

Capitolo 4

Propagazione di onde in un mezzo tridimensionale

4.1 Onde progressive in un mezzo linearmente elastico omogeneo

4.1.1 Caso generale

Le onde progressive piane rappresentano una importante classe di soluzioni per le equazioni dell'elastodinamica lineare perchè pur essendo particolarmente semplici, forniscono apprezzabili informazioni sulle caratteristiche di propagazione dei corpi elastici. Assegnato un corpo omogeneo \mathcal{B} ed un intervallo di tempo $[0, t_0)$, un'onda progressiva è un campo di spostamenti \mathbf{u} definito in $\mathcal{B} \times [0, t_0)$ della forma

$$\mathbf{u}(p, t) = \mathbf{a} f(\mathbf{m} \cdot (p - o) - ct), \quad (4.1)$$

dove f è una funzione a valori reali di classe \mathcal{C}^2 su $(-\infty, +\infty)$, con

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} \neq 0.$$

I vettori \mathbf{a} ed \mathbf{m} sono detti *direzione del moto* e *direzione di propagazione* e la grandezza scalare c rappresenta la *velocità di propagazione*.

Un'onda è detta *longitudinale* quando

$$\mathbf{a} \times \mathbf{m} = 0,$$

e *trasversale* quando

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{m} = 0.$$

Se il campo di spostamenti ha la forma (4.1), allora

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= f' \mathbf{a} \otimes \mathbf{m}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= f' \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{u} &= f' \mathbf{a} \times \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove

$$f'(p, t) = \frac{df(s)}{ds} \Big|_{s=\mathbf{m} \cdot (p-o) - ct}.$$

Grazie alle (4.2)_{2,3}, osserviamo che un'onda trasversale è un particolare moto solenoidale ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$) mentre un'onda longitudinale rappresenta un moto irrotazionale ($\operatorname{curl} \mathbf{u} = 0$).

Assegnata la costante α , definiamo il piano

$$\pi_t = \{p \mid \mathbf{m} \cdot (p - o) - ct = \alpha\},$$

il quale è perpendicolare ad \mathbf{m} e si muove con velocità c nella direzione \mathbf{m} . In ogni istante di tempo t fissato, il campo \mathbf{u} è costante in tutti i punti del piano π_t e per questo motivo l'onda è detta progressiva *piana*. Il piano π_t rappresenta il fronte d'onda associato all'ampiezza $\mathbf{a}f(\alpha)$. Per un corpo elastico \mathcal{B} , omogeneo, in cui le forze di volume \mathbf{b}^{ni} sono nulle, l'equazione del moto (1.22) si scrive:

$$\operatorname{div} \mathbb{C}[\nabla \mathbf{u}] = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (4.3)$$

Assegnato il campo di spostamenti nella forma (4.1), valgono le uguaglianze

$$\operatorname{div} \mathbb{C}[\nabla \mathbf{u}] = f'' \mathbb{C}[\mathbf{a} \otimes \mathbf{m}] \mathbf{m}, \quad \text{e} \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho c^2 f'' \mathbf{a},$$

così che la (4.3) diventa:

$$\mathbf{A}_m \mathbf{a} = c^2 \mathbf{a}, \quad (4.4)$$

dove \mathbf{A}_m è definito *tensore acustico* associato alla direzione \mathbf{m} ed agisce su un qualsiasi vettore $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ in questo modo:

$$\mathbf{A}_m \mathbf{a} := \rho^{-1} \mathbb{C}[\mathbf{a} \otimes \mathbf{m}] \mathbf{m}. \quad (4.5)$$

Per ogni fissata direzione \mathbf{m} , un'onda progressiva del tipo (4.1) propaga nel corpo elastico \mathcal{B} se è soddisfatta la (4.4), chiamata *condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard*, la quale dice che per un moto ondoso progressivo il quadrato della velocità di propagazione e la direzione del moto sono rispettivamente autovalore ed autovettore del tensore acustico \mathbf{A}_m . La possibilità di propagazione di un'onda in un mezzo elastico, lungo la generica direzione \mathbf{m} , è legata all'esistenza di autovalori reali di \mathbf{A}_m . Se \mathbf{A}_m è definito positivo e simmetrico, si possono avere tre direzioni del moto \mathbf{a}_i , con $i = 1..3$, a cui sono associate tre diverse velocità di propagazione. In [20] § 70 sono dimostrate le seguenti due proposizioni:

- \mathbf{A}_m è simmetrico qualunque sia la direzione \mathbf{m} se e solo se \mathbb{C} è simmetrica;
- \mathbf{A}_m è definito positivo qualunque sia la direzione \mathbf{m} se e solo se \mathbb{C} è fortemente ellittico, ossia se $\mathbb{C}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} > 0$ qualunque sia $\mathbf{D} \in \operatorname{Lin} \setminus \{0\}$.

Il tensore di elasticità \mathbb{C} oltre ad essere simmetrico possiede le proprietà di definita positività e di simmetria minore, le quali, insieme, implicano la forte ellitticità. Segue che il tensore acustico associato al tensore di elasticità \mathbb{C} è simmetrico e definito positivo così da assicurare la propagazione di onde progressive in tre diverse direzioni. Segnaliamo che il problema agli autovalori (4.4) è stato studiato in [79] § 71 nell'ambito dell'elasticità non lineare.

4.1.2 Caso isotropo

Supponiamo ora che il corpo sia isotropo. L'equazione del moto (4.3) si scrive:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (4.6)$$

la quale, se applichiamo le relazioni

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = \mathbf{a} f'', \\ \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} f'', \end{aligned} \quad (4.7)$$

diventa

$$\mu \mathbf{a} + (\lambda + \mu) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} = \rho c^2 \mathbf{a}. \quad (4.8)$$

Dall'equazione appena scritta ricaviamo che il tensore acustico per un corpo omogeneo ed isotropo vale:

$$\mathbf{A}_m = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\mu}{\rho} (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}), \quad (4.9)$$

e questa rappresentazione è proprio la decomposizione spettrale di \mathbf{A}_m così che $(\lambda + 2\mu)/\rho$ e μ/ρ sono gli autovalori del tensore acustico e $\operatorname{span}\{\mathbf{m}\}$ e $\{\mathbf{m}\}^\perp$ i rispettivi spazi caratteristici. Concludiamo che, in un materiale isotropo, propagano solo onde progressive longitudinali e trasversali con velocità di propagazione rispettivamente pari a

$$c = c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \text{e} \quad c = c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

(*vid.* [20] § 71, [21] e [17]).

Osservazione. In [1] § 2.10, il generico campo di spostamenti per un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo è rappresentato per mezzo della classica decomposizione di Helmholtz (*vid.* [20] § 7):

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi}, \quad \text{con} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (4.10)$$

dove φ è un potenziale scalare e $\boldsymbol{\psi}$ un potenziale vettore solenoidale. Se sostituiamo la (4.10) nell'equazione del moto (4.6), otteniamo

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - \rho\ddot{\varphi}] + \operatorname{curl}[\mu\Delta\boldsymbol{\psi} - \rho\ddot{\boldsymbol{\psi}}] = 0, \quad (4.11)$$

la quale è soddisfatta se

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{1}{c_L^2} \ddot{\varphi}, \\ \Delta\boldsymbol{\psi} &= \frac{1}{c_T^2} \ddot{\boldsymbol{\psi}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Non appena si assegnano a φ e $\boldsymbol{\psi}$ le forme di onda progressiva:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi f(\mathbf{m} \cdot (p - o) - ct), \\ \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\Psi} f(\mathbf{m} \cdot (p - o) - ct), \end{aligned} \quad (4.13)$$

le (4.12)₁ e (4.12)₂ diventano le equazioni di propagazione rispettivamente per le onde longitudinali e per quelle trasversali e i due addendi della (4.10) rappresentano il primo l'onda longitudinale ed il secondo quella trasversale. Infatti se $\psi = 0$, allora lo spostamento diventa

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi = \mathbf{m}\Phi f$$

e costituisce un'onda longitudinale che, per soddisfare la (4.12)₁, propaga con velocità c_L . Se invece $\varphi = 0$, lo spostamento si riduce alla forma

$$\mathbf{u} = \text{curl } \psi = \mathbf{m} \times \psi f,$$

il quale costituisce un'onda trasversale che propaga con velocità c_T perchè sia soddisfatta la (4.12)₂. \square

4.2 Onde di Rayleigh-Lamb in un mezzo coerente

In questo paragrafo studiamo la propagazione di particolari onde armoniche, dette *onde di Rayleigh-Lamb*, in un corpo a forma di piastra, trasversalmente isotropo, coerentemente orientato, nelle condizioni di vibrazione libera. Ci rifaremo a [1] e [43] dove il materiale che costituisce lo strato è isotropo. Rimandiamo a [70] per lo studio della propagazione di onde di Rayleigh-Lamb in uno strato anisotropo e a [77], [29] e [74] per lo studio in uno strato elettroelastico.

