Capitolo 2

Piastre coerenti

Assegnamo alle funzioni $\{\varphi_i(\zeta)\}_{i=0}^n$ i primi $(n+1)$ elementi del sistema completo di potenze di ζ:

$$\varphi_i(\zeta) = \zeta^i, \quad i = 0, ..., n, \tag{2.1}$$

in modo che il campo di spostamenti (1.27) assuma la forma

$$\mathbf{u}^{(n)}(x, \zeta, t) = \sum_{k=0}^{n} \zeta^k \mathbf{u}_k^{(n)}(x, t). \tag{2.2}$$

In questo capitolo, specializziamo le equazioni dedotte nei paragrafi 1.5 e 1.7 al caso di un campo di spostamenti del tipo (2.2). Otteniamo un problema di evoluzione analogo a quello proposto in [65], dove si assume la cinematica (2.2) e si deducono le equazioni per la vibrazione libera di piastre elastiche. Mentre in [65] sono presentate, in particolare, le teorie di ordine 0, 1 e 2, qui, nei paragrafi 2.3 e 2.4, enunciamo le equazioni di evoluzione di piastre trasversalmente isotrope di ordine 1 e 3. Infine nel paragrafo 2.5, si mostra come le equazioni di Reissner-Mindlin e di Kirchhoff-Love non siano che casi particolari della teoria di ordine 1.

2.1 Equazioni delle piastre di ordine n

Assegnato il campo (2.2), gli spazi degli spostamenti cinematicamente ammissibili (1.36) e delle velocità test (1.37) diventano rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(n)} = \{ \quad & \mathbf{u}^{(n)}(p, t) \ \mid \ \mathbf{u}^{(n)}(p; t) = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \mathbf{u}_i^{(n)}(x, t), \\ & \mathbf{P}\mathbf{u}^{(n)}(p, t) = \hat{\mathbf{u}}(p) \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \times [0, t_0)\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(n)} = \quad & \{\mathbf{v}^{(n)}(x, \zeta, t) \ \mid \ \mathbf{v}^{(n)}(x, \zeta, t) = \sum_{k=0}^{n} \zeta^k \mathbf{v}_k^{(n)}(x, t), \\ & \text{su } \Omega \times [0, t_0), \ \mathbf{P}\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{0} \ \text{ su } \mathcal{M}\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le grandezze dinamiche (1.44), definite in $\mathcal{P} \times [0,\, t_0)$, assumono la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_k(x,\, t) &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \zeta^k \mathbf{S}(x,\, \zeta,\, t), \quad \mathbf{N}_k(x,\, t) = k\mathbf{M}_{(k-1)}(x,\, t), \\
\mathbf{q}_k(x,\, t) &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \zeta^k \mathbf{b}(x,\, \zeta,\, t) \;+\; \varepsilon^k(\hat{\mathbf{s}}^+(x,\, \zeta,\, t) \;+\; (-1)^k \hat{\mathbf{s}}^-(x,\, \zeta,\, t)), \quad k = 0 \ldots n,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

e le (1.45), definite in $\partial\mathcal{P} \times [0,\, t_0)$:

$$\mathbf{p}_k(x,\, t) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \zeta^k \hat{\mathbf{s}}(x,\, \zeta,\, t), \quad k = 0 \ldots n. \tag{2.6}$$

Infine, le equazioni di bilancio (1.49) si riscrivono

$$\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\, \mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0 = 0, && \\
&{}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\, \mathbf{M}_k - k\mathbf{M}_{(k-1)}\mathbf{z} + \mathbf{q}_k = 0, \;\; k = 1 \ldots n, && \text{su} \;\; \mathcal{P}, \\
&(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M}_k \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_k, \;\; k = 0 \ldots n, && \text{su} \;\; \partial\mathcal{P},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

nelle quali i campi $\mathbf{q}_k$ sono somma di due termini: il termine non inerziale

$$\mathbf{q}_k^{ni}(x) = \int_{\mathcal{I}} \zeta^k \mathbf{b}^{ni}(x, \zeta) + \varepsilon^k(\hat{\mathbf{s}}^+ + (-1)^k \hat{\mathbf{s}}^-(x)),$$

e quello inerziale

$$\mathbf{q}_k^{in}(x) = -\sum_{j=0}^{n} (r_{(k+j)}(x) \ddot{\mathbf{u}}_j(x,\, t)),$$

dove

$$r_i(x) = \int_{\mathcal{I}} \varrho(x, \zeta) \zeta^i. \tag{2.8}$$

Ora scomponiamo il campo di spostamenti (2.2) nelle due parti specularmente simmetrica ed antisimmetrica rispetto al piano medio $\mathcal{P}$. Questa decomposizione richiede due operazioni. La prima consiste nel ripartire gli addendi del campo (2.2) in due classi: la classe di tutti i termini pari nella coordinata trasversale ζ e quella di tutti i dispari. Affinché le due collezioni abbiano lo stesso numero di elementi, la (2.2) deve essere composta da un numero pari di addendi. Ciò significa considerare solo campi di spostamento di ordine $n = 2N + 1$, con $N \in \mathbb{N}$, i quali, a seguito di questa suddivisione si scrivono:

$$\mathbf{u}^{(2N+1)}(x, \zeta,\, t) = \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k} \mathbf{u}_{2k}^{(2N+1)}(x,\, t) + \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k+1} \mathbf{u}_{2k+1}^{(2N+1)}(x,\, t). \tag{2.9}$$

La seconda operazione consiste invece nel rappresentare il generico addendo $\zeta^i \mathbf{u}_i^{(2n+1)}$ della (2.9) nella sua parte piana e trasversale:

$$\zeta^i \mathbf{u}_i^{(2N+1)}(x,\, t) = \zeta^i \bar{\mathbf{u}}_i(x,\, t) + \zeta^i w_i(x,\, t)\mathbf{z}, \quad \bar{\mathbf{u}}_i(x,\, t) \cdot \mathbf{z} = 0. \tag{2.10}$$

Nei termini del secondo membro non riportiamo l'apice $(2N + 1)$ per comodità.

