorica ε_p .⁶ Appare evidente la loca-

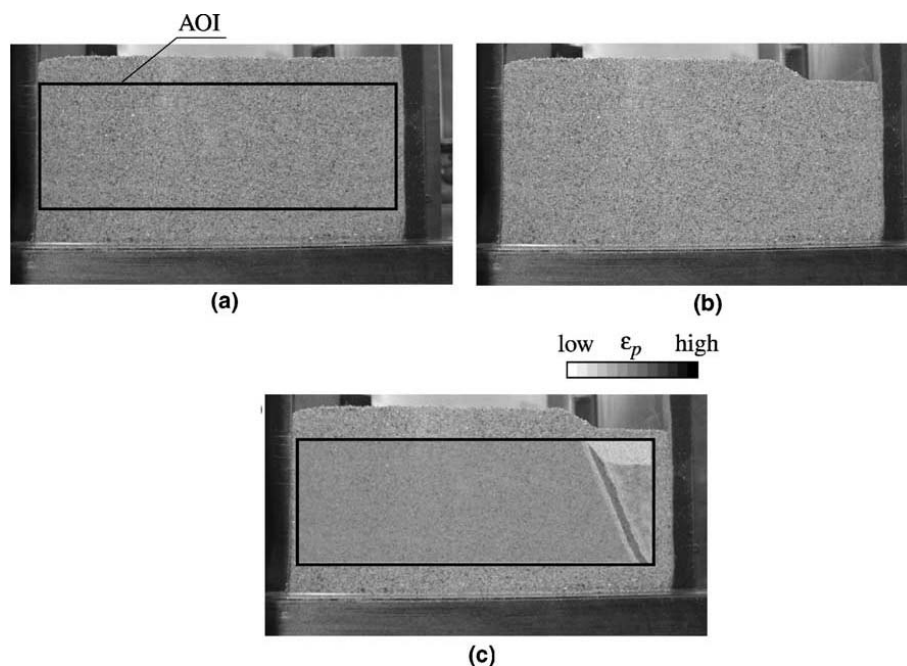


Figura 2.7: (Da *Nubel e Huang, 2004*) Misure di deformazione con la tecnica PIV: il provino di “Karlsruhe Sand” prima (a) e dopo (b) la traslazione della parete di confinamento; in (c) è rappresentata l'escursione dell'invariante di deformazione ε_p . In (a) e (c) è posta in evidenza l'area d'interesse (AOI), cioè la regione del prospetto del provino alla quale è riferita la misurazione.

lizzazione della deformazione in una banda di spessore ridotto (inclinata di

⁶Si indichino $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \dots, \varepsilon_{zz}$ le componenti del tensore di deformazione infinitesima, per il cui segno si adotta la convenzione coerente con quella stabilita per il tensore delle pressioni (le componenti principali sono positive in compressione). Limitandoci al caso bidimensionale si può utilizzare l'invariante di deformazione deviatorica

$$\varepsilon_p := \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})^2 + 2\varepsilon_{xz}^2}.$$

68° rispetto all'orizzontale). Le misure dello spessore della banda sono riportate in Figura 2.8; procedendo dalla sezione più profonda (sezione 4) a quella più superficiale (sezione 1) sono misurati, rispettivamente, valori tra 11 d_{50} e 15 d_{50} , dove d_{50} rappresenta il diametro del passante al 50% in peso per la sabbia che costituisce il provino. Le misure appena citate sono in accordo con l'osservazione, oramai ampiamente condivisa in letteratura, secondo la quale lo spessore delle bande di taglio nei materiali granulari è di per se una lunghezza interna caratteristica del materiale, dipendente essenzialmente dal diametro rappresentativo dei grani ed in particolare corrispondente, per i materiali mono-dispersi, a circa dieci volte il diametro dei grani.

2.2 Gas granulari

È l'ambito fenomenologico in cui il moto di agitazione dei grani, e le collisioni che ne conseguono, hanno un ruolo determinante nei confronti del comportamento macroscopico del materiale granulare. *Blinkowski* (1978) tradusse l'effetto della fluttuazione delle velocità delle particelle, rispetto ad un moto medio opportunamente definito, nell'ambito di un modello al continuo, per mezzo dell'analogia tra un materiale granulare sottoposto a rapida deformazione ed il moto turbolento di un fluido incomprimibile, riprendendo il concetto di “*Raynold stress*”. Il loro effetto venne invece modellato da *Ogawa et al.* (1978, 1980) introducendo il concetto di “temperatura granulare”: l'entropia del sistema è strutturata come somma di due termini indipendenti di cui il primo è riferito al moto di agitazione delle particelle ed il secondo al moto di agitazione delle molecole; a ciascun termine è associata una temperatura, ciò che giustifica l'utilizzo del termine “multi-temperature theory”. In seguito, di nuovo sfruttando l'analogia tra grani e molecole, il flusso di

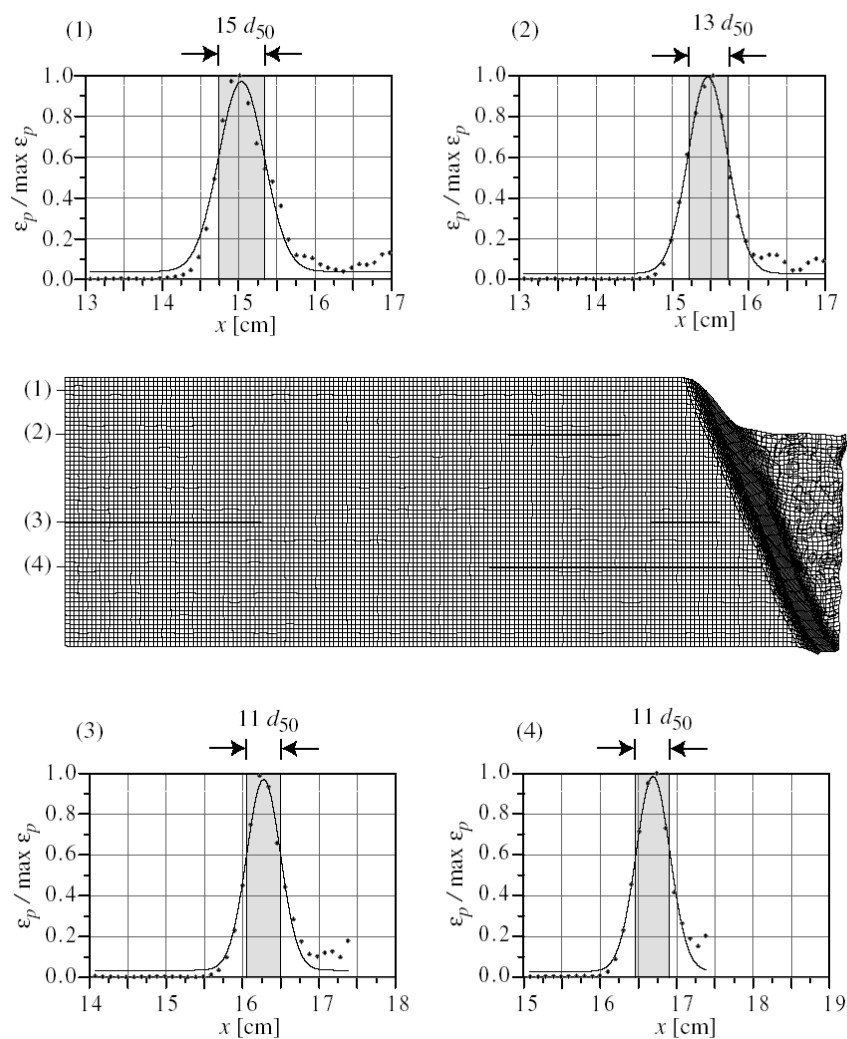


Figura 2.8: (Da *Nubel e Huang*, 2004) Misure dello spessore della banda di taglio relative a quattro diverse sezioni orizzontali del provino. Il valore della misura ε_p di deformazione deviatorica è normalizzato rispetto al suo valore massimo.

un materiale granulare in regime collisionale fu modellato con preciso riferimento alla teoria cinetica dei gas (*Savage e Jeffrey*, 1981; *Jenkins e Savage*, 1983; *Haff*, 1983). Il contatto tra i grani durante una collisione è supposto di durata istantanea, ed ha senso riferirsi essenzialmente a collisioni tra coppie di particelle, ovvero “collisioni binarie”. Nell’adattare le teoria cinetica dei gas alla modellazione dei flussi di materiale granulare è necessario tenere conto del fatto che le collisioni tra grani, al contrario di quelle tra molecole, sono solo *parzialmente* elastiche.