Introduciamo le ipotesi di *vibrazione libera*. La prima, di tipo geometrico, prevede che il cilindro sia infinitamente esteso: dopo aver istituito il sistema di riferimento cartesiano $(o; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{z})$, identifichiamo il corpo con il prodotto cartesiano $\Xi = \pi_{\mathbf{z}} \times \mathcal{I}$. D'ora in poi intenderemo con il termine *strato* il dominio tridimensionale Ξ . Aggiungiamo poi l'ulteriore ipotesi che tanto le forze di volume \mathbf{b}^{ni} che le azioni superficiali $\hat{\mathbf{s}}^\pm$ sulle facce $\pi_{\mathbf{z}}^\pm = \pi_{\mathbf{z}} \times \{\pm\varepsilon\}$ siano nulle. Sotto queste condizioni, le equazioni del moto si scrivono

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbb{C}[\nabla\mathbf{u}] &= \rho\ddot{\mathbf{u}}, & \text{in } \Xi \times [0, t_0), \\ \pm\mathbb{C}[\nabla\mathbf{u}]\mathbf{z} &= \mathbf{0}, & \text{su } \pi_{\mathbf{z}}^\pm \times [0, t_0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ricerchiamo, ora, soluzioni per il problema (4.14) che abbiano la forma di un'onda armonica fatta nel modo seguente:

$$\mathbf{u} = (w(\zeta)\mathbf{z} + v(\zeta)\mathbf{c}_1)g(x, t), \quad (4.15)$$

con

$$g(x, t) = \exp(i(k\mathbf{c}_1 \cdot (x - o) - ft)), \quad (4.16)$$

detta *onda di Rayleigh-Lamb* (vid. [28]). La funzione g è chiamata *funzione d'onda*, i è l'unità immaginaria e k ed f sono il numero d'onda e la frequenza (gli inversi rispettivamente della lunghezza d'onda λ e del periodo T). L'onda propaga nella direzione \mathbf{c}_1 con velocità

$$c = f/k.$$

Si noti che la scelta della coppia di versori \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 nel piano $\pi_{\mathbf{z}}$ è arbitraria, e dunque la direzione di propagazione è del pari generica. Si noti anche che il vettore spostamento (4.15)

dipende solo dalle coordinate $x_1 = \mathbf{c}_1 \cdot (x - o)$ e ζ , e giace in $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$. L'onda (4.15) è una particolare onda progressiva, che si distingue dalla (4.1) per il fatto di non essere piana: il vettore delle ampiezze $\mathbf{d}(\zeta) = (w(\zeta), v(\zeta))^T$ non è costante ma dipende dalla coordinata ζ e quindi anche i fronti d'onda sono funzioni di ζ .

4.2.1 Caso trasversalmente isotropo

Supponiamo ora che il materiale che costituisce lo strato Ξ sia trasversalmente isotropo, coerentemente orientato, caratterizzato dal tensore di elasticità (2.61). Dopo aver decomposto il campo di spostamenti nella somma della sua parte piana e trasversale

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + u\mathbf{z}, \quad \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{z} = 0,$$

il problema (4.14) si riscrive:

$$\begin{aligned} \mu^s \Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mu + \lambda)^s \nabla^s \text{div} \hat{\mathbf{u}} + \tau_2^s \nabla u' + \eta[(^s \nabla u)'] + \hat{\mathbf{u}}'' &= \rho \ddot{\hat{\mathbf{u}}}, \\ \tau_2(^s \text{div} \hat{\mathbf{u}})' + \eta[^s \Delta u + ^s \text{div} \hat{\mathbf{u}}'] + \tau_1 u'' &= \rho \ddot{u}, \end{aligned} \quad \text{in } \Xi \times [0, t_0], \quad (4.17)$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \tau_2^s \text{div} \hat{\mathbf{u}} + \tau_1 u' &= 0, \\ \eta(^s \nabla u + \hat{\mathbf{u}}') &= 0, \end{aligned} \quad \text{su } \pi_{\mathbf{z}}^{\pm} \times [0, t_0]. \quad (4.18)$$

Dato il campo di spostamenti (4.15), valgono le relazioni differenziali

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= [(w' \mathbf{z} + v' \mathbf{c}_1) \otimes \mathbf{z} + ik(w\mathbf{z} + v\mathbf{c}_1) \otimes \mathbf{c}_1]g, \\ \text{div} \mathbf{u} &= (w' + ikv)g, \\ \Delta \mathbf{u} &= [(v'' - k^2 v)\mathbf{c}_1 + (w'' - k^2 w)\mathbf{z}]g, \\ \nabla \text{div} \mathbf{u} &= [ikw' - k^2 v]\mathbf{c}_1 + (w'' + ikv')\mathbf{z}g, \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -f^2(w\mathbf{z} - v\mathbf{c}_1)g, \end{aligned} \quad (4.19)$$

grazie alle quali l'equazione del moto (4.17) si trasforma nella seguente equazione differenziale ordinaria nell'incognita $\mathbf{d}(\zeta) = (w(\zeta), v(\zeta))^T$:

$$\mathbf{A} \mathbf{d}'' + ik \mathbf{B} \mathbf{d}' + (\rho f^2 \mathbf{I} - k^2 \mathbf{C}) \mathbf{d} = 0, \quad (4.20)$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta + \tau_2 \\ \eta + \tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 2\mu + \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

ed \mathbf{I} è il tensore identità 2×2 . La (4.20) ha una soluzione del tipo:

$$\mathbf{d}(\zeta) = \mathbf{d}_{(p)} \exp(ip\zeta), \quad (4.22)$$

dove la coppia di ampiezze $\mathbf{d}_{(p)} = (W_{(p)}, V_{(p)})^T$ soddisfa l'equazione algebrica:

$$\mathbf{Q}(p) \mathbf{d}_{(p)} = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

con

$$\mathbf{Q}(p) = p^2 \mathbf{A} + kp \mathbf{B} + k^2 \mathbf{C} - \rho f^2 \mathbf{I},$$

che ammette soluzione non banale soltanto per quei valori di p per i quali

$$\det \mathbf{Q}(p) = 0. \quad (4.24)$$

Quest'ultima rappresenta la seguente equazione del second'ordine in p^2 :

$$\eta\tau_1 p^4 + f_1(k, f)p^2 + f_2(k, f) = 0,$$

dove

$$\begin{aligned} f_1(k, f) &= [\tau_1(2\mu + \lambda) - \tau_2(2\eta + \tau_2)]k^2 - \varrho(\tau_1 + \eta)f^2, \\ f_2(k, f) &= \varrho^2 f^4 - \varrho(2\mu + \lambda + \eta)f^2 k^2 + (2\mu + \lambda)\eta k^4, \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{-f_1(k, f) \pm \sqrt{f_1^2(k, f) - 4\eta\tau_1 f_2(k, f)}}{2\eta\tau_1}}, \quad p_{3,4} = -p_{1,2}.$$

Segue che la soluzione generale delle (4.20) è:

$$\mathbf{d}(\zeta) = \sum_{i=1}^2 A_i^+ \exp(ip_i\zeta) \mathbf{d}_{(p_i)} + A_i^- \exp(-ip_i\zeta) \mathbf{d}_{(-p_i)}. \quad (4.25)$$

