

## Capitolo 3

# Piastre incoerenti

Si consideri una regione a forma di piastra di asse  $\mathbf{z}$ , e la si supponga costituita da un materiale linearmente elastico, trasversalmente isotropo rispetto ad una direzione che coincide, in ogni punto della piastra, con quella di  $\mathbf{z}$ . In questo caso, poichè il materiale è orientato in modo coerente con la geometria del corpo che va a costituire (un cilindro retto), parliamo di una *piastra con isotropia trasversa di tipo coerente*; in breve, di una *piastra coerente*. Altrimenti, cioè quando l'asse del materiale, pur avendo direzione spazialmente costante, forma un'angolo non nullo con l'asse della piastra, parliamo di *piastra incoerente*.

### 3.1 Isotropia trasversa incoerente

Nel paragrafo 2.3 il tensore di elasticità per una piastra coerente è stato rappresentato in questo modo:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_0 = & (2\mu + \lambda)(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) + \\ & + \lambda(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) + \\ & + \tau_2(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + \\ & + \tau_1 \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3 + 2\eta(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5)\end{aligned}\tag{3.1}$$

(il pedice 0 è stato aggiunto alla lettera  $\mathbb{C}$  per indicare che l'angolo tra le direzioni assiale e di simmetria materiale è nullo), tramite sei tensori che formano una base ortonormale per  $\text{Sym}$  e che sono così definiti:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 = \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1, & \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2, & \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\ \mathbf{X}_4 = \sqrt{2} \text{sym } \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{z}, & \quad \mathbf{X}_5 = \sqrt{2} \text{sym } \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z}, & \quad \mathbf{X}_6 = \sqrt{2} \text{sym } \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

In (una versione a blocchi della) notazione di Voigt, la (3.1) si scrive nella forma

$$\mathbb{C}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_0 \end{pmatrix},\tag{3.3}$$

dove  $\mathbf{0}$  è la matrice  $3 \times 3$  nulla e

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \tau_2 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & \tau_2 \\ \text{sym} & \cdot & \tau_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ \cdot & \eta & 0 \\ \text{sym} & \cdot & \mu \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

In questa notazione, la relazione costitutiva generale  $\mathbf{S} = \mathbb{C}[\mathbf{E}]$  prende la forma seguente:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ 2\boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} E_{23} \\ E_{13} \\ E_{12} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{1111} & \mathbb{C}_{1122} & \mathbb{C}_{1133} \\ \cdot & \mathbb{C}_{2222} & \mathbb{C}_{2233} \\ \text{sym} & \cdot & \mathbb{C}_{3333} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{2323} & \mathbb{C}_{2313} & \mathbb{C}_{2312} \\ \cdot & \mathbb{C}_{1313} & \mathbb{C}_{1312} \\ \text{sym} & \cdot & \mathbb{C}_{1212} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{1123} & \mathbb{C}_{1113} & \mathbb{C}_{1112} \\ \mathbb{C}_{2223} & \mathbb{C}_{2213} & \mathbb{C}_{2212} \\ \mathbb{C}_{3323} & \mathbb{C}_{3313} & \mathbb{C}_{3312} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

qui,  $\boldsymbol{\sigma}$  è il vettore degli sforzi normali nelle direzioni coordinate e  $\boldsymbol{\tau}$  è il vettore degli sforzi di taglio;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  il vettore delle deformazioni assiali e  $\boldsymbol{\gamma}$  quello degli scorrimenti angolari. Con l'uso di questa notazione è immediato vedere che, per una piastra coerente, gli sforzi normali non dipendono dagli scorrimenti angolari (il blocco fuori diagonale è  $\mathbf{0}$ ) e gli sforzi di taglio sono dovuti solo ai corrispondenti scorrimenti ( $\mathbf{B}_0$  è diagonale). Diversa è la situazione per una piastra incoerente. Per mostrare questo ed altri fatti, procediamo qui a costruire una rappresentazione per il tensore di elasticità di questo tipo di piastre, partendo dalla rappresentazione (3.1).

Supponiamo che l'asse di simmetria materiale, che indichiamo con il versore  $\mathbf{c}$ , sia ottenuto ruotando  $\mathbf{z}$  di un angolo  $\theta$  intorno a  $\mathbf{c}_2$ . Il tensore  $\mathbf{Q}(\theta) \in \text{Orth}^+$ , che rappresenta la suddetta rotazione, si scrive:

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{W} + (1 - \cos \theta) \mathbf{W}^2, \quad \text{con } \mathbf{W} = 2 \text{skw}(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z}), \quad (3.6)$$

e quindi la direzione di isotropia trasversa è data dalla formula

$$\mathbf{c} = \mathbf{Q}(\theta)\mathbf{z} = \sin \theta \mathbf{c}_1 + \cos \theta \mathbf{z}.$$

Il versore  $\mathbf{c}$  giace nel piano  $\text{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{z})$  mentre  $\text{span}(\mathbf{Q}\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$  rappresenta il piano di isotropia (vedi figura 3.1). Tramite la rotazione (3.6), costruiamo il *coniugatore ortogonale*  $\mathbb{Q}(\theta)$ , cioè, il tensore del quart'ordine che opera su un qualsiasi  $\mathbf{A} \in \text{Lin}$  nel seguente modo:

$$\mathbb{Q}(\theta)[\mathbf{A}] = \mathbf{Q}(\theta)\mathbf{A}\mathbf{Q}^T(\theta). \quad (3.7)$$

Il tensore  $\mathbb{Q}(\theta)$ , in quanto preserva il prodotto scalare di Lin:

$$\mathbb{Q}[\mathbf{A}] \cdot \mathbb{Q}[\mathbf{B}] = \mathbf{QAQ}^T \cdot \mathbf{QBQ}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{QBQ}^T \mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin},$$

rappresenta una rotazione nello spazio delle applicazioni del quart'ordine  $\mathbb{L}\text{in}$ . Il tensore di elasticità per un materiale trasversalmente isotropo rispetto all'asse  $\mathbf{c}$  si costruisce ruotando  $\mathbb{C}_0$  per mezzo di  $\mathbb{Q}(\theta)$ :

$$\mathbb{C}(\theta) = \mathbb{Q}(\theta)\mathbb{C}_0\mathbb{Q}^T(\theta); \quad (3.8)$$

ci riferiamo a  $\theta$  come all'*angolo di incoerenza*.

Se introduciamo la rappresentazione (3.1) nella (3.8), otteniamo una sommatoria di termini che, a meno di coefficienti moltiplicativi, sono del tipo  $\mathbb{Q}(\mathbf{X}_i \otimes \mathbf{X}_j)\mathbb{Q}^T$ ; per ciascun termine siffatto,

$$\mathbb{Q}(\mathbf{X}_i \otimes \mathbf{X}_j)\mathbb{Q}^T = (\mathbb{Q}\mathbf{X}_i) \otimes (\mathbb{Q}\mathbf{X}_j) = (\mathbf{Q}\mathbf{X}_i\mathbf{Q}^T) \otimes (\mathbf{Q}\mathbf{X}_j\mathbf{Q}^T), \quad \forall i, j = 1 \dots 6; \quad (3.9)$$

d'altra parte, mediante (3.6), ciascuna delle diadi che appaiono nell'ultima delle relazioni (3.9) si può esprimere nella base (3.2):

$$\mathbf{Q}(\theta)\mathbf{X}_i\mathbf{Q}^T(\theta) = \sum_{k=1}^6 \alpha_k^{(i)}(\theta)\mathbf{X}_k.$$

In conclusione, la (3.8) si può riscrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\theta) = & a_{11}\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + a_{22}\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + a_{33}\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3 + a_{12}\mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6 + \\ & + a_{13}\mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5 + a_{23}\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4 + d_{12}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1) + \\ & + d_{13}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1) + d_{23}(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + \\ & + \sqrt{2}c_1(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_1) + \sqrt{2}c_2(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_2) + \\ & + \sqrt{2}c_3(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_3) + c_4(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_6 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_4), \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove i 13 coefficienti moltiplicativi si esprimono come segue in funzione delle costanti elastiche del materiale e dell'angolo di incoerenza:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (2\mu + \lambda) \cos^4 \theta + \tau_1 \sin^4 \theta + 2(\tau_2 + 2\eta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta, \\ a_{22} &= 2\mu + \lambda, \\ a_{12} &= 2\mu \cos^2 \theta + 2\eta \sin^2 \theta, \\ a_{33} &= (2\mu + \lambda) \sin^4 \theta + \tau_1 \cos^4 \theta + 2(\tau_2 + 2\eta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta, \\ a_{23} &= 2\mu \sin^2 \theta + 2\eta \cos^2 \theta, \\ a_{13} &= 2(2\mu + \lambda + \tau_1 - 2\tau_2 - 2\eta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2\eta(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\ d_{12} &= \lambda \cos^2 \theta + \tau_2 \sin^2 \theta, \\ d_{13} &= (2\mu + \lambda + \tau_1 - 4\eta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \tau_2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\ d_{23} &= \lambda \sin^2 \theta + \tau_2 \cos^2 \theta, \\ c_1 &= [(-2\mu - \lambda + \tau_2 + 2\eta) \cos^2 \theta + (\tau_1 - \tau_2 - 2\eta) \sin^2 \theta] \sin \theta \cos \theta, \\ c_2 &= (-\lambda + \tau_2) \sin \theta \cos \theta, \\ c_3 &= [(-2\mu - \lambda + \tau_2 + 2\eta) \sin^2 \theta + (\tau_1 - \tau_2 - 2\eta) \cos^2 \theta] \sin \theta \cos \theta, \\ c_4 &= (-2\mu + 2\eta) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nella notazione a blocchi usata in precedenza, la rappresentazione del tensore (3.10) è

$$\mathbb{C}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\theta) & \mathbf{C}(\theta) \\ \mathbf{C}^T(\theta) & \mathbf{B}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

con

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{pmatrix} a_{11} & d_{12} & d_{13} \\ \cdot & a_{22} & d_{23} \\ \text{sym} & \cdot & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\theta) = \begin{pmatrix} a_{23}/2 & 0 & c_4/2 \\ \cdot & a_{13}/2 & 0 \\ \text{sym} & \cdot & a_{12}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Osserviamo che  $\mathbb{C}(\theta)$  ha la struttura tipica del tensore di elasticità di un materiale *monoclinico*, la cui unica simmetria rispetto agli assi della base  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{z})$  è la rotazione  $\mathbf{R}_{\mathbf{c}_2}^\pi$  di  $\pi$  intorno all'asse  $\mathbf{c}_2$  (*vid.* [20], Sect. 21, 26). Poichè la rotazione  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^\pi$  non appartiene al gruppo delle simmetrie materiali del tensore (3.10), viene a mancare la condizione necessaria affinché, una volta prescritto il campo di spostamenti (2.2), i regimi di deformazione *membranale* e *flessionale* siano ortogonali in energia (*vid.* § 2.2).

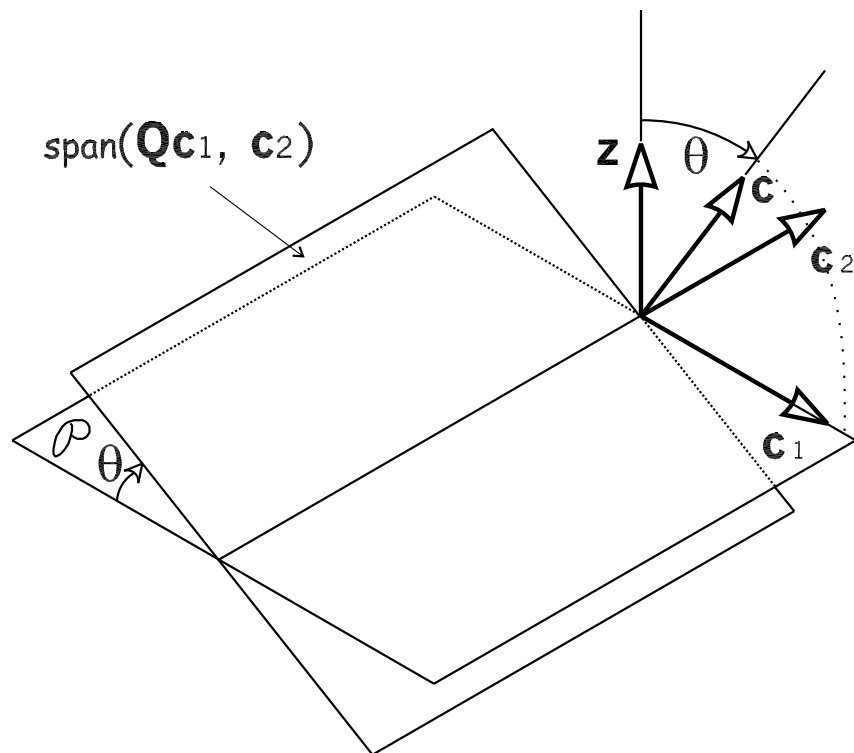


Figura 3.1: Asse di trasversa isotropia orientato in maniera incoerente.