La direzione trasversale e piana e la parità e disparità in ζ permettono di riscrivere il campo di spostamenti (2.9) così:

$$\mathbf{u}^{(2N+1)}(x, \zeta,\, t) = \mathbf{u}_m^{(2N+1)}(x, \zeta,\, t) + \mathbf{u}_f^{(2N+1)}(x, \zeta,\, t), \tag{2.11}$$

dove

$$\mathbf{u}_m^{(2N+1)}(x,\zeta,t) = \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k} \left(\bar{\mathbf{u}}_{2k}(x,t) + \zeta w_{2k+1}(x,t)\mathbf{z} \right), \tag{2.12}$$

è specularmente simmetrico rispetto al piano medio $\mathcal{P}$ ed è definito *spostamento membranale*, e

$$\mathbf{u}_f^{(2N+1)}(x,\zeta,t) = \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k} \left(w_{2k}(x,t)\mathbf{z} + \zeta\bar{\mathbf{u}}_{2k+1}(x,t) \right), \tag{2.13}$$

è specularmente antisimmetrico ed è chiamato *spostamento flessionale*. Gli spostamenti (2.12) e (2.13) sono chiamati in [66] di "thickness-stretch" e di "thickness-shear", rifacendosi alla terminologia adottata in [1] per descrivere la propagazione di onde. Il campo (2.12) è previsto quando la piastra è compressa o stirata, ossia soggetta a condizioni di sollecitazione anch'esse specularmente simmetriche, tipiche del regime di carico membranale. Il campo (2.13) è atteso quando la piastra è inflessa o investita da sforzi di taglio, ossia da carichi specularmente antisimmetrici caratteristici del regime flessionale. Vedremo che queste aspettative saranno confermate solo se la piastra soddisfa precise richieste costitutive.

La parte membranale (2.12) si compone di due tipi di addendi: spostamenti piani pari in ζ e spostamenti trasversali dispari in ζ, mentre la parte flessionale (2.13) è costituita da spostamenti piani dispari e trasversali pari. La parità e disparità e la direzione trasversa e piana ripartiscono il campo di spostamenti in quattro collezioni costituite ciascuna da $(N+1)$ elementi ed il numero di termini che le compongono passa da $(N+1)$ ad $(N+2)$ semplicemente incrementando l'ordine cinematico da $(2N+1)$ a $(2N+3)$. Nei paragrafi 2.3 e 2.4 saranno presentate le teorie di piastre trasversalmente isotrope di ordine uno e tre, nelle quali le quattro collezioni appena menzionate sono formate da uno e due elementi rispettivamente. Nel paragrafo 2.2 dimostreremo che i regimi membranale e flessionale sono ortogonali in energia se nella classe delle simmetrie materiali è presente la rotazione $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi} \in \mathrm{Orth}$ di π intorno a $\mathbf{z}$.

I tensori di deformazione associati ai campi di spostamento (2.12) e (2.13) sono:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) = \zeta^{2N}[\mathbf{A}_N + \zeta \ \mathrm{sym}(\mathbf{z} \otimes \nabla w_{2N+1})] + \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{2k} \left(\mathbf{A}_k + \zeta\, \mathbf{B}_k\right), \tag{2.14}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k}) + (2k+1)w_{2k+1}\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \\ \mathbf{B}_k &= \mathrm{sym}\left(\mathbf{z} \otimes (\nabla w_{2k+1} + 2(k+1)\bar{\mathbf{u}}_{2(k+1)})\right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

e

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) = \zeta^{2N} \left[\zeta\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2N+1}) + \mathbf{C}_N\right] + \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{2k} \left(\mathbf{C}_k + \zeta\, \mathbf{D}_k\right), \tag{2.16}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k &= \mathrm{sym}(\mathbf{z} \otimes (\nabla w_{2k} + (2k+1)\bar{\mathbf{u}}_{2k+1})), \\ \mathbf{D}_k &= \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k+1}) + 2(k+1)w_{2(k+1)}\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

I tensori $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{D}_k$ appartengono allo stesso sottospazio di Lin, mentre $\mathbf{B}_k$ e $\mathbf{C}_k$ appartengono al complemento ortogonale di tale sottospazio. Inoltre gli addendi che compongono $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{D}_k$ sono mutuamente ortogonali.

Dalla decomposizione (2.11) segue che lo spazio (2.3) degli spostamenti cinematicamente ammissibili si scrive

$$\mathcal{U}^{(2N+1)} = \mathcal{U}_m^{(2N+1)} \oplus \mathcal{U}_f^{(2N+1)}$$

come somma diretta dello spazio degli spostamenti ammissibili di tipo membranale

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m^{(2N+1)} = \{ \quad \mathbf{u}_m^{(2N+1)} \quad | \quad \mathbf{u}_m^{(2N+1)} &= \sum_0^N \zeta^{2k} \, (\, \bar{\mathbf{u}}_{2k} + \zeta w_{2k+1} \mathbf{z} \,), \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_m^{(2N+1)} &= \hat{\mathbf{u}}_m^{(2N+1)} \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \times [0,\, t_0) \}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

e dello spazio degli spostamenti ammissibili di tipo flessionale

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_f^{(2N+1)} = \{ \quad \mathbf{u}_f^{(2N+1)} \quad | \quad \mathbf{u}_f^{(2N+1)} &= \sum_0^N \zeta^{2k} \, (\, w_{2k} \mathbf{z} + \zeta \bar{\mathbf{u}}_{2k+1} \,), \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_f^{(2N+1)} &= \hat{\mathbf{u}}_f^{(2N+1)} \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \times [0,\, t_0) \}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Analogamente lo spazio (2.4) delle velocità test si scompone nella somma diretta

$$\mathcal{W}^{(2N+1)} = \mathcal{W}_m^{(2N+1)} \oplus \mathcal{W}_f^{(2N+1)},$$

delle velocità test membranali

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m^{(2N+1)} = \{ \quad \mathbf{v}_m^{(2N+1)} \quad | \quad \mathbf{v}_m^{(2n+1)} &= \sum_0^N \zeta^{2k} \, (\, \bar{\mathbf{v}}_{2k} + \zeta v_{2k+1} \mathbf{z} \,), \\ \mathbf{P}\mathbf{v}_m^{(2N+1)} &= \mathbf{0} \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