Data la particolare struttura del tensore $\mathbf{Q}(p)$, dall'equazione lineare (4.23) si ha che

$$\mathbf{d}_{(-p_i)} = \begin{bmatrix} W_{(p_i)} \\ -V_{(p_i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

e quindi la (4.25) si può riscrivere come combinazione lineare della lista dei vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} W_{(p_i)} \exp(ip_i\zeta) \\ V_{(p_i)} \exp(ip_i\zeta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_{(p_i)} \exp(-ip_i\zeta) \\ -V_{(p_i)} \exp(-ip_i\zeta) \end{pmatrix} : i = 1, 2 \right\}, \quad (4.26)$$

i quali costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni. Prima di passare alla determinazione dei coefficienti moltiplicativi $\{A_i^+, A_i^-; i = 1, 2\}$ tramite le condizioni al contorno (4.18), rappresentiamo la (4.25) per mezzo della base alternativa

$$\left\{ \begin{pmatrix} W_{(p_i)} \cos(p_i\zeta) \\ V_{(p_i)} i \sin(p_i\zeta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_{(p_i)} i \sin(p_i\zeta) \\ V_{(p_i)} \cos(p_i\zeta) \end{pmatrix} : i = 1, 2 \right\}, \quad (4.27)$$

nel seguente modo:

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 \left(A_i^f \cos(p_i\zeta) + A_i^m i \sin(p_i\zeta) \right) W_{(p_i)}, \\ v(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 \left(A_i^f i \sin(p_i\zeta) + A_i^m \cos(p_i\zeta) \right) V_{(p_i)}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

e per determinare i coefficienti $\{A_i^m, A_i^f; i = 1, 2\}$ sostituiamo la soluzione (4.28) nelle (4.18). Otteniamo i due sistemi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (\tau_1 p_i W_{(p_i)} + \tau_2 k V_{(p_i)}) \cos(p_i \varepsilon) A_i^m &= 0, \\ \sum_{i=1}^2 (\eta k W_{(p_i)} + \eta p_i V_{(p_i)}) \sin(p_i \varepsilon) A_i^m &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (\tau_1 p_i W_{(p_i)} + \tau_2 k V_{(p_i)}) \sin(p_i \varepsilon) A_i^f &= 0, \\ \sum_{i=1}^2 (\eta k W_{(p_i)} + \eta p_i V_{(p_i)}) \cos(p_i \varepsilon) A_i^f &= 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

che coinvolgono rispettivamente i coefficienti $\{A_i^m, i = 1, 2\}$ e $\{A_i^f, i = 1, 2\}$. La combinazione lineare (4.28) si divide in due parti. Una prima parte

$$\begin{aligned} v^m(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 A_i^m \cos(p_i \zeta) V_{(p_i)}, \\ w^m(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 A_i^m i \sin(p_i \zeta) W_{(p_i)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

contribuisce al moto con onde di tipo membranale che sono specularmente simmetriche rispetto al piano medio $\pi_{\mathbf{z}}$. Questo modo di vibrare è anche detto *longitudinale* perché lo spostamento medio lungo un'arbitraria fibra trasversale $\{x\} \times \mathcal{I}$ è diretto secondo \mathbf{c}_1 . La seconda parte è

$$\begin{aligned} v^f(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 A_i^f i \sin(p_i \zeta) V_{(p_i)}, \\ w^f(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 A_i^f \cos(p_i \zeta) W_{(p_i)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

e costituisce un moto oscillatorio di tipo flessionale caratterizzato da onde specularmente antisimmetriche rispetto al piano medio $\pi_{\mathbf{z}}$. Questo moto è anche detto *trasversale* perché lo spostamento medio nello spessore \mathcal{I} è diretto nella direzione \mathbf{z} . Se chiamiamo con $\mathbf{M}_m(k, f)$ e $\mathbf{M}_f(k, f)$ le matrici associate ai sistemi (4.29) e (4.30), i cui elementi sono

$$\begin{aligned} (M_m)_{1i}(k, f) &= (\tau_1 p_i W_{(p_i)} + \tau_2 k V_{(p_i)}) \cos(p_i \varepsilon), \\ (M_m)_{2i}(k, f) &= (\eta k W_{(p_i)} + \eta p_i V_{(p_i)}) \sin(p_i \varepsilon), \\ (M_f)_{1i}(k, f) &= (\tau_1 p_i W_{(p_i)} + \tau_2 k V_{(p_i)}) \sin(p_i \varepsilon), \\ (M_f)_{2i}(k, f) &= (\eta k W_{(p_i)} + \eta p_i V_{(p_i)}) \cos(p_i \varepsilon), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

allora si hanno soluzioni non banali se sono soddisfatte le seguenti condizioni di propagazione

$$\det \mathbf{M}_m(k, f) = 0 \quad \text{e} \quad \det \mathbf{M}_f(k, f) = 0, \quad (4.34)$$

le quali legano il numero d'onda k alla frequenza f . Il dominio di appartenenza per le coppie (f, k) , soluzioni delle equazioni (4.34), è: per la frequenza f , il semiasse dei numeri reali e positivi \mathbb{R}^+ e per il numero d'onda k , lo spazio dei numeri complessi. In particolare, quando k è reale, l'onda è progressiva nella direzione \mathbf{c}_1 , quando k è immaginario, il moto è stazionario e decade esponenzialmente nella direzione \mathbf{c}_1 . Se k è complesso il moto è un'onda progressiva la cui ampiezza decade nella direzione \mathbf{c}_1 . Osserviamo che le onde che propagano con numeri d'onda uguali e contrarie k e $-k$ sono identiche a meno del verso di propagazione. Restringiamo lo studio a numeri d'onda positivi e puramente reali o puramente immaginari: $k \in \mathbb{R}^+ \cup \text{Im}^+$.

In $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, le soluzioni (f, k) delle equazioni (4.34) appartengono ad una serie infinita di curve $\{k_i(f)\}_{i=0}^\infty$, le quali si distinguono l'una dall'altra grazie alle loro diverse *frequenze di cut-off* f_i ($i = 0, 1, 2 \dots$), cioè ai diversi punti in cui intersecano il semiasse delle ascisse ($k = 0$).

Ciascuna curva $k_i(f)$ è chiamata *ramo di dispersione*, intendendo con ciò che, lungo un ramo, si verifica un fenomeno di *dispersione* ondosa, perché la funzione $c_i(f) = f/k_i(f)$ che fornisce la velocità di propagazione relativamente a quel ramo $k_i(f)$ non ha in generale valore costante.

Utilizziamo gli apici m ed f per distinguere le curve $\{k_i^m(f)\}_{i=0}^\infty$ che soddisfano l'equazione (4.34)₁ di tipo membranale dalle curve $\{k_i^f(f)\}_{i=0}^\infty$ soluzioni della (4.34)₂ di tipo flessionale.

Introduciamo le seguenti grandezze adimensionali

$$\tilde{k} = \varepsilon k, \quad \tilde{f} = \varepsilon \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} f, \quad (4.35)$$

nelle quali ε ed $\varepsilon \sqrt{\varrho/\mu}$ sono i fattori di scala scelti rispettivamente per la lunghezza e per il tempo. Le condizioni di propagazione (4.34) possono essere riscritte in termini delle grandezze adimensionali (4.35):

$$\det \tilde{\mathbf{M}}_m(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0 \quad \text{e} \quad \det \tilde{\mathbf{M}}_f(\tilde{k}, \tilde{f}) = 0, \quad (4.36)$$

le quali saranno risolte numericamente nella Sezione 4.4.