## 3.2 Isotropia trasversa debolmente incoerente

Sviluppiamo il tensore di elasticità  $\mathbb{C}(\theta)$  in serie di potenze dell'angolo di incoerenza:

$$\mathbb{C}(\theta) = \sum_{i=0}^n \theta^i \partial_\theta^{(i)} \mathbb{C}(0) + o(\theta^n), \quad (3.14)$$

(qui  $\partial_\theta^{(i)} \mathbb{C}$  è la derivata  $i$ -esima rispetto a  $\theta$ ). Se supponiamo che l'asse di isotropia trasversa  $\mathbf{c}$  si discosti poco da  $\mathbf{z}$ , ossia, che l'angolo di incoerenza  $\theta$  sia piccolo, allora lo sviluppo (3.14) può essere arrestato al prim'ordine:

$$\mathbb{C}(\theta) = \mathbb{C}(0) + \theta \partial_\theta \mathbb{C}(0) + o(\theta). \quad (3.15)$$

Il primo addendo della (3.15) vale naturalmente  $\mathbb{C}_0$ :

$$\mathbb{C}(0) = \mathbb{C}_0, \quad (3.16)$$

quanto al secondo, abbiamo

$$\partial_\theta \mathbb{C}(0) = \mathbb{W} \mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_0 \mathbb{W}, \quad (3.17)$$

dove il tensore del quart'ordine

$$\mathbb{W} = \partial_\theta \mathbb{Q}(0) \quad (3.18)$$

opera in questo modo su un qualsiasi tensore  $\mathbf{B} \in \text{Sym}$ :

$$\mathbb{W}[\mathbf{B}] = 2 \text{sym}(\mathbf{W}\mathbf{B}), \quad \text{con } \mathbf{W} = \partial_\theta \mathbf{Q}(0) \in \text{Skw}.$$

Se poniamo

$$\mathbb{C}_1 := \mathbb{W} \mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_0 \mathbb{W}, \quad (3.19)$$

la (3.15) si può scrivere come

$$\mathbb{C}(\theta) = \mathbb{C}_0 + \theta \mathbb{C}_1 + o(\theta). \quad (3.20)$$

La rappresentazione cristallografica di  $\mathbb{C}_0$  è data da (3.3)-(3.4), mentre  $\mathbb{C}_1$  si rappresenta in questo modo:

$$\mathbb{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & (\tau_2 + 2\eta - \lambda - 2\mu) & 0 \\ 0 & (\tau_2 - \lambda) & 0 \\ 0 & (\tau_1 - \tau_2 - 2\eta) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\eta - \mu) \\ \cdot & 0 & 0 \\ \text{sym} & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Per piccoli angoli di incoerenza, si deduce da quanto precede il tensore di elasticità approssimato

$$\mathbb{C}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \theta \mathbf{C}_1 \\ \theta \mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_0 + \theta \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Osserviamo che le relazioni costitutive esatta (3.12) e approssimata (3.21) hanno rappresentazioni di identica complessità, in tanto in quanto di identico "grado di riempimento". Diciamo una piastra *debolmente incoerente* se il materiale di cui è costituita ha in ogni punto il tensore di elasticità (3.21).

### 3.3 Cinematica

La scelta del campo di spostamenti è un passo fondamentale nella deduzione delle teorie di piastra. Nel caso di corpo a forma di piastra che sia *coerentemente orientato*, soltanto un'ipotesi cinematica del tipo

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(\zeta) \mathbf{u}_i(x, t), \quad (3.22)$$

in cui la dipendenza dalle coordinate  $x$  e  $\zeta$  è separata, permette di ridurre di una dimensione il problema elastico tridimensionale con una semplice integrazione sullo spessore. Come si è visto, la rappresentazione  $p = x + \zeta \mathbf{z}$  consente di immaginare il cilindro  $\Omega$  come un fascio di fibre  $\{x\} \times \mathcal{I}$  ortogonali alla sezione trasversale  $\mathcal{P}$ , e di attribuire alle funzioni  $\mathbf{u}_i(x, \cdot)$  l'ufficio di fornire una descrizione del moto della fibra per  $x$ ; questa descrizione diviene di regola tanto meglio approssimata, e tanto più onerosa, quanto più grande è il numero  $n$  di quelle funzioni, ma è già soddisfacente nel caso più semplice, quando  $\varphi_i(\zeta) = \zeta^i$  e  $n = 1$ , perchè questo caso già basta a catturare gli effetti primari di una deformazione locale più complessa di una rototraslazione della fibra.

Volendo dedurre, alla luce dell'esperienza conseguita trattando il caso coerente, le equazioni che governano il comportamento meccanico di una piastra incoerente, è intanto subito evidente che la cinematica da prescrivere, oltre che dalla posizione  $(x, \zeta)$  e del tempo  $t$ , dovrà in generale dipendere dell'angolo di incoerenza  $\theta$ . Scegliamo allora un campo di spostamenti della forma

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t; \theta) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(\zeta; \theta) \mathbf{u}_i(x, t), \quad (3.23)$$

dove la lista  $\{\varphi_i(\zeta; \theta)\}_{i=0}^n$  è costituita da  $(n + 1)$  funzioni della coordinata trasversale  $\zeta$  e del parametro angolare  $\theta$ , da intendersi come assegnate a priori, mentre gli  $(n + 1)$  campi  $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$  su  $\mathcal{P} \times [0, t_0)$  sono da intendere come le incognite del problema bidimensionale cui si vuole pervenire. Fatta la scelta delle funzioni  $\varphi_i$ , per ogni valore fissato dell'angolo di incoerenza, un'integrazione sullo spessore ci consente la desiderata riduzione di dimensione: con l'uso delle relazioni costitutive e di compatibilità cinematica, perveniamo ad un sistema di equazioni di evoluzione, definite in  $\mathcal{P} \times [0, t_0)$ , nella  $(n + 1)$ -upla di descrittori cinematici  $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$ . Ma quale dev'essere questa scelta per ottenere una teoria di piastre che possenga requisiti mutuamente esclusivi quali la semplicità e la capacità di approssimazione?

#### 3.3.1 Geometria obliqua

Utilizziamo la direzione  $\mathbf{c}$  di simmetria materiale per costruire il sistema di riferimento cartesiano obliquo ( $o; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}$ ), nel quale un punto

$$p = x + \zeta \mathbf{z}$$

di  $\Omega$  ha la rappresentazione alternativa

$$p = y + \xi \mathbf{c}, \quad (3.24)$$

dove  $y$  è un punto nel piano  $\pi_z$  ortogonale a  $\mathbf{z}$  passante per  $o$ , e dove  $\xi$  è la coordinata staccata sull'asse diretto secondo  $\mathbf{c}$  (vedi figura 3.2). La mappa  $(x, \zeta) \rightarrow (y, \xi)$  è

$$\begin{aligned} y &= x - \zeta \tan \theta \mathbf{c}_1, \\ \xi &= \zeta / \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Consideriamo il cilindro obliquo  $\Omega_\theta = \mathcal{P}_\theta \times \mathcal{I}_\theta$ , con

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\theta &= \{y \mid y = x \pm \varepsilon \tan \theta \mathbf{c}_1, x \in \mathcal{P}\}, \\ \mathcal{I}_\theta &= (-\varepsilon / \cos \theta, \varepsilon / \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.26)$$

la cui frontiera  $\partial\Omega_\theta$  è composta da tre parti, le facce superiore ed inferiore

$$\mathcal{P}_\theta^\pm = \{q \mid q = y \pm \frac{\varepsilon}{\cos \theta} \mathbf{c}, y \in \mathcal{P}_\theta\}, \quad (3.27)$$

ed il mantello

$$\mathcal{M}_\theta = \partial\mathcal{P}_\theta \times \mathcal{I}_\theta. \quad (3.28)$$

Questo cilindro contiene strettamente il cilindro retto  $\Omega$ .

Il corpo a forma di piastra può essere visto come un insieme di fibre orientate nella direzione  $\mathbf{c}$ . Ogni fibra è definita dal punto  $y$  di intersezione tra il segmento stesso ed il piano  $\mathcal{P}_\theta$ . Osserviamo che in prossimità del mantello  $\mathcal{M}$ , la loro lunghezza varia nell'intervallo  $[0, 2\varepsilon / \cos \theta]$  in modo da riempire il dominio cilindrico retto  $\Omega$ . Non si ha alcuna riduzione di lunghezza in prossimità di quelle parti del mantello  $\mathcal{M}$  dove  $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ , con  $\boldsymbol{\nu}$  normale uscente.

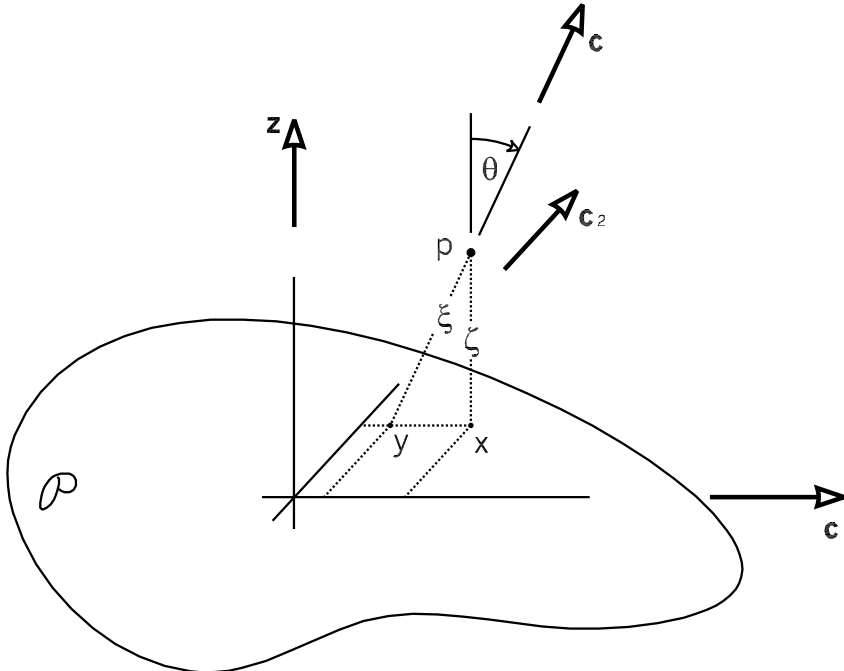


Figura 3.2: Geometria obliqua.

### 3.3.2 Campi di spostamento e deformazione

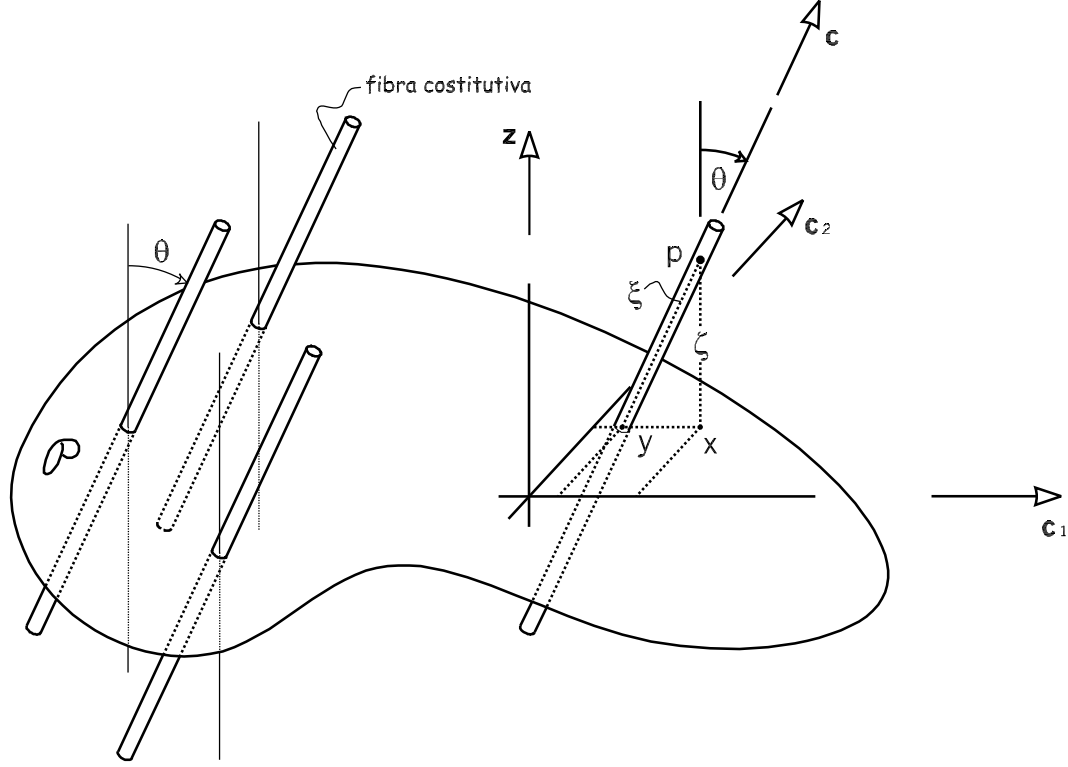


Figura 3.3: Fibre costitutive.

Dato un corpo a forma di piastra  $\Omega$ , trasversalmente isotropo, immaginiamolo come se fosse costituito da un insieme di fibre dirette nella direzione di trasversalità isotropia  $\mathbf{c}$ ; diciamo queste fibre *costitutive* perché sono legate alla risposta di  $\Omega$  (vedi figura 3.3).

Iniziamo dal caso di piastra coerente, nel quale le fibre costitutive coincidono con gli *atomi* di piastra  $\{x\} \times \mathcal{I}$ . Il campo di spostamenti (2.2) si costruisce percorrendo i seguenti tre passi. Primo, assegnamo la lista di  $(n+1)$  descrittori cinematici incogniti  $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$  alla fibra costitutiva, individuata univocamente dalla posizione  $x$ . Secondo, fissiamo la  $(n+1)$ -upla  $\{\phi_i(\zeta)\}_{i=0}^n$  di funzioni della coordinata  $\zeta$  staccata lungo la direzione  $\mathbf{z}$  di sviluppo delle fibre; in particolare, scegliamo i primi  $(n+1)$  elementi del sistema completo di potenze di  $\zeta$ :

$$\phi_i(\zeta) = \zeta^i.$$

Ultimo passo, combiniamo le funzioni fin qui introdotte nella rappresentazione (2.2), che riscriviamo:

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \sum_{i=0}^n \zeta^i \mathbf{u}_i(x, t), \quad (3.29)$$

nella quale l' $i$ -esimo addendo è costituito dall' $i$ -esimo descrittore  $\mathbf{u}_i(x, t)$ , modulato nello spessore  $\mathcal{I}$  attraverso la funzione  $\zeta^i$ .