e delle velocità test flessionali

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_f^{(2N+1)} = \{ \quad \mathbf{v}_f^{(2N+1)} \quad | \quad \mathbf{v}_f^{(2N+1)} &= \sum_0^N \zeta^{2k} \, (\, v_{2k} \mathbf{z} + \zeta \bar{\mathbf{v}}_{2k+1}), \\ \mathbf{P}\mathbf{v}_f^{(2N+1)} &= \mathbf{0} \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Se selezioniamo campi di velocità test di tipo membranale $\mathbf{v}_m^{(2N+1)} \in \mathcal{W}_m^{(2N+1)}$, l'equazione delle potenze virtuali (1.12) diventa:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{P}} [\int_{\mathcal{I}} \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}_m^{(2N+1)} - \int_{\mathcal{I}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_m^{(2N+1)}] - \int_{\mathcal{P}^+} \hat{\mathbf{s}}^+ \cdot \mathbf{v}_m^{(2N+1)} - \int_{\mathcal{P}^-} \hat{\mathbf{s}}^- \cdot \mathbf{v}_m^{(2N+1)} + \\ &- \int_{\partial\mathcal{P}} \int_{\mathcal{I}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}_m^{(2N+1)} = 0, \ \ \forall \, \mathbf{v}_m^{(2N+1)} \in \mathcal{W}_m^{(2N+1)}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

da cui si deducono le seguenti equazioni di bilancio locale definite su $\mathcal{P} \times [0,\, t_0)$:

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} \, ({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div} \, \mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0^{ni}) = \sum_{j=0}^N r_j \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_j, \\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} \, ({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div} \, \mathbf{M}_{2k} - 2k \mathbf{M}_{(2k-1)} \mathbf{z} + \mathbf{q}_{2k}^{ni}) = \sum_{j=0}^N r_{(2k+j)} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_j, \ \ k = 1...N, \\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp} ({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div} \, \mathbf{M}_{(2k+1)} - (2k+1) \mathbf{M}_{2k} \mathbf{z} + \mathbf{q}_{(2k+1)}^{ni}) = \sum_{j=0}^N r_{(2k+1+j)} \ddot{w}_j, \ \ k = 0...N, \end{aligned} \tag{2.23}$$

e le condizioni al contorno su $\partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0)$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{P})^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{M}_{2k+1}\boldsymbol{\nu} &= {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{p}_{2k+1}, \;\; k=0...N,\\ (\mathbf{I}-\mathbf{P})^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{M}_{2k}\boldsymbol{\nu} &= {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_{2k}, \;\; k=0...N,\end{aligned} \tag{2.24}$$

con ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} = \mathbf{I}-\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}$ ed ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}=\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}$ proiettori rispettivamente nel piano $\mathcal{P}$ e nella direzione trasversale $\mathbf{z}$.

Se selezioniamo campi di velocità test di tipo flessionale $\mathbf{v}_f^{(2N+1)}\in\mathcal{W}_f^{(2N+1)}$, la (1.12) si riscrive

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{P}}[\int_{\mathcal{I}}\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}_f^{(2N+1)}-\int_{\mathcal{I}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_f^{(2N+1)}]-\int_{\mathcal{P}^+}\hat{\mathbf{s}}^+\cdot\mathbf{v}_f^{(2N+1)}-\int_{\mathcal{P}^-}\hat{\mathbf{s}}^-\cdot\mathbf{v}_f^{(2N+1)}+\\ &-\int_{\partial\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\hat{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{v}_f^{(2N+1)}=0,\;\;\forall\,\mathbf{v}_f^{(2N+1)}\in\mathcal{W}_f^{(2N+1)},\end{aligned} \tag{2.25}$$

dalla quale seguono le equazioni di bilancio

$$\begin{aligned}&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_0+\mathbf{q}_0^{ni})=\sum_{j=0}^{N}r_j\ddot{w}_j,\\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_{2k}-2k\mathbf{M}_{(2k-1)}\mathbf{z}+\mathbf{q}_{2k}^{ni})=\sum_{j=0}^{N}r_{(2k+j)}\ddot{w}_j,\;\;k=1...N,\\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_{(2k+1)}-(2k+1)\mathbf{M}_{2k}\mathbf{z}+\mathbf{q}_{(2k+1)}^{ni})=\sum_{j=0}^{N}r_{(2k+1+j)}\ddot{\mathbf{u}}_j,\;\;k=0...N,\end{aligned} \tag{2.26}$$

definite su $\mathcal{P}\times[0,\,t_0)$ e le condizioni al contorno su $\partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0)$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{P})^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{M}_{2k+1}\boldsymbol{\nu} &= {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_{2k+1}, \;\; k=0...N,\\ (\mathbf{I}-\mathbf{P})^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{M}_{2k}\boldsymbol{\nu} &= {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{p}_{2k}, \;\; k=0...N.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Le (2.23) e (2.26) con le relative condizioni al contorno (2.24) e (2.27) ricompongono il problema (2.7) dell'equilibrio per la piastra nell'istante di tempo $t\in[0,\,t_0)$.

Se esprimiamo le caratteristiche di sollecitazione $(2.5)_1$ in termini del campo di spostamenti (2.2) tramite le relazioni costitutive (1.14) e di compatibilità (2.14)-(2.16), le (2.23)-(2.24) e (2.26)-(2.27) diventano equazioni di evoluzione (come mostrato nel paragrafo 1.6). Nel paragrafo successivo dimostreremo che i due problemi (2.23)-(2.24) e (2.26)-(2.27) sono disaccoppiati nei campi di spostamento incogniti $\mathbf{u}_m^{(2N+1)}$ ed $\mathbf{u}_f^{(2N+1)}$ rispettivamente, se il tensore di elasticità $\mathbb{C}$ possiede la rotazione $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi}\in$ Orth nel gruppo delle simmetrie materiali e se la densità di massa $\varrho(x,\zeta)$ dipende dalla coordinata trasversale ζ in modo pari.

2.2 Regimi membranale e flessionale

Nella rappresentazione (2.10), fondamentale per poter decomporre il campo di spostamenti nella sua parte membranale e flessionale, abbiamo sfruttato la decomposizione dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ associato ad $\mathcal{E}$ nella somma diretta dello spazio $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}=\mathrm{span}(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2)$ tangente a $\mathcal{P}$ e del suo complemento ortogonale $\mathcal{V}_{\perp}=\mathrm{span}(\mathbf{z})$:

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_{\mathcal{P}}\oplus\mathcal{V}_{\perp}.$$

Usiamo questa decomposizione per rappresentare i tensori delle deformazioni e degli sforzi nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(x,\zeta,\,t) &= \hat{\mathbf{E}}(x,\zeta,\,t) + 2\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{\gamma}(x,\zeta,\,t)\otimes\mathbf{z} + \varepsilon(x,\zeta,\,t)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z},\\
\mathbf{S}(x,\zeta,\,t) &= \hat{\mathbf{S}}(x,\zeta,\,t) + 2\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{\tau}(x,\zeta,\,t)\otimes\mathbf{z} + \sigma(x,\zeta,\,t)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z},
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

dove $\hat{\mathbf{E}}(x,\zeta,\,t)$, $\hat{\mathbf{S}}(x,\zeta,\,t)\in\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_{\mathcal{P}})$ sono la *deformazione* e lo *sforzo piani*, $\boldsymbol{\gamma}(x,\zeta,\,t)$, $\boldsymbol{\tau}(x,\zeta,\,t)\in\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ la *deformazione* e la *tensione di taglio* e infine $\varepsilon(x,\zeta,\,t)$, $\sigma(x,\zeta,\,t)\in\mathbb{R}$ la *deformazione* e lo *sforzo assiale*.