4.2.2 Caso isotropo

Se lo strato Ξ è costituito da materiale isotropo (*vid.* [1], [43]), le equazioni del moto (4.14) in condizioni di vibrazione libera si scrivono così:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} &= \varrho \ddot{\mathbf{u}}, & \text{in } \Xi \times [0, t_0), \\ 2\mu \operatorname{sym}(\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}, & \text{su } \pi_{\mathbf{z}}^\pm \times [0, t_0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Una volta assegnata alla soluzione la forma (4.15), nell'equazione di campo (4.20) le matrici dei coefficienti diventano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mu + \lambda \\ \mu + \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 2\mu + \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

e nella soluzione generale (4.28) i due autovalori $p_{1,2}$ assumono i valori

$$p_1 = \sqrt{\frac{f^2}{c_T^2} - k^2}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{f^2}{c_L^2} - k^2}, \quad (4.39)$$

e le ampiezze:

$$(W_{(p_i)}, V_{(p_i)}) = \left(-\frac{i(\mu + \lambda)kp_i}{(2\mu + \lambda)p_i^2 + \mu f^2 - \varrho f^2}, 1 \right),$$

o equivalentemente

$$(W_{(p_i)}, V_{(p_i)}) = \left(1, -\frac{i(\mu + \lambda)kp_i}{\mu p_i^2 + (2\mu + \lambda)f^2 - \varrho f^2} \right).$$

Infine le condizioni di propagazione (4.34) si riducono nelle seguenti due equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\tan(p_1\varepsilon)}{\tan(p_2\varepsilon)} &= -\frac{4k^2p_1p_2}{(p_1^2 - k^2)^2}, \\ \frac{\tan(p_1\varepsilon)}{\tan(p_2\varepsilon)} &= -\frac{(p_1^2 - k^2)^2}{4k^2p_1p_2},\end{aligned}\tag{4.40}$$

rispettivamente per i modi di vibrare longitudinali e trasversali, le quali sono dette *equazioni di frequenza di Rayleigh-Lamb*. Le (4.40), in termini delle grandezze adimensionali (4.35) diventano:

$$\begin{aligned}\frac{\tan(\tilde{f}^2 - \tilde{k}^2)^{1/2}}{\tan(\frac{\tilde{f}^2}{\kappa^2} - \tilde{k}^2)^{1/2}} &= -\frac{4\tilde{k}^2(\frac{\tilde{f}^2}{\kappa^2} - \tilde{k}^2)^{1/2}(\tilde{f}^2 - \tilde{k}^2)^{1/2}}{(\tilde{f}^2 - 2\tilde{k}^2)^{1/2}}, \\ \frac{\tan(\tilde{f}^2 - \tilde{k}^2)^{1/2}}{\tan(\frac{\tilde{f}^2}{\kappa^2} - \tilde{k}^2)^{1/2}} &= -\frac{(\tilde{f}^2 - 2\tilde{k}^2)^{1/2}}{4\tilde{k}^2(\frac{\tilde{f}^2}{\kappa^2} - \tilde{k}^2)^{1/2}(\tilde{f}^2 - \tilde{k}^2)^{1/2}},\end{aligned}\tag{4.41}$$

dove

$$\kappa = \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}}.$$

In [41] viene fatto un'interessante studio asintotico dell'equazione di dispersione (4.41)₂ per i modi flessionali mentre in [15] e [14], l'equazione (4.41)₁ è utilizzata per verificare, tramite la propagazione di onde membranali, la presenza di difetti (intagli verticali simmetrici rispetto al piano medio) nello strato. Infine segnaliamo gli articoli [2] e [3], dove il problema di vibrazione libera per una piastra, rispettivamente, isotropa e trasversalmente isotropa è risolto assumendo che la funzione $g(x, t)$ non abbia la forma (4.16) ma, più in generale, sia la soluzione di un'equazione di membrana.

4.2.3 Frequenze ed oscillazioni al cut-off

In questo paragrafo calcoleremo le cosiddette frequenze di *cut-off*, le frequenze in corrispondenza delle quali le onde propagano con numeri d'onda k che tendono a zero. Al *cut-off* la propagazione ondosa, da progressiva che era per frequenze superiori, diventa stazionaria, con ampiezze decadenti esponenzialmente.

La relazione di dispersione (4.36)₁ relativa ai moti simmetrici, per $\tilde{k} \rightarrow 0$, si riduce alle due condizioni

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{\tau_1}}\tilde{f}\right) = 0, \quad \sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{\eta}}\tilde{f}\right) = 0,\tag{4.42}$$

soddisfatte dalle frequenze di cut-off membranali

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n^d &= n\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\tau_1}{\mu}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \\ \tilde{f}_n^e &= n\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\mu}}, \quad n = 0, 2, 4, \dots,\end{aligned}\tag{4.43}$$

in corrispondenza delle quali il moto (4.15) si riduce ad una funzione della sola coordinata ζ e del tempo t :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\zeta, t),$$

detto campo di vibrazioni *semplici*. Alle frequenze \tilde{f}_n^d , lo strato esibisce oscillazioni di tipo dilatazionale in cui

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} \neq 0,$$

mentre per $\tilde{f} = \tilde{f}_n^e$, le oscillazioni sono di tipo isocoro, ossia

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0,$$

e gli apici *d* ed *e* con cui indichiamo i due gruppi di frequenze stanno per “dilatational” e “equivoluminal”.

Analogamente, per $\tilde{k} \rightarrow 0$, l’equazione di dispersione (4.36)₂ per i moti antisimmetrici si riduce alle condizioni:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{\tau_1}} \tilde{f}\right) = 0, \quad \cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{\eta}} \tilde{f}\right) = 0, \quad (4.44)$$

soddisfatte dalle frequenze di cut-off flessionali

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n^d &= n \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\tau_1}{\mu}}, \quad n = 0, 2, 4, \dots, \\ \tilde{f}_n^e &= n \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (4.45)$$

In questo caso, le oscillazioni flessionali con frequenze scelte tra i valori (4.45)₁ sono di tipo dilatazionale ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 = 0$), mentre quelle caratterizzate dalle frequenze (4.45)₂ sono isocore ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0$).

I moti dilatazionali ed isocori sono anche chiamati rispettivamente di “stretching” e di “thickness-shear”.

Dalle (4.43) e (4.45) notiamo che

$$\frac{\tilde{f}_{n+1}^d}{\tilde{f}_n^d} = \frac{\tilde{f}_{n+1}^e}{\tilde{f}_n^e} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e cioè, che i rapporti tra due frequenze di cut-off adiacenti di tipo equivoluminale o dilatazionale non dipendono dai coefficienti costitutivi del materiale e quindi sono caratteristici di tutta la classe dei materiali trasversalmente isotropi. Diversamente il rapporto

$$\frac{\tilde{f}_n^d}{\tilde{f}_n^e} = \frac{\tau_1}{\eta}$$

dipende solo dai due coefficienti costitutivi τ_1 e η ed è indipendente dall’indice n .

Osservazione 1. Calcoliamo le frequenze di cut-off nel caso in cui il materiale sia isotropo. Per $\tilde{k} \rightarrow 0$, l’equazione (4.41)₁ relativa ai moti simmetrici si riduce alle due condizioni

$$\sin\left(\tilde{f}\right) = 0, \quad \cos\left(\frac{\tilde{f}}{\kappa}\right) = 0, \quad (4.46)$$

soddisfatte dalle frequenze

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n^d &= \kappa \frac{\pi}{2} n, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \\ \tilde{f}_n^e &= \frac{\pi}{2} n, \quad n = 0, 2, 4, \dots\end{aligned}\quad (4.47)$$

Alle frequenze \tilde{f}_n^d ed \tilde{f}_n^e , le oscillazioni sono rispettivamente di tipo dilatazionale ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 = 0$) ed isocoro ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0$). In modo analogo, per $\tilde{k} \rightarrow 0$, l'equazione di dispersione (4.41)₂ per i moti antisimmetrici si riduce alle condizioni:

$$\sin\left(\frac{\tilde{f}}{\kappa}\right) = 0, \quad \cos(\tilde{f}) = 0, \quad (4.48)$$

soddisfatte dalle frequenze di cut-off

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n^d &= \kappa \frac{\pi}{2} n, \quad n = 0, 2, 4, \dots, \\ \tilde{f}_n^f &= \frac{\pi}{2} n, \quad n = 1, 3, 5, \dots\end{aligned}\quad (4.49)$$

In questo caso, le oscillazioni flessionali con frequenza pari ad uno dei valori (4.49)₁ sono di tipo dilatazionale ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 = 0$), mentre quelle caratterizzate dalle frequenze (4.49)₂ sono isocore ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0$). \square

Osservazione 2. Le relazioni (4.43) e (4.45) possono essere usate per caratterizzare lo strato dal punto di vista costitutivo, infatti, una volta determinate sperimentalmente le frequenze di cut-off f_n^d e f_n^e , con $n = 1, 2, \dots$, relative ad oscillazioni rispettivamente dilatazionali e flessionali, è possibile conoscere i valori dei coefficienti costitutivi τ_1 ed η tramite le formule