Compiamo ora gli stessi passaggi per costruire la cinematica per una piastra incoerente. In questo caso, la direzione assiale  $\mathbf{z}$  non coincide con la direzione costitutiva  $\mathbf{c}$  e, analogamente, il segmento  $\{x\} \times \mathcal{I}$  differisce dalla fibra materiale diretta secondo  $\mathbf{c}$  e passante per  $x$ . Il primo passo consiste nell'assegnare ad ogni fibra materiale che interseca  $\mathcal{P}_\theta$  in  $y$ , la  $(m+1)$ -pla di descrittori cinematici incogniti  $\{\tilde{\mathbf{u}}_i(y, t)\}_{i=0}^m$  definiti sul prodotto cartesiano  $\mathcal{P}_\theta \times [0, t_0)$ . Secondo, assumiamo la lista  $\{\phi_i\}_{i=0}^m$  di  $(m+1)$  funzioni della coordinata  $\xi$  staccata lungo l'asse nella direzione  $\mathbf{c}$ . In particolare, consideriamo, di nuovo, le prime  $(m+1)$  potenze di  $\xi$ :

$$\phi_i(\xi) = \xi^i.$$

Infine, terzo passo, combiniamo le funzioni fin qui introdotte, per avere la seguente rappresentazione:

$$\tilde{\mathbf{u}}(y, \xi, t) = \sum_{k=0}^m \xi^k \tilde{\mathbf{u}}_k(y, t), \quad (3.30)$$

la quale, di nuovo, è somma di  $(m+1)$  termini: il  $k$ -esimo termine è la caratteristica cinematica  $\tilde{\mathbf{u}}_k(y, t)$  modulata mediante la funzione  $\xi^k$  lungo la fibra materiale definita dal punto  $y$  di intersezione dell'asse della fibra stessa con il piano medio  $\mathcal{P}_\theta$ .

In questo primo studio, arrestiamo per semplicità lo sviluppo (3.30) al prim'ordine:

$$\tilde{\mathbf{u}}(y, \xi, t) = \tilde{\mathbf{u}}_0(y, t) + \xi \tilde{\mathbf{u}}_1(y, t). \quad (3.31)$$

Inoltre, d'ora in poi manterremo implicita la dipendenza dal tempo. Il gradiente di (3.31) vale

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{\mathbf{u}} &= \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 \nabla y + \xi \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1 \nabla y + \tilde{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{z} \\ &= \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 + \xi \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tan \theta [(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 + \xi \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \frac{1}{\cos \theta} \tilde{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ed il tensore di deformazione associato è

$$\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}}) = \text{sym}(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 + \xi \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1) - \tan \theta \text{sym}[(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0 + \xi \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \frac{1}{\cos \theta} \text{sym}(\tilde{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{z}). \quad (3.33)$$

Ritorniamo per un'attimo sul campo di spostamenti (3.31). Questo si può scrivere

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{u}}_0 + \xi \{ \mathbf{c} \times [(\mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) \tilde{\mathbf{u}}_1] \} \times \mathbf{c} + \xi (\tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} = \\ &= \tilde{\mathbf{u}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (p - y) + (\tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c})(p - y), \end{aligned} \quad (3.34)$$

con  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{c} \times [(\mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) \tilde{\mathbf{u}}_1]$ , dove il primo e secondo addendo nell'ultimo membro rappresentano rispettivamente la traslazione  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  e la rotazione  $\boldsymbol{\omega} \times (p - y)$  rispetto al polo  $y$  della fibra parallela a  $\mathbf{c}$  che interseca il piano medio in  $y$ , ed il terzo termine  $(\tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c})(p - y)$  è dovuto all'estensione della fibra stessa dato che la deformazione nella direzione  $\mathbf{c}$  è proprio

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}.$$

Affinché la rappresentazione (3.31) assuma la forma (3.23), essenziale per poter dedurre le equazioni delle piastre, dobbiamo compiere due ulteriori operazioni sulla cinematica (3.31). La prima consiste nell'esprimere il campo di spostamenti in termini delle coordinate cartesiane  $(x, \zeta)$ :

$$\mathbf{u}(x, \zeta; \theta) = \tilde{\mathbf{u}}(y(x, \zeta; \theta), \xi(\zeta; \theta)) = \tilde{\mathbf{u}}_0(y(x, \zeta; \theta)) + \xi(\zeta; \theta) \tilde{\mathbf{u}}_1(y(x, \zeta; \theta)). \quad (3.35)$$

La seconda richiede di rendere esplicita la dipendenza dei descrittori cinematici ( $\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{u}}_1$ ) dalla coordinata  $\zeta$  e dall'angolo  $\theta$ . Fissata la posizione  $(x, \zeta)$  scriviamo, allora, il campo (3.35) come sviluppo in serie di Taylor dell'angolo  $\theta$  intorno alla configurazione  $\theta = 0$  ed arrestiamo lo sviluppo al prim'ordine:

$$\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{u}(\theta) |_{\theta=0} + \theta \partial_\theta \mathbf{u}(\theta) |_{\theta=0} + o(\theta). \quad (3.36)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\theta) |_{\theta=0} &= \tilde{\mathbf{u}}_0(x) + \zeta \tilde{\mathbf{u}}_1(x), \\ \partial_\theta \mathbf{u}(\theta) |_{\theta=0} &= -\zeta [\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1 + \zeta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1], \end{aligned} \quad (3.37)$$

il campo di spostamenti diventa:

$$\mathbf{u}(x, \zeta, \theta) = \tilde{\mathbf{u}}_0(x) + \zeta [\tilde{\mathbf{u}}_1(x) - \theta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1] - \zeta^2 \theta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1 + o(\theta). \quad (3.38)$$

Vediamo così che una cinematica di ordine uno nella coordinata  $\xi$  è di ordine due nella coordinata  $\zeta$ . Concludiamo che per una piastra debolmente incoerente, lo spostamento (3.31) si può scrivere nella forma approssimata

$$\mathbf{u}(x, \zeta, \theta) = \boldsymbol{\alpha}(x, \zeta) + \theta \boldsymbol{\beta}(x, \zeta), \quad (3.39)$$

dove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(x, \zeta) &:= \tilde{\mathbf{u}}_0(x) + \zeta \tilde{\mathbf{u}}_1(x), \\ \boldsymbol{\beta}(x, \zeta) &:= -\zeta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1 - \zeta^2 \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

la quale ha la struttura (3.23) fondamentale per dedurre teorie bidimensionali: i descrittori incogniti  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  e  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  sono definiti in  $\mathcal{P}$  e le funzioni di  $\zeta$  e  $\theta$  sono assegnate a priori.

Il tensore di deformazioni associato è:

$$\mathbf{E}(x, \zeta, \theta) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}(x, \zeta)) + \theta \mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}(x, \zeta)), \quad (3.41)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}(x, \zeta)) &= \text{sym}[\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) + \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \otimes \mathbf{z}] + \zeta \text{sym}[\nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x)], \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}(x, \zeta)) &= -\text{sym}[(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1) \otimes \mathbf{z}] - \zeta \text{sym}[\nabla(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1) + 2(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1) \otimes \mathbf{z}] + \\ &\quad -\zeta^2 \text{sym}[\nabla(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1)]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Il campo di spostamenti (3.39) può anche scriversi in questo modo:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, \zeta; \theta) = \tilde{\mathbf{u}}_0(x) + \boldsymbol{\omega}(x; \theta) \times (p - x) + \zeta^2 \boldsymbol{\nu}(x; \theta) \times \mathbf{z} + [\mathbf{E}(x, \zeta; \theta) \cdot (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z})](p - x), \quad (3.43)$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(x; \theta) &= \mathbf{z} \times [(\mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z})(\tilde{\mathbf{u}}_1(x) - \theta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1)], \\ \boldsymbol{\nu}(x; \theta) &= -\mathbf{z} \times [(\mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z})(\theta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1)]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nella (3.43) sono sommati quattro termini:

- $\tilde{\mathbf{u}}_0(x)$  descrive la traslazione della fibra  $\{x\} \times \mathcal{I}$  (ma anche la traslazione della fibra inclinata nella direzione  $\mathbf{c}$  che interseca il piano medio in  $x$ );
- $\boldsymbol{\omega}(x; \theta) \times (p - x)$  descrive la rotazione rispetto al polo  $x$  di  $\{x\} \times \mathcal{I}$ ;

- $\zeta^2 \mathbf{v}(x; \theta) \times \mathbf{z}$ , rappresenta l'“ingobbamento” di  $\{x\} \times \mathcal{I}$ ;
- $[\mathbf{E}(x, \zeta; \theta) \cdot (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z})](p-x)$  costituisce l'estensione della fibra  $\{x\} \times \mathcal{I}$ , la cui deformazione assiale è

$$\mathbf{E}(x, \zeta; \theta) \cdot (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) = [\tilde{\mathbf{u}}_1(x) - \theta \nabla \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1] \cdot \mathbf{z} - 2\zeta \theta [\nabla \tilde{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1] \cdot \mathbf{z}$$

ed è composta da due termini rispettivamente costante e lineare in  $\zeta$ .

Nonostante che la piastra sia incoerente, si può comunque prescrivere il campo di spostamenti nella forma (3.29). Diventa interessante, allora, verificare fino a quale ordine in  $\zeta$  occorre sviluppare il campo (3.29) per ottenere una cinematica approssimativamente equivalente alla (3.39). Batra e Vidoli, in [5], hanno arrestato lo sviluppo al prim'ordine, e poi hanno dedotto le equazioni per una piastra elettroelastica, trasversalmente isotropa, incoerente, dal principio variazionale misto di Hellinger-Prange-Reissner.

Nei paragrafi successivi dedurremo le equazioni meccaniche delle piastre debolmenti incoerenti dal principio delle potenze virtuali. Prescriveremo prima il campo di spostamenti (3.39) e poi il campo adottato da Batra e Vidoli:

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \mathbf{u}_0(x, t) + \zeta \mathbf{u}_1(x, t). \quad (3.45)$$

I due problemi evolutivi risultanti saranno confrontati nel cap. 5.3, giustapponendo le relative predizioni in tema di propagazione ondosa a quelle del problema tridimensionale corrispondente.

**Osservazione 1.** Se esprimiamo il campo di spostamenti (3.45) in termini della coppia  $(y, \xi)$  tramite la mappa

$$\begin{aligned} x &= y + \xi \sin \theta \mathbf{c}_1, \\ \zeta &= \xi \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.46)$$

e poi lo linearizziamo rispetto a  $\theta$ , otteniamo:

$$\mathbf{u}(x(y, \xi, \theta), \zeta(\xi, \theta)) \simeq \mathbf{u}_0(y) + \xi [\mathbf{u}_1(y) + \theta \nabla \mathbf{u}_0(y) \mathbf{c}_1] + \xi^2 \theta \nabla \mathbf{u}_1(y) \mathbf{c}_1, \quad (3.47)$$

il quale, oltre a descrivere lo spostamento rigido della fibra parallela a  $\mathbf{c}$  e passante per  $y$ , mette in conto anche un suo “ingobbamento” ed una sua deformazione assiale (costante e lineare in  $\xi$ ) come era da aspettarsi.  $\square$

**Osservazione 2.** Per una piastra *debolmente incoerente* vincolata a rispettare la cinematica (3.39), la densità di energia elastica è:

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sigma_0(\boldsymbol{\alpha}) + \theta \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \theta^2 \sigma_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \theta^3 \sigma_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad (3.48)$$

dove, sfruttando la proprietà di antisimmetria di  $\mathbb{W}$  ( $\mathbb{W} = -\mathbb{W}^T$ ),

$$\begin{aligned}\sigma_0(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2}\mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}), \\ \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta})] \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbb{W}\mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}), \\ \sigma_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \left\{ \frac{1}{2}\mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta})] + (\mathbb{W}\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_0\mathbb{W})[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] \right\} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}), \\ \sigma_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2}(\mathbb{W}\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_0\mathbb{W})[\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta})] \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}\tag{3.49}$$

Il primo termine della (3.48),  $\sigma_0(\boldsymbol{\alpha})$ , rappresenta l'energia di deformazione elastica posseduta dall'elemento di volume supposto orientato coerentemente ed obbligato a compiere solo spostamenti  $\boldsymbol{\alpha}$ ; i successivi tre termini rappresentano l'energia addizionale dovuta all'inclinazione dell'asse di trasversa isotropia, che aggiunge, nel tensore di elasticità, il termine perturbativo  $\mathbb{C} - \mathbb{C}_0 = \theta\mathbb{C}_1$  e, nel campo di spostamenti, l'arricchimento cinematico  $\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} = \theta\boldsymbol{\beta}$ .  $\square$

