

Capitolo 5

Propagazione di onde in piastre

In questo capitolo, la bontà delle teorie di piastre coerenti ed incoerenti che abbiamo dedotto nei Capitoli 2 e 3 è valutata confrontando le loro predizioni in tema di propagazione ondosa con quelle ricavate dallo studio delle soluzioni dei corrispondenti problemi tridimensionali (Capitolo 4). In particolare, determiniamo le condizioni di propagazione di onde armoniche in regime di vibrazione libera e istituimo un confronto con le curve di dispersione tridimensionali, che fungono da benchmark.¹

5.1 Onde antisimmetriche in piastre coerenti

Iniziamo con lo studio di onde di tipo antisimmetrico in una piastra coerente. Imponiamo le condizioni di vibrazione libera, ossia supponiamo che il piano medio della piastra sia infinitamente esteso, ossia $\mathcal{P} \equiv \pi_{\mathbf{z}}$, ed assumiamo che le forze di volume non inerziali \mathbf{b}^{ni} e le forze superficiali $\hat{\mathbf{s}}^\pm$ sulle facce $\pi_{\mathbf{z}} \times \{\pm\varepsilon\}$ siano nulle così che

$$\mathbf{q}_k(x, t) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, n,$$

dove i campi \mathbf{q}_k sono definiti in (2.5)₂. Applichiamo poi la decomposizione di Helmholtz ai campi $\bar{\mathbf{u}}_1(x, t)$ e $\bar{\mathbf{u}}_3(x, t)$ che compaiono nelle equazioni di ordine uno (2.71) e di ordine tre (2.93):

$$\bar{\mathbf{u}}_i(x, t) = \nabla a_i + \mathbf{z} \times \nabla b_i, \quad i = 1, 3, \quad (5.1)$$

dove a_i e b_i sono potenziali scalari, rispettivamente, irrotazionale e solenoidale. Se sostituiamo la decomposizione (5.1) nelle equazioni di evoluzione (2.71) ed applichiamo gli operatori di divergenza e rotore alla (2.71)₂, le equazioni che seguono, in condizione di vibrazione libera, si disaccoppiano nel modo seguente:

¹Esistono naturalmente anche altri criteri per verificare l'affidabilità di una teoria di piastre. Uno di questi è confrontare i campi di deformazione e tensione previsti dalla teoria con quelli esatti ricavati in [58] risolvendo il problema statico tridimensionale per un corpo a forma di piastra trasversalmente isotropo soggetto a precise condizioni al contorno. Nel caso elattroelastico, questo criterio è adottato in [7] e [13], dove le predizioni di diverse teorie di piastre sono confrontate, a parità di condizioni al contorno, con la soluzione esatta determinata in [8].

- *problema di flessione*

$$\begin{aligned} \eta \Delta (w_0 + a_1) - \rho \ddot{w} &= 0, \\ \varepsilon^2 (\lambda + 2\mu) \Delta \Delta a_1 - 3\eta \Delta (w_0 + a_1) - 3\rho \ddot{w} - \varepsilon^2 \rho \Delta \ddot{a}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

- *problema di torsione antisimmetrica*

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \Delta b_1 - 3\eta \Delta b_1 - \varepsilon^2 \rho \Delta \ddot{b}_1 = 0. \quad (5.3)$$

Analogamente per la teoria del terz'ordine, le equazioni (2.93) si riducono ai seguenti due sistemi:

- *problema di flessione*

$$\begin{aligned} 3\eta \Delta (w_0 + a_1) + \varepsilon^2 \eta \Delta (w_2 + 3a_3) + \varepsilon^2 \eta \Delta w_2 + \\ - 3\rho \ddot{w}_0 - \varepsilon^2 \rho \ddot{w}_2 &= 0, \\ 5\varepsilon^2 (2\mu + \lambda) \Delta \Delta a_1 - 15\eta \Delta (w_0 + a_1) + 3\varepsilon^4 (2\mu + \lambda) \Delta \Delta a_3 + \\ - 5\varepsilon^2 \Delta [(\eta - 2\tau_2)w_2 + \eta a_3] - 5\varepsilon^2 \rho \Delta \ddot{a}_1 - 3\varepsilon^4 \rho \Delta \ddot{a}_3 &= 0, \\ 5\Delta [\eta w_0 + (\eta - 2\tau_2)a_1] + 3\varepsilon^2 \Delta [\eta w_2 + (3\eta - 2\tau_2)a_3] - 20\tau_1 w_2 + \\ - 5\rho \ddot{w}_0 - 3\varepsilon^2 \rho \ddot{w}_2 &= 0, \\ 7\varepsilon^2 (2\mu + \lambda) \Delta \Delta a_1 - 35\eta \Delta (w_0 + a_1) + 5\varepsilon^4 (2\mu + \lambda) \Delta \Delta b_3 + \\ - 7\varepsilon^2 \Delta [(3\eta - 2\tau_2)w_2 + 9\eta a_3] - 7\rho \varepsilon^2 \Delta \ddot{a}_1 - 5\rho \varepsilon^4 \Delta \ddot{a}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

- *problema di torsione*

$$\begin{aligned} 5\varepsilon^2 \mu \Delta \Delta b_1 + 3\varepsilon^4 \mu \Delta \Delta b_3 - 15\eta \Delta b_1 - 15\varepsilon^2 \eta \Delta b_3 - 5\rho \varepsilon^2 \Delta \ddot{b}_1 - 3\rho \varepsilon^4 \Delta \ddot{b}_3 &= 0, \\ 7\varepsilon^2 \mu \Delta \Delta b_1 + 5\varepsilon^4 \mu \Delta \Delta b_3 - 35\eta \Delta b_1 - 63\varepsilon^2 \eta \Delta b_3 - 7\rho \varepsilon^2 \Delta \ddot{b}_1 - 5\rho \varepsilon^4 \Delta \ddot{b}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove le incognite sono (w_0, w_2, a_1, a_3) e (b_1, b_3) rispettivamente. In [29] questo disaccoppiamento è esteso al caso di piastre elettroelastiche.

5.1.1 Onde di flessione

Iniziamo con lo studio dei problemi di flessione (5.2) e (5.4). Assumiamo che le incognite (w_0, w_2, a_1, a_3) abbiano la forma di onde armoniche piane:

$$\begin{aligned} w_i(x, t) &= W_i g(x, t), \quad i = 0, 2, \\ a_j(x, t) &= -i \frac{U_j}{k} g(x, t), \quad j = 1, 3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

dove la funzione d'onda

$$g(x, t) = \exp(i(k\mathbf{c}_1 \cdot (x - o) - ft)) \quad (5.7)$$

è uguale alla (4.15) scelta per il campo di spostamenti tridimensionale.

Facendo uso della (5.1), il campo di spostamenti di ordine uno che ne segue è:

$$\mathbf{u}_f^{(1)}(x, \zeta, t) = (W_0 \mathbf{z} + \zeta U_1 \mathbf{c}_1) g(x, t), \quad (5.8)$$

e quello di ordine tre

$$\mathbf{u}_f^{(3)}(x, \zeta, t) = [(W_0 + \zeta^2 W_2)\mathbf{z} + (\zeta U_1 + \zeta^3 U_3)\mathbf{c}_1]g(x, t). \quad (5.9)$$

Le onde (5.40) e (5.41) che definiamo *onde di flessione* sono piane, infatti per entrambe:

$$\mathbf{u}_f^{(i)} \cdot \mathbf{c}_2 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_f^{(i)}}{\partial x_2} = 0, \quad i = 1, 3, \quad (5.10)$$

e i descrittori cinematici

$$\bar{\mathbf{u}}_i = U_i g(x, t)\mathbf{c}_1, \quad i = 1, 3,$$

sono irrotazionali:

$$\text{curl } \bar{\mathbf{u}}_i = 0, \quad i = 1, 3.$$

Iniziamo col risolvere le equazioni (5.3). Se sostituiamo in esse la soluzione (5.6), otteniamo il seguente sistema algebrico:

$$\mathbf{N}_f(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{a}_f = 0, \quad (5.11)$$

dove

$$\mathbf{N}_f(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -\eta\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & i\eta\tilde{k} \\ i\eta\tilde{k} & \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \eta - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_f = \begin{pmatrix} W_0 \\ \varepsilon U_1 \end{pmatrix},$$

e le grandezze adimensionali \tilde{k} e \tilde{f} sono definite nella (4.35). L'equazione (5.11) ammette soluzione non banale soltanto se

$$\det \mathbf{N}_f(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0,$$

ossia, se è soddisfatta la condizione di propagazione

$$h_2\tilde{k}^4 + h_1(\tilde{f}^2)\tilde{k}^2 + h_0(\tilde{f}^2) = 0, \quad (5.12)$$

con

$$\begin{aligned} h_2 &= \eta(\lambda + 2\mu), \\ h_1(\tilde{f}^2) &= -\mu(2\mu + \lambda + \eta)\tilde{f}^2, \\ h_0(\tilde{f}^2) &= \eta(\mu\tilde{f}^2 - 3\eta)\tilde{f}^2. \end{aligned}$$

Per ogni valore di \tilde{f} fissato, la (5.12) è soddisfatta dalle seguenti quattro radici, a due e due uguali e contrarie:

$$\pm \tilde{k}_\pm(\tilde{f}) = \pm \sqrt{\frac{-h_1(\tilde{f}^2) \pm \sqrt{e(\tilde{f}^2)}}{2h_2}}, \quad (5.13)$$

dove

$$e(\tilde{f}^2) = \mu^2[(\lambda - \eta)^2 + 4\mu(\lambda + \mu - \eta)]\tilde{f}^4 + 12\eta^2\mu(\lambda + 2\mu)\tilde{f}^2.$$

D'ora in poi considereremo solo la coppia di soluzioni positiva $\tilde{k}_\pm(\tilde{f})$ dato che il segno del numero d'onda è insignificante in quanto informa soltanto sul verso di propagazione. In virtù delle (2.63), la quantità $e(\tilde{f}^2)$ è sempre positiva e quindi le due radici $\tilde{k}_\pm(\tilde{f})$ sono puramente

reali o puramente immaginarie (mai complesse). Osserviamo che la (5.13) si annulla per i seguenti valori della frequenza:

$$\tilde{f}_0^{(1)} = 0, \quad \tilde{f}_1^{(1)} = \sqrt{\frac{3\eta}{\mu}}, \quad (5.14)$$

che chiamiamo frequenze di cut-off flessionali per la teoria di ordine uno. Inoltre

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{k}_\pm(\tilde{f}) \in \mathbb{R}^+, \\ \tilde{k}_+(\tilde{f}) \in \mathbb{R}^+ \\ \tilde{k}_-(\tilde{f}) \in \text{Im}^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{per ogni } \tilde{f} > \tilde{f}_1, \\ \text{per ogni } 0 < \tilde{f} < \tilde{f}_1, \end{array} \quad (5.15)$$

e quindi, alla frequenza $\tilde{f} > \tilde{f}_1^{(1)}$, nella piastra propagano due onde armoniche progressive rispettivamente con numeri d'onda \tilde{k}_+ e \tilde{k}_- . Alla frequenza $0 < \tilde{f} < \tilde{f}_1^{(1)}$, osserviamo un'onda armonica progressiva, con numero d'onda \tilde{k}_+ , ed un'onda stazionaria che decade esponenzialmente nella direzione \mathbf{c}_1 con coefficiente di decadimento $\tilde{k}_-/i\varepsilon$. A meno di un coefficiente moltiplicativo, le soluzioni del sistema (5.11) sono:

$$(\mathbf{a}_f)_\pm = \left(\tilde{k}_\pm, i(-\tilde{k}_\pm^2(\tilde{f}) + \frac{\mu}{\eta}\tilde{f}^2) \right)^T \quad (5.16)$$

e gli spostamenti che ne seguono sono

$$(\mathbf{u}_f^{(1)})_\pm = \left[\tilde{k}_\pm(\tilde{f})\mathbf{z} + i\frac{\zeta}{\varepsilon}(-\tilde{k}_\pm^2(\tilde{f}) + \frac{\mu}{\eta}\tilde{f}^2)\mathbf{c}_1 \right] g^\pm(x, t), \quad (5.17)$$

con

$$g^+(x, t) = \exp\left(i\left(\frac{\tilde{k}_+}{\varepsilon}\mathbf{c}_1 \cdot (x - o) - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\frac{\tilde{f}}{\varepsilon}t\right)\right),$$

$$g^-(x, t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\tilde{k}_-}{i\varepsilon}\mathbf{c}_1 \cdot (x - o)\right) \exp\left(-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\frac{\tilde{f}}{\varepsilon}t\right), & 0 < \tilde{f} < \tilde{f}_1^{(1)}, \\ \exp\left(i\left(\frac{\tilde{k}_-}{\varepsilon}\mathbf{c}_1 \cdot (x - o) - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\frac{\tilde{f}}{\varepsilon}t\right)\right), & \tilde{f} > \tilde{f}_1^{(1)}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Caratterizziamo ora il moto oscillatorio in condizioni di cut-off, ossia quando la lunghezza d'onda diventa infinita ($\tilde{k} \ll 1$) (vedi figura 5.4). Alla frequenza $\tilde{f} = 0$ abbiamo

$$\mathbf{u}_f^{(1)} \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_f^{(1)} \cdot \mathbf{z} \neq 0, \quad (5.19)$$

ed il moto è un'oscillazione rigida di innalzamento ed abbassamento. Per $\tilde{f} = \tilde{f}_1^{(1)}$, abbiamo:

$$\mathbf{u}_f^{(1)} \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0, \quad \mathbf{u}_f^{(1)} \cdot \mathbf{z} = 0, \quad (5.20)$$

e cioè la piastra esibisce un'oscillazione di taglio nel piano del tipo "a mazzo di carte". Entrambe i moti sono isocori. Ispirati da queste due situazioni limite, chiamiamo le onde legate alle due curve di dispersione $\tilde{k}_+(\tilde{f})$ e $\tilde{k}_-(\tilde{f})$ rispettivamente *onde di taglio trasversale* ed *onde di taglio nel piano*. Ricordiamo che le onde di taglio trasversale propagano a tutte le frequenze, mentre le onde di taglio nel piano propagano solo a frequenze superiori ad $\tilde{f}_1^{(1)}$.