Consideriamo ora un generico tensore di elasticità $\mathbb{C}$, omogeneo, per il quale non richiediamo il soddisfacimento di alcuna simmetria materiale, ossia

$$
\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \{\mathbf{I}\}.
$$

Il tensore $\mathbb{C}$ appartiene alla classe cristallografica *triclina* e, grazie alle proprietà di simmetria maggiore e minore, è caratterizzato da ventuno costanti elastiche. Se usiamo le (2.28), la relazione costitutiva per un materiale triclino si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}} &= \hat{\mathbb{C}}[\hat{\mathbf{E}}] + \mathbf{F}\varepsilon + \mathbb{f}[\boldsymbol{\gamma}],\\
\sigma &= \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{E}} + G\varepsilon + \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\gamma},\\
\boldsymbol{\tau} &= \mathbb{f}^T[\hat{\mathbf{E}}] + \mathbf{f}\varepsilon + \mathbf{H}\boldsymbol{\gamma},
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

o analogamente, con una rappresentazione a blocchi di matrici:

$$
\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{S}}\\ \sigma\\ \boldsymbol{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\mathbb{C}} & \mathbf{F} & \mathbb{f}\\ \mathbf{F}\cdot & G & \mathbf{f}\cdot\\ \mathbb{f}^T & \mathbf{f} & \mathbf{H}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{E}}\\ \varepsilon\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix},
$$

dove $\hat{\mathbb{C}}\in\mathbb{L}\mathrm{in}(\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_{\mathcal{P}}))$, $\mathbf{F}\in\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_{\mathcal{P}})$, $\mathbf{f}\in\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$, $G\in\mathbb{R}$ ed infine $\mathbb{f}$ è un'applicazione lineare del terz'ordine $\mathbb{f}:\mathcal{V}_{\mathcal{P}}\mapsto\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_{\mathcal{P}})$.

Nel paragrafo 2.1, le equazioni (2.23)-(2.24) e (2.26)-(2.27) sono state dedotte rispettivamente dalle equazioni delle potenze virtuali (2.22) e (2.25). Consideriamo ora il primo addendo della (2.22). Se facciamo uso delle relazioni di compatibilità (1.13) e costitutive (1.14), questo si può scrivere in termini del campo di spostamenti (2.11) incognito:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}_m^{(2N+1)} = \int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}+\mathbf{u}_f^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_m^{(2N+1)} =\\
&\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\{\mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_m^{(2N+1)} + \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_m^{(2N+1)}\}.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Analogamente il primo membro della (2.25) si scrive

$$
\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}_f^{(2N+1)} = \int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\{\mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_f^{(2N+1)} + \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_f^{(2N+1)}\}.
\tag{2.31}
$$

Se si verifica che

$$
\int_{\mathcal{I}}\mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_m^{(2N+1)} = \int_{\mathcal{I}}\mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})]\cdot\nabla\mathbf{v}_f^{(2N+1)} = 0,
\tag{2.32}
$$

allora, nelle (2.22) e (2.25), le potenze degli sforzi sono dovute a regimi di deformazione elastica rispettivamente solo membranale e solo flessionale. Le (2.32) sono soddisfatte se le energie elastiche membranali e flessionali di una qualsiasi fibra $\{x\} \times \mathcal{I}$ sono ortogonali, ossia se

$$\int_{\mathcal{I}} \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})] \cdot \mathbf{E}[\mathbf{u}_f^{(2N+1)}] = 0. \tag{2.33}$$

Vediamo allora quali sono le condizioni da porre sul tensore $\mathbb{C}$ affinchè la (2.33) sia soddisfatta. Facendo uso della (2.14) e della (2.29), valutiamo:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) = \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})] = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) + 2\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) \otimes \mathbf{z} + \sigma(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \tag{2.34}$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) &= \sum_{k=0}^{N} \{\zeta^{2k}\hat{\mathbb{C}}[\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k})] + \zeta^{2k}(2k+1)w_{2k+1}\mathbf{F} + \zeta^{2k+1}\mathbb{f}[\frac{1}{2}\nabla w_{2k+1}]\} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{2k+1}(k+1)\mathbb{f}[\bar{\mathbf{u}}_{2(k+1)}], \\
\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) &= \sum_{k=0}^{N} \{\zeta^{2k}\mathbb{f}^T[\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k})] + (2k+1)\zeta^{2k}w_{2k+1}\mathbf{f} + \frac{1}{2}\zeta^{2k+1}\mathbf{H}\nabla w_{2k+1}\} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{2k+1}(k+1)\mathbf{H}\bar{\mathbf{u}}_{2(k+1)}, \\
\sigma(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) &= \sum_{k=0}^{N} \{\zeta^{2k}[\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k}) + (2k+1)Gw_{2k+1}] + \frac{1}{2}\zeta^{2k+1}(\mathbf{f} \cdot \nabla w_{2k+1})\} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\zeta^{2k+1}\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{2(k+1)},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