### 3.4 Equazioni di bilancio

In questo paragrafo deduciamo le equazioni di bilancio delle piastre debolmente incoerenti dal principio tridimensionale delle potenze virtuali (1.12). Il campo di velocità di prova  $\mathbf{v}$  che assumiamo è del tipo del campo di spostamenti (3.39), e cioè:

$$\mathbf{v}(x, \zeta, \theta) = \boldsymbol{\lambda}(x, \zeta) + \theta\boldsymbol{\omega}(x, \zeta),\tag{3.50}$$

con

$$\boldsymbol{\lambda}(x, \zeta) = \mathbf{v}_0(x) + \zeta\mathbf{v}_1(x), \quad \boldsymbol{\omega}(x, \zeta) = -\zeta\nabla\mathbf{v}_0(x)\mathbf{c}_1 - \zeta^2\nabla\mathbf{v}_1(x)\mathbf{c}_1.\tag{3.51}$$

In vista delle condizioni geometriche

$$\mathbf{P}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ su } \mathcal{M} \times [0, t_0),\tag{3.52}$$

richiediamo che le velocità test soddisfino la relazione:

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ su } \mathcal{M},\tag{3.53}$$

la quale equivale a chiedere che la coppia di descrittori cinematici  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$  sia tale che

$$\mathbf{P}\mathbf{v}_0(x, t) = \mathbf{P}\mathbf{v}_1(x, t) = \mathbf{0}, \quad \text{su } \partial\mathcal{P},\tag{3.54}$$

e

$$\mathbf{P}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}_0(x, t) = \mathbf{P}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}_1(x, t) = \mathbf{0},\tag{3.55}$$

in quei punti di  $\partial\mathcal{P}$  nei quali  $\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0$ . Con  $\partial_{\boldsymbol{\nu}}(\cdot)$  rappresentiamo la derivata direzionale lungo  $\boldsymbol{\nu}$ . Infatti, dalle (3.54) e (3.55) abbiamo

$$\mathbf{P}\nabla\mathbf{v}_0(x)\mathbf{c}_1 = \mathbf{P}\nabla\mathbf{v}_1(x)\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}, \quad \text{su } \partial\mathcal{P},$$

e quindi segue la condizione (3.53). Riassumendo, lo spazio delle velocità di prova è

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \{ & \mathbf{v}(x, \zeta, \theta) \mid \mathbf{v}(x, \zeta, \theta) = \boldsymbol{\lambda}(x, \zeta) + \theta \boldsymbol{\omega}(x, \zeta), \\ & \text{con } \boldsymbol{\lambda}(x, \zeta) = \mathbf{v}_0(x) + \zeta \mathbf{v}_1(x), \quad \boldsymbol{\omega}(x, \zeta) = -\zeta \nabla \mathbf{v}_0(x) \mathbf{c}_1 - \zeta^2 \nabla \mathbf{v}_1(x) \mathbf{c}_1, \\ & \text{e con } \mathbf{P} \mathbf{v}_0(x, t) = \mathbf{P} \mathbf{v}_1(x, t) = \mathbf{0} \text{ su } \partial \mathcal{M} \text{ e} \\ & \mathbf{P} \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{v}_0(x, t) = \mathbf{P} \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{v}_1(x, t) = \mathbf{0} \text{ su } \partial \mathcal{M}, \text{ dove } \mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0 \}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

Le potenze degli sforzi e delle forze esterne spese per una generica velocità test  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} + \theta \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot (\nabla \boldsymbol{\lambda} + \theta \nabla \boldsymbol{\omega}), \\ \mathcal{F}(\mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} (\mathbf{b}^{ni} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \theta \mathbf{b}^{ni} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \int_{\Omega} \{ \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \theta \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\omega} \} + \\ & \quad - \int_{\partial \Omega} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \theta \hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nella (3.57)<sub>2</sub> le forze di volume  $\mathbf{b}$  sono state scomposte nella loro parte inerziale  $\mathbf{b}^{in} = -\varrho \ddot{\mathbf{u}}$  ( $\varrho = \text{cost}$ ) e non inerziale  $\mathbf{b}^{ni} = \mathbf{b} + \varrho \ddot{\mathbf{u}}$  ed inoltre chiediamo al campo di forze superficiali  $\hat{\mathbf{s}}$  di soddisfare sul mantello  $\mathcal{M}$  la condizione

$$\mathbf{P} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0},$$

di mutua consistenza con la prescrizione cinematica (3.52). Definiamo in  $\mathcal{P} \times [0, t_0]$  le seguenti caratteristiche di sollecitazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(x, t; \theta) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{S}(x, \zeta, t; \theta), \\ \mathbf{M}_1(x, t; \theta) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta \mathbf{S}(x, \zeta, t; \theta), \\ \mathbf{M}_2(x, t; \theta) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^2 \mathbf{S}(x, \zeta, t; \theta). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Data la fibra trasversale  $\{x\} \times \mathcal{I}$  e fissato in  $x$  il versore piano  $\boldsymbol{\nu}(x)$  ( $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{z} = 0$ ), il campo  $\mathbf{M}_0(x, t)$  fornisce una misura degli sforzi presenti nel segmento  $\{x\} \times \mathcal{I}$ , infatti

$$\mathbf{f}_0(x, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{M}_0(x) \boldsymbol{\nu}$$

rappresenta la risultante delle forze superficiali che agiscono nella sezione trasversale la cui normale è  $\boldsymbol{\nu}$ , lungo  $\{x\} \times \mathcal{I}$ . Analogamente,  $\mathbf{M}_1(x, t)$  ed  $\mathbf{M}_2(x, t)$  sono misure dei momenti e dei bi-momenti che agiscono nella fibra  $\{x\} \times \mathcal{I}$ : i vettori

$$\mathbf{m}_1(x, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{z} \times \mathbf{M}_1(x) \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{m}_2(x, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{z} \times \mathbf{M}_2(x) \boldsymbol{\nu},$$

sono, infatti, le risultanti rispettivamente dei momenti e dei bi-momenti, valutati rispetto al polo  $x$ , generati dalle forze superficiali che agiscono nella sezione trasversale di normale uscente  $\boldsymbol{\nu}$ , lungo il segmento  $\{x\} \times \mathcal{I}$ .

Grazie alle (3.42) ed alle (3.50), la potenza degli sforzi (3.57)<sub>1</sub> si riscrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{v}) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{M}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{z}) + \mathbf{M}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 - \theta \{ \mathbf{M}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z} + \\ & \quad + \mathbf{M}_1 \cdot [\nabla((\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1) + 2(\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z}] + \mathbf{M}_2 \cdot \nabla((\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1) \}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Se usiamo le seguenti identità

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{a} &= \operatorname{div}(\mathbf{B}^T \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \operatorname{div} \mathbf{B}, \\
\mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z} &= \nabla(\mathbf{B} \mathbf{z} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}_1 - (\nabla(\mathbf{B} \mathbf{z}) \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{a}, \\
\mathbf{B} \cdot \nabla((\nabla \mathbf{a}) \mathbf{c}_1) &= \operatorname{div}(\mathbf{B}^T (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{c}_1) - ((\nabla \mathbf{a}) \mathbf{c}_1) \cdot \operatorname{div} \mathbf{B}, \\
(\nabla \mathbf{a}) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{b} &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}_1 - (\nabla \mathbf{b}) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{a},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

soddisfatte qualunque siano i campi  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$  e  $\mathbf{B} : \mathcal{E} \rightarrow \operatorname{Lin}$ , ed il teorema di divergenza, la (3.59) diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathbf{v}) &= \int_{\mathcal{P}} -\operatorname{div} \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + [-\operatorname{div} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_0 \mathbf{z}] \cdot \mathbf{v}_1 + \\
&+ \theta[\nabla(\mathbf{M}_0 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{M}_1) \mathbf{c}_1] \cdot \mathbf{v}_0 + \theta[2\nabla(\mathbf{M}_1 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{M}_2) \mathbf{c}_1] \cdot \mathbf{v}_1 + \\
&+ \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}_1 + \theta\{(\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu})(\operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}_0 + \\
&- \mathbf{M}_1^T((\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1) \cdot \boldsymbol{\nu} + (\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu})(\operatorname{div} \mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{M}_2^T((\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}\}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

In  $\mathcal{P} \times [0, t_0)$ , introduciamo le grandezze:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_0(x) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{b}^{ni}(x, \zeta) + [\hat{\mathbf{s}}^+(x) + \hat{\mathbf{s}}^-(x)], \\
\mathbf{q}_1(x) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta \mathbf{b}^{ni}(x, \zeta) + \varepsilon[\hat{\mathbf{s}}^+(x) - \hat{\mathbf{s}}^-(x)], \\
\mathbf{q}_2(x) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^2 \mathbf{b}^{ni}(x, \zeta) + \varepsilon^2[\hat{\mathbf{s}}^+(x) + \hat{\mathbf{s}}^-(x)],
\end{aligned} \tag{3.62}$$

nelle quali  $\hat{\mathbf{s}}^\pm$  sono i carichi superficiali prescritti sulle facce  $\mathcal{P}^\pm$ , e su  $\partial \mathcal{P} \times [0, t_0)$  definiamo

$$\mathbf{p}_0(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \hat{\mathbf{s}}(x, \zeta), \quad \mathbf{p}_1(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta \hat{\mathbf{s}}(x, \zeta), \quad \mathbf{p}_2(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^2 \hat{\mathbf{s}}(x, \zeta). \tag{3.63}$$

Le quantità  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  sono le medie della coppia di forze esterne  $(\mathbf{b}^{ni}, \hat{\mathbf{s}}^\pm)$  lungo il generico segmento  $\{x\} \times \mathcal{I}$ , pesate rispettivamente attraverso le funzioni  $\zeta^0$ ,  $\zeta^1$  e  $\zeta^2$ . Analogamente le grandezze  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  sono le medie pesate dei carichi superficiali  $\hat{\mathbf{s}}$  lungo la generica fibra  $\{x\} \times \mathcal{I}$  del mantello ( $x \in \partial \mathcal{P}$ ).

Grazie alle (3.38), (3.62) e (3.63), la potenza delle forze (3.57)<sub>2</sub> diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{v}) &= \int_{\mathcal{P}} (2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{v}_0 + \left(\frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{q}_1\right) \cdot \mathbf{v}_1 + \theta[\mathbf{q}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot (\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1] + \\
&- \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \theta [(\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 \cdot \ddot{\mathbf{u}}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1 \cdot \ddot{\mathbf{u}}_0] + \\
&+ \varrho \theta^2 \left[\frac{2}{3} \varepsilon^3 (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 + \frac{2}{5} \varepsilon^5 (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1\right] + \\
&+ \int_{\partial \mathcal{P}} -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \theta[\mathbf{p}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_1] \mathbf{c}_1].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

la quale, utilizzando l'identità (3.60)<sub>4</sub> ed il teorema della divergenza, si riscrive

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{v}) = & \int_{\mathcal{P}} (2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{v}_0 + \left(\frac{2}{3}\varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{q}_1\right) \cdot \mathbf{v}_1 - \theta [(\nabla \mathbf{q}_1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + (\nabla \mathbf{q}_2) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_1] + \\
& - \varrho \theta^2 \left[\frac{2}{3}\varepsilon^3 \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{2}{5}\varepsilon^5 \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_1\right] + \\
& + \int_{\partial \mathcal{P}} -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \theta \left[-\frac{2}{3}\varepsilon^3 \varrho (\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) (\ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \ddot{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{v}_1) + \right. \\
& + (\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v}_1) + \mathbf{p}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot (\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1] + \\
& \left. + \theta^2 \varrho (\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) \left[\frac{2}{3}\varepsilon^3 (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{2}{5}\varepsilon^5 (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v}_1\right]. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Dalle (3.61) e (3.65), l'equazione delle potenze virtuali si modifica nella seguente equazione definita nel piano  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} \{-\operatorname{div} \mathbf{M}_0 + \theta \nabla(-\operatorname{div} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_0 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 - \mathbf{q}_0 - \theta (\nabla \mathbf{q}_1) \mathbf{c}_1 + 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0 + \\
& - \theta^2 \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1\} \cdot \mathbf{v}_0 + \{-\operatorname{div} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \theta \nabla(-\operatorname{div} \mathbf{M}_2 + 2\mathbf{M}_1 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 + \\
& - \mathbf{q}_1 - \theta (\nabla \mathbf{q}_2) \mathbf{c}_1 + \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1 - \theta^2 \frac{2}{5} \varepsilon^5 \varrho \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1\} \cdot \mathbf{v}_1 + \\
& + \int_{\partial \mathcal{P}} \{\mathbf{M}_0 \boldsymbol{\nu} + \theta (\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) (\operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1) + \theta^2 \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 - \mathbf{p}_0\} \cdot \mathbf{v}_0 + \\
& + \{\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} + \theta (\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) (\operatorname{div} \mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{z} + \mathbf{q}_2 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0) + \theta^2 \frac{2}{5} \varepsilon^5 \varrho (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 - \mathbf{p}_1\} \cdot \mathbf{v}_1 + \\
& + \theta [(-\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_1) \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) \mathbf{c}_1 + (-\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_2) \cdot (\nabla \mathbf{v}_1) \mathbf{c}_1] = 0, \quad \forall (\mathbf{v}_0(x), \mathbf{v}_1(x)), \tag{3.66}
\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà e la localizzabilità della coppia di campi test  $(\mathbf{v}_0(x), \mathbf{v}_1(x))$  in  $\mathcal{P} \times [0, t_0)$ , seguono le equazioni di bilancio locale:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0 + \theta \nabla(\operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1) \mathbf{c}_1 &= 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0 - \theta^2 \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1, \\
\operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 + \theta \nabla(\operatorname{div} \mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{z} + \mathbf{q}_2) \mathbf{c}_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1 - \theta^2 \frac{2}{5} \varepsilon^5 \varrho \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

definite in  $\mathcal{P} \times [0, t_0)$ .