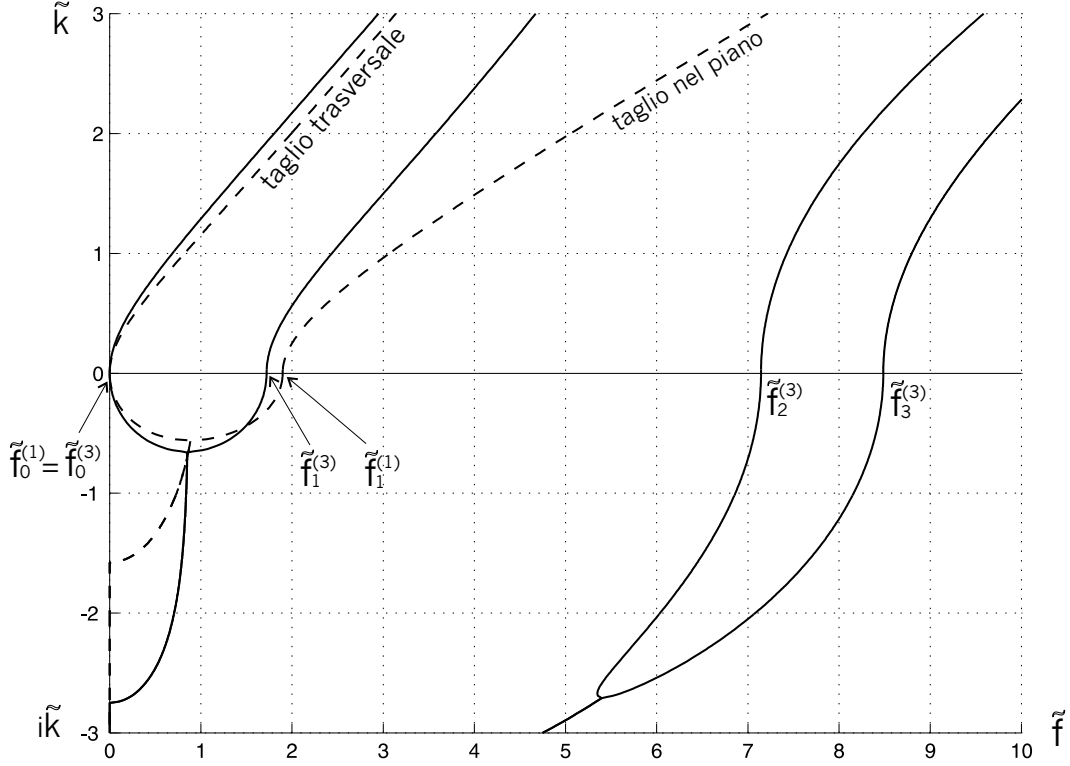


Figura 5.1: Confronto tra le curve di dispersione per onde di flessione ottenute dalle equazioni delle piastre di ordine 1 (linea tratteggiata) e di ordine 3 (linea continua).

Nella figura 5.1, in linea tratteggiata, sono tracciate le due curve $\tilde{k}_+(\tilde{f})$ e $\tilde{k}_-(\tilde{f})$ per una piastra di *zircotitanato di piombo* i cui coefficienti costitutivi sono dati nella Tabella 1.

Consideriamo ora il problema flessionale (5.4) di ordine tre. Se sostituiamo in esso la soluzione in forma d'onda armonica piana (5.6), otteniamo il seguente sistema algebrico

$$\mathbf{M}_f(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{b}_f = 0, \quad (5.21)$$

dove $\mathbf{b}_f = (W_0, \varepsilon^2 W_2, \varepsilon U_1, \varepsilon^3 U_3)^T$ ed $\mathbf{M}_f(\tilde{k}, \tilde{f})$ è la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} \eta\tilde{k}^2 - \mu\tilde{f}^2 & \frac{1}{3}\eta\tilde{k}^2 - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & -i\tilde{k}\eta, & -i\tilde{k}\eta \\ \cdot & \frac{1}{5}\eta\tilde{k}^2 - \frac{1}{5}\mu\tilde{f}^2 + \frac{4}{3}\tau_1 & \frac{1}{3}i(-\eta + 2\tau_2)\tilde{k} & \frac{1}{5}i(-3\eta + 2\tau_2)\tilde{k} \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 - \eta + \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & -\frac{1}{5}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 - \eta + \frac{1}{5}\mu\tilde{f}^2 \\ \text{sym} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{7}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 - \frac{9}{5}\eta + \frac{1}{7}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix},$$

e per avere soluzioni non nulle richiediamo che

$$\det \mathbf{M}_f(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0. \quad (5.22)$$

Il membro sinistro dell'equazione (5.22) è un polinomio del quart'ordine sia rispetto a \tilde{k}^2 che rispetto a \tilde{f}^2 e quindi per ogni numero d'onda \tilde{k} reale sono possibili quattro frequenze di vibrazione e cioè si aggiungono due ulteriori rami di dispersione rispetto ai due della precedente teoria di ordine uno.

Per $\tilde{k} = 0$, le frequenze di cut-off che soddisfano la (5.22) sono:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0^{(3)} &= 0, \\ \tilde{f}_1^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\mu\eta(45 - \sqrt{1605})}}{\mu}, \\ \tilde{f}_2^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\mu\eta(45 + \sqrt{1605})}}{\mu}, \\ \tilde{f}_3^{(3)} &= \frac{\sqrt{15} \sqrt{\mu\tau_1}}{\mu},\end{aligned}\tag{5.23}$$

ed inoltre, se risolviamo l'equazione (5.21), alle quattro frequenze (5.23) sono associate le seguenti oscillazioni:

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_0^{(3)}$

$$\mathbf{u}_f^{(3)} \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_f^{(3)} \cdot \mathbf{z} = w_0 \neq 0,\tag{5.24}$$

il moto è un'oscillazione rigida di innalzamento ed abbassamento;

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_{1,2}^{(3)}$

$$\mathbf{u}_f^{(3)} \cdot \mathbf{c}_1 = \zeta \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \zeta^3 \bar{\mathbf{u}}_3 \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0, \quad \mathbf{u}_f^{(3)} \cdot \mathbf{z} = 0,\tag{5.25}$$

l'oscillazione è isocora, di taglio nel piano, del tipo “a mazzo di carte”;

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_3^{(3)}$

$$\mathbf{u}_f^{(3)} \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_f^{(3)} \cdot \mathbf{z} = w_0 + \zeta^2 w_2 \neq 0,\tag{5.26}$$

il moto è un'oscillazione di innalzamento ed abbassamento con variazione di volume nello spessore della piastra.

Nella figura 5.1 le curve di dispersione della teoria di ordine tre sono tracciate con tratto continuo. Osserviamo che l'arricchimento cinematico, oltre ad aggiungere due ulteriori rami di dispersione, produce uno spostamento delle prime due curve: fissato il numero d'onda \tilde{k} , la teoria di ordine tre prevede la propagazione di onde con frequenza \tilde{f} inferiore a quella prevista dalla teoria di ordine uno. L'incremento dell'ordine cinematico provoca un rilassamento dei primi due modi di vibrare e ciò a riprova del fatto che le teorie bidimensionali modellano piastra in cui la rigidezza decresce al crescere dell'ordine gerarchico.

Nella figura 5.2, nel quadrante $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (relativo alla propagazione di onde progressive), sono confrontati i rami di dispersione delle teorie di piastre di ordine uno (linea tratteggiata) e tre (linea continua) con i corrispondenti del problema tridimensionale (linea puntinata). La corrispondenza tra rami bidimensionali e tridimensionali è determinata sulla base della vicinanza delle curve e del comportamento al cut-off. Alla frequenza $\tilde{f} = 0$, le oscillazioni sono trasversali sia per il problema bidimensionale che per quello tridimensionale. Alle frequenze \tilde{f}_1^e , $\tilde{f}_1^{(1)}$ e $\tilde{f}_1^{(3)}$, le tre teorie prevedono oscillazioni longitudinali del tipo “a mazzo di carte”. Infine le due coppie di frequenze $(\tilde{f}_3^e, \tilde{f}_2^{(3)})$ ed $(\tilde{f}_2^d, \tilde{f}_3^{(3)})$ sono associate ad oscillazioni rispettivamente longitudinali (isocore) e trasversali (dilatazionali). Osserviamo che l'arricchimento cinematico compiuto nella teoria di ordine tre causa un positivo avvicinamento delle prime due curve alle corrispondenti tridimensionali. Tuttavia la rigidezza

dovuta ad una imposizione cinematica influisce ancora pesantemente sulla posizione delle seconde due curve a frequenze più alte che si discostano notevolmente dalle corrispondenti tridimensionali.

Per approfondimenti sui modi di taglio longitudinali rimandiamo a [49] dove, dopo aver prescritto un campo di spostamenti di tipo trigonometrico (vedi (1.31)), viene formulata una teoria di piastre capace di caratterizzare un particolare modo di vibrare di taglio nello spessore, con tre nodi lungo lo spessore, tipico di un risonatore ad alta precisione.

Osservazione. Nel paragrafo 1.2 abbiamo espresso la sottigliezza di una piastra $\Omega \sim \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ di dimensioni finite tramite la piccolezza del parametro $\varepsilon/\text{diametro}(\mathcal{P})$. Questa nozione perde senso qualora si tratti il problema di vibrazione libera, che suppone la piastra infinitamente estesa. Introduciamo allora come nuovo parametro di sottigliezza il numero d'onda adimensionalizzato $\tilde{k} = \varepsilon k$ il quale si compone di due fattori: uno di tipo cinematico k ed uno geometrico ε . In base a questa nuova nozione, una piastra è supposta sottile quando il moto ondoso è caratterizzato da un numero d'onda k piccolo in confronto al semi-spessore ε .

Se osserviamo la figura 5.2, notiamo che le curve di dispersione bidimensionali approssimano meglio le corrispondenti curve tridimensionali laddove i numeri d'onda \tilde{k} hanno bassi valori e ciò significa che le predizioni delle caratteristiche di propagazione ondosa da parte delle teorie bidimensionali sono tanto più precise quanto più la piastra è sottile. \square

5.1.2 Onde di torsione

Passiamo allo studio dei problemi di torsione (5.3) e (5.5). Assumiamo che le incognite (b_1, b_3) abbiano la forma

$$b_j = -i \frac{V_j}{k} g(x, t), \quad j = 1, 3, \quad (5.27)$$

con $g(x, t)$ definito in (5.7). Segue che il campo di spostamenti di ordine uno diventa

$$\mathbf{u}_{ta}^{(1)}(x, \zeta, t) = \zeta V_1 g(x, t) \mathbf{c}_2, \quad (5.28)$$

e quello di ordine tre:

$$\mathbf{u}_{ta}^{(3)}(x, \zeta, t) = (\zeta V_1 + \zeta^3 V_3) g(x, t) \mathbf{c}_2, \quad (5.29)$$

le quali sono onde trasversali di tipo solenoidale ($\text{div } \mathbf{u}_{ta}^{(i)} = 0$, $i = 1, 3$), la cui direzione di oscillazione è \mathbf{c}_2 e che chiamiamo *onde di torsione antisimmetriche*. Se sostituiamo le (5.27) nella (5.3), otteniamo l'equazione

$$[\mu(\tilde{k}^2 - \tilde{f}^2) + 3\eta]V_1 = 0, \quad (5.30)$$

la quale ammette ampiezza V_1 non nulla soltanto se

$$\tilde{k}_{\pm} = \pm \sqrt{\tilde{f}^2 - \frac{3\eta}{\mu}}. \quad (5.31)$$

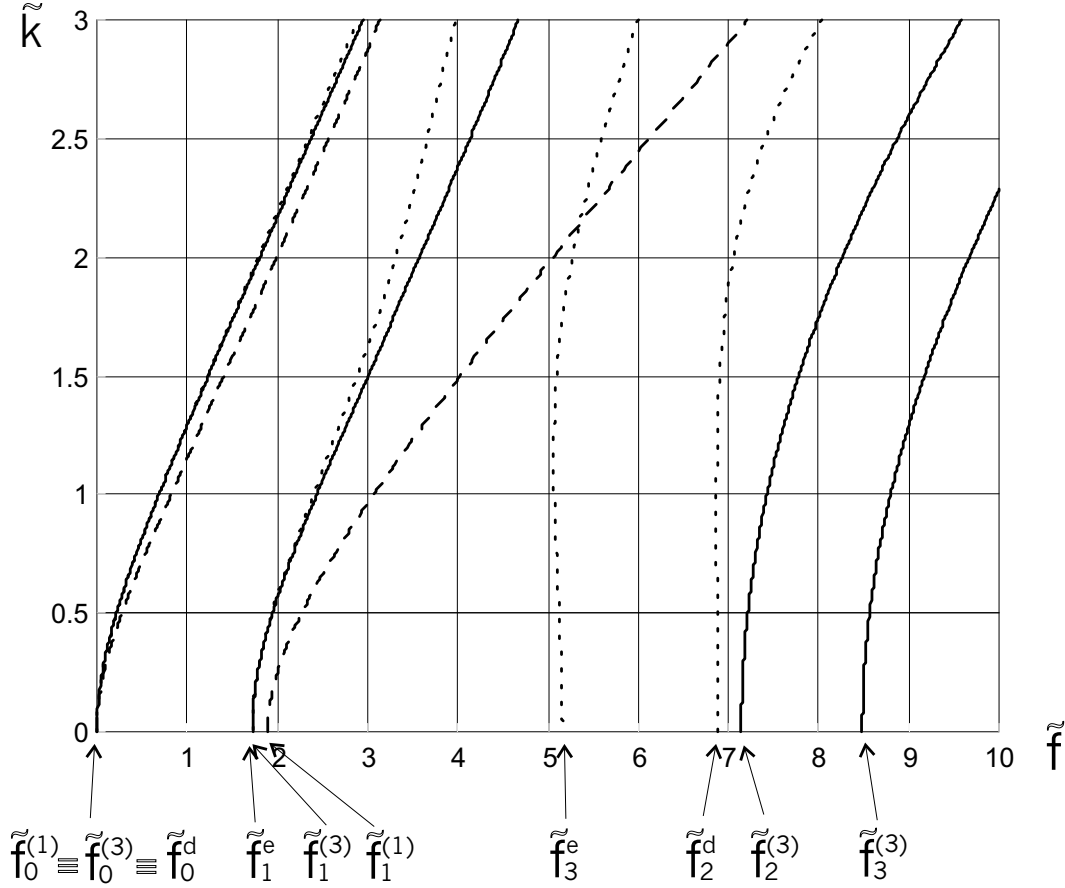


Figura 5.2: Curve di dispersione per onde di flessione: linea tratteggiata \equiv teoria del prim'ordine; linea continua \equiv teoria del terz'ordine; linea puntinata \equiv teoria tridimensionale.