e scriviamo il tensore di deformazione flessionale (2.16) nel seguente modo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) + 2\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) \otimes \mathbf{z} + \varepsilon(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \tag{2.36}$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) &= \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k+1}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k+1}), \\
\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) &= \sum_{k=0}^{N} [\frac{1}{2}\zeta^{2k}\nabla w_{2k} + \zeta^{2k}(2k+1)\bar{\mathbf{u}}_{2k+1}], \\
\varepsilon(\mathbf{u}_f^{(2N+1)}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{2k+1}2(k+1)w_{2(k+1)}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Se sostituiamo le (2.34) e (2.36) nella (2.33), otteniamo la relazione:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{h=0}^{N}\zeta^{2(k+h+1)}\frac{1}{2}\mathbb{f}[\nabla w_{2k+1}]\cdot\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2h+1})+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{h=0}^{N}\zeta^{2(k+h+1)}(k+1)\mathbb{f}[\bar{\mathbf{u}}_{2(k+1)}]\cdot\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2h+1})+$$
$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{h=0}^{N}\frac{1}{2}\zeta^{2(k+h)}\{\mathbb{f}^T[\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k})]\cdot\nabla w_{2h}+(2k+1)w_{2k+1}\mathbf{f}\cdot\nabla w_{2h}\}+$$
$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{h=0}^{N}(2k+1)\zeta^{2(k+h)}\{\mathbb{f}^T[\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}_{2k})]\cdot\bar{\mathbf{u}}_{(2h+1)}+(2k+1)w_{2k+1}\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{u}}_{(2h+1)}\}+$$
$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{h=0}^{N-1}(k+1)\zeta^{2(k+h+1)}w_{2(h+1)}(\mathbf{f}\cdot\nabla w_{2k+1})+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{h=0}^{N-1}2(k+1)\zeta^{2(k+h+1)}w_{2(h+1)}(\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{u}}_{2(k+1)})=0. \tag{2.38}$$

Nella (2.33) si annullano tutti i termini i cui integrandi sono potenze dispari della coordinata ζ, infatti, assegnata una qualunque funzione $\psi(x)$ definita in $\mathcal{P}$,

$$\int_{\mathcal{I}}\zeta^{2k+1}\psi(x)=0,\ \ \forall\ k\in\mathbb{N}.$$

Data l'arbitrarietà del campo di spostamenti $\mathbf{u}^{(2N+1)}\in\mathcal{U}^{(2N+1)}$, la (2.38) è soddisfatta se e solo se

$$\begin{aligned}\mathbb{f}&=0,\\ \mathbf{f}&=0.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Quest'ultima condizione caratterizza un materiale di classe cristallografica *monoclina* (*vid.* [20], § 26), ossia un materiale il cui gruppo delle simmetrie materiali $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ è costituito dalla sola rotazione $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi}\in\mathrm{Orth}$ di π intorno a $\mathbf{z}$ (o analogamente dalla sola riflessione rispetto al piano medio $\mathcal{P}$). Infatti si verifica facilmente che, dato un tensore triclino $\mathbb{C}$ ed assegnata la rotazione

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi}=\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}-{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,,$$

la condizione di simmetria materiale

$$\mathbb{C}[\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi}\mathbf{E}\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi\,T}]=\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi}\mathbb{C}[\mathbf{E}]\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi\,T},\ \ \forall\ \mathbf{E}\in\mathrm{Sym}$$

è soddisfatta se e solo se valgono le (2.39).

Concludiamo che i regimi membranale e flessionale sono ortogonali in energia se e solo se, assegnato un tensore elastico $\mathbb{C}$, omogeneo, nella sua collezione $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ delle simmetrie materiali è presente la rotazione $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\pi}\in\mathrm{Orth}$. Osserviamo che il requisito di omogeneità per $\mathbb{C}$ non è indispensabile. Infatti è sufficiente che $\mathbb{C}$ sia pari nella coordinata trasversale ζ, ossia

$$\mathbb{C}(x,\zeta)=\mathbb{C}(x,-\zeta). \tag{2.40}$$

Anche in questo caso, infatti, assegnata una funzione $\chi(x,\zeta)$ tale che

$$\chi(x,\zeta)=\chi(x,-\zeta),$$

vale

$$\int_{\mathcal{I}}\zeta^{2k+1}\chi(x,\zeta)=0,\ \ \forall\ k\in\mathbb{N},$$

e quindi la (2.33), per $\mathbb{C}$ pari in ζ, si riduce alla (2.38). La dipendenza non banale di $\mathbb{C}$ da ζ in maniera pari è tuttavia una condizione rara da riscontrare nella realtà. Potrebbe essere interessante decomporre il campo di spostamenti (1.31) nella forma di uno sviluppo di funzioni trigonometriche nelle sue due parti simmetrica ed antisimmetrica rispetto al piano medio $\mathcal{P}$ e verificare quali condizioni devono essere soddisfatte dal tensore di elasticità affinché i due regimi di deformazione simmetrico ed antisimmetrico siano ortogonali in energia.

Passiamo ad analizzare le forze d'inerzia contenute nei secondi membri delle (2.23) e (2.26). Se $\varrho(x,\zeta)$ è un campo pari nella coordinata ζ ($\varrho(x,\zeta) = \varrho(x,-\zeta)$), allora il k-esimo descrittore di massa $r_k(x)$ definito nella (2.8) è tale che

$$\begin{aligned} &r_k(x) \neq 0, \ \text{ se } k \ \text{ pari}, \\ &r_k(x) = 0, \ \text{ se } k \ \text{ dispari}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

e quindi nei secondi membri delle (2.23) sono coinvolti solo i descrittori cinematici del campo membranale (2.12) mentre nei secondi membri delle (2.26) compaiono solo le grandezze cinematiche tipiche dello spostamento flessionale (2.13). Questo disaccoppiamento delle inerzie è verificato, in particolare, se la piastra è omogenea, ossia se ha densità di massa costante.

Concludiamo che, se la piastra è caratterizzata da un tensore elastico $\mathbb{C}(x,\zeta)$ e da una densità di massa $\varrho(x,\zeta)$ che sono funzioni pari nella coordinata trasversale ζ, ed inoltre, se $\mathbb{C}(x,\zeta)$ possiede la rotazione $\mathbf{R}^{\pi}_{\mathbf{z}} \in \mathrm{Orth}$ nel gruppo delle sue simmetrie materiali, allora l'ortogonalità in energia tra i regimi membranale e flessionale e la felice condizione di disaccoppiamento delle forze d'inerzia nelle (2.23) e (2.26), fanno si che i problemi (2.23)-(2.24) e (2.26)-(2.27), una volta scritti in termini di spostamenti, siano disaccoppiati rispettivamente nei campi incogniti $\mathbf{u}_m^{(2n+1)}$ ed $\mathbf{u}_f^{(2n+1)}$.