Osserviamo le equazioni appena scritte, ignorando i termini d'inerzia nei secondi membri. Se definiamo i campi vettoriali

$$\operatorname{bil}(\mathbf{M}_i) = \operatorname{div} \mathbf{M}_i - i \mathbf{M}_{(i-1)} \mathbf{z} + \mathbf{q}_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (\mathbf{M}_{(-1)} = \mathbf{0}), \tag{3.68}$$

per una piastra coerente, il bilancio dei momenti di ordine  $i$  è verificato se

$$\operatorname{bil}(\mathbf{M}_i) = \mathbf{0},$$

come esprimono le (2.7)<sub>2</sub>. Nel caso di piastra incoerente, le equazioni di bilancio si scrivono

$$\operatorname{bil}(\mathbf{M}_i) + \theta \partial_{\mathbf{c}_1} \operatorname{bil}(\mathbf{M}_{(i+1)}) = \mathbf{0}, \quad i = 0, \dots, n, \tag{3.69}$$

nelle quali al termine di bilancio dei momenti di ordine  $i$  si aggiunge, proporzionalmente all'angolo di incoerenza  $\theta$ , il termine di bilancio dei momenti  $(i + 1)$ -esimi opportunamente derivato nella direzione  $\mathbf{c}_1$ .

Nei secondi membri delle (3.67)<sub>1</sub> e (3.67)<sub>2</sub>, le inerzie rispettivamente delle forze e dei momenti si arricchiscono di termini proporzionali a  $\theta^2$ .

Prima di enunciare le condizioni al bordo modifichiamo opportunamente l'integrale definito su  $\partial\mathcal{P}$  che compare nell'equazione delle potenze virtuali (3.66). Consideriamo, in particolare, gli ultimi due termini dell'integrale menzionato:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \theta(-\mathbf{M}_1\boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_1) \cdot (\nabla\mathbf{v}_0)\mathbf{c}_1 + \int_{\partial\mathcal{P}} \theta(-\mathbf{M}_2\boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_2) \cdot (\nabla\mathbf{v}_1)\mathbf{c}_1,$$

i quali, se definiamo

$$\mathbf{n}_0 = \theta(-\mathbf{M}_1\boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_1), \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_1 = \theta(-\mathbf{M}_2\boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_2),$$

si riscrivono

$$\sum_{\alpha=0}^1 \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{n}_\alpha \cdot (\nabla\mathbf{v}_\alpha)\mathbf{c}_1. \quad (3.70)$$

Se associamo ad ogni punto  $x$  di  $\partial\mathcal{P}$  la coppia di versori piani  $(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\tau}(x))$ , tali che  $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{z}$ , i gradienti superficiali di  $\mathbf{v}_0$  e  $\mathbf{v}_1$  si possono esprimere in termini delle derivate nelle direzioni  $\boldsymbol{\nu}$  e  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\nabla\mathbf{v}_\alpha = \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}_\alpha \otimes \boldsymbol{\nu} + \partial_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{v}_\alpha \otimes \boldsymbol{\tau}, \quad \text{con} \quad \alpha = 0, 1.$$

La (3.70) diventa:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{n}_\alpha \cdot (\nabla\mathbf{v}_\alpha)\mathbf{c}_1 &= \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{n}_\alpha \cdot (\partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}_\alpha \otimes \boldsymbol{\nu} + \partial_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{v}_\alpha \otimes \boldsymbol{\tau})\mathbf{c}_1 = \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\partial\mathcal{P}} [(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{n}_\alpha \cdot \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}_\alpha) + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{n}_\alpha \cdot \partial_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{v}_\alpha)] = \quad (3.71) \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\partial\mathcal{P}} (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{n}_\alpha \cdot \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}_\alpha) - \int_{\partial\mathcal{P}} \partial_{\boldsymbol{\tau}}[(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{n}_\alpha] \cdot \mathbf{v}_\alpha, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene dopo aver derivato per parti:

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{n}_\alpha \cdot \partial_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{v}_\alpha) = \partial_{\boldsymbol{\tau}}[(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)] - \partial_{\boldsymbol{\tau}}[(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{n}_\alpha] \cdot \mathbf{v}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

ed aver accertato che, se la curva chiusa  $\partial\mathcal{P}$  è regolare, si ha

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \partial_{\boldsymbol{\tau}}[(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)] = 0 \quad \alpha = 1, 2.$$



Grazie alle (3.71), l'integrale definito su  $\partial\mathcal{P}$ , nella (3.66), diventa

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\mathcal{P}} \{ \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\nu} + \theta(\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu})(\operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1) - \mathbf{p}_0 + \\
& + \theta \partial_\tau [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_1)] + \theta^2 \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 \} \cdot \mathbf{v}_0 + \\
& + \{ \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} + \theta(\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu})(\operatorname{div} \mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{z} + \mathbf{q}_2 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0) - \mathbf{p}_1 + \\
& + \theta \partial_\tau [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_2)] + \theta^2 \frac{2}{5} \varepsilon^5 \varrho (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 \} \cdot \mathbf{v}_1 + \\
& + \theta (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) [(-\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_1) \cdot \partial_\nu \mathbf{v}_0 + (-\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\nu} + \mathbf{p}_2) \cdot \partial_\nu \mathbf{v}_1].
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Se scegliamo la coppia di campi test  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$  identicamente nulla in  $\mathcal{P}$ , l'equazione delle potenze virtuali è soddisfatta se e solo se sono applicate le seguenti condizioni al contorno su  $\partial\mathcal{P}$ :

condizioni cinematiche

$$\mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1, \tag{3.73}$$

condizioni dinamiche

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \{ \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\nu} + \theta(\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu})(\operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1) - \mathbf{p}_0 + \\
& + \theta \partial_\tau [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_1)] + \theta^2 \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 \} = 0, \\
& (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \{ \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} + \theta(\mathbf{c}_1 \cdot \boldsymbol{\nu})(\operatorname{div} \mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1 \mathbf{z} + \mathbf{q}_2 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0) - \mathbf{p}_1 + \\
& + \theta \partial_\tau [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_2)] + \theta^2 \frac{2}{5} \varepsilon^5 \varrho (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1) (\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 \} = 0.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

e nei punti  $x \in \partial\mathcal{P}$  dove  $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0$ , si aggiungono le ulteriori quattro condizioni:

condizioni geometriche

$$\mathbf{P} \partial_\nu \ddot{\mathbf{u}}_0 = \partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{P} \partial_\nu \ddot{\mathbf{u}}_1 = \partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_1, \tag{3.75}$$

condizioni dinamiche

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_1) = 0, \\
& (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_2) = 0.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Riassumendo, le condizioni al contorno di tipo geometrico si prescrivono assegnando i campi  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e  $\hat{\mathbf{u}}_1$  su  $\mathcal{M}$ , tali che

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \hat{\mathbf{u}}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0},$$

e le derivate  $\partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_0$  e  $\partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_1$  soltanto in quei punti del mantello  $\mathcal{M}$  dove  $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}_1 \neq 0$ , anch'esse tali che

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0}.$$

Dopo aver valutato

$$\nabla \hat{\mathbf{u}}_0 = \partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_0 \otimes \boldsymbol{\nu} + \partial_\tau \hat{\mathbf{u}}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}, \quad \text{e} \quad \nabla \hat{\mathbf{u}}_1 = \partial_\nu \hat{\mathbf{u}}_1 \otimes \boldsymbol{\nu} + \partial_\tau \hat{\mathbf{u}}_1 \otimes \boldsymbol{\tau},$$

possiamo risalire allo spostamento assegnato su  $\mathcal{M}$ :

$$\hat{\mathbf{u}}(x, \zeta, \theta) = \hat{\mathbf{u}}_0(x) + \zeta[\hat{\mathbf{u}}_1(x) - \theta \nabla \hat{\mathbf{u}}_0(x) \mathbf{c}_1] - \zeta^2 \theta \nabla \hat{\mathbf{u}}_1(x) \mathbf{c}_1, \quad (3.77)$$

il quale, ovviamente, soddisfa la condizione di mutua consistenza

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}.$$

### 3.5 Equazioni di evoluzione

In questo paragrafo esprimiamo le caratteristiche di sollecitazione (3.58) in termini dei descrittori cinematici  $(\tilde{\mathbf{u}}_0(x), \tilde{\mathbf{u}}_1(x))$  così che le (3.67) diventino equazioni di evoluzione per la piastra. Assumiamo che la piastra sia debolmente incoerente, e cioè caratterizzata in ogni punto dal tensore di elasticità (3.20).

Se usiamo la relazione di compatibilità cinematica (3.41) ed il tensore di elasticità (3.20), le caratteristiche di sollecitazione (3.58) si possono scrivere, esplicitando la dipendenza dall'angolo di incoerenza  $\theta$ , in questo modo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(x, t; \theta) &= \mathbf{A}_0(x, t) + \theta[\mathbf{B}_0(x, t) + \mathbf{C}_0(x, t)] + \theta^2 \mathbf{D}_0(x, t), \\ \mathbf{M}_1(x, t; \theta) &= \mathbf{A}_1(x, t) + \theta[\mathbf{B}_1(x, t) + \mathbf{C}_1(x, t)] + \theta^2 \mathbf{D}_1(x, t), \\ \mathbf{M}_2(x, t; \theta) &= \mathbf{A}_2(x, t) + \theta[\mathbf{B}_2(x, t) + \mathbf{C}_2(x, t)] + \theta^2 \mathbf{D}_2(x, t), \end{aligned} \quad (3.78)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(x, t) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^i \mathbf{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}(x, \zeta, t))], \quad i = 0, 1, 2, \\ \mathbf{B}_i(x, t) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^i \mathbf{C}_1[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}(x, \zeta, t))], \quad i = 0, 1, 2, \\ \mathbf{C}_i(x, t) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^i \mathbf{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}(x, \zeta, t))], \quad i = 0, 1, 2, \\ \mathbf{D}_i(x, t) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta^i \mathbf{C}_1[\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}(x, \zeta, t))], \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

I campi  $\{\mathbf{A}_i\}_{i=0}^2$  rappresentano i descrittori dinamici di forze, momenti e bi-momenti in termini degli spostamenti per una piastra coerente; la terna  $\{\mathbf{B}_i\}_{i=0}^2$  è dovuta al termine perturbativo  $\mathbf{C} - \mathbf{C}_0 = \theta \mathbf{C}_1$  che si aggiunge nel tensore di elasticità non appena il materiale diventa incoerente, mentre i campi  $\{\mathbf{C}_i\}_{i=0}^2$  sono dovuti all'arricchimento cinematico  $\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} = \theta \boldsymbol{\beta}$ ; infine la terna  $\{\mathbf{D}_i\}_{i=0}^2$  entra nelle (3.78) proporzionalmente a  $\theta^2$  ed applica la perturbazioni costitutiva a quella cinematica. Sostituiamo le (3.78) nelle equazioni di

bilancio (3.67). Otteniamo le equazioni:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \mathbf{q}_0 + \theta[\operatorname{div}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0) + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1) \mathbf{c}_1] + \\
& + \theta^2 \{ \operatorname{div} \mathbf{D}_0 + \nabla[\operatorname{div}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1) - (\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0) \mathbf{z}] \mathbf{c}_1 \} + \\
& + \theta^3 \nabla(\operatorname{div} \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 = 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0 - \theta^2 \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1, \\
& \operatorname{div} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 + \theta[\operatorname{div}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1) - (\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0) \mathbf{z} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_1 \mathbf{z} + \mathbf{q}_2) \mathbf{c}_1] + \\
& + \theta^2 \{ \operatorname{div} \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0 \mathbf{z} + \nabla[\operatorname{div}(\mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_2) - 2(\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1) \mathbf{z}] \} + \\
& \theta^3 \nabla(\operatorname{div} \mathbf{D}_2 - 2\mathbf{D}_1 \mathbf{z}) = \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1 - \theta^2 \frac{2}{5} \varepsilon^5 \varrho \nabla((\nabla \ddot{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_1,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

definite in  $\mathcal{P} \times [0, t_0)$ , nelle quali i primi membri sono fattorizzati in  $\theta$  fino all'ordine tre. Compriamo ora un'ulteriore semplificazione: data la piccolezza dell'angolo di incoerenza  $\theta$ , trascuriamo i termini proporzionali a  $\theta^2$  e  $\theta^3$  in modo che le (3.80) si riscrivono in maniera approssimata:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \mathbf{q}_0 + \theta[\operatorname{div}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0) + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1) \mathbf{c}_1] = 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0, \\
& \operatorname{div} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 + \theta[\operatorname{div}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1) - (\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0) \mathbf{z} + \\
& + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_1 \mathbf{z} + \mathbf{q}_2) \mathbf{c}_1] = \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Esprimiamo ora le (3.81) in funzione della coppia di descrittori  $(\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{u}}_1)$ . Innanzitutto rappresentiamo  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  e  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  come somma delle loro parti piane e trasversali:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}_0(x) &= \bar{\mathbf{u}}_0(x) + w_0(x) \mathbf{z}, & \bar{\mathbf{u}}_0(x) \cdot \mathbf{z} &= 0, \\
\tilde{\mathbf{u}}_1(x) &= \bar{\mathbf{u}}_1(x) + w_1(x) \mathbf{z}, & \bar{\mathbf{u}}_1(x) \cdot \mathbf{z} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.82}$$

in modo che le (3.40) diventino:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(x, \zeta) &= \bar{\mathbf{u}}_0(x) + \zeta \bar{\mathbf{u}}_1(x) + [w_0(x) + \zeta w_1(x)] \mathbf{z}, \\
\boldsymbol{\beta}(x, \zeta) &= -\zeta (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0(x)) \mathbf{c}_1 - \zeta^2 (\nabla \bar{\mathbf{u}}_1(x)) \mathbf{c}_1 - [\zeta \nabla w_0(x) \cdot \mathbf{c}_1 + \zeta^2 \nabla w_1(x) \cdot \mathbf{c}_1] \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Analogamente, i tensori  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta})$ , che compaiono nella (3.41), adottando la decomposizione (2.28), si rappresentano così:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}) &= \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}) + 2 \operatorname{sym} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{z} + \varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\
\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}) &= \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\beta}) + 2 \operatorname{sym} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta}) \otimes \mathbf{z} + \varepsilon(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{z} \otimes \mathbf{z},
\end{aligned} \tag{3.84}$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}) &= \operatorname{sym}(\nabla \bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta \nabla \bar{\mathbf{u}}_1), & \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\beta}) &= -\operatorname{sym}[\zeta (\nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \zeta^2 (\nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1)], \\
\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2} [\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1], \\
\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta}) &= -\frac{1}{2} \{ ((\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \zeta [\nabla (\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) + 2((\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1)] + \zeta^2 \nabla (\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) \}, \\
\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) &= w_1, & \varepsilon(\boldsymbol{\beta}) &= \nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1 + 2\zeta \nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Applichiamo i tensori del quart'ordine (3.1) e (3.18) alla deformazione (3.84). Otteniamo le

seguenti grandezze:

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] &= \text{sym } \mathbf{c}_1 \otimes (\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) + 2 \text{sym}(w_1 \mathbf{c}_1) - \text{sym } \mathbf{z} \otimes [\nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1) + \\
&\quad + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 + \zeta \nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + \zeta(\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] - [(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) \cdot \mathbf{c}_1] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\
\mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] &= [\lambda(\text{div } \bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta \text{div } \bar{\mathbf{u}}_1) + \tau_2 w_1] {}^s \mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\nabla \bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta \nabla \bar{\mathbf{u}}_1) + \\
&\quad + 2\eta \text{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) \otimes \mathbf{z} + [\tau_1 w_1 + \tau_2(\text{div } \bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta \text{div } \bar{\mathbf{u}}_1)] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\
\mathbb{W}_0 \mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] &= 2\eta \text{sym } \mathbf{c}_1 \otimes (\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) + 2[(\tau_2 - \lambda)(\bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta \text{div } \bar{\mathbf{u}}_1) + \\
&\quad + (\tau_1 - \tau_2)w_1] \text{sym}(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z}) - 2\eta[(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) \cdot \mathbf{c}_1] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad - 2\mu \text{sym } \mathbf{z} \otimes [\nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1) + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 + \zeta \nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + \zeta(\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1], \\
\mathbb{C}_0 \mathbb{W}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha})] &= (\lambda + \tau_2)[(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) \cdot \mathbf{c}_1] {}^s \mathbf{I} + 2\mu \text{sym}[(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) \otimes \mathbf{c}_1] + \\
&\quad - 2\eta \text{sym}[\nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1) + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 + \zeta \nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + \zeta(\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad + 4\eta \text{sym}(w_1 \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z}) + (\tau_2 - \tau_1)[(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta \nabla w_1) \cdot \mathbf{c}_1] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\
\mathbb{C}_0[\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta})] &= -\lambda[\zeta \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \zeta^2 \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1)] {}^s \mathbf{I} - 2\mu \text{sym}[\zeta \nabla((\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \\
&\quad + \zeta^2 \nabla((\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1)] - \tau_2(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1 + 2\zeta \nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) {}^s \mathbf{I} + \\
&\quad - [\tau_1(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1 + 2\zeta \nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + \tau_2(\zeta \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \zeta^2 \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1))] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad - 2\eta \text{sym}[\zeta \nabla(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) + \zeta^2 \nabla(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 + 2\zeta(\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z},
\end{aligned}$$

che permettono di esprimere i campi coinvolti nelle equazioni (3.81) in termini dei descrittori di spostamento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &= 2\varepsilon[(\lambda \text{div } \bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2 w_1) {}^s \mathbf{I} + 2\mu \text{sym } \nabla \bar{\mathbf{u}}_0 + 2\eta \text{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad + (\tau_1 w_1 + \tau_2 \text{div } \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}], \\
\mathbf{A}_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon^3 [\lambda \text{div } \bar{\mathbf{u}}_1 {}^s \mathbf{I} + 2\mu \text{sym } \nabla \bar{\mathbf{u}}_1 + 2\eta \text{sym } \nabla w_1 \otimes \mathbf{z} + \tau_2 \text{div } \bar{\mathbf{u}}_1 \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}], \\
\mathbf{A}_2 &= \frac{1}{3} \varepsilon^2 \mathbf{A}_0, \\
\mathbf{B}_0 &= 2\varepsilon \{ 2(\eta - \mu) \text{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) \otimes \mathbf{c}_1 + (\tau_2 - \lambda)[(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{c}_1] {}^s \mathbf{I} + \\
&\quad + 2 \text{sym}[(\eta - \mu)(\nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1) + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + (\tau_1 - \tau_2 - 2\eta)w_1 \mathbf{c}_1 + \\
&\quad + (\tau_2 - \lambda)(\text{div } \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + (\tau_1 - 2\eta - \tau_2)[(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{c}_1] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \} \\
\mathbf{B}_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon^3 \{ 2(\eta - \mu) \text{sym } \nabla w_1 \otimes \mathbf{c}_1 + (\tau_2 - \lambda)(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) {}^s \mathbf{I} + \\
&\quad + 2 \text{sym}[(\eta - \mu)(\nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) + (\tau_2 - \lambda)(\text{div } \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad + (\tau_1 - 2\eta - \tau_2)(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \}, \tag{3.86} \\
\mathbf{C}_0 &= -\frac{4}{3} \varepsilon^3 \mu \text{sym } \nabla(\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1 - [\frac{2}{3} \varepsilon^3 \lambda \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) + 2\varepsilon \tau_2(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1)] {}^s \mathbf{I} + \\
&\quad - 2\eta \text{sym}[\frac{2}{3} \varepsilon^3 \nabla(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + 2\varepsilon(\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad - [\frac{2}{3} \varepsilon^3 \tau_2 \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1) + 2\varepsilon \tau_1(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1)] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\
\mathbf{C}_1 &= -\frac{2}{3} \varepsilon^3 \{ 2\mu \text{sym } \nabla(\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1 + [\lambda \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \tau_2(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1)] {}^s \mathbf{I} + \\
&\quad + 2\eta \text{sym}[\nabla(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) + 2(\nabla \bar{\mathbf{u}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \\
&\quad + [\tau_2 \text{div}((\nabla \bar{\mathbf{u}}_0) \mathbf{c}_1) + \tau_1(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1)] \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \}.
\end{aligned}$$

Infine sostituiamo le (3.86) nelle equazioni di bilancio (3.81) ed applichiamo a queste ultime

i proiettori  ${}^s\mathbf{I}$  e  $\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}$ . Otteniamo le seguenti quattro equazioni di evoluzione:

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon\{\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2\nabla w_1 + \theta[-(\lambda + \mu)\nabla(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) + \\
& + (\tau_2 - \lambda)\nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\eta - \mu)\Delta w_0 \mathbf{c}_1 + (\eta - \mu)(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1 - \mu(\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1]\} + \\
& + \mathbf{P}\mathbf{q}_0 + \theta(\nabla\mathbf{q}_1)\mathbf{c}_1 = 2\varepsilon\rho\ddot{\mathbf{u}}_0, \\
& 2\varepsilon\{\eta(\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + \theta[-(\tau_2 + 2\eta)(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) - (\lambda + \mu)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1) + \\
& + (\eta - \mu)\Delta(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1)]\} + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{z} + \theta(\nabla\mathbf{q}_1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{z} = 2\varepsilon\rho\ddot{w}_0, \\
& \frac{2}{3}\varepsilon^3[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1] - 2\varepsilon\eta(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) + \\
& + \theta\{\frac{2}{3}\varepsilon^3[-(\lambda + \mu)\nabla(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\eta - \mu)\Delta w_1 \mathbf{c}_1] + \\
& + 2\varepsilon[(\tau_2 + 2\eta - \tau_1)w_1 \mathbf{c}_1 + (\lambda - \tau_2)(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1 + \mu(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1 - (\eta - \mu)\nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1)]\} + \\
& + \mathbf{P}\mathbf{q}_1 + \theta\mathbf{P}(\nabla\mathbf{q}_2)\mathbf{c}_1 = \frac{2}{3}\varepsilon^3\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1, \\
& \frac{2}{3}\varepsilon^3\eta\Delta w_1 - 2\varepsilon(\tau_1 w_1 + \tau_2 \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0) + \theta\{\frac{2}{3}\varepsilon^3[-(\lambda + \mu)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1) + \\
& + (\eta - \mu)\Delta(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1)] + 2\varepsilon[(\tau_2 + 2\eta)\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1 + (\tau_2 - \tau_1 + 2\eta)\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1]\} + \\
& + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{z} + \theta(\nabla\mathbf{q}_2)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{z} = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{w}_1.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Osserviamo che, se si pone  $\theta = 0$ , le (3.87) si riducono ai due sistemi di equazioni (2.70) e (2.71) nelle incognite rispettivamente membranali  $(\bar{\mathbf{u}}_0, w_1)$  e flessionali  $(w_0, \bar{\mathbf{u}}_1)$ . Osserviamo inoltre che nelle quattro equazioni le parti perturbative proporzionali a  $\theta$  sono espressioni differenziali di ordine due.

**Osservazione.** Se nelle quattro equazioni (3.87) aggiungiamo i termini  $o(\theta)$  qui trascurati, le (3.87)<sub>1,4</sub> assumono la struttura:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ f_0 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{u}}_0, w_1) + \theta \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ f_1 \end{pmatrix} (w_0, \bar{\mathbf{u}}_1) + \theta^2 \begin{pmatrix} \mathbf{f}_2 \\ f_2 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{u}}_0, w_1) + \theta^3 \begin{pmatrix} \mathbf{f}_3 \\ f_3 \end{pmatrix} (w_0, \bar{\mathbf{u}}_1) = \\
& = \rho(2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^3\theta^2) \begin{pmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0 \\ \ddot{w}_1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.88}$$

nelle quali  $\mathbf{f}_i$  e  $f_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) sono funzionali differenziali, rispettivamente, vettoriali ( $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{z} = 0$ ) e scalari. Al primo membro delle (3.88), i termini proporzionali alle potenze pari e dispari di  $\theta$  coinvolgono rispettivamente i descrittori cinematici di tipo membranale  $(\bar{\mathbf{u}}_0, w_1)$  e di tipo flessionale  $(w_0, \bar{\mathbf{u}}_1)$ . Le equazioni (3.87)<sub>2,3</sub> invece diventano

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} g_0 \\ \mathbf{g}_0 \end{pmatrix} (w_0, \bar{\mathbf{u}}_1) + \theta \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathbf{g}_1 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{u}}_0, w_1) + \theta^2 \begin{pmatrix} g_2 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} (w_0, \bar{\mathbf{u}}_1) + \theta^3 \begin{pmatrix} g_3 \\ \mathbf{g}_3 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{u}}_0, w_1) = \\
& = \rho(2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^3\theta^2) \begin{pmatrix} \ddot{w}_0 \\ \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.89}$$

con  $\mathbf{g}_i$  ( $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{z} = 0$ ) e  $g_i$  funzionali vettoriali e scalari, rispettivamente, e in esse si verifica la situazione opposta, ossia i termini proporzionali a  $\theta^{2N}$  e  $\theta^{2N+1}$  ( $N = 0, 1$ ) sono rispettivamente flessionali e membranali. L'approssimazione al prim'ordine in  $\theta$  è quindi sufficiente perché in ciascuna delle quattro equazioni di evoluzione (3.87) siano coinvolti tutti i descrittori cinematici.

### 3.6 Equazioni di evoluzione alternative

Pur considerando una piastra debolmente incoerente, prescriviamo il seguente campo di spostamenti

$$\mathbf{u}(x, \zeta) = \mathbf{u}_0(x) + \zeta \mathbf{u}_1(x), \quad (3.90)$$

analogo a quello adottato per dedurre la teoria del prim'ordine di piastre coerenti (*vid.* § 2.3). Il campo (3.90) è adottato in [5] dove, come già detto, attraverso il principio variazionale misto di Hellinger-Prange-Reissner, sono dedotte le equazioni di piastre elettroelastiche incoerenti, caratterizzate cioè dal tensore di elasticità (3.10).