A tal proposito si consideri, sin da ora e per il seguito del paragrafo, il caso di un materiale granulare costituito di particelle sferiche, identiche e lisce. Siano \mathbf{c}_i e \mathbf{c}_j le velocità (rispettivamente) delle particelle i e j prima che esse collidano tra di loro; successivamente alla collisione le rispettive velocità saranno

$$\mathbf{c}'_i = \mathbf{c}_i - \frac{\mathbf{J}_{ij}}{m}, \quad \mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_j + \frac{\mathbf{J}_{ij}}{m},$$

dove \mathbf{J}_{ij} è la quantità di moto trasmessa dalla particella i alla particella j , ed m è la massa di ciascuna. Poiché si è assunto che esse siano lisce, si esclude la possibilità che si scambino azioni lungo le direzioni ortogonali alla retta congiungente i rispettivi centri. Con riferimento alla direzione di quest’ultima, che determiniamo con il versore \mathbf{k}_{ij} orientato dal centro della particella i al centro di j , si assume invece che sia

$$\mathbf{k}_{ij} \cdot (\mathbf{c}'_j - \mathbf{c}'_i) = -\epsilon \mathbf{k}_{ij} \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j),$$

dove lo scalare $\epsilon \leq 1$ è detto “coefficiente di restituzione”. Sotto tali ipotesi la variazione di energia cinetica per il sistema costituito dalle due particelle, e dovuta alla collisione, è pari a

$$\frac{1}{4} m (\epsilon^2 - 1) [\mathbf{k}_{ij} \cdot (\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i)]^2. \quad (2.2)$$

In questi bilanci non sono coinvolti, in alcun modo, i gradi di libertà alla rotazione delle particelle; ciò è conseguenza delle assunzioni circa la geometria delle particelle e dell'assenza di azioni tangenziali (particelle sferiche e lisce).

Si vuole ora introdurre alcune grandezze, relative alla descrizione al continuo di questi fenomeni, le quali fanno parte del linguaggio degli studiosi della materia ed il cui significato è oramai condiviso a meno di differenze non sostanziali nelle definizioni. Sia ψ una qualunque *proprietà microscopica* della singola particella, e $\langle \psi \rangle(x, y, z)$ il valore medio locale *macroscopico* associato alla posizione (x, y, z) dall'espressione

$$\langle \psi \rangle(x, y, z) := \frac{\sum_{VRE(\mathbf{x})} \psi_i}{N_{VRE(\mathbf{x})}}$$

dove la sommatoria a numeratore è calcolata contando tra le particelle del “volume rappresentativo elementare” (VRE) associato alla posizione (x, y, z) , e N_{VRE} è il numero di tali particelle. È possibile introdurre, lasciando tacita la dipendenza dalla posizione, la “velocità media locale” $\mathbf{u} := \langle \mathbf{c}_i \rangle$, il “numero rappresentativo di particelle”

$$n := \frac{N_{VRE}}{V_{VRE}}$$

dove V_{REV} è la misura del VRE, la “frazione solida”

$$\phi := \frac{N_{VRE} V_p}{V_{VRE}}$$

dove V_p è pari al volume della singola particella, e la “densità di massa”

$$\rho := n \langle m \rangle = \dots = \rho_p \phi,$$

in cui ρ_p è la massa per unità di volume del “materiale di nucleo”, cioè il materiale di cui le particelle sono costituite. Si scelga ora un VRE e sia ad esso associata la velocità media locale \mathbf{u} ; per una particella i nel VRE si

definisce “velocità di fluttuazione” la quantità

$$\mathbf{c}'_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{u} .$$

A meno di costanti moltiplicative, e con riferimento alla stesso VRE, si può definire la temperatura granulare come il valore medio locale del quadrato delle fluttuazioni:

$$T := \langle |\mathbf{c}'_i|^2 \rangle .$$

La generazione di temperatura granulare da parte del moto medio avviene essenzialmente secondo due differenti meccanismi (*Campbell*, 1990). Un primo meccanismo è di tipo “collisionale”; si considerino a tal proposito due particelle prossime (e.g. i e j) ciascuna delle quali sia in moto con velocità (risp. \mathbf{c}_i e \mathbf{c}_j) pari alla velocità media locale che compete alla posizione dei rispettivi centri, secondo lo scenario in Figura 2.9a. La collisione tra di esse, incipiente, modificherà le rispettive velocità, generando uno scarto tra quest’ultime ed i valori di velocità media locale associati alle posizioni dei rispettivi centri. Il secondo è un meccanismo “cinetico”: le componenti delle velocità delle particelle nella direzione del gradiente spaziale della velocità media locale (vedi Fig. 2.9b) determinano spostamenti verso posizioni cui corrispondono velocità medie locali differenti: ne consegue, anche in questo caso, un incremento del valore $|\mathbf{c} - \mathbf{u}|$. Per entrambi i meccanismi gli incrementi sono proporzionali al gradiente della velocità media locale; nel secondo però, a differenza del primo, gli scarti sono generati unicamente nella direzione del moto medio: ne consegue, in generale, un’anisotropia della temperatura granulare rispetto alle direzioni dello spazio con contributi più importanti nella direzione del gradiente. Dalla densità dell’insieme di particelle dipende la prevalenza dell’uno o dell’altro meccanismo: di quello

collisionale per le densità maggiori o di quello cinetico per le configurazioni più disperse. In Figura 2.10 è schematizzato il processo di trasformazione dell'energia per il flusso stazionario di un gas granulare: l'energia cinetica del moto medio (indotto dalle forze esterne) viene trasformata in temperatura granulare attraverso i meccanismi illustrati sopra, legati alla presenza di un gradiente della velocità media locale, e successivamente dissipata in calore attraverso le collisioni binarie.

Sviluppando ulteriormente l'analogia con i gas termodinamici, ad ogni posizione nello spazio è possibile associare una “densità di calore granulare” come la quantità

$$Q := n \left\langle \frac{1}{2} m |\mathbf{c}_i|^2 \right\rangle = \dots = \frac{1}{2} \rho_p \phi T$$

pari al valore medio locale dell'aliquota di energia cinetica associata alle velocità di fluttuazione. Come il suo omologo termodinamico, il calore granulare va soggetto a fenomeni di conduzione, da regioni a temperatura granulare più elevata verso regioni a temperatura granulare più ridotta; per la descrizione di questo fenomeno ha senso introdurre il vettore \mathbf{q} detto “flusso di calore granulare”. Il contributo di ogni particella al calore granulare è trasportato da questa con una velocità pari alla sua velocità di fluttuazione, oppure essa può scambiarlo, in una misura da stabilire, nella collisione con un'altra particella. Entrambe i modi di conduzione del calore granulare contribuiscono in maniera indipendente al valore del vettore \mathbf{q} , cioè

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_k + \mathbf{q}_c .$$

L'aliquota \mathbf{q}_k è relativa al modo di conduzione cinetico e può essere calcolata come la densità di calore che attraversa un determinato VRE per unità di tempo e per effetto della velocità di fluttuazione delle particelle; in formule:

$$\mathbf{q}_k := n \left\langle \frac{1}{2} m |\mathbf{c}'_i|^2 \mathbf{c}'_i \right\rangle = \dots = \frac{1}{2} \rho_p \phi \langle |\mathbf{c}'_i|^2 \mathbf{c}'_i \rangle .$$

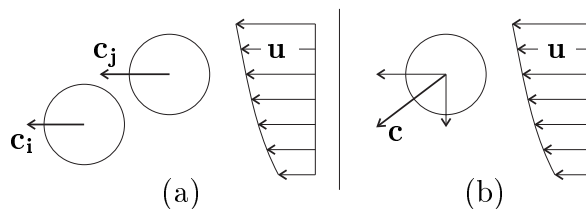


Figura 2.9: Meccanismo collisionale (a) e cinetico (b) di generazione della temperatura granulare da parte del moto medio.