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \varrho \left(\frac{\varepsilon}{n\pi}\right)^2 f_n^d, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \eta &= \varrho \left(\frac{\varepsilon}{n\pi}\right)^2 f_n^f, \quad n = 1, 2, \dots,\end{aligned}\quad (4.50)$$

nelle quali i secondi membri sono totalmente noti. \square

4.3 Onde di Rayleigh-Lamb in un mezzo incoerente

Supponiamo ora che la risposta dello strato Ξ sia trasversalmente isotropa, incoerente. Se usiamo la rappresentazione (3.10) per esprimere il tensore di elasticità, le equazioni del moto (4.14) diventano

$$\begin{aligned}a_{11}\hat{u}_{1,11} + d_{12}\hat{u}_{2,12} + d_{13}u'_{,1} + c_1(u_{,11} + \hat{u}'_{1,1}) + \frac{1}{2}a_{12}(\hat{u}_{1,22} + \hat{u}_{2,12}) + \\ + \frac{1}{2}c_4(u_{,22} + \hat{u}'_{2,2}) + \frac{1}{2}a_{13}(u'_{,1} + \hat{u}'_{1,1}) + c_1\hat{u}'_{1,1} + c_3u'' + c_2\hat{u}'_{2,2} = -\varrho\ddot{u}_1, \\ \frac{1}{2}a_{12}(\hat{u}_{1,12} + \hat{u}_{2,11}) + \frac{1}{2}c_4(u_{,12} + \hat{u}'_{2,1}) + a_{22}\hat{u}_{2,22} + d_{12}\hat{u}_{1,12} + d_{23}u'_{,2} + \\ + c_2(u_{,12} + \hat{u}'_{1,2}) + \frac{1}{2}a_{23}(u'_{,2} + \hat{u}'_{2,1}) + \frac{1}{2}c_4(\hat{u}'_{1,2} + \hat{u}'_{2,1}) = -\varrho\ddot{u}_2, \\ \frac{1}{2}a_{13}(u_{,11} + \hat{u}'_{1,1}) + c_1\hat{u}_{1,11} + c_3u'_{,1} + c_2\hat{u}_{2,12} + \frac{1}{2}a_{23}(u_{,22} + \hat{u}'_{2,2}) + \\ + \frac{1}{2}c_4(\hat{u}_{1,22} + \hat{u}_{2,12}) + a_{33}u'' + d_{13}\hat{u}'_{1,1} + d_{23}\hat{u}'_{2,2} + c_3(u'_{,1} + \hat{u}'_{1,1}) = -\varrho\ddot{u},\end{aligned}\quad (4.51)$$

definite in $\Xi \times [0, t_0)$, con le condizioni al contorno su $\pi_{\mathbf{z}}^{\pm} \times [0, t_0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_{13}(u_{,1} + \hat{u}'_1) + c_1\hat{u}_{1,1} + c_3u' + c_2\hat{u}_{2,2} &= 0, \\ \frac{1}{2}a_{23}(u_{,2} + \hat{u}'_2) + \frac{1}{2}c_4(\hat{u}_{1,2} + \hat{u}_{2,1}) &= 0, \\ a_{33}u' + d_{13}\hat{u}_{1,1} + d_{23}\hat{u}_{2,2} + c_3(u_{,1} + \hat{u}'_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

dove \hat{u}_{α} è la α -esima componente del campo di spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ nel piano $\pi_{\mathbf{z}}$ e $(\cdot)_{,\alpha}$ è la derivata parziale fatta rispetto ad x_{α} .

Consideriamo la soluzione in forma d'onda armonica piana (4.15). Osserviamo che tale moto avviene nel piano $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$ nel quale giace l'asse di trasversa isotropia \mathbf{c} . Se sostituiamo la (4.15) nelle equazioni di campo (4.51), otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria nell'incognita $\mathbf{d}(\zeta) = (w(\zeta), v(\zeta))^T$:

$$\mathbf{A}\mathbf{d}'' + ik\mathbf{B}\mathbf{d}' + (\rho f^2\mathbf{I} - k^2\mathbf{C})\mathbf{d} = 0, \quad (4.53)$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{33} & c_3 \\ c_3 & \frac{1}{2}a_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2c_3 & d_{13} + \frac{1}{2}a_{13} \\ d_{13} + \frac{1}{2}a_{13} & 2c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{13} & c_1 \\ c_1 & a_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

ed \mathbf{I} è il tensore identità 2×2 . Il primo ed il secondo membro della (4.51)₂ sono identicamente nulli. L'equazione (4.53) ha una soluzione del tipo:

$$\mathbf{d}(\zeta) = \mathbf{d}_{(p)} \exp(ip\zeta), \quad (4.55)$$

dove la coppia di ampiezze $\mathbf{d}_{(p)} = (W_{(p)}, V_{(p)})$ soddisfa l'equazione algebrica:

$$\mathbf{Q}(p)\mathbf{d}_{(p)} = \mathbf{0}, \quad \text{con} \quad \mathbf{Q}(p) = p^2\mathbf{A} + kp\mathbf{B} + k^2\mathbf{C} - \rho f^2\mathbf{I}, \quad (4.56)$$

e non è identicamente nulla soltanto per quei valori di p per i quali

$$\det\mathbf{Q}(p) = 0. \quad (4.57)$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è il seguente polinomio:

$$f_4p^4 + f_3(k)p^3 + f_2(k, f)p^2 + f_1(k, f)p + f_0(k, f) \quad (4.58)$$

dove

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{2}a_{33}a_{13} + c_3^2, \\ f_3(k) &= 2[(d_{13} + a_{13})c_3 + a_{33}c_1]k, \\ f_2(k, f) &= [(d_{13} + \frac{1}{2}a_{13})^2 + \frac{1}{4}a_{13}^2 + 6c_3c_1 + a_{33}a_{11}]k^2 - (a_{33} + \frac{1}{2}a_{13})\rho f^2, \\ f_1(k, f) &= [2c_1(d_{13} + \frac{1}{2}a_{13}) + a_{13}c_1 + 2c_3a_{11}]k^3 - 2(c_1 + c_3)\rho f^2k, \\ f_0(k, f) &= (\frac{1}{2}a_{13}k^2 - \rho f^2)(a_{11}k^2 - \rho f^2) + c_1^2k^4. \end{aligned}$$

La (4.57) ammette quattro radici $p_i(k, f)$, $i = 1, \dots, 4$, a cui corrispondono quattro coppie di ampiezze $\mathbf{d}_{(p_i)}$ soluzioni dell'equazione

$$\mathbf{Q}(p_i)\mathbf{d}_{(p_i)} = 0.$$

Segue che la soluzione generale di (4.53) si scrive:

$$\mathbf{d}(\zeta) = \sum_{i=1}^4 A_i \exp(ip_i \zeta) \mathbf{d}_{(p_i)}, \quad (4.59)$$

come combinazione lineare delle quattro soluzioni non nulle tramite i coefficienti $\{A_i\}_{i=1}^4$. Osserviamo che nel caso di legame costitutivo trasversalmente isotropo, coerentemente orientato, le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} sono diagonali e la matrice \mathbf{B} ha diagonale nulla (vedi (4.21)). Ciò permette alcune semplificazioni: le soluzioni $\{p_i\}_{i=1}^4$ sono a due a due uguali e contrarie e la soluzione generale, espressa nella base (4.27), si scompone nella somma di due addendi di tipo membranale e flessionale i quali soddisfano separatamente i due sistemi di equazioni al bordo (4.29) e (4.30). Nel caso di incoerenza, la struttura piena delle matrici (4.54) non permette di separare i due regimi ondosi di tipo membranale e flessionale.