In questo caso, la scelta del campo di spostamenti è insensibile alla incoerenza costitutiva, tanto che non dipende dall'angolo  $\theta$ , ed i descrittori cinematici  $\mathbf{u}_0(x)$  e  $\mathbf{u}_1(x)$  sono caratteristici della fibra  $\{x\} \times \mathcal{I}$  ed informano sulla sua traslazione, rotazione e "stretching". Inoltre richiediamo che la coppia  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$  soddisfi le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{u}_0 &= \hat{\mathbf{u}}_0, \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_1 &= \hat{\mathbf{u}}_1, \end{aligned} \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0, t_0]. \quad (3.91)$$

Dall'equazione tridimensionale delle potenze virtuali (1.12), scritta per campi di velocità test  $\mathbf{v} \in \mathcal{W}^{(1)}$  (lo spazio  $\mathcal{W}^{(1)}$  è definito in (2.4)) associati a spostamenti del tipo (3.90), si deducono le equazioni di bilancio (2.49) e (2.50), che riscriviamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0 &= 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0, \\ \operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{q}_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1, \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{P} \times [0, t_0], \quad (3.92)$$

e le condizioni al bordo di tipo dinamico

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M}_0 \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{p}_0, \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{p}_1, \end{aligned} \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0, t_0]. \quad (3.93)$$

Mentre nella scrittura delle (2.49) e (2.50) abbiamo separato il bilancio membranale da quello flessionale nella previsione di due problemi di evoluzione disaccoppiati, ora, questa divisione non ha più senso dato che l'incoerenza costitutiva accoppia i due regimi. Confrontiamo le (3.67) con le (3.92). Nelle (3.67) ci sono termini proporzionali a  $\theta$ , assenti nelle (3.92), i quali sono dovuti alla perturbazione cinematica  $\mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda} = \theta \boldsymbol{\omega}$  che è causata dall'incoerenza costitutiva ed è considerata nel campo di velocità test (3.50) da noi assunto. Inoltre, nella (3.67) entra la caratteristica di sollecitazione del bi-momento  $\mathbf{M}_2$  la quale è dovuta al termine quadratico in  $\zeta$  che compare nel campo (3.50).

Prima di rappresentare le caratteristiche di sollecitazione in funzione della coppia cinematica  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ , scriviamo  $\mathbf{M}_0$  ed  $\mathbf{M}_1$ , come abbiamo fatto nelle (3.78), in termini dei campi (3.79) (nei quali  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(x, t; \theta) &= \mathbf{A}_0(x, t) + \theta \mathbf{B}_0(x, t), \\ \mathbf{M}_1(x, t; \theta) &= \mathbf{A}_1(x, t) + \theta \mathbf{B}_1(x, t), \end{aligned} \quad (3.94)$$

Alla terna  $\{\mathbf{A}_i\}_{i=0}^2$ , che sarebbe l'unica presente se la piastra fosse coerente, si aggiungono, proporzionalmente a  $\theta$ , i tre campi  $\{\mathbf{B}_i\}_{i=0}^2$  dovuti alla perturbazione costitutiva  $\mathbb{C} - \mathbb{C}_0 =$

$\theta\mathbf{C}_1$  che investe il tensore di elasticità. Le due terne  $\{\mathbf{C}_i\}_{i=0}^2$  e  $\{\mathbf{D}_i\}_{i=0}^2$  in questo caso sono nulle, infatti l'incoerenza non arriva a perturbare la cinematica ( $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ). Sostituiamo le (3.94) nelle equazioni di bilancio (3.92). Otteniamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A}_0 + \theta\mathbf{B}_0) + \mathbf{q}_0 &= 2\varepsilon\rho\ddot{\mathbf{u}}_0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{A}_1 + \theta\mathbf{B}_1) - (\mathbf{A}_0 + \theta\mathbf{B}_0)\mathbf{z} + \mathbf{q}_1 &= \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{\mathbf{u}}_1, \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{P} \times [0, t_0), \quad (3.95)$$

nei cui primi membri non ci sono i termini di ordine  $\theta^2$  e  $\theta^3$  che troviamo nelle (3.80). Le relazioni (3.86)<sub>1-4</sub> esprimono i campi  $\{\mathbf{A}_i\}_{i=0}^1$  e  $\{\mathbf{B}_i\}_{i=0}^1$  coinvolti nelle (3.95) in funzione delle incognite cinematiche  $\bar{\mathbf{u}}_0 = {}^s\mathbf{I}\mathbf{u}_0$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_1 = {}^s\mathbf{I}\mathbf{u}_1$ ,  $w_0 = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{z}$  e  $w_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{z}$ . Se sostituiamo le (3.86)<sub>1-4</sub> nelle (3.95) otteniamo le seguenti equazioni di evoluzione:

$$\begin{aligned} &2\varepsilon\{\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2\nabla w_1 + \theta[(\tau_2 - \lambda + \eta - \mu)\nabla(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) + \\ &+ (\tau_2 - \lambda)\nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\eta - \mu)(\Delta w_0\mathbf{c}_1 + (\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1 + (\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1)]\} + \mathbf{P}\mathbf{q}_0 = 2\varepsilon\rho\ddot{\mathbf{u}}_0, \\ &2\varepsilon\{\eta(\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + \theta[(\tau_1 - \tau_2 - 2\eta)(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + (\tau_2 - \lambda + \eta - \mu)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1) + \\ &+ (\eta - \mu)\Delta(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1)]\} + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{z} = 2\varepsilon\rho\ddot{w}_0, \\ &\frac{2}{3}\varepsilon^3\{\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 - 2\varepsilon\eta(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) + \theta\{\frac{2}{3}\varepsilon^3[(\tau_2 - \lambda + \eta - \mu)\nabla(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + \\ &+ (\eta - \mu)\Delta w_1\mathbf{c}_1] + 2\varepsilon[(\tau_2 + 2\eta - \tau_1)w_1\mathbf{c}_1 + (\lambda - \tau_2)(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1 + \\ &+ (\mu - \eta)((\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1 + \nabla(\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{c}_1))]\} + \mathbf{P}\mathbf{q}_1 = \frac{2}{3}\varepsilon^3\ddot{\mathbf{u}}_1, \\ &\frac{2}{3}\varepsilon^3\eta\Delta w_1 - 2\varepsilon(\tau_1 w_1 + \tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0) + \theta\{\frac{2}{3}\varepsilon^3[(\tau_2 - \lambda + \eta - \mu)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1) + \\ &+ (\eta - \mu)\Delta(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1)] + 2\varepsilon(\tau_2 + 2\eta - \tau_1)(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{c}_1)\} + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{z} = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{w}_1. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Se confrontiamo le equazioni appena scritte con le (3.87) osserviamo che le parti perturbative, proporzionali a  $\theta$ , differiscono nelle rispettive equazioni soltanto per i coefficienti costitutivi che moltiplicano i termini differenziali.

**Osservazione 1.** Mettiamo di nuovo a confronto le (3.96) con le (3.87). Se trascuriamo i termini di forze esterne e d'inerzia, allora le (3.87) si ottengono dalle (3.96) aggiungendo a ciascuna di queste ultime rispettivamente i termini

$$\begin{aligned} &2\varepsilon\theta\{-(\tau_2 + \eta)\nabla(\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1) - \eta(\Delta w_0)\mathbf{c}_1\}, \\ &2\varepsilon\theta\{-\tau_1(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) - (\tau_2 + \eta)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1)\}, \\ &\theta\{-\frac{2}{3}\varepsilon^3(\tau_2 + \eta)\nabla(\nabla w_1 \cdot \mathbf{c}_1) + 2\varepsilon\eta(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{c}_1\}, \\ &\theta\{-\frac{2}{3}\varepsilon^3(\tau_2 + \eta)\operatorname{div}((\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{c}_1) + 2\varepsilon\tau_1\nabla w_0 \cdot \mathbf{c}_1\}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

che dipendono solo dai coefficienti costitutivi  $\tau_2$ ,  $\eta$  e  $\tau_1$  i quali caratterizzano il comportamento del materiale nella direzione di trasversa isotropia. Infatti, mentre  $\lambda$  e  $\mu$  definiscono la risposta nel piano d'isotropia,  $\tau_2$  garantisce l'effetto Poisson tra la direzione  $\mathbf{c}$  ed una qualsiasi direzione nel piano di simmetria,  $\eta$  lega tagli e scorrimenti su tutte le giaciture ortogonali al piano di isotropia e  $\tau_1$  lega sforzi normali e deformazioni assiali nella direzione  $\mathbf{c}$ . I due sistemi (3.96) e (3.87) si diversificano molto quando i tre coefficienti  $\tau_2$ ,  $\eta$  e  $\tau_1$  hanno valori molto più grandi di quelli assunti da  $\lambda$  e  $\mu$ . Ciò significa che le fibre costitutive

con cui abbiamo schematizzato la struttura del materiale sono molto rigide ( $\tau_1$  e  $\tau_2$  grandi) ed analogamente gli scorrimenti tra esse ( $\eta$  grande). Diversamente, nei piani ortogonali a  $\mathbf{c}$ , la risposta è molto cedevole ( $\lambda$  e  $\mu$  piccoli). Per un materiale con queste caratteristiche ci aspettiamo che le equazioni (3.87) siano più adatte delle (3.96) a predire il comportamento meccanico della piastra (lo studio della propagazione ondosa presentato nel capitolo 5 confermerà queste aspettative). Le (3.87) sono infatti dedotte ipotizzando una cinematica molto vincolata nella direzione  $\mathbf{c}$  che corrisponde proprio alla direzione di massima rigidezza.

Se tramite le (2.64) riduciamo il materiale ad isotropo, nelle (3.96) i termini proporzionali a  $\theta$  spariscono, diversamente da quanto avviene nelle (3.87) dove i termini lineari in  $\theta$  persistono per via della dipendenza della cinematica dall'angolo, dipendenza che in questo caso però perde senso.  $\square$

**Osservazione 2.** Se da un lato la cinematica (3.90) ha il difetto di non sentire l'incoerenza costitutiva, dato che è costruita solo sulla base della geometria della piastra, dall'altro presenta il vantaggio di non richiedere alcuna linearizzazione rispetto all'angolo di incoerenza  $\theta$ . Possiamo allora supporre che la piastra sia incoerente, caratterizzata cioè in ogni punto dal tensore di elasticità (3.10). Allora, se scriviamo le equazioni di bilancio (3.92) in termini della lista di descrittori cinematici ( $\bar{\mathbf{u}}_0, w_0, \bar{\mathbf{u}}_1, w_1$ ) che, per evitare i pedici 0 e 1 rinominiamo ( $\mathbf{b}, w, \bar{\mathbf{b}}, \bar{w}$ ), tramite la relazione costitutiva

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}(\theta)[\nabla \mathbf{u}],$$

otteniamo le seguenti equazioni di evoluzione

$$\begin{aligned} a_{11}b_{1,11} + \frac{a_{12}}{2}b_{1,22} + (d_{12} + \frac{a_{12}}{2})b_{2,12} + d_{13}\bar{w}_{,1} + c_1w_{,11} + c_1\bar{b}_{1,1} + \frac{c_4}{2}(w_{,22} + \bar{b}_{2,2}) + (q_0)_1 &= \rho\ddot{b}_1, \\ \frac{a_{12}}{2}b_{2,11} + a_{22}b_{2,22} + (d_{12} + \frac{a_{12}}{2})b_{1,12} + d_{23}\bar{w}_{,2} + c_2w_{,12} + c_2\bar{b}_{1,2} + \frac{c_4}{2}w_{,12} + \frac{c_4}{2}\bar{b}_{2,1} + (q_0)_2 &= \rho\ddot{b}_2, \\ \frac{a_{13}}{2}w_{,11} + \frac{a_{23}}{2}w_{,22} + \frac{a_{13}}{2}\bar{b}_{1,1} + \frac{a_{23}}{2}\bar{b}_{2,2} + c_1b_{1,11} + \frac{c_4}{2}b_{1,22} + (c_2 + \frac{c_4}{2})b_{2,12} + c_3\bar{w}_{,1} + (q_0)_3 &= \rho\ddot{w}, \\ \frac{\varepsilon^2}{3}[a_{11}\bar{b}_{1,11} + \frac{a_{12}}{2}\bar{b}_{1,22} + (d_{12} + \frac{a_{12}}{2})\bar{b}_{2,12}] - \frac{a_{13}}{2}w_{,1} - \frac{a_{13}}{2}\bar{b}_1 + \frac{\varepsilon^2}{3}[c_1\bar{w}_{,11} + \frac{c_4}{2}\bar{w}_{,22}] + & \\ -(c_1b_{1,1} + c_2b_{2,2} + c_3\bar{w}) + (2\varepsilon)^{-1}(r_1)_1 &= \frac{\varepsilon^2}{3}\rho\ddot{\bar{b}}_1, \\ \frac{\varepsilon^2}{3}[a_{22}\bar{b}_{2,22} + \frac{1}{2}a_{12}\bar{b}_{2,11} + (d_{12} + \frac{a_{12}}{2})\bar{b}_{1,12}] - \frac{a_{23}}{2}(w_{,2} + \bar{b}_2) + \frac{\varepsilon^2}{3}(c_2 + \frac{c_4}{2})\bar{w}_{,12} + & \\ -\frac{c_4}{2}b_{2,1} - \frac{c_4}{2}b_{1,2} + (2\varepsilon)^{-1}(q_1)_2 &= \frac{\varepsilon^2}{3}\rho\ddot{\bar{b}}_2, \\ \frac{\varepsilon^2}{3}[\frac{a_{13}}{2}\bar{w}_{,11} + \frac{a_{23}}{2}\bar{w}_{,22}] - (a_{33}\bar{w} + d_{13}b_{1,1} + d_{23}b_{2,2}) + \frac{\varepsilon^2}{3}[c_1\bar{b}_{1,11} + \frac{c_4}{2}\bar{b}_{1,22} + (c_2 + \frac{c_4}{2})\bar{b}_{2,12}] + & \\ -c_3w_{,1} - c_3\bar{b}_1 + (2\varepsilon)^{-1}(q_1)_3 &= \frac{\varepsilon^2}{3}\rho\ddot{\bar{w}}, \end{aligned} \tag{3.98}$$

valide qualunque sia  $0 \leq \theta < \pi/2$ .  $\square$

### 3.7 Deduzione alternativa delle equazioni 2D

In questo paragrafo accenniamo ad un modo alternativo per dedurre le equazioni delle piastre dall'equazione tridimensionale delle potenze virtuali. Finora, un corpo a forma di piastra è



stato rappresentato per mezzo del prodotto cartesiano  $\mathcal{P} \times \mathcal{I}$  ed un suo punto generico è stato identificato con la coppia  $(x, \zeta) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ . Grazie a questa struttura a prodotto cartesiano, l'equazione tridimensionale delle potenze virtuali, in seguito all'integrazione nell'intervallo  $\mathcal{I}$  con cui si elimina la dipendenza dalla coordinata  $\zeta$ , si riduce ad essere definita nel dominio piano  $\mathcal{P}$ . Nel caso di piastra incoerente, per compiere positivamente questa integrazione abbiamo espresso il campo di spostamenti (3.31) in termini della coppia  $(x, \zeta)$  e dell'angolo di incoerenza  $\theta$ , lo abbiamo sviluppato in serie di potenze di  $\theta$  e poi abbiamo arrestato lo sviluppo al prim'ordine per semplicità (vedi paragrafo 3.3.2). Ciò ha richiesto l'introduzione dell'ipotesi di piccolezza dell'angolo  $\theta$  la quale, inoltre, ha reso lecita la semplificazione delle equazioni di evoluzione (3.80), dove sono stati trascurati i termini  $o(\theta)$ .