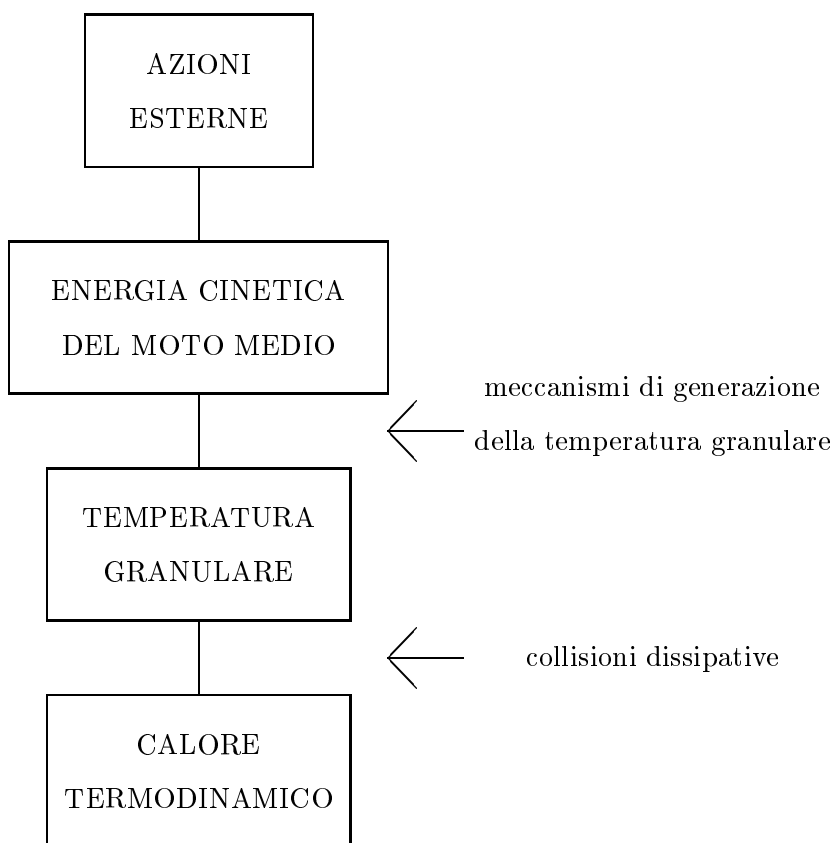


Figura 2.10: Schema del processo di conversione dell'energia per il flusso stazionario di un gas granulare.

Diversamente, l'impatto tra due particelle limitrofe i e j implica il trasferimento immediato dell'aliquota di calore granulare

$$\frac{1}{2}m (|\mathbf{c}'_j|^2 - |\mathbf{c}_j|^2 - |\mathbf{c}'_i|^2 + |\mathbf{c}_i|^2) \quad (2.3)$$

dalla particella i alla particella j (dal centro della prima al centro della seconda), cioè uno spostamento in direzione \mathbf{k}_{ij} e per una distanza d della posizione a cui è associata tale aliquota alla scala di osservazione microscopica. Le collisioni sono assunte, come già detto, istantanee; pertanto la velocità di trasferimento dell'aliquota di energia per ogni singola collisione è teoricamente infinita; per la stessa ragione, però, non è possibile scegliere un istante campione per la misura su di un VRE ed aspettarsi di trovarvi un numero rappresentativo... di coppie di particelle in collisione. Piuttosto ha senso scegliere sia un VRE (più precisamente un collezione di particelle), che un intervallo di campionamento Δt attorno all'istante t designato, ed eseguire una media $\langle \cdot \rangle^*$ spazio-temporale dei contributi (2.3) spettanti a ciascuna collisione; si ottiene in questo senso

$$\mathbf{q}_c := \mathcal{F} \left\langle \frac{1}{2}m (|\mathbf{c}'_j|^2 - |\mathbf{c}_j|^2 - |\mathbf{c}'_i|^2 + |\mathbf{c}_i|^2) d \mathbf{k}_{ij} \right\rangle^* ,$$

in cui \mathcal{F} è la frequenza spazio-temporale delle collisioni.⁷

⁷Se ψ_{ij} è la quantità microscopica riferita alla collisione tra le particelle i e j , si intende

$$\langle \psi \rangle^* := \frac{\sum_{VRE, \Delta t} \psi_{ij}}{N} ,$$

dove la sommatoria a numeratore è valutata contando le collisioni che avvengono in un intervallo temporale di campionamento attorno al tempo t , tra le particelle selezionate dal VRE al tempo t ; $N_{VRE, \Delta t}$ è il numero di tali collisioni. Per frequenza spazio-temporale \mathcal{F} delle collisioni si intende

$$\mathcal{F} := \frac{1}{V_{VRE}} \frac{N_{VRE, \Delta t}}{\Delta t} .$$

La stessa procedura di media, applicata ai termini (2.2), restituisce il valore Γ della densità di calore granulare dissipato per unità di tempo:

$$\Gamma = \dots = \mathcal{F} \left\langle \frac{1}{4} (\epsilon^2 - 1) m [\mathbf{k}_{ij} \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j)]^2 \right\rangle^* .$$

Dal punto di vista fenomenologico questa sorgente di dissipazione rende impossibile il moto di agitazione in condizioni stazionarie, a meno della presenza di una sorgente esterna o della generazione da parte del moto medio: è questo un'ulteriore elemento di distinzione rispetto ai gas termodinamici. Il concetto è illustrato in Figura 2.11, in cui il grafico adimensionale mostra il decadimento nel tempo del valore medio $\langle |\mathbf{c}_i| \rangle$ del modulo delle velocità di fluttuazione delle particelle in un VRE, a partire dall'istante in cui è rimossa la sorgente d'agitazione, ed in assenza di generazione di temperatura granulare da parte del moto medio. Nel rapporto adimensionale t/τ in figura, il fattore di scala τ dipende dallo stato del sistema alla rimozione della sorgente d'agitazione ed è inversamente proporzionale al valore $(1 - \epsilon^2)$; coerentemente, a pari condizioni iniziali il raffreddamento... del sistema è tanto più lento quanto più elevato è il coefficiente di restituzione.

Come per i fluidi comuni, nella modellazione al continuo dei gas granulari si interpretano le sollecitazioni interne come espressione del meccanismo di trasferimento della quantità di moto alla microscala; di nuovo, questo meccanismo di trasferimento ha luogo secondo uno modo cinetico ed un modo collisionale. Si può procedere come nel caso del flusso di calore granulare considerando questa volta, come quantità microscopica interessata, l'aliquota $m\mathbf{c}'_i$ della quantità di moto della particella, anziché la corrispondente aliquota della sua energia cinetica. In termini espliciti, in un determinato punto dello spazio, e con riferimento alla direzione indicata dal versore \mathbf{n} , il vettore di sollecitazione interna è pari al prodotto (matrice-vettore) $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$, dove il tensore