Sostituiamo ora le (5.27) nella (5.5). Otteniamo l'equazione algebrica:

$$\mathbf{T}_f(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{c}_f = 0, \quad (5.32)$$

con

$$\mathbf{T}_f(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mu\tilde{k}^2 + \eta - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & \frac{1}{5}\mu\tilde{k}^2 + \eta - \frac{1}{5}\mu\tilde{f}^2 \\ \cdot & \frac{1}{7}\mu\tilde{k}^2 + \frac{9}{5}\eta - \frac{1}{7}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_f = \begin{pmatrix} \varepsilon V_1 \\ \varepsilon^3 V_3 \end{pmatrix}.$$

La (5.32) ammette soluzione non banale se

$$\det(\mathbf{T}_f(\tilde{k}, \tilde{f})) = 0,$$

che corrisponde all'equazione del quart'ordine in \tilde{k} :

$$\mu^2\tilde{k}^4 + (45\mu\eta - 2\mu^2\tilde{f}^2)\tilde{k}^2 + \mu^2\tilde{f}^4 + 105\eta^2 - 45\mu\eta\tilde{f}^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono a due a due uguali e contrarie, e le due positive sono:

$$\tilde{k}_{\pm} = \sqrt{\tilde{f}^2 + \frac{\eta(-45 \pm \sqrt{1605})}{2\mu}}. \quad (5.33)$$

Nella figura 5.3 sono rappresentate le curve (5.31) e (5.33) assegnati i coefficienti nella Tabella 1. Anche in questo caso osserviamo che l'arricchimento cinematico, oltre ad aggiungere un nuovo ramo di dispersione, produce uno spostamento in frequenza evidente dal confronto tra le prime due curve relative ai modi a bassa frequenza.

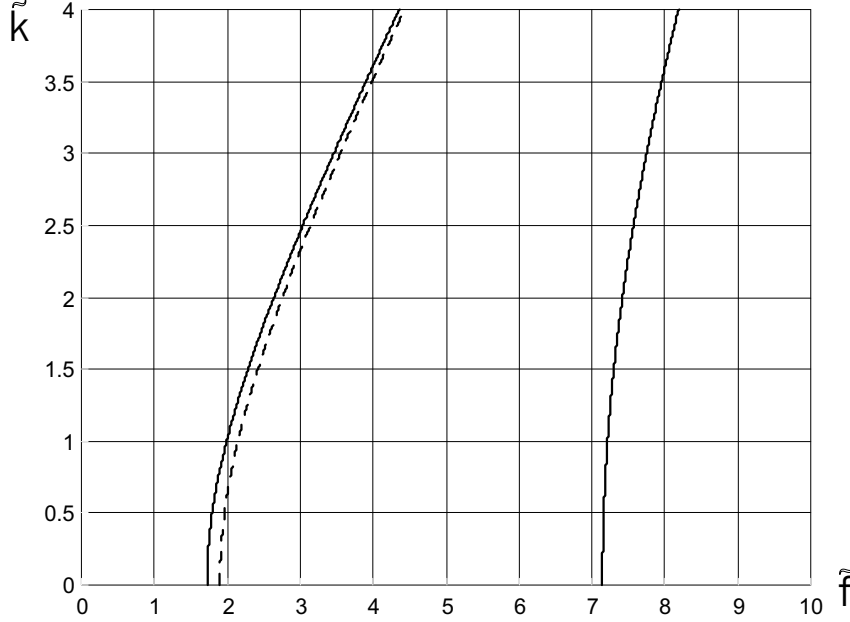


Figura 5.3: Confronto tra le curve di dispersione per onde di torsione antisimmetriche dalle equazioni delle piastre di ordine 1 (linea tratteggiata) e di ordine 3 (linea continua).

5.2 Onde simmetriche in piastre coerenti

Passiamo allo studio della propagazione di onde simmetriche in piastre coerenti, in condizioni di vibrazione libera. Come abbiamo già fatto nel paragrafo precedente, rappresentiamo i descrittori cinematici $\bar{\mathbf{u}}_0$ e $\bar{\mathbf{u}}_1$ secondo la decomposizione di Helmholtz:

$$\bar{\mathbf{u}}_i(x, t) = \nabla a_i + \mathbf{z} \times \nabla b_i, \quad i = 0, 2. \quad (5.34)$$

Sostituiamo la (5.34) nelle equazioni (2.70) di ordine uno per il regime membranale ed applichiamo gli operatori div e curl alla (2.70)₂. Otteniamo i seguenti due gruppi di equazioni

- *problema di estensione*

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\Delta\Delta a_0 + \tau_2\Delta w_1 &= \rho\Delta\ddot{a}_0, \\ \varepsilon^2\eta\Delta w_1 - 3\tau_2\Delta a_0 - 3\tau_1 w_1 &= \varepsilon^2\rho\ddot{w}_1, \end{aligned} \quad (5.35)$$

- *problema di torsione simmetrica*

$$\mu\Delta\Delta b_0 + \tau_2\nabla w_1 = \rho\Delta\ddot{b}_0. \quad (5.36)$$

Analogamente le equazioni (2.93) della teoria del terz'ordine si trasformano nei seguenti due sistemi disaccoppiati:

- *problema di estensione*

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon[(2\mu + \lambda)\Delta\Delta a_0 + \tau_2\Delta w_1] + \frac{2}{3}\varepsilon^3[(2\mu + \lambda)\Delta\Delta a_2 + 3\tau_2\Delta w_3] = \\
& = 2\varepsilon\rho\Delta\ddot{a}_0 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\Delta\ddot{a}_2, \\
& \frac{2}{3}\varepsilon^3\eta\Delta(w_1 + 2a_2) + \frac{2}{5}\varepsilon^5\eta\Delta w_3 - 2\varepsilon(\tau_2\Delta a_0 + \tau_1 w_1) - \frac{2}{3}\varepsilon^3(\tau_2\Delta a_2 + 3\tau_1 w_3) = \\
& = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{w}_1 + \frac{2}{5}\varepsilon^5\rho\ddot{w}_3 \\
& \frac{2}{3}\varepsilon^3[(2\mu + \lambda)\Delta\Delta a_0 + \tau_2\Delta w_1] + \frac{2}{5}\varepsilon^5[(2\mu + \lambda)\Delta\Delta a_2 + 3\tau_2\Delta w_3] + \\
& - \frac{4}{3}\varepsilon^3\eta(\Delta w_1 + 2\Delta a_2) - \frac{4}{5}\varepsilon^5\eta\Delta w_3 = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\Delta\ddot{a}_0 + \frac{2}{5}\varepsilon^5\rho\Delta\ddot{a}_2, \\
& \frac{2}{5}\varepsilon^5\eta\Delta(w_1 + 2a_2) + \frac{2}{7}\varepsilon^7\eta\Delta w_3 - 2\varepsilon^3(\tau_2\Delta a_0 + \tau_1 w_1) - \frac{6}{5}\varepsilon^5(\tau_2\Delta a_2 + 3\tau_1 w_3) = \\
& = \frac{2}{5}\varepsilon^5\rho\ddot{w}_1 + \frac{2}{7}\varepsilon^7\rho\ddot{w}_3,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

- *problema di torsione*

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon\mu\Delta\Delta b_0 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\mu\Delta\Delta b_2 = 2\varepsilon\rho\Delta\ddot{b}_0 + \frac{2}{3}\varepsilon^2\rho\Delta\ddot{b}_2, \\
& \frac{2}{3}\varepsilon^3\mu\Delta\Delta b_0 + \frac{2}{5}\varepsilon^5\mu\Delta\Delta b_2 - \frac{8}{3}\varepsilon^3\eta\Delta b_2 = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\Delta\ddot{b}_0 + \frac{2}{5}\varepsilon^5\rho\Delta\ddot{b}_2,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

le cui incognite sono rispettivamente (w_0, w_2, a_1, a_3) e (b_1, b_3) .

In [66] sono studiate equazioni analoghe alle (5.35) e (5.36) nel caso di piastra elettroelastica.

5.2.1 Onde di spessore

Assegnamo alle incognite (a_0, a_2, w_1, w_3) dei problemi di spessore (5.35) e (5.37) la forma di onde armoniche piane

$$\begin{aligned}
& a_j(x, t) = -i\frac{U_j}{k}g(x, t), \quad j = 0, 2, \\
& w_i(x, t) = W_i g(x, t), \quad i = 1, 3,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

dove la funzione d'onda $g(x, t)$ è data in (5.7). Sotto queste assunzioni, i campi di spostamento di ordine uno e tre diventano rispettivamente

$$\mathbf{u}_s^{(1)}(x, \zeta, t) = (U_0\mathbf{c}_1 + \zeta W_1\mathbf{z})g(x, t), \tag{5.40}$$

$$\mathbf{u}_s^{(3)}(x, \zeta, t) = [(U_0 + \zeta^2 U_2)\mathbf{c}_1 + (\zeta W_1 + \zeta^3 W_3)\mathbf{z}]g(x, t), \tag{5.41}$$

e definiscono due moti ondosi che giacciono nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$ e che chiamiamo *onde di spessore*.

Sostituiamo le (5.39) nelle equazioni (5.35) per ottenere il seguente sistema algebrico

$$\mathbf{N}_m(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{a}_m = 0, \tag{5.42}$$

dove

$$\mathbf{N}_m(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & i\tau_2\tilde{k} \\ i\tau_2\tilde{k} & \frac{1}{3}\eta\tilde{k}^2 - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 + \tau_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} U_0 \\ \varepsilon W_1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione (5.42) ammette soluzione non banale se

$$\det \mathbf{N}_m(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0,$$

e cioè se è soddisfatta l'equazione del second'ordine in \tilde{k}^2 :

$$b_2 \tilde{k}^4 + b_1(\tilde{f}^2) \tilde{k}^2 + b_0(\tilde{f}^2) = 0, \quad (5.43)$$

con

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{3}\eta(2\mu + \lambda), \\ b_1(\tilde{f}^2) &= \tau_2^2 - \tau_1(2\mu + \lambda) + \frac{1}{3}(2\mu + \lambda + \eta)\tilde{f}^2, \\ b_0(\tilde{f}^2) &= \mu(\tau_1 - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2)\tilde{f}^2, \end{aligned} \quad (5.44)$$

che ammette le seguenti quattro radici a due e due uguali e contrarie

$$\pm \tilde{k}_\pm(\tilde{f}) = \pm \sqrt{\frac{-b_1(\tilde{f}^2) \pm \sqrt{d(\tilde{f}^2)}}{2b_2}}, \quad (5.45)$$

dove

$$d(\tilde{f}^2) = \left(\frac{1}{3}(\lambda + 2\mu - \eta)\mu\tilde{f}^2 - \tau_1(\lambda + 2\mu) + \tau_2^2\right)^2 + \frac{4}{3}\eta\mu\tau_2^2\tilde{f}^2.$$

Consideriamo di nuovo solo le due radici positive \tilde{k}_\pm , le quali sono reali o immaginarie poiché $d(\tilde{f}^2)$ è positivo grazie alle (2.63). Le due soluzioni \tilde{k}_\pm si annullano per le seguenti frequenze di cut-off membranali:

$$\tilde{f}_0^{(1)} = 0, \quad \tilde{f}_1^{(1)} = \sqrt{\frac{3\tau_1}{\mu}}. \quad (5.46)$$

Inoltre

$$\left. \begin{aligned} \tilde{k}_\pm(\tilde{f}) &\in \mathbb{R}^+, && \text{per ogni } \tilde{f} > \tilde{f}_1^{(1)}, \\ \tilde{k}_+(\tilde{f}) &\in \mathbb{R}^+ \\ \tilde{k}_-(\tilde{f}) &\in \text{Im}^+ \end{aligned} \right\} \text{per ogni } 0 < \tilde{f} < \tilde{f}_1^{(1)}, \quad (5.47)$$

e così due onde armoniche progressive propagano solo alla frequenza $\tilde{f} > \tilde{f}_1^{(1)}$, mentre per frequenze $0 < \tilde{f} \leq \tilde{f}_1^{(1)}$ si hanno un'onda progressiva ed una stazionaria rispettivamente con numeri d'onda \tilde{k}_+ e \tilde{k}_- . Le soluzioni del sistema (5.42), a meno di un coefficiente moltiplicativo, sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m^- &= \left(1, -\frac{i3\tau_2\tilde{k}_-}{\eta\tilde{k}_-^2 - \mu\tilde{f} + 3\tau_1}\right)^T, \\ \mathbf{a}_m^+ &= \left(\frac{i\tau_2\tilde{k}_+}{(\lambda + 2\mu)\tilde{k}_+^2 - \mu\tilde{f}}, 1\right)^T, \end{aligned} \quad (5.48)$$

ed i due campi di spostamento si scrivono:

$$(\mathbf{u}_s^{(1)})_\pm = \bar{\mathbf{u}}_0^\pm + \zeta w_1^\pm \mathbf{z},$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_0^- &= \varepsilon g^-(x, t) \mathbf{c}_1, && \bar{\mathbf{u}}_0^+ = i\varepsilon \frac{\tau_2\tilde{k}_+}{(\lambda + 2\mu)\tilde{k}_+^2 - \mu\tilde{f}} g^+(x, t) \mathbf{c}_1, \\ w_1^- &= i \frac{3\tau_2\tilde{k}_-}{\eta\tilde{k}_-^2 - \mu\tilde{f} + 3\tau_1} g^-(x, t), && w_1^+ = g^+(x, t), \end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$g^+(x, t) = \exp(i(\frac{\tilde{k}_+}{\varepsilon} \mathbf{c}_1 \cdot (x - o) - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\tilde{f}}{\varepsilon} t)),$$

$$g^-(x, t) = \begin{cases} \exp(-\frac{\tilde{k}_-}{i\varepsilon} \mathbf{c}_1 \cdot (x - o)) \exp(-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\tilde{f}}{\varepsilon} t), & 0 < \tilde{f} < \tilde{f}_1^{(1)}, \\ \exp(i(\frac{\tilde{k}_-}{\varepsilon} \mathbf{c}_1 \cdot (x - o) - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\tilde{f}}{\varepsilon} t)), & \tilde{f} > \tilde{f}_1^{(1)}. \end{cases} \quad (5.50)$$

Alle frequenze di cut-off (5.46) la piastra esibisce le seguenti oscillazioni (vedi figura 5.4):

- per $\tilde{f} = 0$:

$$\mathbf{u}_s^{(1)} \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0, \quad \mathbf{u}_s^{(1)} \cdot \mathbf{z} = 0, \quad (5.51)$$

l'oscillazione è un moto rigido nella direzione \mathbf{c}_1

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_1$:

$$\mathbf{u}_s^{(1)} \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_s^{(1)} \cdot \mathbf{z} \neq 0, \quad (5.52)$$

l'oscillazione è di deformazione nello spessore.