I quattro coefficienti A_i sono determinati dalle equazioni al bordo (4.52). Se sostituiamo la soluzione (4.59) nelle (4.52), otteniamo questo sistema algebrico, omogeneo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left[\left(\frac{1}{2} a_{13} k + c_3 p_i \right) W_{(p_i)} + \left(c_1 k + \frac{1}{2} a_{13} p_i \right) V_{(p_i)} \right] \exp(\pm ip_i \varepsilon) A_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 \left[\left(a_{33} p_i + c_3 k \right) W_{(p_i)} + \left(d_{13} k + c_3 p_i \right) V_{(p_i)} \right] \exp(\pm ip_i \varepsilon) A_i &= 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

il quale ammette soluzione non banale soltanto se

$$\det \mathbf{M}(k, f) = 0, \quad (4.61)$$

dove $\mathbf{M}(k, f)$ è la matrice dei coefficiente costituita dagli elementi:

$$\begin{aligned} M_{1i}(k, f) &= \left[\left(\frac{1}{2} a_{13} k + c_3 p_i \right) W_{(p_i)} + \left(c_1 k + \frac{1}{2} a_{13} p_i \right) V_{(p_i)} \right] \exp(ip_i \varepsilon), \\ M_{2i}(k, f) &= \left[\left(\frac{1}{2} a_{13} k + c_3 p_i \right) W_{(p_i)} + \left(c_1 k + \frac{1}{2} a_{13} p_i \right) V_{(p_i)} \right] \exp(-ip_i \varepsilon), \\ M_{3i}(k, f) &= \left[\left(a_{33} p_i + c_3 k \right) W_{(p_i)} + \left(d_{13} k + c_3 p_i \right) V_{(p_i)} \right] \exp(ip_i \varepsilon), \\ M_{4i}(k, f) &= \left[\left(a_{33} p_i + c_3 k \right) W_{(p_i)} + \left(d_{13} k + c_3 p_i \right) V_{(p_i)} \right] \exp(-ip_i \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.62)$$

Al cut-off ($k \ll 1$), l'equazioni di bilancio (4.53) si riduce alla seguente:

$$(p^2 \mathbf{A} - \varrho f^2 \mathbf{I}) \mathbf{d}_{(p)} = 0,$$

la quale ammette soluzione $\mathbf{d}_{(p)}$ non nulla se è soddisfatta la seguente equazione del second'ordine in p^2 :

$$\left(\frac{1}{2} a_{33} a_{13} - c_3^2 \right) p^4 - \varrho \left(a_{33} + \frac{1}{2} a_{13} \right) f^2 p^2 + \varrho^2 f^2 = 0,$$

che ammette le soluzioni

$$p_{1,2} = \sqrt{\alpha_{1,2} \varrho f^2}, \quad p_{3,4} = -p_{1,2},$$

dove

$$\alpha_{1,2} = \frac{a_{33} + \frac{1}{2} a_{13} \pm \sqrt{\left(a_{33} - \frac{1}{2} a_{13} \right)^2 + 4c_3^2}}{a_{33} a_{13} - 2c_3^2}.$$

A meno di un fattore moltiplicativo, le coppie di ampiezze associate ai valori p_i , $i = 1, \dots, 4$, sono

$$\left(-\frac{c_3 p_i^2}{a_{33} p_i^2 - \rho f^2}, 1 \right),$$

o equivalentemente

$$\left(1, -\frac{c_3 p_i^2}{\frac{1}{2} a_{13} p_i^2 - \rho f^2} \right).$$

Le condizioni di propagazione (4.61), sono soddisfatte per $k \ll 1$ se le frequenze assumono i valori di cut-off:

$$\tilde{f}_m = \frac{n\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha_i}}, \quad i = 1, 2, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (4.63)$$

con $\tilde{f}_m \leq \tilde{f}_{(m+1)}$, qualunque sia $m \in \mathbb{N}$. Osserviamo, infine, che, al cut-off, non si distinguono frequenze alle quali l'oscillazione è isocora ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0$) e quelle in corrispondenza delle quali il moto è dilatazionale ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 = 0$) ma a tutte le frequenze di cut-off sono presenti sia oscillazioni trasversali che longitudinali.

Per approfondimenti sulla propagazione di onde in strati elettroelastici, rimandiamo a [24] e [73] (dove sono studiati i modi di vibrare semplici, cioè al cut-off, di una striscia elettroelastica Ξ in funzione delle condizioni elettriche sulle basi) e a [4] (dove i modi di vibrare semplici sono analizzati in funzione delle classi di simmetria del materiale).

Osservazione. Nel caso di strato coerente è sempre possibile trovare una soluzione per le equazioni del moto (4.17)-(4.18) che abbia la forma

$$\mathbf{u} = (w(\zeta)\mathbf{z} + m(\zeta)\mathbf{m})g(x, t), \quad (4.64)$$

con

$$g(x, t) = \exp(i(k\mathbf{m} \cdot (x - o) - ft)),$$

ed $\mathbf{m} \cdot \mathbf{z} = 0$, ossia che sia un'onda armonica che propaga in una qualsiasi direzione \mathbf{m} nel piano medio e la cui oscillazione giaccia nel piano $\text{span}(\mathbf{m}, \mathbf{z})$. Nel paragrafo 4.2 abbiamo fatto coincidere la direzione \mathbf{m} con l'asse \mathbf{c}_1 del sistema di riferimento.

Per uno strato incoerente, un moto piano del tipo (4.64) risolve il problema di vibrazione libera (4.51)-(4.52) soltanto se \mathbf{m} giace in $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c})$, dove \mathbf{c} è l'asse di trasversa isotropia, ossia soltanto se $\mathbf{m} \equiv \mathbf{c}_1$. Diversamente, l'onda deve avere anche una componente di moto nella direzione $\mathbf{m} \times \mathbf{z}$. \square

4.4 Esempio numerico

Risolviamo numericamente le equazioni (4.36) per uno strato coerente caratterizzato dai coefficienti costitutivi riportati in Tabella 1 tipici di una ceramica piezoelettrica (*zircotitanato di piombo* P1-88) di cui non consideriamo i coefficienti di accoppiamento elettrico.

μ [GPa]	24.95	γ_1 [nF/m]	17.43
λ [GPa]	82.30	γ_2 [nF/m]	16.37
τ_1 [GPa]	120.00	δ_1 [C/m ²]	11.80
τ_2 [GPa]	83.70	δ_2 [C/m ²]	-4.30
η [GPa]	29.50	δ_3 [C/m ²]	16.70

Tabella 1 -Moduli materiali dello zircotitanato di piombo P1-88.

Nella figura 4.1 sono tracciati i primi undici rami di dispersione: sei per il regime membranale (indicati con la lettera m) e cinque per quello flessionale (segnati con la lettera f). Queste due categorie di curve si dividono a loro volta nei due sottogruppi dilatazionale (d) ed isocoro (e) definiti dal tipo di moto in corrispondenza delle frequenze di cut-off.

Nella figura 4.2, i primi undici rami (in linea tratteggiata) sono prolungati nel quadrante $\mathbb{R}^+ \times \text{Im}^+$ e confrontati con quelli (linea continua) che risolvono la condizione di propagazione (4.61) per uno strato incoerente nella quale è stato posto $\theta = 15^\circ$.

I rami per una striscia incoerente perdono la possibilità di distinguersi in flessionali e membranali o in dilatazionali (trasversali) ed isocori (longitudinali).

Osserviamo infine che quando le curve passano dal quadrante superiore a quello inferiore, il moto ondoso si trasforma da progressivo a stazionario e decadente nella direzione \mathbf{c}_1 in modo esponenziale.

Osservazione. Le curve di dispersione rappresentate nelle figure 4.1 e 4.2 sono calcolate per punti con un procedimento iterativo con cui è tracciata una curva alla volta e che ora illustriamo. Supponiamo di voler disegnare il ramo caratterizzato dalla frequenza di cut-off \tilde{f}_i determinata tramite le (4.43) e (4.45) nel caso coerente e tramite le (4.63) nel caso incoerente. Costruiamo intorno al punto $(\tilde{f}_i, 0)$ l'arco di ellisse definito dalla lista di grandezze $(a_m, a_M, \mathbf{d}, \vartheta)$ dove a_m ed a_M sono le dimensioni degli assi minore e maggiore, \mathbf{d} è la direzione lungo la quale è orientato l'asse maggiore e 2ϑ è l'angolo al centro dell'ellisse, centrato secondo la direzione \mathbf{d} , che sottende l'arco. Nell'arco così costruito risolviamo il seguente problema di minimo:

$$\min |\det \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{k}, \tilde{f})|, \quad (4.65)$$

dove la matrice $\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{k}, \tilde{f})$ è data dalle (4.33) se lo strato è coerente o dalle (4.62) se lo strato è incoerente (previa opportuna adimensionalizzazione di f e k). Il tensore $\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{k}, \tilde{f})$ è definito solo dopo aver risolto il problema (4.23) (coerente) o (4.56) (incoerente) che qui trasformiamo nell'equivalente problema standard agli autovalori:

$$(\mathbf{H} - \tilde{p}\mathbf{I}) \mathbf{x} = 0,$$

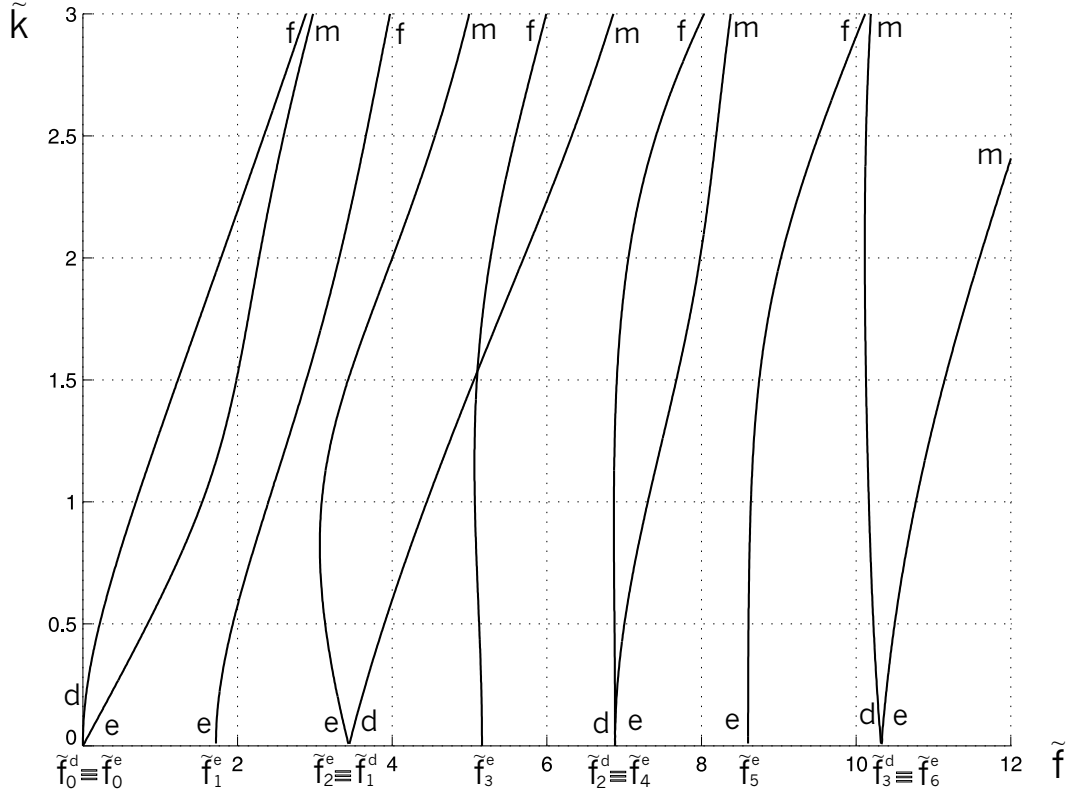


Figura 4.1: Rami di dispersione per onde di *Rayleigh-Lamb* che propagano nella regione Ξ , trasversalmente isotropa, coerentemente orientata.

dove

$$\tilde{p} = \varepsilon p, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\tilde{k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} & -\tilde{k}^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} + \mu \tilde{f}^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Valutate le auto-coppie $(\tilde{p}_i, \mathbf{a}_i)$ ($i = 1, 2$), la matrice $\mathbf{M}(\tilde{k}, \tilde{f})$ è definita. Quindi si determina la coppia (\tilde{f}, \tilde{k}) soluzione del problema di minimo (4.65) e si procede al passo successivo: intorno alla soluzione (\tilde{f}, \tilde{k}) si costruisce l'arco d'ellisse definito, ancora, dalla lista di grandezze $(a_m, a_M, \mathbf{d}, \vartheta)$, nella quale la direzione \mathbf{d} è data dalla differenza tra la coppia di soluzioni appena trovata ed il centro dell'ellisse del passo precedente. La curva si traccia per punti, iterando questi passaggi. \square

4.5 Tests di coerenza

Nella figura 4.2 sono confrontate le curve di dispersione per uno strato coerente (in linea tratteggiata) con quelle per una strato incoerente, in cui l'asse di simmetria materiale è inclinato di un angolo $\theta = 15^\circ$ (in linea continua).

Oltre all'accoppiamento tra i moti flessionali e membranali e, al cut-off, tra le oscillazioni longitudinali e trasversali, l'incoerenza costitutiva provoca uno slittamento delle curve lungo

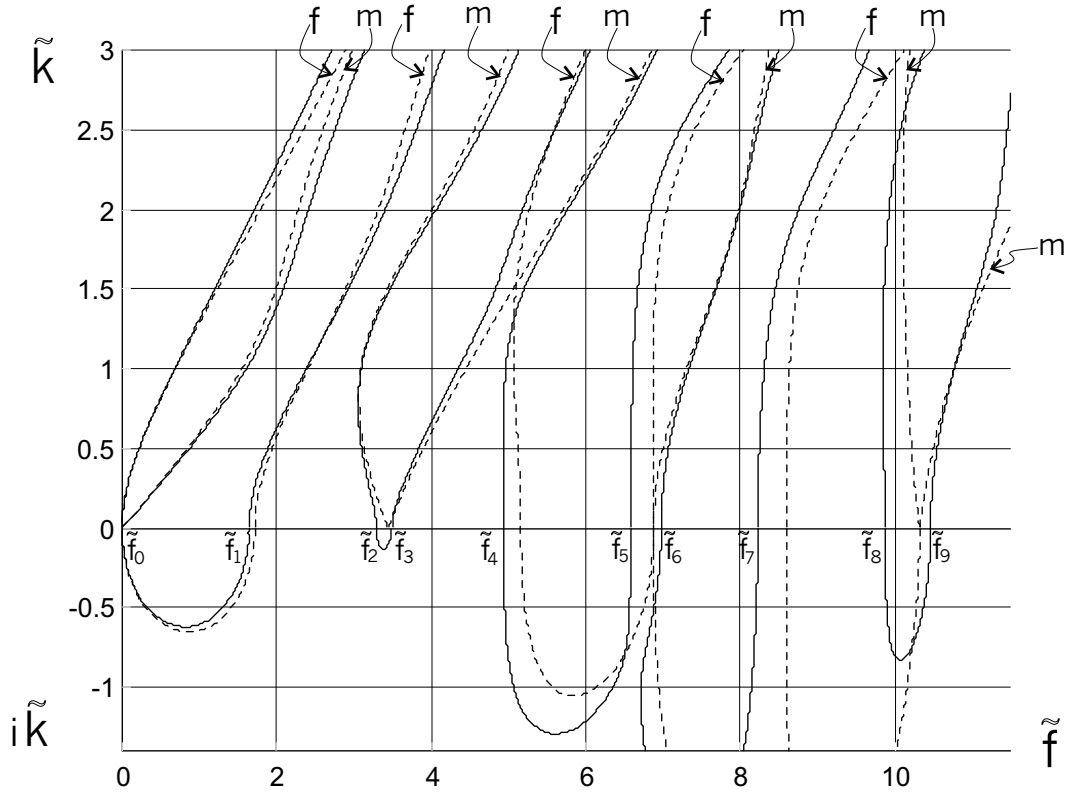


Figura 4.2: Rami di dispersione per onde di *Rayleigh-Lamb* che propagano in uno strato, incoerente ($\theta = 15^\circ$) (linea continua) e coerente (linea tratteggiata).

l'asse delle frequenze. Soffermiamoci su quest'aspetto, analizzando, in particolare, le curve di dispersione a bassa frequenza in prossimità dell'asse delle ascisse, ossia per bassi numeri d'onda.

Nella figura 4.3, sono rappresentate le due curve con frequenze di cut-off \tilde{f}_1^e e \tilde{f}_1 , in prossimità dell'asse delle frequenze. Il ramo che compete allo strato coerente, in linea tratteggiata, è di tipo flessionale e, al cut-off, l'oscillazione è equivoluminale. Allontanandosi dalla frequenza \tilde{f}_1^e , lungo la curva, all'oscillazione longitudinale si aggiunge anche quella trasversale di tipo dilatazionale. Tuttavia, per valori del numero d'onda piccoli, il moto prevalente è antisimmetrico di taglio nel piano. Per uno strato incoerente, la curva rappresentata a tratto continuo è associata ad un moto ondoso sia flessionale che membranale e sia trasversale che longitudinale. Dato però che consideriamo uno strato debolmente incoerente (θ piccolo), la vibrazione prevalente è di tipo flessionale, ed inoltre, se ci limitiamo a bassi numeri d'onda, ossia se ci limitiamo ad onde con frequenza molto vicina a quella di cut-off \tilde{f}_1 , predominano onde longitudinali. Anche per uno strato incoerente quindi il moto ondoso è, in massima parte, antisimmetrico e longitudinale.