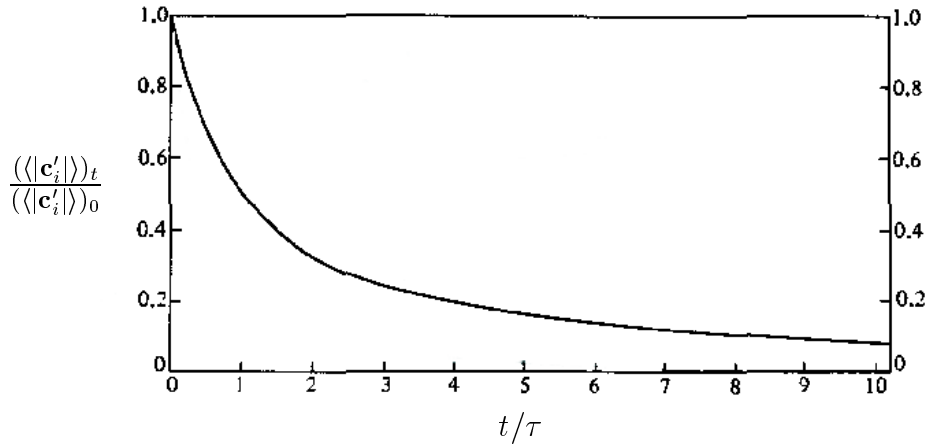


Figura 2.11: (Modificata in base a *Haff*, 1983). Caduta di velocità di fluttuazione e di pressione per un sistema granulare in seguito alla rimozione di una sorgente di agitazione. Il numeratore ed il denominatore del rapporto $\langle\langle |c'_i| \rangle\rangle_t / \langle\langle |c'_i| \rangle\rangle_0$ sono i valori medi dei moduli delle velocità di fluttuazione nel VRE, rispettivamente ai tempi t generico e $t = 0$ (in cui è rimossa la sorgente di agitazione).

delle pressioni $\boldsymbol{\sigma}$ è definito in base alle variabili microscopiche come la somma

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_c$$

di un contributo cinetico

$$\boldsymbol{\sigma}_k := -\rho_p \nu \langle \mathbf{c}'_i \otimes \mathbf{c}'_i \rangle$$

essenzialmente equivalente al cosiddetto *Raynold stress*, e di un contributo collisionale

$$\boldsymbol{\sigma}_c := -d \mathcal{F} \langle \mathbf{J}_{ij} \otimes \mathbf{k}_{ij} \rangle^* .$$

Riferendosi di nuovo allo scenario in Figura 2, relativo al flusso (bidimensionale) laminare omogeneo e stazionario di un gas granulare, è interessante

osservare il grafico in Figura 2.12a; vi è riportato l'andamento (in forma adimensionale) della componente σ_{xy} del tensore delle sollecitazioni interne al variare della frazione solida, secondo simulazioni eseguite da diversi autori con il metodo degli elementi discreti o con il metodo di Monte Carlo. Gli andamenti sono relativi al medesimo valore del coefficiente di restituzione ($\epsilon = 0.8$) ma a diversi valori del coefficiente di attrito tra le superfici delle particelle⁸. Qualitativamente, è osservabile il caratteristico andamento a “U”⁹: da sinistra a destra, cioè da bassi valori della frazione solida sino a valori prossimi a 0.6, prevale, per il tensore delle pressioni, prima il contributo cinetico, poi il contributo collisionale. Con riferimento allo stesso scenario, in Figura 2.12b, sono presentate le previsioni dei modelli teorici proposti da diversi autori; tra queste formulazioni, alcune trascurano il contributo cinetico al tensore delle pressioni (sono cioè modelli specifici per i flussi in condizioni di densità elevate) e possono essere facilmente distinte per l'assenza dell'asintoto per $\phi \rightarrow 0$.

In Figura 2.13 sono esposti i grafici ottenuti da (*Campbell e Brennen, 1985*), relativi alla simulazione numerica di un flusso gravitazionale di materiale granulare (bidimensionale) lungo un piano inclinato a 30° sull'orizzontale. Sono riportati in forma adimensionale il profilo di velocità media locale, di frazione solida e di temperatura granulare, misurati lungo una sezione ortogonale al piano inclinato. Si può osservare una velocità di scorrimento non nulla a contatto con il piano inclinato, ed un forte gradiente di velocità nelle sue vicinanze. La densità, rappresentata nel grafico tramite la frazione solida, è sensibilmente più ridotta in prossimità della superficie libera e del

⁸Differentemente dalla nostra trattazione semplificata, tra i dati in Fig. 2.12a, alcuni tengono conto delle azioni tangenziali a contatto tra le particelle. Si può però osservare, dalla stessa figura, come questo contributo sia infine marginale.

⁹L'autore osserva il medesimo andamento qualitativo per la componente σ_{xx} .

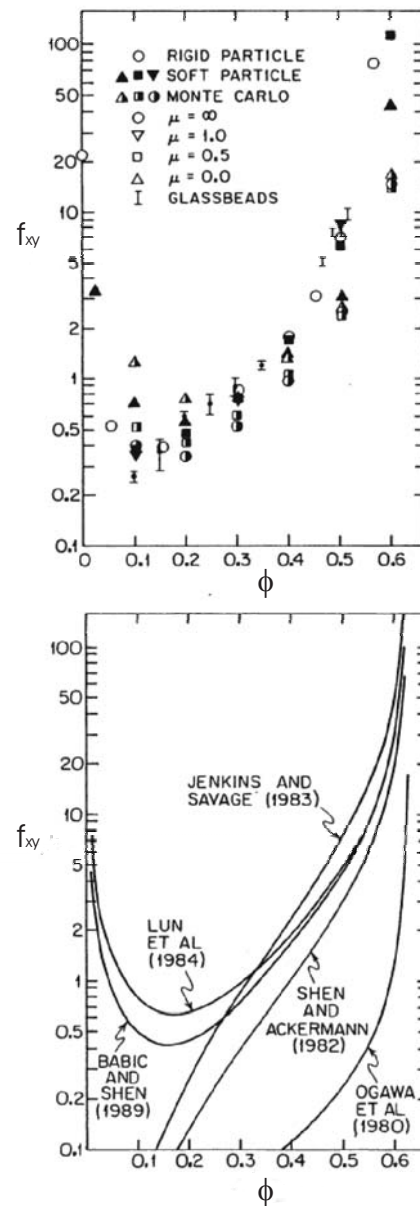


Figura 2.12: (Da *Campbell*, 1990) Andamenti in forma adimensionale della quantità $f_{xy} := 4\sigma_{xy}/(\rho_p d^2 \gamma^2)$ al variare della frazione solida ϕ . (a): in base ad esperimenti, a simulazioni con il metodo di Monte Carlo, o con il metodo degli elementi discreti per diversi valori dell'angolo d'attrito μ a contatto tra le particelle. (b): in base a modelli analitici.

piano inclinato. In corrispondenza di quest'ultimo sono misurati elevati valori di temperatura granulare: i meccanismi di produzione della temperatura granulare sono estremamente attivi per via dell'elevato gradiente di velocità media locale, mentre la velocità di dissipazione del calore granulare, Γ , è ridotta per effetto della bassa densità che implica scarsi valori di frequenza spazio-temporale delle collisioni.

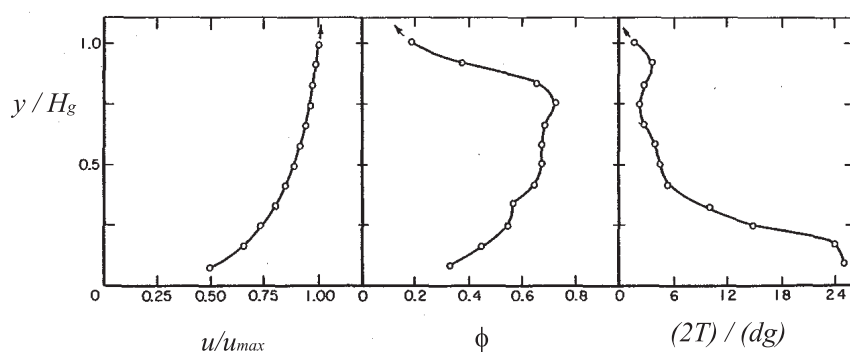


Figura 2.13: (Da *Campbell & Brennen*, 1985) Flusso granulare (bidimensionale) a gravità lungo un piano inclinato a 30° sull'orizzontale: profili in forma adimensionale per la velocità media, la frazione solida e la temperatura granulare su di una sezione ortogonale al piano inclinato. Compagnano la velocità massima u_{max} l'accelerazione di gravità g e la distanza H_g del baricentro della sezione dal piano inclinato.