Nei paragrafi successivi dedurremo le equazioni di evoluzione per piastre di ordine uno e tre. Considereremo piastre la cui densità di massa è omogenea ed il cui legame costitutivo è omogeneo, *trasversalmente isotropo*, con asse di isotropia diretto nella direzione $\mathbf{z}$. Il corrispondente gruppo delle simmetrie materiali possiede tutte le rotazioni intorno a $\mathbf{z}$ e dunque anche quella di un angolo π. Vedremo che i due regimi *membranale* e *flessionale* si separano in due problemi disaccoppiati.

Osservazione. Il più semplice legame costitutivo che garantisce l'ortogonalità in energia tra i regimi membranale e flessionale è quello isotropo. La risposta costitutiva per un materiale omogeneo isotropo è:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}[\mathbf{E}] = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I}\ ,$$

e la (2.33) diventa:

$$\int_{\mathcal{I}} \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})]\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})dv = \int_{\mathcal{I}} [2\mu\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)}) + \lambda\mathrm{tr}\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})\mathbf{I}]\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})dV = 0.$$

Infatti, dalle (2.14) e (2.16), si vede che sia $\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})$ che $\mathrm{tr}\mathbf{E}(\mathbf{u}_m^{(2N+1)})\mathrm{tr}\mathbf{E}(\mathbf{u}_f^{(2N+1)})$ sono funzioni dispari della coordinata ζ, quindi è nullo il loro integrale sullo spessore $\mathcal{I}$. $\square$

2.3 Piastre di ordine 1

Se arrestiamo lo sviluppo polinomiale (2.2) al prim'ordine, il campo di spostamenti prescritto diventa:

$$\mathbf{u}(x,\zeta,\,t)=\mathbf{u}_0(x,\,t)+\zeta\mathbf{u}_1(x,\,t), \tag{2.42}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0(x,\,t)&=\bar{\mathbf{u}}_0(x,\,t)+w_0(x,\,t)\mathbf{z}, \quad \bar{\mathbf{u}}_0(x,\,t)\cdot\mathbf{z}=0,\\ \mathbf{u}_1(x,\,t)&=\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)+w_1(x,\,t)\mathbf{z}, \quad \bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)\cdot\mathbf{z}=0,\end{aligned} \tag{2.43}$$

ed il campo di deformazioni associato è:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u})=\mathrm{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0+\zeta\nabla\bar{\mathbf{u}}_1+\zeta\mathbf{z}\otimes\nabla w_1)+\mathrm{sym}(\bar{\mathbf{u}}_1+\nabla w_0)\otimes\mathbf{z}+w_1\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}. \tag{2.44}$$

I campi $\bar{\mathbf{u}}_0(x,\,t)$, $w_0(x,\,t)$ descrivono rispettivamente la traslazione nel piano $\mathcal{P}$ e quella nella direzione trasversale $\mathbf{z}$; $w_1(x,\,t)$ rappresenta la deformazione assiale della fibra $\{x\}\times\mathcal{I}$ nell' istante t, infatti

$$w_1=\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}.$$

Infine il campo $\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)$ serve a misurare la rotazione della medesima fibra. Infatti, quando

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{0},\quad w_1(x,\,t)=0,$$

la fibra $\{x\}\times\mathcal{I}$ è soggetta alla rotazione

$$\mathbf{u}_r(x,\zeta,\,t)=[\mathbf{z}\times\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)]\times(p-x),$$

di asse $\boldsymbol{\omega}(x,\,t)=\mathbf{z}\times\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)$ e centro x.

Nonostante la sua semplicità, il campo di spostamenti (2.42) riesce a descrivere quattro interessanti casi di deformazione ricorrenti nella meccanica delle strutture:

- deformazione piana, quando $\mathbf{u}(x,\zeta,\,t)=\bar{\mathbf{u}}_0(x,\,t)$,
- deformazione di spessore, quando $\mathbf{u}(x,\zeta,\,t)=\zeta w_1(x,\,t)\mathbf{z}$,
- deformazione di flessione e scorrimento, quando $\mathbf{u}(x,\zeta,\,t)=w_0(x,\,t)\mathbf{z}+\zeta\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)$,
- deformazione di flessione semplice, quando $\mathbf{u}(x,\zeta,\,t)=w_0(x,\,t)\mathbf{z}+\zeta\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)$, ed è soddisfatta la condizione tipica delle piastre di Kirchhoff-Love

$$\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t)=-\nabla w_0(x,\,t).$$

Decomponiamo il campo (2.42) nelle sue parti membranale e flessionale:

$$\mathbf{u}(x,\zeta,\,t)=\mathbf{u}_m(x,\zeta,\,t)+\mathbf{u}_f(x,\zeta,\,t), \tag{2.45}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_m(x,\zeta,\,t)&=\bar{\mathbf{u}}_0(x,\,t)+\zeta w_1(x,\,t)\mathbf{z},\\ \mathbf{u}_f(x,\zeta,\,t)&=w_0(x,\,t)\mathbf{z}+\zeta\bar{\mathbf{u}}_1(x,\,t),\end{aligned} \tag{2.46}$$

ed il relativo campo di deformazioni si scompone così:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(\mathbf{u}_m) + \mathbf{E}(\mathbf{u}_f), \tag{2.47}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{u}_m) &= \mathrm{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta\mathbf{z}\otimes\nabla w_1) + w_1\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{u}_f) &= \zeta\,\mathrm{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_1) + \mathrm{sym}(\bar{\mathbf{u}}_1 + \nabla w_0)\otimes\mathbf{z}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Le (2.23) e (2.24) si riducono alle seguenti equazioni di bilancio

$$\left.\begin{aligned} &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0^{ni}) = 2\varepsilon\rho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0, \\ &\mathbf{z}\cdot({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0\mathbf{z} + \mathbf{q}_1^{ni}) = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{w}_1, \end{aligned}\right\} \quad \text{su } \mathcal{P}\times[0,\,t_0),$$
$$\left.\begin{aligned} &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\mathbf{M}_0\boldsymbol{\nu}) = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_0, \\ &(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_1\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{z}, \end{aligned}\right\} \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0), \tag{2.49}$$

e le (2.26) e (2.27) diventano:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{z}\cdot({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0^{ni}) = 2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0, \\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0\mathbf{z} + \mathbf{q}_1^{ni}) = \frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1, \end{aligned}\right\} \quad \text{su } \mathcal{P}\times[0,\,t_0),$$
$$\left.\begin{aligned} &(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{N}_0\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{z}, \\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_1\boldsymbol{\nu} = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_1, \end{aligned}\right\} \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0), \tag{2.50}$$