Per una vibrazione così caratterizzata, imponiamo una frequenza $\tilde{f} \in (\tilde{f}_1, \tilde{f}_1^e)$. Osserviamo che, nello strato incoerente, l'onda è progressiva, con numero d'onda \tilde{k}_p , mentre nello strato coerente è stazionaria e decade nella direzione \mathbf{c}_1 secondo $\exp(-\tilde{k}_s x_1 / i\varepsilon)$.

Questa diversità di comportamento è facilmente osservabile e perciò può essere usata per verificare *difetti di coerenza* nello strato. Infatti un'onda con frequenza \tilde{f} fissata e pari ad un valore di poco inferiore a \tilde{f}_1^e è stazionaria nelle regioni dello strato che sono costitutivamente coerenti, ma si trasforma in un'onda progressiva, prevalentemente longitudinale ed antisimmetrica, laddove lo strato prende ad essere incoerente.

Passiamo, ora, ad analizzare le curve di dispersione caratterizzate dalle frequenze di cut-off \tilde{f}_2 , \tilde{f}_2^e , \tilde{f}_1^d e \tilde{f}_3 . La figura 4.4 mostra le suddette curve per bassi valori del numero d'onda. I rami relativi allo strato coerente sono associati ad onde di tipo membranale e le due curve decrescente e crescente, al cut-off, esibiscono oscillazioni rispettivamente longitudinale (isocora) e trasversale (dilatazionale). Così, alla frequenza $\tilde{f}_2^e \equiv \tilde{f}_1^d$, l'onda ha componenti di spostamento sia nella direzione \mathbf{c}_1 che \mathbf{z} . Data la piccolezza dell'angolo di incoerenza θ , nel moto ondoso associato ai due rami per lo strato incoerente, in prossimità del cut-off prevalgono le oscillazioni appena descritte nel caso coerente, ossia un'onda simmetrica longitudinale per la curva con cut-off \tilde{f}_2 ed una simmetrica trasversale per quella con cut-off \tilde{f}_3 .

Consideriamo ora un'onda che propaga con frequenza $\tilde{f}_a \in (\tilde{f}_2, \tilde{f}_2^e)$. Nello strato coerente, questa è progressiva, con numero d'onda \tilde{k}_p^a , di tipo essenzialmente simmetrico e longitudinale, ma, nello strato incoerente, diventa stazionaria e la sua ampiezza decade nello spazio secondo $\exp(-\tilde{k}_s^a x_1 / i\varepsilon)$. Ugualmente, un'onda con frequenza $\tilde{f}_b \in (\tilde{f}_1^d, \tilde{f}_3)$ è progressiva e di tipo simmetrico e trasversale (dilatazionale) nello strato coerente, ma diventa stazionaria nello strato incoerente.

Anche questo comportamento può essere usato per compiere un test di coerenza. Infatti se facciamo propagare nello strato un'onda con frequenza fissata e pari ad un valore prossimo a $\tilde{f}_2^e \equiv \tilde{f}_1^d$, il moto è progressivo e di tipo membranale nella zona coerente e diventa stazionario non appena appare l'incoerenza costitutiva.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per le altre curve di dispersione a frequenza più alta di quelle sin qui considerate.

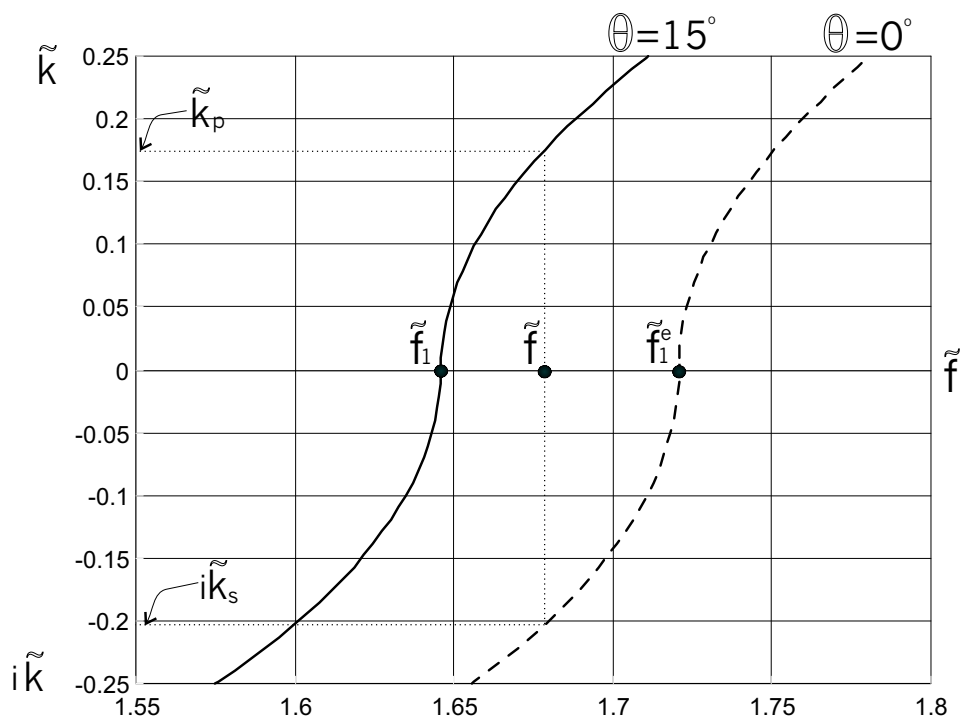


Figura 4.3: Curve di dispersione relative ad onde a bassa frequenza di tipo, prevalentemente, flessionali e longitudinali.

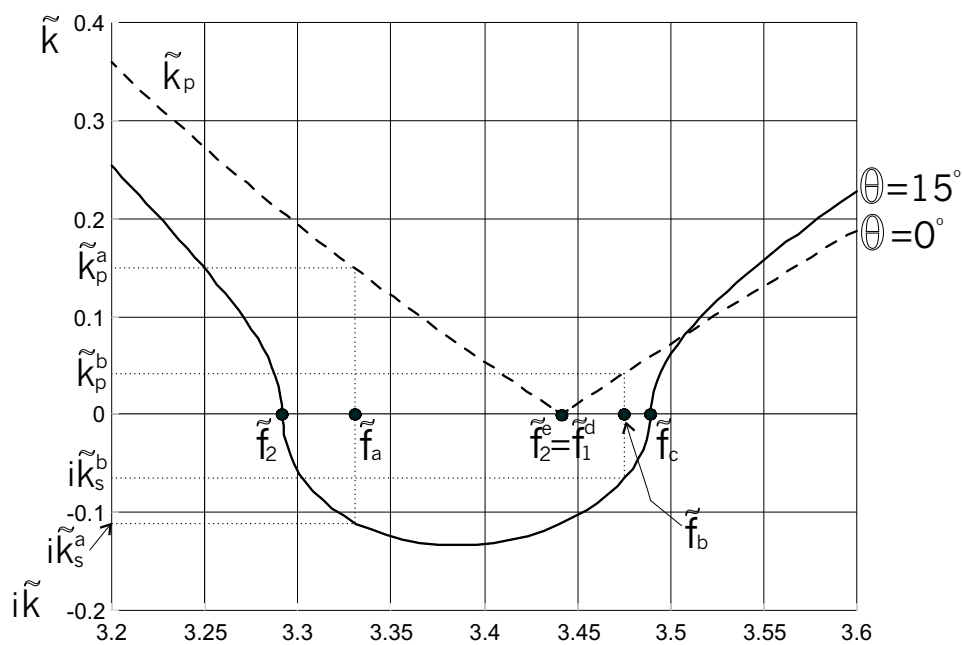


Figura 4.4: Curve di dispersione relative ad onde a bassa frequenza di tipo, prevalentemente, membranali.