La deduzione alternativa che qui presentiamo si fonda sulla diversa rappresentazione del generico punto  $p$  mediante la coppia  $(y, \xi)$  definita nel sistema di riferimento obliquo  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c})$  (vedi paragrafo 3.3.1). Supponiamo che il corpo a forma di piastra sia infinitamente esteso così da essere rappresentato per mezzo del prodotto cartesiano  $\Xi = \pi_{\mathbf{z}} \times \mathcal{I}_\theta$ , dove  $\mathcal{I}_\theta$  è dato nella (3.26)<sub>2</sub>. L'assunzione del dominio  $\Xi$ , insieme alle ipotesi sulle forze esterne

$$\mathbf{b}^{ni} = \hat{\mathbf{s}}^\pm = \mathbf{0},$$

sono alla base dello studio della propagazione ondosa in condizioni di vibrazione libera fatto nei successivi capitoli 4 e 5. In  $\Xi$  prescriviamo la cinematica (3.31) che riscriviamo

$$\tilde{\mathbf{u}}(y, \xi, t) = \tilde{\mathbf{u}}_0(y, t) + \xi \tilde{\mathbf{u}}_1(y, t), \quad (3.99)$$

ed il campo di velocità test associato è

$$\tilde{\mathbf{v}}(y, \xi) = \tilde{\mathbf{v}}_0(y) + \xi \tilde{\mathbf{v}}_1(y), \quad (3.100)$$

Assegnata la coppia  $(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b})$  di forze superficiali e di volume, l'equazione delle potenze virtuali per una qualsiasi velocità test (3.100) si scrive

$$\int_{\pi_{\mathbf{z}}} \int_{\mathcal{I}_\theta} \mathbf{S} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \cos \theta \, d\xi \, dy = \int_{\pi_{\mathbf{z}}} \hat{\mathbf{s}}^\pm \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cos \theta \, d\xi \, dy + \int_{\pi_{\mathbf{z}}} \int_{\mathcal{I}_\theta} \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cos \theta \, d\xi \, dy, \quad (3.101)$$

dove  $\hat{\mathbf{s}}^\pm(y) = \hat{\mathbf{s}}(y, \pm \varepsilon / \cos \theta)$ . A questo punto, la riduzione di dimensione si compie, diversamente rispetto a come abbiamo finora fatto, integrando lungo la direzione  $\mathbf{c}$ . In questo modo si perde la dipendenza dalla coordinata  $\xi$  e la (3.101) diventa un'equazione definita nel piano  $\pi_{\mathbf{z}}$ . Il vantaggio di questa integrazione alternativa è quello di non dover introdurre l'ipotesi di piccola inclinazione dell'asse di trasversa isotropia, necessaria per poter poi linearizzare la cinematica rispetto al parametro  $\theta$ .

Definiamo i descrittori dinamici

$$\mathbf{M}_0(y) = \int_{\mathcal{I}_\theta} \mathbf{S}(y, \xi) \cos \theta \, d\xi, \quad \mathbf{M}_1(y) = \int_{\mathcal{I}_\theta} \xi \mathbf{S}(y, \xi) \cos \theta \, d\xi, \quad (3.102)$$

i quali misurano rispettivamente le forze ed i momenti lungo la generica fibra  $\{y\} \times \mathcal{I}_\theta$  inclinata nella direzione  $\mathbf{c}$  e passante per  $y$ . Dopo aver decomposto le forze di volume nelle

sue parti inerziale  $\mathbf{b}^{in} = -\varrho \ddot{\mathbf{u}}$  e non inerziale  $\mathbf{b}^{ni} = \mathbf{b} + \varrho \ddot{\mathbf{u}}$ , definiamo i campi dei carichi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(y) &= \int_{\mathcal{I}_\theta} \mathbf{b}^{ni}(y, \xi) \cos \theta d\xi + \hat{\mathbf{s}}^+(y) + \hat{\mathbf{s}}^-(y), \\ \mathbf{r}_1(y) &= \int_{\mathcal{I}_\theta} \xi \mathbf{b}^{ni}(y, \xi) \cos \theta d\xi + \frac{\varepsilon}{\cos \theta} \hat{\mathbf{s}}^+(y) - \frac{\varepsilon}{\cos \theta} \hat{\mathbf{s}}^-(y). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Il gradiente di  $\tilde{\mathbf{v}}$  vale

$$\nabla \tilde{\mathbf{v}} = \nabla \tilde{\mathbf{v}}_0 + \xi \nabla \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tan \theta [(\nabla \tilde{\mathbf{v}}_0 + \xi \nabla \tilde{\mathbf{v}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \frac{1}{\cos \theta} \tilde{\mathbf{v}}_1 \otimes \mathbf{z},$$

che sostituito nell'equazione (3.101), insieme alle (3.102) e (3.103), ci dà:

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{\mathbf{z}}} \mathbf{M}_0 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{M}_1 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tan \theta \mathbf{M}_0 \cdot [(\nabla \tilde{\mathbf{v}}_0) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} - \tan \theta \mathbf{M}_1 \cdot [(\nabla \tilde{\mathbf{v}}_1) \mathbf{c}_1] \otimes \mathbf{z} + \\ + \frac{1}{\cos \theta} \mathbf{M}_0 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_1 \otimes \mathbf{z} + (\mathbf{r}_0 - 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 + (\mathbf{r}_1 - \frac{2}{3 \cos^2 \theta} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.104)$$

da cui, fatto uso delle abituali identità differenziali e di divergenza, per l'arbitrarietà dei campi test  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  e  $\tilde{\mathbf{v}}_1$ , seguono le equazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{M}_0 - \tan \theta \nabla (\mathbf{M}_0 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 + \mathbf{r}_0 &= 2\varepsilon \varrho \ddot{\mathbf{u}}_0, \\ \operatorname{div} \mathbf{M}_1 - \frac{1}{\cos \theta} \mathbf{M}_0 \mathbf{z} - \tan \theta \nabla (\operatorname{div} \mathbf{M}_1 \mathbf{z}) \mathbf{c}_1 + \mathbf{r}_1 &= \frac{2}{3 \cos^2 \theta} \varepsilon^3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}_1, \end{aligned} \quad \text{in } \pi_{\mathbf{z}} \times [0, t_0]. \quad (3.105)$$

Usiamo la relazione di compatibilità (3.33) ed il tensore di elasticità (3.10) caratteristico di un materiale incoerente, per esprimere  $\mathbf{M}_0$  ed  $\mathbf{M}_1$  in termini dei campi cinematici

$$\mathbf{b} = {}^s \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_0, \quad \bar{\mathbf{b}} = {}^s \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_1, \quad w = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{z}, \quad \bar{w} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{z}.$$

Le relazioni di bilancio (3.105) si trasformano nelle seguenti equazioni di evoluzione

$$\begin{aligned}
& [a_{11} + \tan \theta (-2c_1 + \frac{a_{13}}{2} \tan \theta)] b_{1,11} + \frac{1}{2} a_{12} b_{1,22} + [d_{12} + \frac{1}{2} (a_{12} - (c_2 + \frac{c_4}{2}) \tan \theta)] b_{2,12} + \\
& + (d_{13} - c_3 \tan \theta) \bar{w}_{,1} + [c_1 + \tan \theta (-d_{13} - \frac{a_{13}}{2} + c_3 \tan \theta)] w_{,11} + \\
& + (c_1 - \frac{a_{13}}{2} \tan \theta) \bar{b}_{1,1} + \frac{c_4}{2} (w_{,22} + \bar{b}_{2,2}) + (r_0)_1 = \rho \ddot{b}_1, \\
& \frac{1}{2} (a_{12} + \tan \theta (-2c_4 + \frac{a_{23}}{2} \tan \theta)) b_{2,11} + a_{22} b_{2,22} + [d_{12} + \frac{a_{12}}{2} - c_2 \tan \theta] b_{1,12} + \\
& + d_{23} \bar{w}_{,2} + [c_2 - \tan \theta (d_{23} + \frac{a_{23}}{2})] w_{,12} + c_2 \bar{b}_{1,2} + \frac{c_4}{2} w_{,12} + \frac{1}{2} (c_4 - a_{23} \tan \theta) \bar{b}_{2,1} + (r_0)_2 = \rho \ddot{b}_2, \\
& [\frac{a_{13}}{2} + \tan \theta (-2c_3 + a_{33} \tan \theta)] w_{,11} + \frac{a_{23}}{2} w_{,22} + (\frac{a_{13}}{2} - c_3 \tan \theta) \bar{b}_{1,1} + \\
& + \frac{a_{23}}{2} \bar{b}_{2,2} + [c_1 + \tan \theta (-d_{13} - \frac{a_{13}}{2} + \tan \theta c_3)] b_{1,11} + \frac{c_4}{2} b_{1,22} + \\
& + (c_2 + \frac{c_4}{2} - (d_{23} + \frac{a_{23}}{2}) \tan \theta) b_{2,12} + (c_3 - a_{33} \tan \theta) \bar{w}_{,1} + (r_0)_3 = \rho \ddot{w}, \\
& \frac{\varepsilon^2}{3} [(a_{11} + \tan \theta (-2c_1 + \frac{a_{13}}{2} \tan \theta)) \bar{b}_{1,11} + \frac{a_{12}}{2} \bar{b}_{1,22} + \\
& + (d_{12} + \frac{a_{12}}{2} - (c_2 + \frac{c_4}{2}) \tan \theta) \bar{b}_{2,12}] + (-\frac{a_{13}}{2} + c_3 \tan \theta) w_{,1} - \frac{a_{13}}{2} \bar{b}_1 + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{3} [(c_1 + \tan \theta (-d_{13} - \frac{a_{13}}{2} + c_3 \tan \theta)) \bar{w}_{,11} + \frac{c_4}{2} \bar{w}_{,22}] + \\
& - [(c_1 - \frac{a_{13}}{2} \tan \theta) b_{1,1} + c_2 b_{2,2} + c_3 \bar{w}] + (2\varepsilon)^{-1} (r_1)_1 = \frac{\varepsilon^2}{3} \rho \ddot{b}_1, \\
& \frac{\varepsilon^2}{3} [a_{22} \bar{b}_{2,22} + \frac{1}{2} (a_{12} + \tan \theta (-2c_4 + a_{23} \tan \theta)) \bar{b}_{2,11} + (d_{12} + \frac{a_{12}}{2} - c_2 \tan \theta) \bar{b}_{1,12}] + \\
& - \frac{a_{23}}{2} (w_{,2} + \bar{b}_2) + \frac{\varepsilon^2}{3} (c_2 + \frac{c_4}{2} + \tan \theta (-d_{23} - \frac{a_{23}}{2})) \bar{w}_{,12} + \\
& + \frac{1}{2} (-c_4 + a_{23} \tan \theta) b_{2,1} - \frac{c_4}{2} b_{1,2} + (2\varepsilon)^{-1} (r_1)_2 = \frac{\varepsilon^2}{3} \rho \ddot{b}_2, \\
& \frac{\varepsilon^2}{3} [(\frac{a_{13}}{2} + \tan \theta (-2c_3 + a_{33} \tan \theta)) \bar{w}_{,11} + \frac{a_{23}}{2} \bar{w}_{,22}] - [a_{33} \bar{w} + (d_{13} - c_3 \tan \theta) b_{1,1} + d_{23} b_{2,2}] \\
& + \frac{\varepsilon^2}{3} [(c_1 + \tan \theta (-\frac{a_{13}}{2} - d_{13} + c_3 \tan \theta)) \bar{b}_{1,11} + \frac{c_4}{2} \bar{b}_{1,22} + (c_2 + \frac{c_4}{2} - (d_{23} + \frac{a_{23}}{2}) \tan \theta) \bar{b}_{2,12}] + \\
& + (-c_3 + a_{33} \tan \theta) w_{,1} - c_3 \bar{b}_1 + (2\varepsilon)^{-1} (r_1)_3 = \frac{\varepsilon^2}{3} \rho \ddot{w}.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Confrontiamo le equazioni appena scritte con le (3.87). Se supponiamo nulli i carichi esterni, ossia poniamo  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$  nella (3.106) e  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  nella (3.87), allora dopo aver esplicitato i valori dei coefficienti costitutivi per mezzo delle (3.11), sviluppato le funzioni trigonometriche dell'angolo  $\theta$  in serie di potenze e trascurato i termini  $o(\theta)$ , le (3.106) si riducono alle (3.87).