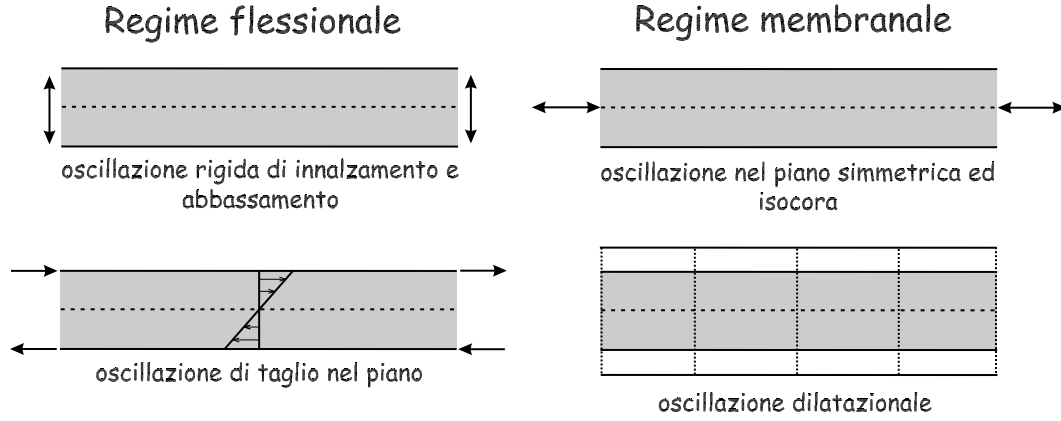


Figura 5.4: Oscillazioni al cut-off per una piastra coerente di ordine uno.

Osserviamo che la prima oscillazione è isocora e la seconda dilatazionale. Il comportamento al cut-off ci suggerisce di chiamare onde *equivoluminali* e *dilatazionali* quelle associate ai rami di dispersione \tilde{k}_+ e \tilde{k}_- rispettivamente. Nella figura 5.5 le due curve \tilde{k}_- e \tilde{k}_+ sono tracciate con linea tratteggiata per una piastra di *zircotitanato di piombo* P1-88 (vedi Tabella 1).

Passiamo al problema di ordine tre. Sostituiamo la soluzione (5.39) nelle equazioni (5.37). Otteniamo il seguente sistema algebrico

$$\mathbf{M}_m(\tilde{k}, \tilde{f}) \mathbf{b}_m = 0, \quad (5.53)$$

dove $\mathbf{b}_m = (\varepsilon W_1, \varepsilon^3 W_3, U_0, \varepsilon^2 U_2)^T$ ed $\mathbf{M}_m(\tilde{k}, \tilde{f})$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\eta\tilde{k}^2 - \tau_1 + \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & -\frac{1}{5}\eta\tilde{k}^2 - \tau_1 + \frac{1}{5}\mu\tilde{f}^2 & -i\tilde{k}\tau_2, & \frac{1}{3}i(2\eta - \tau_2)\tilde{k} \\ \cdot & -\frac{1}{7}\eta\tilde{k}^2 - \frac{9}{5}\tau_1 + \frac{1}{7}\mu\tilde{f}^2 & -i\tilde{k}\tau_2 & \frac{1}{5}i(2\eta - 3\tau_2)\tilde{k} \\ \cdot & \cdot & (\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 - \mu\tilde{f}^2 & \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \\ \text{sym} & \cdot & \cdot & \frac{1}{5}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \frac{4}{3}\eta - \frac{1}{5}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix}.$$

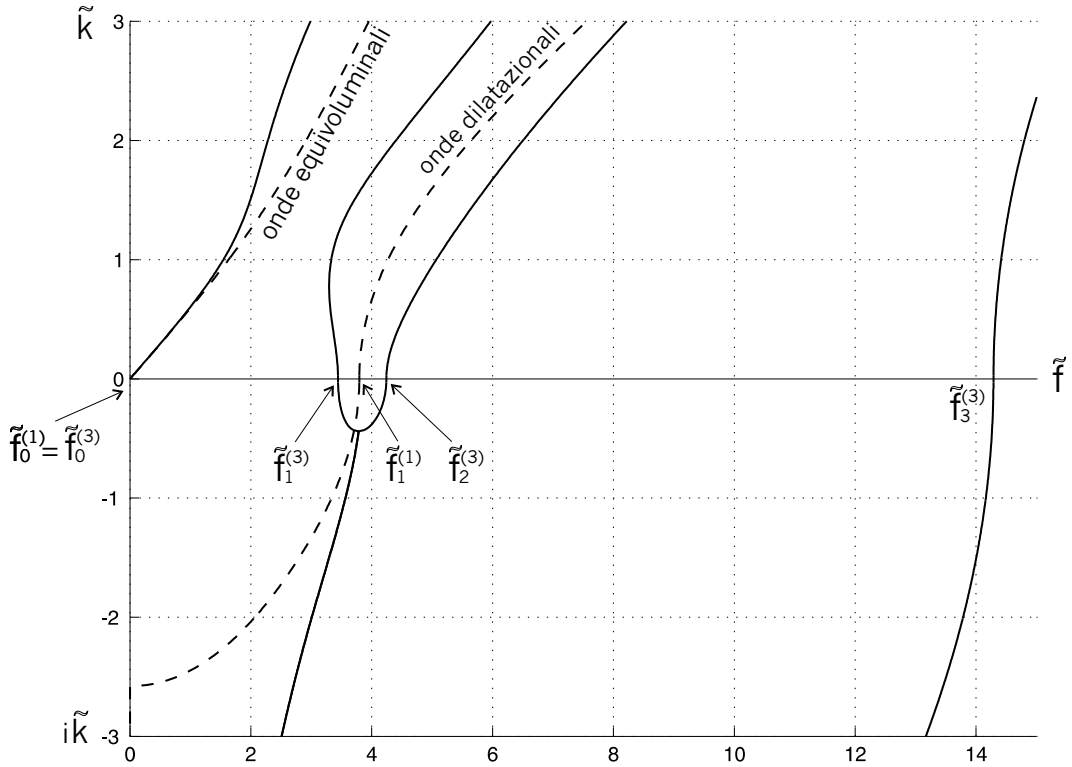


Figura 5.5: Confronto tra le curve di dispersione per onde di spessore ottenute dalle equazioni delle piastre di ordine 1 (linea tratteggiata) e di ordine 3 (linea continua).

Il sistema (5.53) ammette soluzioni non banali se è soddisfatta l'equazione

$$\det \mathbf{M}_m(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0, \quad (5.54)$$

il cui primo membro è un polinomio di ordine quattro sia nella potenza \tilde{k}^2 che \tilde{f}^2 . Per ogni numero d'onda \tilde{k} reale sono possibili quattro frequenze e quindi nel quadrante $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, si aggiungono due ulteriori rami di dispersione rispetto ai due del problema di ordine uno. Nella figura 5.5 sono confrontate le curve di dispersione della teoria di ordine uno (linea tratteggiata) con quelle della teoria di ordine tre (linea continua). Gli effetti dell'arricchimento cinematico sono analoghi a quelli già notati per i moti flessionali, ossia si aggiungono due ulteriori rami di dispersione e si verifica uno spostamento dei primi due in base al quale, fissato il numero d'onda \tilde{k} , propagano onde con frequenza \tilde{f} più bassa di quella prevista dalla teoria di piastre di ordine uno.

Per $\tilde{k} \rightarrow 0$, le frequenze di cut-off che soddisfano la condizione di propagazione (5.54)

sono:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_0^{(3)} &= 0, \\
\tilde{f}_1^{(3)} &= \frac{\sqrt{15}\sqrt{\mu\eta}}{\mu}, \\
\tilde{f}_2^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\tau_1\mu(45 - \sqrt{1605})}}{\mu}, \\
\tilde{f}_3^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\tau_1\mu(45 + \sqrt{1605})}}{\mu},
\end{aligned} \tag{5.55}$$

e dall'equazione (5.53) si ottengono le seguenti oscillazioni:

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_0^{(3)}$

$$\mathbf{u}_s^{(3)} \cdot \mathbf{c}_1 = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0, \quad \mathbf{u}_s^{(3)} \cdot \mathbf{z} = 0, \tag{5.56}$$

ed il moto è uno spostamento rigido nella direzione \mathbf{c}_1 ;

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_1^{(3)}$

$$\mathbf{u}_s^{(3)} \cdot \mathbf{c}_1 = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1 + \zeta^2 \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0, \quad \mathbf{u}_s^{(3)} \cdot \mathbf{z} = 0, \tag{5.57}$$

ed il moto è un'oscillazione di taglio nel piano di tipo simmetrico;

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_{2,3}^{(3)}$

$$\mathbf{u}_s^{(3)} \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_s^{(3)} \cdot \mathbf{z} = \zeta w_1 + \zeta^3 w_3 \neq 0, \tag{5.58}$$

e l'oscillazione è dilatazionale.

Nella figura 5.6, i rami nel quadrante $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ delle due teorie di piastre sono paragonati ai corrispondenti del problema tridimensionale. L'arricchimento cinematico produce i seguenti vantaggi: la prima curva di dispersione, quella a frequenza di cut-off nulla, finisce col coincidere con la corrispondente curva tridimensionale; alla curva caratterizzata dalla frequenza $\tilde{f}_1^{(1)}$ della teoria di ordine uno, si sostituiscono le due curve, con frequenze di cut-off $\tilde{f}_1^{(3)}$ ed $\tilde{f}_2^{(3)}$ corrispondenti ad onde longitudinali la prima e trasversali la seconda, le quali approssimano rispettivamente le due curve tridimensionali che confluiscono nelle frequenze \tilde{f}_2^e e \tilde{f}_1^d coincidenti. Osserviamo, infine, che la terza ed ultima curva con frequenza $\tilde{f}_3^{(3)}$ si allontana molto dalla corrispondente tridimensionale con frequenza \tilde{f}_4^e .

Osservazione. Nelle teorie bidimensionali, l'ipotesi sulla forma del campo di spostamenti restringe la classe dei moti possibili e quindi rende di regola la piastra più rigida rispetto al corpo tridimensionale che la teoria in via di costruzione si propone di modellare. Infatti, se confrontiamo le curve di dispersione (vedi figure 5.2 e 5.6), osserviamo che, a parità di numero d'onda, le onde propagano nella piastra modellata dalla teoria bidimensionale con frequenza più alta rispetto all'onda che propaga nella piastra tridimensionale.

Il rimedio da noi adottato per attenuare questa discrepanza è stato l'impiego di una cinematica più descrittiva: il campo di spostamenti di ordine tre ha provocato un positivo avvicinamento delle curve di dispersione a bassa frequenza alle corrispondenti tridimensionali. In [59] Nikodem *et al.* indicano una procedura per scrivere le relazioni di dispersione

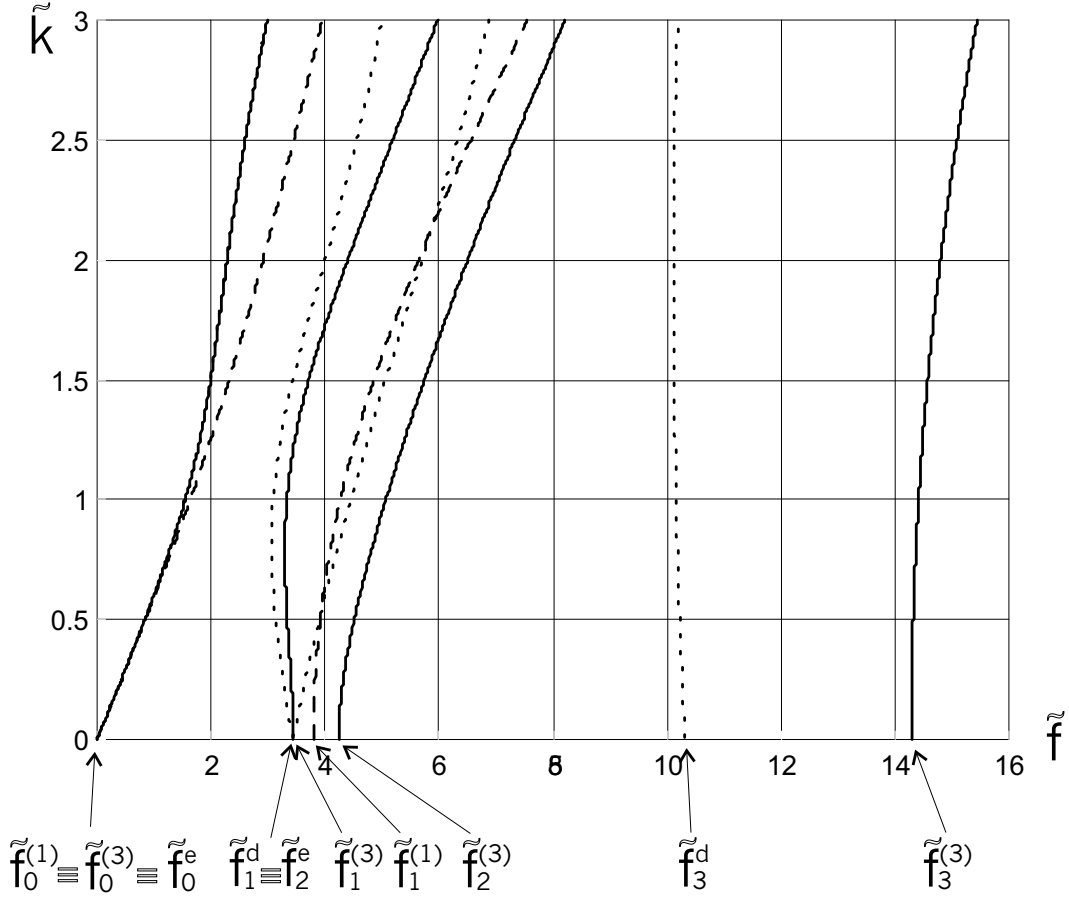


Figura 5.6: Curve di dispersione per onde membranali: linea tratteggiata \equiv teoria del prim'ordine; linea continua \equiv teoria del terz'ordine; linea puntinata \equiv teoria tridimensionale.

relative a teorie di piastra di ordine n , dedotte dal tridimensionale dopo aver assegnato la cinematica di tipo trigonometrico (1.31) e poi tracciano le curve di dispersione fino all'ordine dieci e mostrano che, al crescere dell'ordine, le curve tridimensionali sono approssimate in numero sempre maggiore e sempre meglio.