Soffermiamoci sulle caratteristiche di sollecitazione $\mathbf{M}_0$ ed $\mathbf{M}_1$ coinvolte nelle equazioni appena scritte. Assegnata una generica fibra $\{x\}\times\mathcal{I}$ e scelto un versore $\boldsymbol{\nu}(x)$, tale che $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{z} = 0$, siano

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathcal{P}}(x,\,t) &= \int_{\mathcal{I}}\mathbf{S}(x,\zeta,\,t)\boldsymbol{\nu}(x), \\ \mathbf{m}_{\mathcal{P}}(x,\,t) &= \int_{\mathcal{I}}(p-x)\times\mathbf{S}(x,\zeta,\,t)\boldsymbol{\nu}(x), \end{aligned}$$

rispettivamente la risultante ed il momento risultante rispetto al polo x di tutte le forze superficiali $\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}$ che agiscono sulla superficie la cui normale è $\boldsymbol{\nu}$, lungo il segmento $\{x\}\times\mathcal{I}$. Le caratteristiche di sollecitazione $\mathbf{M}_0$ ed $\mathbf{M}_1$ sono chiamate rispettivamente *risultante delle forze* e *risultante dei momenti* perché permettono di misurare $\mathbf{s}_{\mathcal{P}}$ e $\mathbf{m}_{\mathcal{P}}$ tramite le formule:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathcal{P}}(x,\,t) &= \mathbf{M}_0(x,\,t)\boldsymbol{\nu}(x), \\ \mathbf{m}_{\mathcal{P}}(x,\,t) &= \mathbf{z}\times\mathbf{M}_1(x,\,t)\boldsymbol{\nu}(x). \end{aligned}$$

Osserviamo che le equazioni (2.49) coinvolgono solo le parti ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{M}_0{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}$, ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{M}_0{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}$ e ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{M}_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}$, ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{M}_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}$ dei tensori $\mathbf{M}_0$ ed $\mathbf{M}_1$, mentre nelle (2.50) sono presenti le parti complementari ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{M}_0{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}$, ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{M}_0{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}$ e ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{M}_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}$, ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}\mathbf{M}_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\perp}$.

Osservazione. Vediamo come la richiesta costitutiva (1.16) si specializza nel caso di teorie di piastre di ordine uno. Le velocità rigide che appartengono allo spazio $\mathcal{W}_m^{(1)}$ delle velocità test membranali sono

$$\mathbf{v}_m^r = \bar{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{W}(p-o), \quad \text{con } \mathbf{W}\in\mathrm{Skw}, \quad \mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0}, \tag{2.51}$$

dove la condizione $\mathbf{Wz} = \mathbf{0}$ è necessaria affinché sia verificata l'uguaglianza

$$\mathbf{W}(p-o) = \mathbf{W}(x-o) + \zeta \mathbf{Wz} = \zeta v_1 \mathbf{z}, \tag{2.52}$$

che garantisce l'appartenenza di $\mathbf{v}_m^r$ allo spazio $\mathcal{W}_m^{(1)}$.

La prescrizione costitutiva (1.16), specializzata per campi di velocità test del tipo (2.51) e parti di piastra

$$\Pi = \mathcal{Q} \times \mathcal{I} \ \text{ con } \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}, \tag{2.53}$$

diventa

$$\int_{\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{I}} \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}_r = 0, \ \ \forall \ \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}, \ \forall \mathbf{v}_m^r \in \mathcal{W}_m^{(1)}, \tag{2.54}$$

la quale si riduce alla relazione bidimensionale

$$\int_{\mathcal{Q}} \mathbf{M}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_m^r = 0.$$

Data l'arbitrarietà di $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ ed in virtú del lemma fondamentale, possiamo scrivere

$$\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_m^r = 0,$$

ed infine

$$\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{W} = 0, \ \ \forall \ \mathbf{W} \in \mathrm{Skw} \ \text{ tale che } \mathbf{Wz} = \mathbf{0}. \tag{2.55}$$

Quest'ultima condizione dice che $\mathbf{c}_\beta \cdot \mathbf{M}_0 \mathbf{c}_\alpha = \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{M}_0 \mathbf{c}_\beta$, con $\alpha \neq \beta$. Come si puó notare la perdita di generalità nelle assegnazioni della parte Π e della velocità rigida $\mathbf{v}_m^r$ ha ridotto le informazioni contenute nella relazione costitutiva (1.16). Diversamente dalla caratterizzazione costitutiva (1.17), la condizione (2.55) non è puntuale ma integrata nello spessore del cilindro ed inoltre si riduce ad un'unica relazione scalare $(M_0)_{\alpha\beta} = (M_0)_{\beta\alpha}$, con $\alpha \neq \beta$, contro le tre specificazioni $S_{ij} = S_{ji}$ per le componenti dello sforzo $\mathbf{S}$ contenute nella (1.17).

Consideriamo ora campi di velocità rigida che appartengono allo spazio $\mathcal{W}_f^{(1)}$ delle velocità test flessionali:

$$\mathbf{v}_f^r = v_0 \mathbf{z} + \mathbf{W}(p-o), \ \ \mathbf{W} \in \mathrm{Skw}, \ \ \mathbf{W}(x-o) = \mathbf{0}, \ \ \forall \ \ x \in \mathcal{P}. \tag{2.56}$$

In questo caso, la condizione $\mathbf{W}(x-o) = \mathbf{0}$ garantisce l'appartenenza di $\mathbf{v}_f^r$ allo spazio $\mathcal{W}_f^{(1)}$ dato che deve essere soddisfatta l'uguaglianza

$$\mathbf{W}(x-o) + \zeta \mathbf{Wz} = \zeta \bar{\mathbf{v}}_1.$$

Quando il dominio di integrazione è una parte di piastra $\Pi = \mathcal{Q} \times \mathcal{I}$ ed il campo delle velocità rigide è $\mathbf{v}_f^r \in \mathcal{W}_f^{(1)}$, la richiesta costitutiva (1.16) diventa

$$\int_{\mathcal{Q}} \mathbf{M}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_f^r = 0, \ \ \forall \ \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}, \ \forall \ \mathbf{v}_f^r \in \mathcal{W}_f^{(1)}, \tag{2.57}$$

dalla quale segue

$$\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_f^r = 0, \ \ \forall \ \mathbf{v}_f^r \in \mathcal{W}_f^{(1)}. \tag{2.58}$$

ed equivalentemente

$$\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{W} = 0, \ \forall \ \mathbf{W} \in \text{Skw tale che } \mathbf{W}\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\beta = 0, \text{ con } \alpha \neq \beta. \tag{2.59}$$