Lo scopo delle teorie cinetiche per i flussi di materiale granulare è quello di determinare leggi costitutive macroscopiche in base allo studio degli eventi microscopici, cioè delle interazioni tra coppie di particelle. Come già discusso, per la maggior parte di queste teorie, le interazioni sono modellate come collisioni anelastiche e la dissipazione di energia è nelle collisioni è descritta tramite l'introduzione di un coefficiente di restituzione e, più raramente,

di un coefficiente d'attrito superficiale per le azioni tangenziali di contatto. È inoltre generalmente assunta la condizione di chaos molecolare, ovvero di moto casuale delle particelle, che a sua volta è formalizzata attraverso l'introduzione di distribuzioni Maxwelliane delle velocità. Le quantità introdotte sopra facendo uso (divulgativo) del concetto di volume rappresentativo elementare sono in realtà espresse, nei lavori citati, in forma di medie statistiche riferite alle distribuzioni di velocità. Le teorie proposte sino ad oggi, almeno quelle note a chi scrive, danno luogo a sistemi di equazioni riconducibili ad uno schema unico, simile nella struttura alle equazioni di Navier-Stokes per i fluidi. Tale insieme consiste di un'equazione di conservazione della massa, del momento lineare e dell'energia; i.e., rispettivamente,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 ,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \operatorname{div} T + \rho \mathbf{g} ,$$

e

$$\frac{1}{2} \rho \frac{dT}{dt} = - \operatorname{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} - \Gamma ,$$

Tra i diversi modelli, le differenze più significative riguardano le dipendenze delle quantità $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{q} e Γ nei confronti del gradiente spaziale delle velocità medie locali, della densità, della temperatura granulare, e delle caratteristiche fisiche delle particelle.

2.3 Flussi granulari densi

La maggior parte dei casi di interesse applicativo rientra nella classe dei flussi granulari densi; in questo ambito fenomenologico le interazioni tra particelle hanno natura di azioni di contatto durevoli, piuttosto che di collisioni. Su

di un materiale granulare sottoposto a rapido scorrimento *Hopkins e Louge* (1991) osservano, con simulazioni numeriche ed al variare del coefficiente di restituzione, la formazione di una microstruttura descrivibile come la variazione della distribuzione spaziale delle particelle (inizialmente omogenea) in favore dello sviluppo di agglomerati disposti secondo un marcato ritmo spaziale (Fig. 2.14). La tendenza alla formazione di questa microstruttura sarebbe l'effetto del carattere dissipativo delle collisioni tra le particelle e l'evoluzione progressiva della microstruttura determinerebbe per un gas granulare il passaggio da un comportamento di tipo cinetico ad un comportamento di tipo collisionale sino, infine, all'evoluzione verso il regime dei flussi granulari densi.

In Figura 2.15 sono schematizzate le configurazioni più comunemente utilizzate per lo studio di questi fenomeni. Il caso (a) rappresenta le sperimentazioni in scatola di taglio anulare; questo è forse l'apparato più tradizionale ed era già usato da Bagnold nel 1954. È costituito da due tamburi concentrici tra i quali è alloggiato il materiale; uno di essi è fisso, mentre al restante è imposta una velocità di rotazione (o una coppia). Allo stesso schema concettuale è riconducibile il caso di un letto di materiale granulare interposto tra due piastre piane, parallele, aventi velocità relativa non nulla in una direzione ortogonale alla loro giacitura¹⁰. Condizioni di flusso propriamente dette sono osservabili al di sopra di una velocità di scorrimento critica (*Thompson e Grest, 1992; Nasuno et al., 1998; Tardos et al., 1998*), al di sotto della quale la deformazione procede per una successione di fenomeni intermittenti d'instabilità. Altrettanto caratteristico di questo tipo di prove è il fatto che lo scorrimento si localizza in una regione anulare adiacente al tamburo inter-

¹⁰Nella letteratura in lingua inglese entrambe le configurazioni sono indicate con il termine “*Couette flow*”.

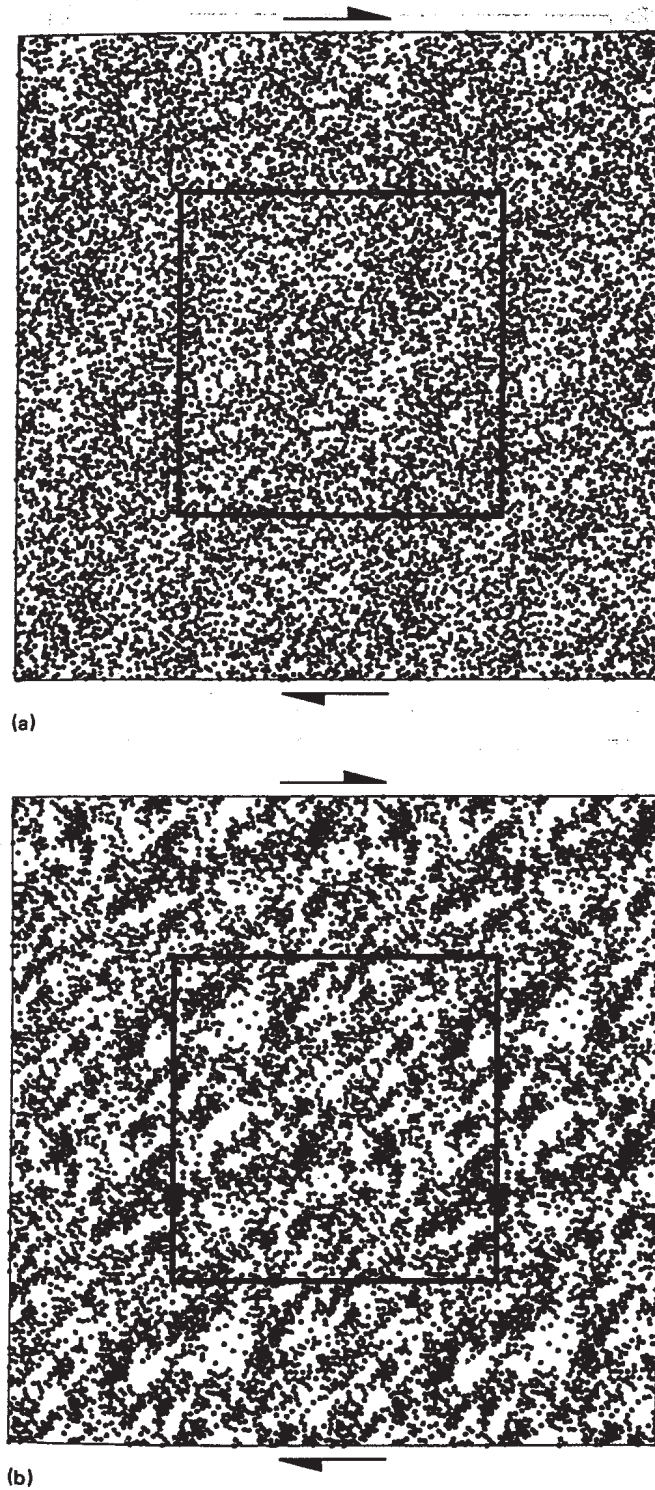


Figura 2.14: (Da *Hopkins e Louge*, 1991) Campioni bidimensionali periodici di insiemi di grani, con periodo \tilde{L} pari al lato dei quadrati interni evidenziati. Distribuzioni delle particelle per $\tilde{L}/d = 83$, $\phi = 0.3$ e $\epsilon = 0.9$ (a) ovvero $\epsilon = 0.2$ (b).