Un secondo rimedio possibile è quello di introdurre fattori correttivi nelle equazioni costitutive. In [25], Mindlin introduce il noto coefficiente di taglio

$$k_M = \frac{\pi}{\sqrt{12}}, \quad (5.59)$$

nelle equazioni del moto membranale in modo che la frequenza di cut-off relativa al modo di tipo membranale di dilatazione nello spessore diventi uguale alla corrispondente del problema tridimensionale. Osserviamo che

$$k_M = \tilde{f}_1^d / \tilde{f}_1^{(1)},$$

dove \tilde{f}_1^d è data dalla (4.43) ed $\tilde{f}_1^{(1)}$ dalla (5.46)₂. In [44] il medesimo coefficiente correggere le leggi costitutive per il taglio, così che la frequenza di cut-off del modo flessionale di taglio

nel piano uguagli la corrispondente tridimensionale. Anche per i modi flessionali, infatti, si ha che

$$k_M = \tilde{f}_1^e / \tilde{f}_1^{(1)},$$

dove \tilde{f}_1^e è data in (4.45)₂ e $\tilde{f}_1^{(1)}$ da (5.14)₂. Nel caso in cui la piastra sia elettroelastica, nel fattore correttivo (5.59) entrano anche i coefficienti costitutivi e di accoppiamento, come si può vedere in [46]. In [48] e [50], ancora nel caso di piastre elettroelastiche, sono introdotti rispettivamente due e tre fattori per correggere le frequenze di cut-off per i modi di dilatazione nello spessore e di taglio nello spessore. Il numero di coefficienti correttivi cresce con l'ordine della teoria di piastra (vedi [49] e [83]). In [32] e [71] sono usati due fattori per aggiustare l'andamento del ramo di dispersione flessionale per il modo di vibrare di taglio nel piano. Infine segnaliamo l'articolo [72] dove sono confrontate le curve di dispersione che si ottengono da teorie di piastre nelle quali sono adottati diversi coefficienti correttivi.

Una terza ed ultima misura consiste nella prescrizione di campi di spostamento di forme particolari. In [35] si fa dipendere lo spostamento nel piano dalla coordinata trasversale ζ tramite la somma di una serie di coseni e di un termine lineare e ciò permette una più accurata predizione delle frequenze di cut-off. In [61] si assume uno spostamento che dipende da ζ per mezzo del sistema completo di funzioni che compaiono nella soluzione esatta del problema tridimensionale al cut-off (le cosiddette soluzioni semplici). In questo modo le frequenze di cut-off coincidono esattamente con quelle del problema tridimensionale.

Molti sono i lavori che paragonano diverse teorie di piastre sulla base di confronti tra le rispettive curve di dispersione. In [82] vengono confrontati gli spettri in frequenza predetti da diverse teorie bidimensionali con quelli tridimensionali; si osserva che l'arricchimento cinematico dall'ordine uno all'ordine tre è più efficace dell'impiego di coefficienti correttivi nella teoria di ordine uno. In [53] sono confrontate le relazioni di dispersione per teorie di piastre dedotte dalla stazionarietà di diversi funzionali. \square

5.2.2 Onde di torsione

Passiamo ai problemi (5.36) e (5.38). Assegnamo alle incognite (b_0, b_2) la forma

$$b_j = -i \frac{V_j}{k} g(x, t), \quad j = 0, 2. \quad (5.60)$$

Dalle (5.34), i campi di spostamento che ne seguono sono

$$\mathbf{u}_{ts}^{(1)}(x, \zeta, t) = V_0 g(x, t) \mathbf{c}_2, \quad (5.61)$$

per la teoria di ordine uno e

$$\mathbf{u}_{ts}^{(3)}(x, \zeta, t) = (V_0 + \zeta^2 V_2) g(x, t) \mathbf{c}_2, \quad (5.62)$$

per la teoria di ordine tre. I moti (5.61) e (5.62) sono solenoidali e caratterizzano onde trasversali che chiamiamo *onde di torsione simmetriche*. Dall'equazione (5.36) otteniamo

$$\mu(\tilde{k}^2 - \tilde{f}^2)V_0 = 0, \quad (5.63)$$

da cui la condizione di propagazione

$$\tilde{k}_{\pm} = \pm \tilde{f}. \quad (5.64)$$

Dal sistema (5.38) abbiamo:

$$\mathbf{T}_m(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{c}_m = 0, \quad (5.65)$$

con

$$\mathbf{T}_m(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} \mu(\tilde{k}^2 - \tilde{f}^2) & \frac{1}{3}\mu(\tilde{k}^2 - \mu\tilde{f}^2) \\ \frac{1}{5}\mu\tilde{k}^2 + \frac{4}{3}\eta - \frac{1}{5}\mu\tilde{f}^2 & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_m = \begin{pmatrix} V_0 \\ \varepsilon^2 V_2 \end{pmatrix},$$

e soluzioni non banali sono garantite solo se il determinante della matrice $\mathbf{T}_f(\tilde{k}, \tilde{f})$ è nullo, ossia se è soddisfatta l'equazione algebrica

$$4\mu^2\tilde{k}^4 + (60\mu\eta - 8\mu^2\tilde{f}^2)\tilde{k}^2 + 4\mu^2\tilde{f}^4 - 60\mu\eta\tilde{f}^2 = 0,$$

le cui quattro soluzioni a due a due uguali e contrarie sono:

$$\tilde{k}_{1,2} = \pm \tilde{f}, \quad \tilde{k}_{3,4} = \pm \sqrt{\tilde{f}^2 - 15\frac{\eta}{\mu}}. \quad (5.66)$$

5.3 Onde in piastre debolmente incoerenti

In questo paragrafo studiamo la propagazione di onde libere in una piastra debolmente incoerente. Sotto le ipotesi di vibrazione libera, le equazioni di evoluzione (3.87) diventano:

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon\{\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2\nabla w_1 + \theta[-(\lambda + \mu)\nabla(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) + \\ & + (\tau_2 - \lambda)\nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\eta - \mu)\Delta w_0\mathbf{c}_1 + (\eta - \mu)(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1 - \mu(\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1]\} = 2\varepsilon\rho\ddot{\mathbf{u}}_0, \\ & 2\varepsilon\{\eta(\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + \theta[-(\tau_2 + 2\eta)(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) - (\lambda + \mu)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1) + \\ & + (\eta - \mu)\Delta(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1)]\} = 2\varepsilon\rho\ddot{w}_0, \\ & \frac{2}{3}\varepsilon^3[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1] - 2\varepsilon\eta(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) + \\ & + \theta\{\frac{2}{3}\varepsilon^3[-(\lambda + \mu)\nabla(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\eta - \mu)\Delta w_1\mathbf{c}_1] + \\ & + 2\varepsilon[(\tau_2 + 2\eta - \tau_1)w_1\mathbf{c}_1 - (\tau_2 - \lambda)(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1 + \mu(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1 - (\eta - \mu)\nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1)]\} = \frac{2}{3}\varepsilon^3\ddot{\mathbf{u}}_1, \\ & \frac{2}{3}\varepsilon^3\eta\Delta w_1 - 2\varepsilon(\tau_1 w_1 + \tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0) + \theta\{\frac{2}{3}\varepsilon^3[-(\lambda + \mu)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1) + \\ & + (\eta - \mu)\Delta(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1)] + 2\varepsilon[(\tau_2 + 2\eta)\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1 + (\tau_2 - \tau_1 + 2\eta)\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1]\} = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{w}_1. \end{aligned} \quad (5.67)$$

La presenza dei termini proporzionali a θ non permette di separare le equazioni appena scritte in due problemi, il primo per i descrittori di spostamento trasversali e per le parti irrotazionali dei descrittori di spostamento nel piano, il secondo per le parti solenoidali dei descrittori di spostamento nel piano.

Le equazioni (5.67) si disaccoppiano in due sistemi algebrici soltanto nel caso particolare in cui si assuma che le incognite cinematiche abbiano la forma di un'onda armonica che propaga nella direzione \mathbf{c}_1 del tipo

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_0 &= \mathbf{U}_0 g(x, t), & \bar{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{U}_1 g(x, t), \\ w_0 &= W_0 g(x, t), & w_1 &= W_1 g(x, t), \end{aligned} \quad (5.68)$$

con $\mathbf{U}_0 = (U_0, V_0)^T$ e $\mathbf{U}_1 = (U_1, V_1)^T$.

I due sistemi algebrici che si ottengono sono:

- il primo, per i moti che giacciono nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$,

$$\mathbf{N}(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (5.69)$$

dove

$$\mathbf{N}(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -\eta\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & \theta(\lambda + 2\mu - \eta)\tilde{k}^2 & -i\theta(2\eta + \tau_2)\tilde{k} & i\eta\tilde{k} \\ \cdot & -(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & i\tau_2\tilde{k} & i\theta(\tau_2 - \lambda + \eta - 2\mu)\tilde{k} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{3}\eta\tilde{k}^2 + \tau_1 - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & \theta[\frac{1}{3}(\eta - \lambda - 2\mu)\tilde{k}^2 + (\tau_1 - 2\eta - \tau_2)] \\ \text{sym} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \eta - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (W_0 \quad U_0 \quad \varepsilon W_1 \quad \varepsilon U_1)^T,$$

e \tilde{k} e \tilde{f} sono date nella (4.35);

- il secondo, costituito dalle due equazioni per i moti rispettivamente di “twist” simmetrico ed antisimmetrico:

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{k}^2 - \tilde{f}^2)V_0 &= 0, \\ \{\mu(\tilde{k}^2 - \tilde{f}^2) + 3\eta\}V_1 &= 0, \end{aligned} \quad (5.70)$$

identiche alle equazioni (5.63) e (5.30) per i moti di torsione in una piastra coerente. Osserviamo quindi che, secondo le equazioni (5.67), le oscillazioni di “twist” che propagano nella direzione \mathbf{c}_1 non sono condizionate dall’incoerenza costitutiva.

Ritorniamo al sistema (5.69) che governa la propagazione di un’onda del tipo

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t; \theta) = \{(W_0 + \zeta W_1)\mathbf{z} + (U_0 + \zeta U_1)\mathbf{c}_1 - i\theta k[(\zeta W_0 + \zeta^2 W_1)\mathbf{z} + (\zeta U_0 + \zeta^2 U_1)\mathbf{c}_1]\}g(x, t), \quad (5.71)$$

la quale rappresenta un moto che, come già detto, giace nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$ e che non dipende dalla coordinata nella direzione \mathbf{c}_2 . Il campo (5.71) è composto da due termini: il primo indipendente da θ ed il secondo lineare in θ . Osserviamo che le ampiezze W_0 e U_1 entrano nel primo e secondo termine rispettivamente con moti specularmente antisimmetrici e simmetrici rispetto al piano medio. Viceversa, le ampiezze W_1 e U_0 sono presenti nel primo e secondo termine con moti specularmente simmetrici ed antisimmetrici rispettivamente.

La (5.69) ammette soluzioni non banali se

$$\det \mathbf{N}(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0. \quad (5.72)$$

Il primo membro di quest’ultima equazione è un polinomio di ordine quattro sia nella potenza \tilde{k}^2 che \tilde{f}^2 . Segue che, per ogni frequenza \tilde{f} fissata, nella piastra sono presenti quattro moti ondosi caratterizzati da quattro diversi numeri d’onda che possono essere reali o immaginari: nel primo caso, l’onda è progressiva, nel secondo stazionaria. Se invece fissiamo il numero d’onda $\tilde{k} \in \mathbb{R}^+$, allora propagano quattro onde progressive ciascuna con diversa frequenza.

Nella figura 5.7 sono tracciate a tratto continuo le curve che risolvono l’equazione (5.72), assunti i coefficienti costitutivi della Tabella 1 ed un angolo di incoerenza θ pari a 15° . Le

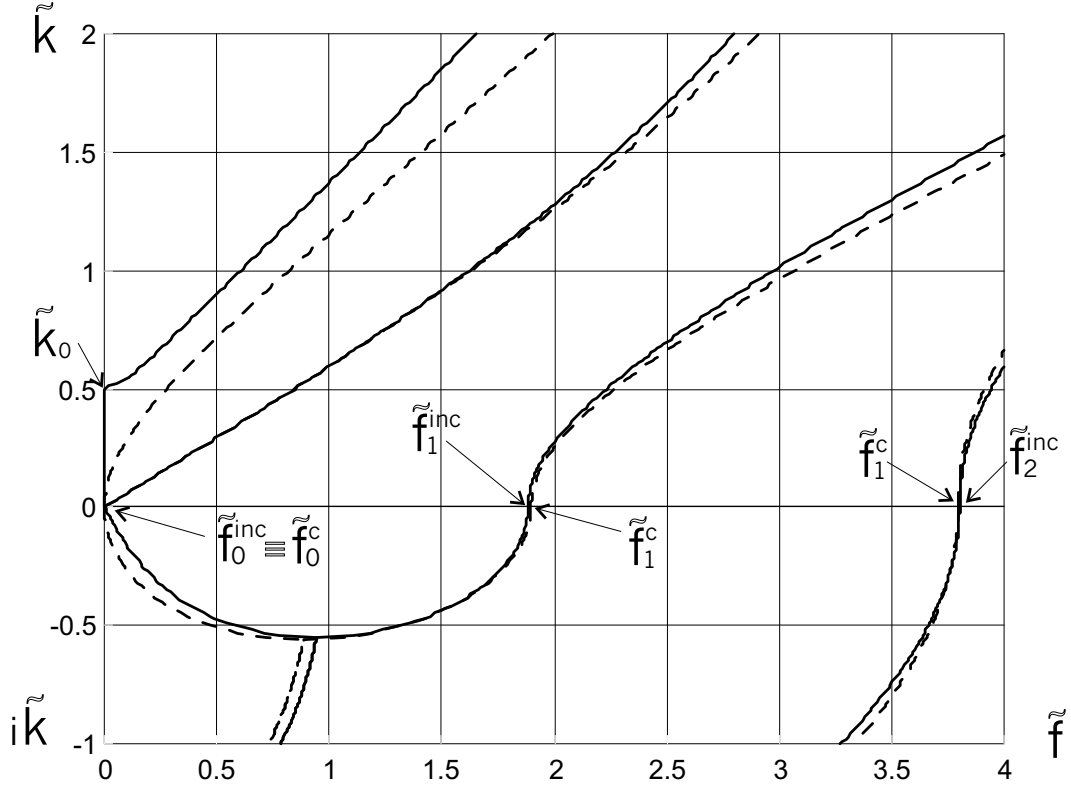


Figura 5.7: Curve di dispersione per onde armoniche che propagano in una piastra incoerente (linea continua) confrontate con quelle per una piastra coerente (linea tratteggiata).

frequenze di cut-off ($\tilde{k} = 0$) sono

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0^{inc} &= 0, \\ \tilde{f}_1^{inc} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6(\eta + \tau_1 - \sqrt{4\theta^2(2\eta + \tau_2 - \tau_1)^2 + (\eta - \tau_1)^2})}{\mu}}, \\ \tilde{f}_2^{inc} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6(\eta + \tau_1 + \sqrt{4\theta^2(2\eta + \tau_2 - \tau_1)^2 + (\eta - \tau_1)^2})}{\mu}}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

a cui corrispondono le seguenti oscillazioni (vedi figura 5.8):

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_0^{inc}$, il moto è rappresentato da uno spostamento rigido le cui componenti nelle direzioni \mathbf{z} e \mathbf{c}_1 sono indipendenti:

$$\mathbf{u} = W_0 \mathbf{z} + U_0 \mathbf{c}_1;$$

- per $\tilde{f} = \tilde{f}_{1,2}^{inc}$, i due moti $\mathbf{u}_{1,2}$ sono entrambi composti da un'oscillazione trasversale di tipo dilatazionale ed un'oscillazione di taglio nel piano, i quali a meno di un fattore

moltiplicativo valgono:

$$\mathbf{u}_{1,2} = (\zeta A_{1,2} \mathbf{z} + \zeta \mathbf{c}_1) \exp(-i \tilde{f}_{1,2}^{inc} t),$$

dove

$$A_1 = \frac{\eta - \tau_1 + \sqrt{4\theta^2(2\eta + \tau_2 - \tau_1)^2 + (\eta - \tau_1)^2}}{2\theta(2\eta + \tau_2 - \tau_1)},$$

$$A_2 = \frac{\eta - \tau_1 - \sqrt{4\theta^2(2\eta + \tau_2 - \tau_1)^2 + (\eta - \tau_1)^2}}{2\theta(2\eta + \tau_2 - \tau_1)}.$$

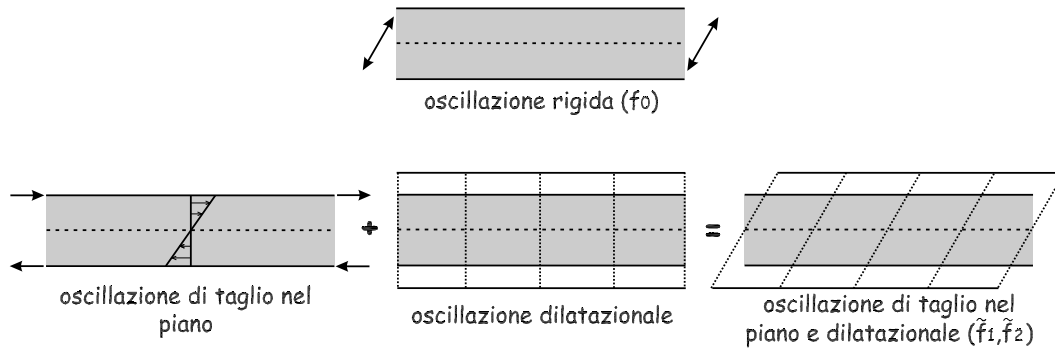


Figura 5.8: Oscillazioni al cut-off in una piastra incoerente.

Le frequenze di cut-off $(5.73)_{2,3}$ si discostano dalle corrispondenti frequenze $(5.14)_2$ e $(5.46)_2$ per una piastra coerente tanto di più quanto più grandi sono l'angolo di incoerenza θ e la combinazione di coefficienti costitutivi $(2\eta + \tau_2 - \tau_1)$. Come abbiamo già rilevato nell'Osservazione 1 del paragrafo 3.6, i coefficienti (η, τ_2, τ_1) caratterizzano il comportamento del materiale nella direzione di trasversa isotropia. Invece, i coefficienti costitutivi μ e λ , che definiscono la risposta nel piano di isotropia, non contribuiscono a modificare i valori delle frequenze di cut-off al comparire dell'incoerenza.

Nella figura 5.7 sono rappresentate in linea tratteggiata le curve di dispersione per onde che propagano in una piastra coerente. Se le confrontiamo con quelle relative alla propagazione in una piastra incoerente ($\theta = 15^\circ$) (linea continua), osserviamo che l'incoerenza costitutiva produce uno "slittamento" delle curve lungo l'asse delle frequenze, come avevamo già riscontrato nello studio del moto ondoso dal problema tridimensionale.

Se in particolare analizziamo le due coppie di curve che sono caratterizzate da frequenze di cut-off non nulle, in prossimità dell'asse delle ascisse, ritroviamo due intervalli di frequenza nei quali il moto è stazionario o progressivo a seconda che la risposta della piastra sia coerente o incoerente. La figura 5.9 mostra che, se la frequenza appartiene all'intervallo $(\tilde{f}_1^{inc}, \tilde{f}_1^c)$ (con \tilde{f}_1^c dato dalla $(5.14)_2$), l'onda propaga con numero d'onda \tilde{k}_1^p nella zona della piastra incoerente e diventa stazionaria e decadente secondo $\exp(-\tilde{k}_1^s x_1 / i\varepsilon)$ nella direzione \mathbf{c}_1 , laddove la piastra è coerente. Il moto nei due casi è prevalentemente antisimmetrico, di taglio nel piano. Se invece fissiamo la frequenza \tilde{f} nell'intervallo $(\tilde{f}_2^c, \tilde{f}_2^{inc})$ (con \tilde{f}_2^c dato dalla $(5.46)_2$), allora il moto, prevalentemente di tipo dilatazionale, specularmente simmetrico

rispetto al piano medio, è progressivo nelle zone coerenti della piastra e stazionario nelle regioni incoerenti come mostrato nella figura 5.10.

In [81] un analogo slittamento delle curve di dispersione lungo l'asse delle frequenze è provocato da una improvvisa variazione di spessore della piastra, così che le onde di dilatazione nello spessore (è questo il modo analizzato in [81]) con frequenza appartenente ad un definito intervallo sono progressive o stazionarie in funzione dello spessore. Per quanto riguarda le piastre elettroelastiche, in [31], a partire dalla teoria presentata in [35], si studiano gli effetti sul moto ondoso della variazione di massa degli elettrodi disposti sulle basi; in questo caso, una crescita di massa degli elettrodi causa uno slittamento all'indietro delle curve di dispersione. In [47], [10] e [30], la propagazione di onde elettroelastiche con frequenza contenuta in un preciso intervallo è progressiva nelle regioni della piastra che sono metallizzate e stazionaria nelle zone con basi libere. Una vibrazione così fatta è detta "ad energia intrappolata" perché il moto ondoso è osservabile solo in una data regione, quella metallizzata.

Nella figura 5.7, il comportamento anomalo della prima curva di dispersione, quella che assume valori della frequenza nulli per $\tilde{k} \in (0, \tilde{k}_0)$, è dovuto all'aver trascurato gli infinitesimi di ordine $o(\theta)$ nelle equazioni di evoluzione (3.87) in virtù dell'ipotesi di piccolezza dell'angolo θ .

Nella figura 5.11 le curve di dispersione per una piastra incoerente (linea tratteggiata) sono confrontate con le corrispondenti curve del problema tridimensionale (linea continua).

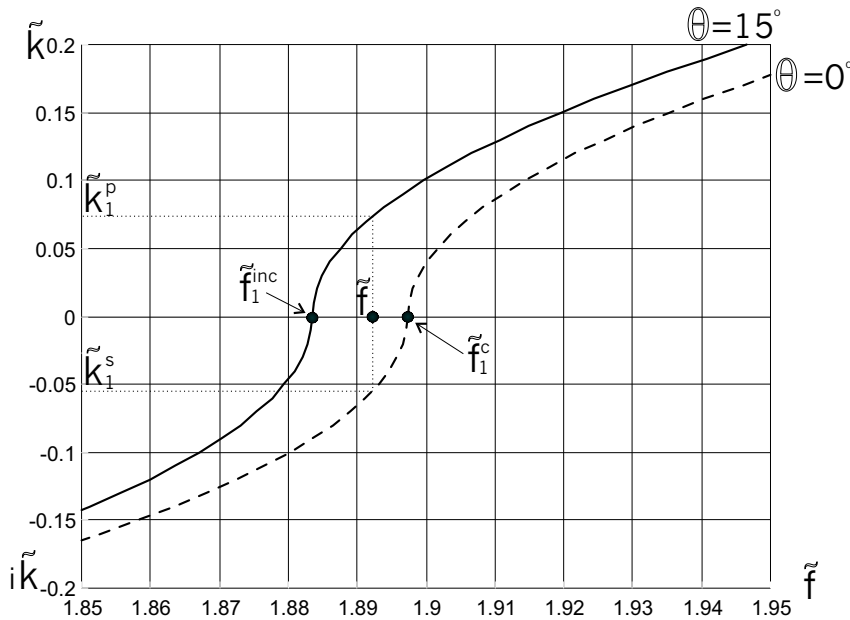


Figura 5.9: Curve di dispersione flessionali in prossimità del cut-off: linea tratteggiata $\equiv \theta = 0$, linea continua $\equiv \theta = 15^\circ$.

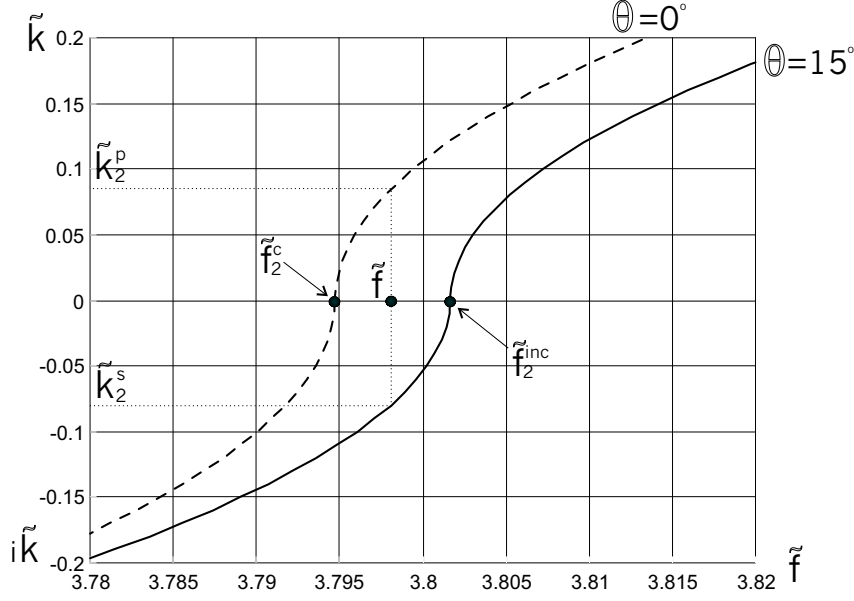


Figura 5.10: Curve di dispersione membranali in prossimità del cut-off: linea tratteggiata $\equiv \theta = 0$, linea continua $\equiv \theta = 15^\circ$.

Osservazione 1. Se si sceglie una soluzione in forma d'onda armonica propagante in una qualsiasi direzione \mathbf{m} ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ e $\mathbf{m} \cdot \mathbf{z} = 0$) del tipo

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t; \theta) = (w(\zeta)\mathbf{z} + b_1(\zeta)\mathbf{c}_1 + b_2(\zeta)\mathbf{c}_2)g(x, t), \quad (5.74)$$

in cui

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= W_0 + \zeta W_1 - i\theta k(\mathbf{m} \cdot \mathbf{c}_1)(\zeta W_0 + \zeta^2 W_1), \\ b_1(\zeta) &= U_0 + \zeta U_1 - i\theta k(\mathbf{m} \cdot \mathbf{c}_1)(\zeta U_0 + \zeta^2 U_1), \\ b_2(\zeta) &= V_0 + \zeta V_1 - i\theta k(\mathbf{m} \cdot \mathbf{c}_1)(\zeta V_0 + \zeta^2 V_1), \end{aligned}$$

e

$$g(x, t) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{m} \cdot (x - o) - ft),$$

allora il problema di vibrazione libera (5.67) si riduce ad un sistema algebrico nelle sei ampiezze incognite ($W_0, W_1, U_0, U_1, V_0, V_1$), il quale si disaccoppia nei due sistemi (5.69) e (5.70) soltanto se $\mathbf{m} \equiv \mathbf{c}_1$. \square

Osservazione 2. Sostituiamo la soluzione in forma d'onda (5.68) nelle equazioni del moto (3.96) in cui è stata assunta la cinematica alternativa (3.90). Otteniamo il seguente sistema algebrico

$$\mathbf{M}(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (5.75)$$

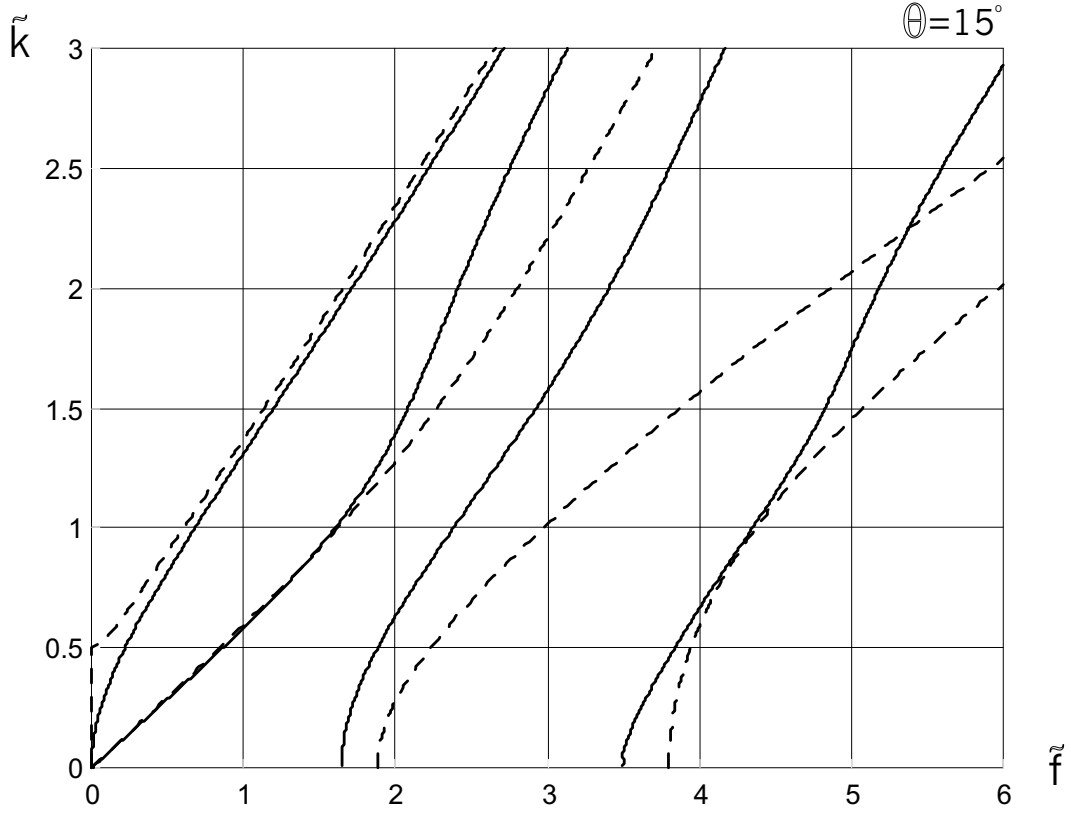


Figura 5.11: Curve di dispersione per una piastra incoerente (linea tratteggiata) confrontate con le corrispondenti del problema tridimensionale (linea continua).

dove

$$\mathbf{M}(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -\eta\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & \theta(\lambda - \tau_2 + 2\mu - 2\eta)\tilde{k}^2 & i\theta(\tau_1 - 2\eta - \tau_2)\tilde{k} & i\eta\tilde{k} \\ \cdot & -(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & i\tau_2\tilde{k} & i\theta(\tau_2 - \lambda + 2\eta - 2\mu)\tilde{k} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{3}\eta\tilde{k}^2 + \tau_1 - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & \theta[-\frac{1}{3}(\lambda - \tau_2 + 2\mu - 2\eta)\tilde{k}^2 + (\tau_1 - 2\eta - \tau_2)] \\ \text{sym} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\tilde{k}^2 + \eta - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix},$$

il quale ammette soluzioni non banali se

$$\det \mathbf{M}(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0. \quad (5.76)$$

Le coppie (\tilde{k}, \tilde{f}) soluzione di (5.76) sono rappresentate in figura 5.12 e confrontate con le radici della condizione di propagazione (5.72) relativa alle equazioni di evoluzione (3.87). Notiamo che le soluzioni al cut-off sono le stesse per le due equazioni (5.76) e (5.72).