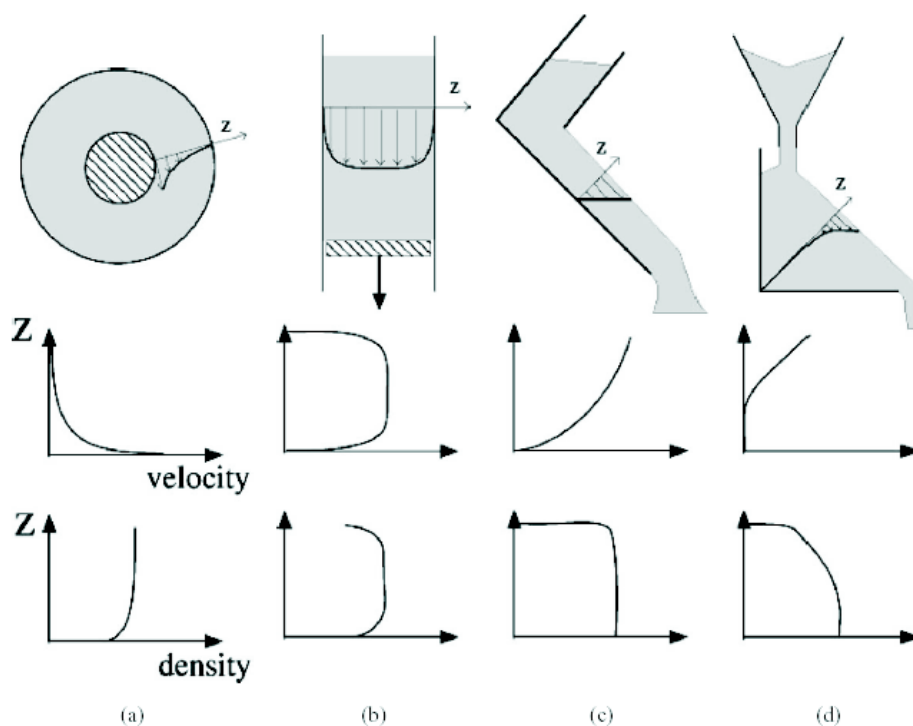


Figura 2.15: (Da *Pouliquen e Chevoir, 2002*) Flussi densi di materiale granulare: schemi essenziali e profili di velocità e densità caratteristici relativamente alle tipiche configurazioni studiate con sperimentazioni fisiche o simulazioni numeriche.

no (coerentemente con l'andamento qualitativo per il profilo di velocità) con spessore pari a circa dieci volte il diametro (rappresentativo) dei grani.

Il caso (b), sempre con riferimento a Figura 2.15, rappresenta le sperimentazioni relative a flussi a gravità verticali in canaletta¹¹. Si tratta di studi di particolare interesse applicativo, con specifico riferimento alla comprensione ed alla progettazione, rispettivamente, di processi ed organi di scarico dei silo. È rappresentato l'andamento qualitativo del profilo di velocità nella generica sezione orizzontale del flusso: una regione centrale di flusso omogeneo

¹¹Nella letteratura in lingua inglese: “*vertical chute flows*”.

è contornata, in prossimità delle pareti, da due regioni laterali — di nuovo, approssimativamente, di spessore pari a una decina di diametri — in cui lo scorrimento è elevato (*Gutfraind e Pouliquen, 1996*) ed in corrispondenza delle quali sono osservabili variazioni della frazione solida nel senso di un comportamento di tipo dilatante (*Veje et al., 1999*).

I casi (a) e (b) commentati sopra si riferiscono a flussi confinati; in questo senso si distinguono dalle configurazioni (c) e (d), nella stessa figura, relative a flussi con superficie libera. Con riferimento a quest'ultime, l'interesse è motivato sia dalle forti analogie con applicazioni industriali (e.g. il trasporto e lo stoccaggio di materiale in grani) che dalla loro rappresentatività nell'ambito della geotecnica per la difesa del territorio, con esplicito riferimento allo studio, previsione e prevenzione di eventi catastrofici come colate di detriti o frane. Relativamente al caso (c), *Pouliquen (1999)* riporta i risultati di indagini sperimentali circa la condizione di flusso (superficiale) stazionario; con riferimento alla geometria ed alla notazione in Figura 2.16 i parametri di controllo del problema sono l'inclinazione θ del piano, lo spessore h della sezione di materiale in flusso (stazionario ed uniforme), le caratteristiche del materiale granulare (monodisperso) — e.g. il tipo di materiale di nucleo — ed il tipo d'interazione tra particelle o con la superficie del piano. Egli osserva che, per ogni valore di inclinazione θ esiste un valore di spessore h_{stop} al di sotto del quale non possono instaurarsi condizioni di flusso stazionario: più precisamente nessuna condizione di flusso è possibile e lo strato non viene neppure mobilitato. Viceversa per ogni spessore h è possibile determinare un valore di inclinazione θ_{stop} avente lo stesso significato; il concetto è schematizzato in Figura 2.17. Una curva analoga, nel piano $\theta - h$, delimita la regione oltre la quale non sono più osservabili flussi stazionari, i quali lasciano il posto a fenomeni accelerati ed irregolari (vedi Fig. 2.18). Sempre

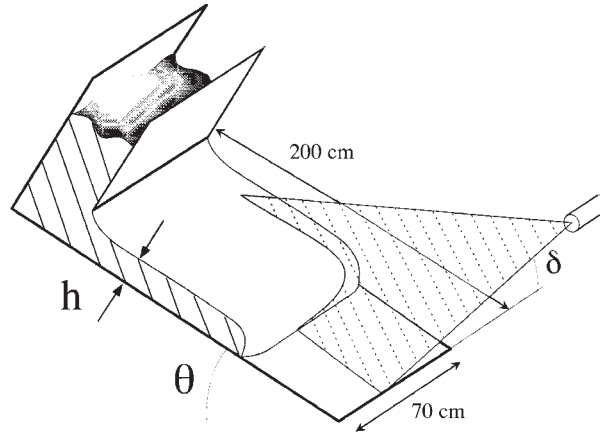


Figura 2.16: (Da *Pouliquen*, 1999) Schema di un sistema sperimentale del tipo (c) in Fig. 2.15; lo spessore h della sezione del flusso (misurato ad una distanza opportuna dalla paratia di regolazione) e l'inclinazione θ del piano.

Pouliquen (1999), riferendosi ai valori medi di velocità sulla sezione del flusso, osserva che questi dipendono dalla profondità h e dal tipo di materiale granulare; inoltre, rappresentando in forma adimensionale i valori di velocità media U (sulla sezione) rispetto alla profondità h (vedi Fig. 2.19) egli ottiene che i punti sperimentali, indipendentemente dalle caratteristiche della prova, si allineano su di un'unica retta di l'equazione

$$\frac{U}{\sqrt{gh}} = 0.136 \frac{h}{h_{stop}(\theta)} .$$

Le conclusioni sono che il parametro h_{stop} è una grandezza fisica caratteristica sia del comportamento del materiale granulare che della sua interazione con il piano, e che la velocità media dipende dalla profondità h secondo un esponente pari a $3/2$. Le simulazioni numeriche di *Ertaş et alii* (2000) e *Silbert et alii* (2001) confermano l'esistenza delle curve limite, nel piano $h - \theta$, che delimitano la zona di flusso stazionario (vedi Fig. 2.18); essi osservano inoltre che, per i casi di flusso stazionario, e limitando l'analisi a valori medio-elevati di profondità h (cioè in un ambito in cui θ_{stop} è sostanzialmente indipendente

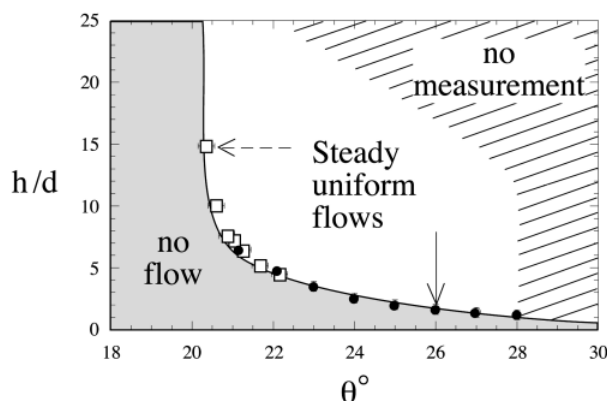


Figura 2.17: (Da *Pouliquen*, 1999) Punti sperimentali $\theta_{stop}(h)$ o $h_{stop}(\theta)$ da prove in canaletta (relativi ad un unico materiale) e curva di interpolazione nel piano $h/d - \theta$. Per coppie di valori $(h/d, \theta)$ nella regione in grigio uniforme lo strato di materiale granulare è in equilibrio statico sul piano inclinato e non sono osservabili flussi di alcun tipo.

da h), la densità è costante lungo la sezione del flusso ed indipendente dal valore di profondità; una dipendenza quantitativa di tipo lineare è invece riscontrata rispetto all'inclinazione del piano. Le affermazioni sono giustificate in base ai grafici in Figura 2.20, dai quali appare inoltre in maniera evidente che (i) i profili di velocità sono sensibili alla variazione dei parametri micro-meccanici che governano le interazioni tra grani, e che (ii) la velocità di scorrimento γ assume valori massimi in prossimità del piano inclinato per poi decrescere avvicinandosi alla superficie libera.