Data la vicinanza tra i due set di curve e la coincidenza tra le frequenze di cut-off, i due sistemi di equazioni di evoluzione (3.87) e (3.96) sono equivalenti per quanto riguarda la loro capacità di predire la propagazione di onde libere in una piastra di zircotitanato di piombo debolmente incoerente. \square

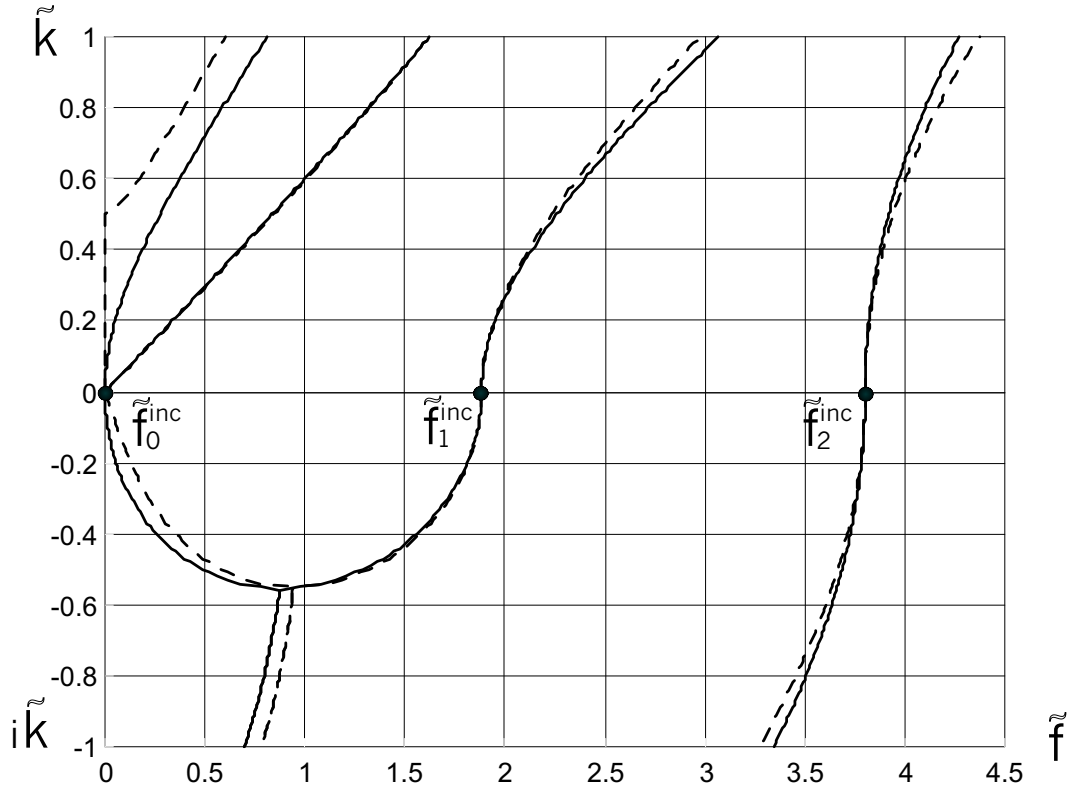


Figura 5.12: Confronto tra le curve di dispersione per onde in una piastra incoerente ricavate dalle equazioni di evoluzione (3.87) (linea tratteggiata) e dalle equazioni (3.96) (linea continua)

5.4 Onde in piastre incoerenti

Studiamo la propagazione di onde libere utilizzando le equazioni di evoluzione (3.106) e le equazioni alternative (3.98) per una piastra incoerente infinitamente estesa in cui non è stata fatta alcuna ipotesi sulla piccolezza dell'angolo θ . Iniziamo dalla (3.106). Interessati come siamo alla vibrazione libera, poniamo

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}.$$

Se assegnamo ai descrittori cinematici incogniti la forma (5.68) di onda armonica propagante nella direzione \mathbf{c}_1 , otteniamo i seguenti due sistemi di equazioni algebriche:

- equazioni per le oscillazioni nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$

$$\mathbf{L}(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (5.77)$$

dove $\mathbf{L}(\tilde{k}, \tilde{f})$ è una matrice 4×4 simmetrica composta dai seguenti elementi:

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{1}{2}a_{13}k^2 - \tan\theta(-2c_3 + a_{33}\tan\theta)k^2 + \mu f^2, \\ L_{22} &= -a_{11}k^2 - \tan\theta(-2c_1 + \frac{1}{2}a_{13}\tan\theta)k^2 + \mu f^2, \\ L_{33} &= \frac{1}{6}a_{13}k^2 + a_{33} + \frac{1}{3}\tan\theta(-2c_3 + a_{33}\tan\theta)k^2 - \frac{1}{3}\mu f^2, \\ L_{44} &= \frac{1}{3}a_{11}k^2 + \frac{1}{2}a_{13} + \frac{1}{3}k^2\tan\theta(-c_1 + \frac{1}{2}a_{13}\tan\theta) - \frac{1}{3}\mu f^2, \\ L_{12} &= L_{21} = -c_1k^2 - \tan\theta(-d_{13} + c_3\tan\theta - \frac{1}{2}a_{13})k^2, \\ L_{13} &= L_{31} = i(c_3 - a_{33}\tan\theta)k, \\ L_{14} &= L_{41} = i(\frac{1}{2}a_{13} - c_3\tan\theta)k, \\ L_{23} &= L_{32} = i(d_{13} - c_3\tan\theta)k, \\ L_{24} &= L_{42} = i(c_1 - \frac{1}{2}a_{13}\tan\theta)k, \\ L_{34} &= L_{43} = \frac{1}{3}c_1k^2 + c_3 + \frac{1}{3}\tan\theta(-d_{13} + c_3\tan\theta - \frac{1}{2}a_{13})k^2. \end{aligned}$$

ed $\mathbf{a} = (W_0, U_0, \varepsilon W_1, \varepsilon U_1)^T$;

- equazioni per il moto di “twist”:

$$\mathbf{I}(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (5.78)$$

con

$$\mathbf{I}(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(a_{12} + \tan\theta(\frac{a_{23}}{2}\tan\theta - 2c_4))\tilde{k}^2 - \mu\tilde{f}^2 & i\frac{1}{2}(c_4 - a_{23}\tan\theta)\tilde{k} \\ \text{sym} & \frac{1}{6}(a_{12} + \tan\theta(a_{23}\tan\theta - 2c_4))\tilde{k}^2 + \frac{a_{23}}{2} + \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{d} = (V_0, \varepsilon V_1)^T$.

Anche le equazioni (3.98) che sono state dedotte a partire dall'assunzione cinematica (3.90) insensibile all'incoerenza, si riducono a due sistemi algebrici rispettivamente per il moto ondoso nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$ e per quello di “twist”:

-

$$\bar{\mathbf{L}}(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (5.79)$$

con

$$\bar{\mathbf{L}}(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -\frac{a_{13}}{2}\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & -c_1\tilde{k}^2 & ic_3\tilde{k} & i\frac{a_{13}}{2}\tilde{k} \\ \cdot & -a_{11}\tilde{k}^2 + \mu\tilde{f}^2 & id_{13}\tilde{k} & ic_1\tilde{k} \\ \cdot & \cdot & \frac{a_{13}}{6}\tilde{k}^2 + a_{33} - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 & \frac{c_1}{3}\tilde{k}^2 + c_3 \\ \text{sym} & \cdot & \cdot & \frac{a_{11}}{3}\tilde{k}^2 + \frac{a_{13}}{2} - \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{a} = (W_0, U_0, \varepsilon W_1, \varepsilon U_1)^T$;

-

$$\bar{\mathbf{I}}(\tilde{k}, \tilde{f})\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (5.80)$$

con

$$\bar{\mathbf{I}}(\tilde{k}, \tilde{f}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_{12}\tilde{k}^2 - \mu\tilde{f}^2 & i\frac{1}{2}c_4\tilde{k} \\ \text{sym} & \frac{1}{6}a_{12}\tilde{k}^2 + \frac{1}{2}a_{23} + \frac{1}{3}\mu\tilde{f}^2 \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{d} = (V_0, \varepsilon V_1)^T$.

Soffermiamoci sul problema di oscillazione nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$ caratterizzato dai due sistemi di equazioni (5.77) e (5.79), i quali, affinché la soluzione non sia banalmente nulla, devono rispettivamente soddisfare le condizioni di propagazione

$$\begin{aligned}\det \mathbf{L}(\tilde{k}, \tilde{f}) &= 0, \\ \det \bar{\mathbf{L}}(\tilde{k}, \tilde{f}) &= 0.\end{aligned}\tag{5.81}$$

Le equazioni appena scritte sono state risolte numericamente in due casi:

- nel primo caso sono assunti i coefficienti costitutivi riportati nella Tabella 1 e l'angolo di incoerenza è fissato pari a $\theta = 30^\circ$. Nella figura 5.13(a) sono tracciate con linea tratteggiata e puntinata le curve di dispersione soluzioni rispettivamente delle (5.81)₁ e (5.81)₂. In linea continua sono tracciate le corrispondenti curve tridimensionali di raffronto. Osserviamo che le curve puntinate forniscono un'approssimazione migliore rispetto alle curve tratteggiate le quali si discostano dalle corrispondenti tridimensionali tanto di più quanto più grande è l'angolo di incoerenza θ (vedi figura 5.13(b) dove è stato posto $\theta = 60^\circ$). Concludiamo che la prescrizione cinematica (3.90) è preferibile alla (3.31) quando l'angolo di incoerenza θ è grande ed il materiale ha una risposta in cui il carattere trasversale è debole. In effetti, quando θ è grande, l'ipotesi (3.31) vincola il moto ad essere affine su segmenti di lunghezza $2\varepsilon/\cos\theta$ (la quale tende ad ∞ quando $\theta \rightarrow \pi/2$), rappresentando pertanto un pesante ed inadeguato vincolo cinematico.
- Nel secondo caso, fissiamo l'angolo $\theta = 20^\circ$ e forziamo il materiale ad avere una risposta molto rigida nella direzione di trasversa isotropia \mathbf{c} , ossia, a partire dai coefficienti riportati in Tabella 1, dividiamo λ e μ per 50 e moltiplichiamo η e τ_1 per 50 e τ_2 per 1,3 così da avere un materiale molto cedevole nel piano d'isotropia e molto rigido nella direzione di trasversa isotropia (i coefficienti costitutivi trasformati in questo modo soddisfano le condizioni (2.63) di positività dell'energia di deformazione elastica). Nelle figure 5.13(c) sono riportate le curve di dispersione relative ad una piastra così fatta. Osserviamo che le curve tratteggiate approssimano le corrispondenti tridimensionali meglio delle curve puntinate e ciò significa che la prescrizione cinematica (3.31) è da preferire alla (3.90). In effetti, il criterio che ha ispirato l'assunzione (3.31) è consistito nel supporre la piastra costituita da segmenti diretti secondo \mathbf{c} e qui abbiamo attribuito a queste fibre costitutive grande rigidità.

Osservazione 1. Nella figura 5.14, fissati l'angolo $\theta = 15^\circ$ ed i coefficienti costitutivi di Tabella 1, le soluzioni della (5.81)₁ sono tracciate a tratto continuo e confrontate con quelle rappresentate in linea tratteggiata che soddisfano la condizione di propagazione (5.72) ottenute dalla teoria bidimensionale linearizzata rispetto all'angolo di incoerenza θ .

Ora è chiaro che il comportamento anomalo della curva tratteggiata che ha frequenza nulla per numeri d'onda $\tilde{k} \in (0, \tilde{k}_0)$ è dovuto proprio all'aver trascurato i termini $o(\theta)$ nelle (3.87). Osserviamo inoltre che le due curve con frequenza di cut-off $\tilde{f}_0^{inc} = 0$ sono

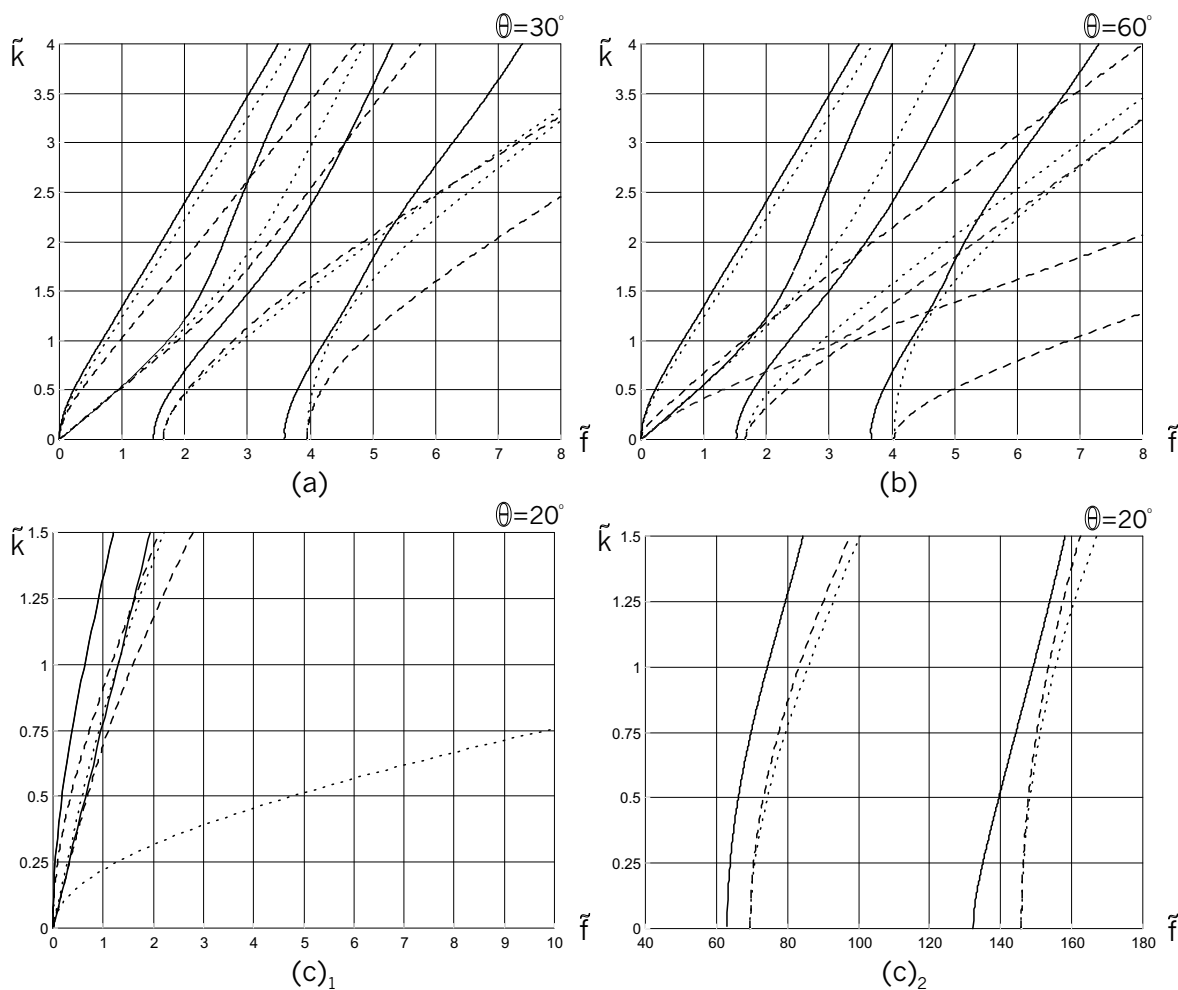


Figura 5.13: Curve di dispersione: teoria 2D, cinematica (3.31) \equiv linea tratteggiata; teoria 2D, cinematica (3.90) \equiv linea continua. (a) $\theta = 30^\circ$, coefficienti costitutivi Tabella 1; (b) $\theta = 60^\circ$, coefficienti costitutivi Tabella 1; (c) $\theta = 20^\circ$, coefficienti costitutivi alterati.

più sensibili agli infinitesimi $o(\theta)$ rispetto alle due curve caratterizzate dalle frequenze $\tilde{f}_{1,2}^{inc}$. Queste ultime, infatti, si discostano poco dalle corrispondenti esatte in tratto continuo. Nella figura 5.15 le curve che soddisfano le (5.81)_{1,2} sono confrontate con le corrispondenti del problema tridimensionale per un'angolo $\theta = 15^\circ$ ed un materiale caratterizzato dai coefficienti costitutivi di Tabella 1. \square

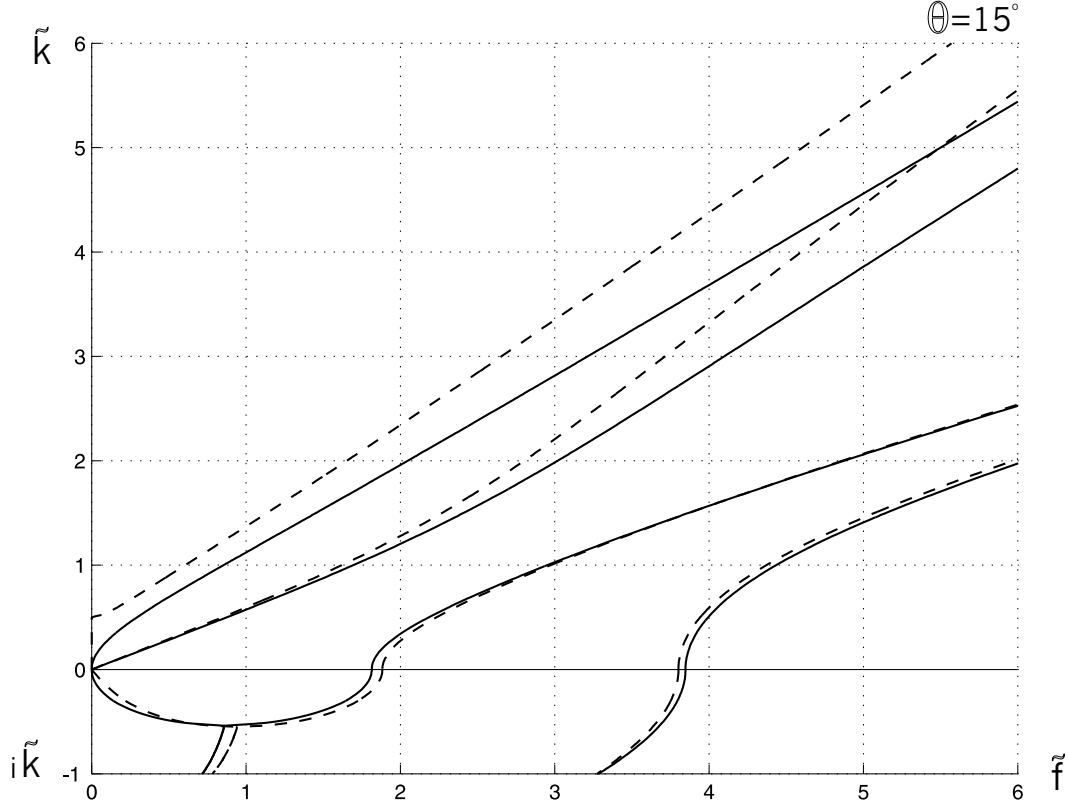


Figura 5.14: Curve di dispersione dalle equazioni di evoluzione (3.106) (linea continua) e dalle equazioni (3.87) linearizzate rispetto a θ (linea tratteggiata).

Osservazione 2. Le frequenze di cut-off che soddisfano la (5.81)₁ e analogamente la (5.81)₂ sono:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0^{2D} &= 0, \\ \tilde{f}_1^{2D} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(2a_{33} + a_{13} - \sqrt{(2a_{33} - a_{13})^2 + 16c_3^2})}{\mu}}, \\ \tilde{f}_2^{2D} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(2a_{33} + a_{13} + \sqrt{(2a_{33} - a_{13})^2 + 16c_3^2})}{\mu}},\end{aligned}\quad (5.82)$$

e, se esprimiamo i coefficienti a_{33} , a_{13} e c_3 in termini delle 5 costanti elastiche per un materiale trasversalmente isotropo e dell'angolo θ , tramite le relazioni (3.11), le frequenze di cut-off \tilde{f}_1^{2D} ed \tilde{f}_2^{2D} diventano delle funzioni di θ . Analogamente, anche le frequenze tridimensionali

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1^{3D}(\theta) &= \frac{\pi}{2\sqrt{\mu\alpha_1(\theta)}}, \\ \tilde{f}_2^{3D}(\theta) &= \frac{\pi}{2\sqrt{\mu\alpha_2(\theta)}},\end{aligned}\quad (5.83)$$

ottenute dalla (4.63) dopo aver posto $n = 1$, sono funzioni di θ . Nella figura 5.16 sono tracciate $\tilde{f}_1^{2D}(\theta)$ ed $\tilde{f}_1^{3D}(\theta)$ e, nella figura 5.17, $\tilde{f}_2^{2D}(\theta)$ ed $\tilde{f}_2^{3D}(\theta)$. Osserviamo che tutte le

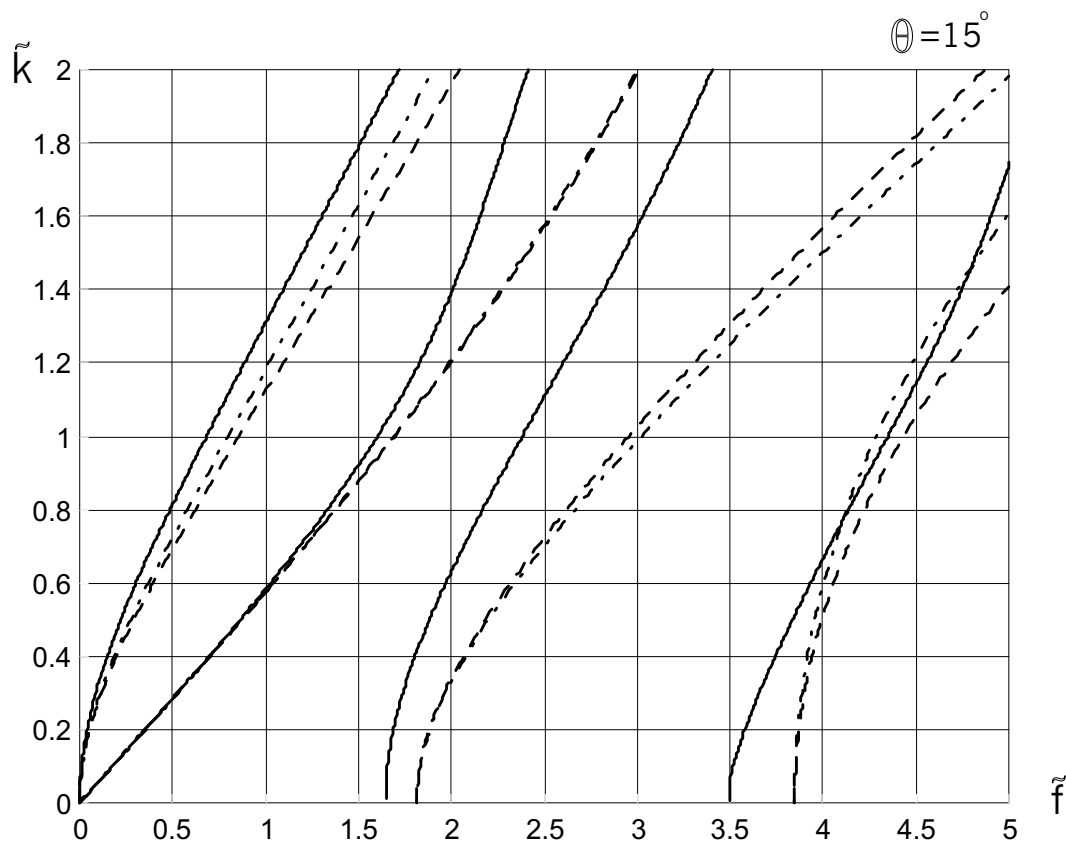


Figura 5.15: Curve di dispersione per la propagazione di onde progressive in una piastra incoerente: linea continua \equiv teoria tridimensionale; linea tratteggiata \equiv teoria bidimensionale (cinematica (3.31)); linea tratto-punto \equiv teoria bidimensionale (cinematica (3.90)).

funzioni sono del tipo

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + n\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + n\pi\right), \quad \forall \alpha \in (0, \pi), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ossia sono periodiche di π e simmetriche rispetto a $\theta = n\pi/2$. Inoltre, come era da aspettarsi, si verifica che $\tilde{f}_1(\theta) > \tilde{f}_1^{3D}(\theta)$ e $\tilde{f}_2(\theta) > \tilde{f}_2^{3D}(\theta)$ qualunque sia $\theta \in (0, \pi)$. \square

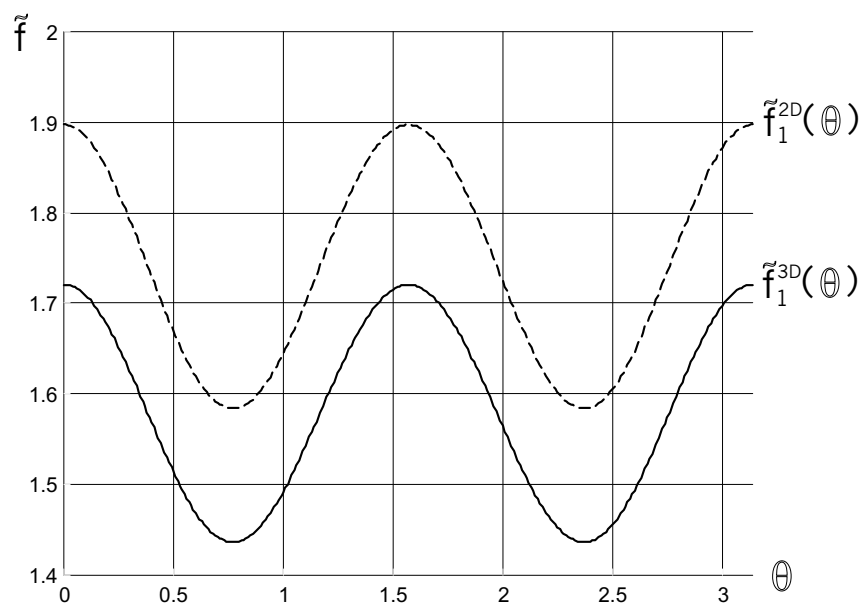


Figura 5.16: Andamento delle frequenze di cut-off $\tilde{f}_1^{2D}(\theta)$ (linea tratteggiata) e $\tilde{f}_1^{3D}(\theta)$ (linea continua) in funzione dell'angolo di incoerenza θ .

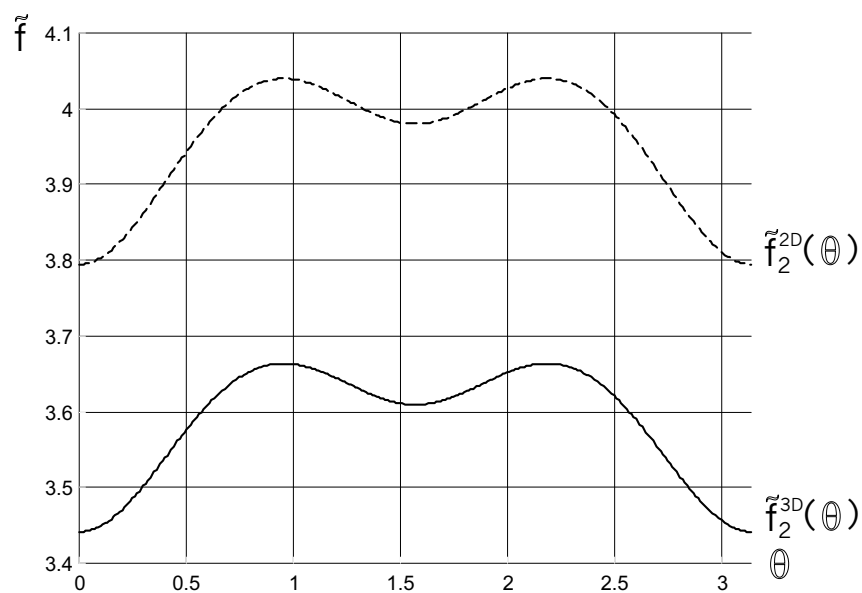


Figura 5.17: Andamento delle frequenze di cut-off $\tilde{f}_2^{2D}(\theta)$ (linea tratteggiata) e $\tilde{f}_2^{3D}(\theta)$ (linea continua) in funzione dell'angolo di incoerenza θ .