Relativamente alla configurazione (d) in figura, con la quale ci si riferisce al flusso granulare in regioni superficiali di una pila indotto dall'apporto di materiale in sommità alla stessa, l'unico parametro di controllo è la portata Q del materiale addizionato. Allo stesso schema sono riconducibili gli esperimenti in cilindro rotante (vedi Fig. 2.21) per i quali il parametro di controllo è la velocità angolare Ω del cilindro. Condizioni di flusso (super-

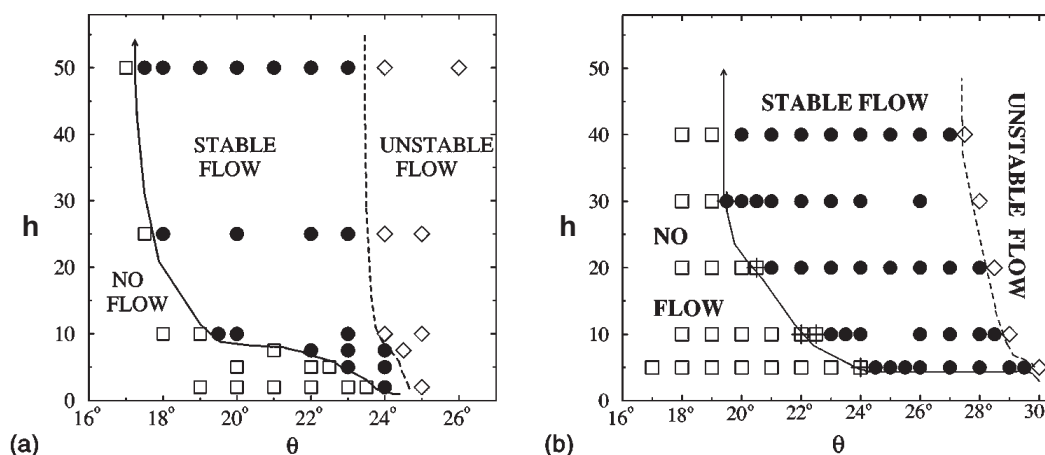


Figura 2.18: (Modificata in base a *Silbert et al.*, 2001) Punti sperimentali, da simulazioni numeriche, nel piano $h - \theta$ per un materiale granulare (a) bidimensionale con $\mu = 0.50$ e $e = 0.92$ ovvero (b) tridimensionale con $\mu = 0.50$ e $e = 0.88$. Regioni di assenza di flusso, flusso stazionario, e flusso instabile.

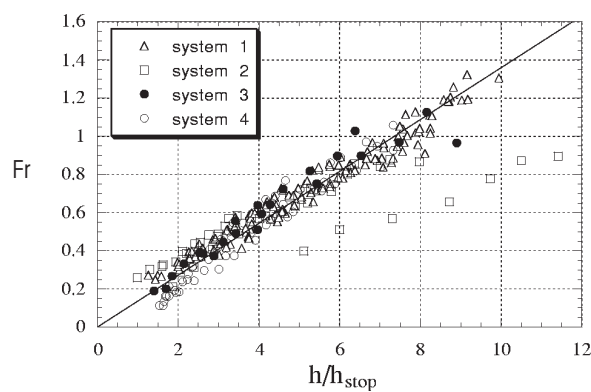


Figura 2.19: (Modificata in base a *Pouliquen*, 1999) Flussi su piano inclinato. Rappresentazione dei punti sperimentali relativi a condizioni di flusso stazionario, per mezzi granulari differenti (“*system 1*”, “*system 2*”, ..., “*system 5*”), nel piano adimensionale $Fr - h/h_{stop}$ dove $Fr = U/\sqrt{gh}$ è il numero di Froude e g è l’accelerazione di gravità.

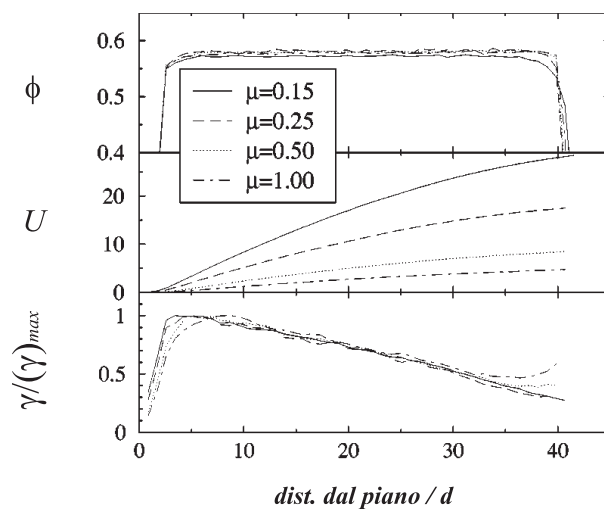


Figura 2.20: (Modificata in base a *Silbert et al.*, 2001) Flussi su piano inclinato. Profili di densità (frazione solida) velocità media sulla sezione e velocità di scorrimento (in forma adimensionale rispetto al valore massimo $(\gamma)_{max}$ lungo la sezione).

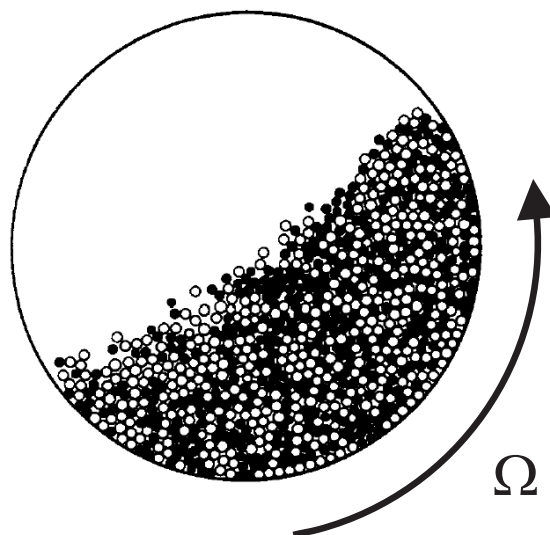


Figura 2.21: (Modificata in base a *Ristow*, 1996) Cilindro rotante e velocità angolare Ω .

ficiale) uniforme e stazionario sono osservabili per valori del parametro di controllo superiori ad un valore critico (e.g. $Q > Q_c$ con Q_c il valore critico di portata); l'angolo della pila e lo spessore dello strato superficiale interessato dal flusso, aumentano con il valore corrente di portata Q . Al di sotto di Q_c , come illustrato in Figura 2.22, sono osservabili valanghe intermittenti, cioè una successione di valanghe granulari che porta ripetutamente la pendenza dal valore θ_{start} a θ_{stop} , corrispondenti, rispettivamente, ad innesco ed arresto di ogni valanga (Jäger, 1989; Lemieux e Duran, 2000; Rajchenbach, 2000). Per esperimenti in cilindro rotante Rajchenbach (1990) osserva un'isteresi dei valori del parametro di controllo (la velocità angolare Ω del cilindro) a cui corrisponde la transizione dal regime di valanghe intermittenti al regime di flusso stazionario, e viceversa (Fig. 2.23). Egli avanza l'ipotesi che l'esistenza di un regime di valanghe intermittenti sia dovuta ad effetti di bordo indotti dalle dimensioni finite dell'apparato di prova (nello specifico il diametro del cilindro); tale regime dovrebbe quindi scomparire in casi reali, approssimabili alla condizione di pendio indefinito. Le valanghe intermittenti potrebbero cioè non essere qualitativamente differenti dal flusso stazionario; al contrario di questo, semplicemente, si arresterebbero anziché divenire stazionarie, a causa dell'interferenza dei confini fisici dell'apparato sperimentale. Nel regime di flusso stazionario, il profilo di velocità negli strati superficiali in movimento è di tipo lineare con la profondità (Rajchenbach, 2000; Bonamy et al., 2004). Komatsu et alii (2001) e Bonamy et al., 2001) mostrano che il modello concettuale di flusso superficiale al di sopra di una base congelata... sia eccessivamente semplificato, e misurano un decadimento esponenziale (con lunghezza caratteristica dell'ordine del diametro delle particelle) della velocità media con la profondità, al di sotto della regione interessata dal flusso superficiale (Figg. 2.24 e 2.25-b); il movimento pro-

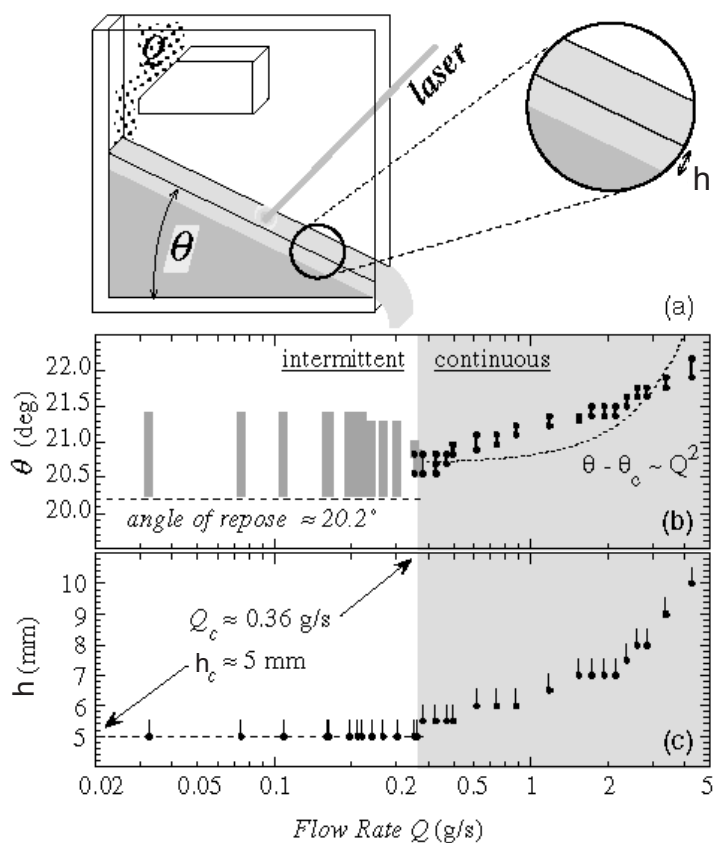


Figura 2.22: (Modificata in base a *Lemieux and Durian*, 2000) Flusso su di una pila granulare. Schema del sistema sperimentale (a); transizione dal regime intermittente al regime stazionario (b) nel piano $\theta - Q$ (con ampiezze degli intervalli di pendenza) e (c) nel piano $h - Q$.

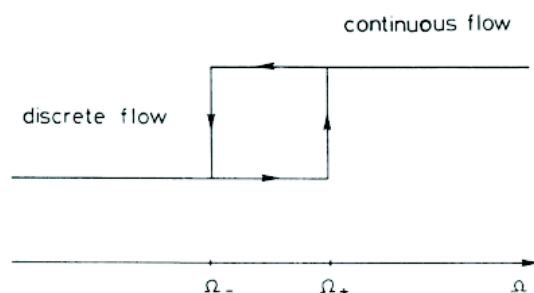


Figura 2.23: (Da *Rajchenbach*, 1990) Sperimentazione in cilindro rotante. Isteresi tra i valori Ω_- e Ω_+ nella transizione dal regime di flusso intermittente al regime di flusso stazionario.

fondo, denominato “*creep motion*”, sarebbe riconducibile ad un meccanismo di creazione di vuoti e conseguente riallocazione delle particelle. Misure di densità a profondità diverse (Fig. 2.25-a) attestano una debole variazione lineare con la profondità in corrispondenza della zona interessata dal flusso. Il gradiente del profilo di velocità è essenzialmente indipendente dalla portata del flusso; a meno di un fattore di scala, per uno specifico materiale granulare, i profili di velocità sono sempre i medesimi ed il valore medio di velocità determina di conseguenza, univocamente, la profondità dello strato superficiale coinvolto dal flusso. Questo aspetto è colto da *Douady et alii* (1999) che su questa ipotesi, e su altre meno incisive, si basano per elaborare un modello semplificato per la descrizione dei flussi superficiali densi (su pile granulari) a doppia superficie libera (ovvero con superficie libera al limitare dell’insieme granulare e all’interfaccia tra fase fluida e fase solida).

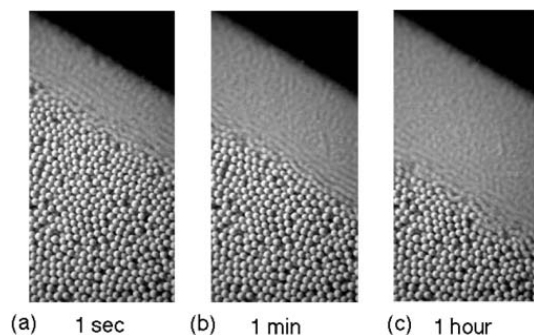


Figura 2.24: (Modificata in base a *Komatsu et al.*, 2001) Le immagini del flusso sono prese con tempi di esposizione a crescente ordine di grandezza e mettono in evidenza l'interessamento di strati più profondi.

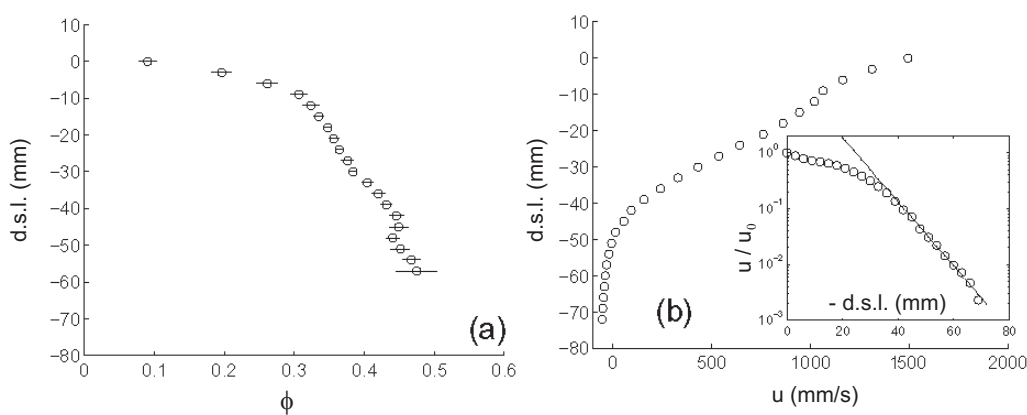


Figura 2.25: (Modificata in base a *Bonamy et al.*, 2001) Profilo di densità (frazione solida) in funzione della distanza dal piano della superficie libera (a) e profilo di velocità media locale (b); nel grafico in riquadro il profilo di velocità media locale è rappresentato in scala semi-logaritmica ed u_0 è il valore di velocità media locale in corrispondenza della superficie libera.