Quest'ultima relazione dice che valgono le seguenti uguaglianze tra le componenti del tensore delle forze $\mathbf{M}_0$:

$$(M_0)_{\alpha 3} = (M_0)_{3\alpha}.$$

Se concediamo alla piastra la possibilità di compiere moti sia membranali che flessionali del tipo (2.42), allora le prescrizioni costitutive (2.55) sommate alle (2.59) danno

$$\mathbf{M}_0 \in \text{Sym}.$$

Questo risultato è ovvio se si assume $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ dal problema elastico tridimensionale per un continuo di Cauchy. Ribadiamo il fatto che l'assunzione $\mathbf{M}_0(x) \in$ Sym è piú debole dell'informazione puntuale $\mathbf{S}(p) \in$ Sym. Infatti $\mathbf{M}_0(x)$ ci fornisce una media dello sforzo $\mathbf{S}(p)$ per $p \in \{x\} \times \mathcal{I}$. Osserviamo inoltre che la somma di moti rigidi membranali (2.51) e flessionali (2.56) fornisce un qualsiasi moto rigido

$$\mathbf{v}^r = \mathbf{v}^r_m + \mathbf{v}^r_f = \mathbf{u}_0 + \mathbf{W}(p - o), \quad \mathbf{W} \in \text{Skw}. \ \square$$

Ora esprimiamo i tensori delle forze e dei momenti $\mathbf{M}_0$ ed $\mathbf{M}_1$ in termini del campo di spostamento $\mathbf{u}$ prescritto nella (2.42):

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{I}} \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] \quad \text{ed} \quad \mathbf{M}_1(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{I}} \zeta \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]. \tag{2.60}$$

Scegliamo un materiale omogeneo, trasversalmente isotropo, con asse di isotropia nella direzione $\mathbf{z}$. Il tensore di elasticità $\mathbb{C}$ si rappresenta:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \ = \ & (2\mu + \lambda)(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) + \\ & + \lambda(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) + \\ & + \tau_2(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + \\ & + \tau_1 \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3 + 2\eta(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5), \end{aligned} \tag{2.61}$$

dove

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_1 = \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1, && \mathbf{X}_4 = \sqrt{2}\,\text{sym}\,\mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{z}, \\ &\mathbf{X}_2 = \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2, && \mathbf{X}_5 = \sqrt{2}\,\text{sym}\,\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{z}, \\ &\mathbf{X}_3 = \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, && \mathbf{X}_6 = \sqrt{2}\,\text{sym}\,\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2, \end{aligned} \tag{2.62}$$

sono i tensori di una base ortonormale dello spazio Sym.

Il legame costitutivo assegnato accorda la geometria globale del corpo con la geometria costitutiva locale, facendo coincidere la direzione ortogonale al piano geometrico $\mathcal{P}$ con l'asse materiale di isotropia trasversa. Per questo si dice che la risposta trasversalmente isotropa è *coerentemente orientata* o più in breve *coerente*. Affinché l'energia di deformazione elastica sia definita positiva, ossia

$$\sigma(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\mathbf{E}] > 0,$$

le cinque costanti elastiche che caratterizzano il tensore $\mathbb{C}$ devono soddisfare le disuguaglianze:

$$\mu > 0,\ \tau_1 > 0,\ \eta > 0,\ \tau_1(\lambda+\mu) - (\tau_2)^2 > 0. \tag{2.63}$$

Si osserva che con la particolare scelta delle costanti

$$\tau_1 = \lambda + 2\mu,\ \tau_2 = \lambda,\ \eta = \mu, \tag{2.64}$$

ci si riconduce ad un materiale isotropo:

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}.$$

Assegnato il tensore d'elasticità (2.61), grazie alle equazioni di compatibilità (2.44) e costitutive (1.14), il tensore degli sforzi diventa:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{u}) = {} & \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] = \lambda(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu\operatorname{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta\nabla\bar{\mathbf{u}}_1) + \tau_2 w_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + \\ & + \tau_1 w_1\mathbf{z}\otimes\mathbf{z} + \tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z} + 2\eta\operatorname{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta\nabla w_1)\otimes\mathbf{z}.\end{aligned} \tag{2.65}$$

Se ci si avvale della decomposizione (2.45) del campo di spostamenti in parti membranale e flessionale, allora gli sforzi associati rispettivamente alla deformazione membranale $(2.48)_1$ e a quella flessionale $(2.48)_2$ sono

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{u}_m) = {} & \lambda\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu\operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2 w_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + \tau_1 w_1\mathbf{z}\otimes\mathbf{z} + \tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \\ & + 2\eta\zeta\operatorname{sym}\nabla w_1\otimes\mathbf{z}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_f) = {} & \lambda\zeta\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu\zeta\operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_1 + + \tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z} + \\ & + 2\eta\operatorname{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1)\otimes\mathbf{z}.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Tramite le (2.48) e (2.66) si verifica immediatamente la condizione di ortogonalità in energia dei regimi membranale e flessionale

$$\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\mathbf{S}(\mathbf{u}_m)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}_f) = \int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}}\mathbf{S}(\mathbf{u}_f)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}_m) = 0. \tag{2.67}$$

Le caratteristiche di sollecitazione (2.60) diventano

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_0 = {} & 2\varepsilon[(\lambda\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2 w_1)^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu\operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_0 + 2\eta\operatorname{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1)\otimes\mathbf{z} + \\ & + (\tau_1 w_1 + \tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}], \\ \mathbf{M}_1 = {} & \tfrac{2}{3}\varepsilon^3[\lambda(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu\operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_1 + 2\eta\operatorname{sym}\nabla w_1\otimes\mathbf{z} + \tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}],\end{aligned} \tag{2.68}$$

alle quali applichiamo l'operatore di divergenza per avere:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{M}_0 = {} & 2\varepsilon[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2\nabla w_1 + \eta(\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{z}], \\ \operatorname{div}\mathbf{M}_1 = {} & \tfrac{2}{3}\varepsilon^3[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 + \eta\Delta w_1\mathbf{z}].\end{aligned} \tag{2.69}$$

Se sostituiamo le (2.68) e le (2.69) nelle equazioni di bilancio $(2.49)_{1,2}$ e $(2.50)_{1,2}$, otteniamo le equazioni di evoluzione della piastra rispettivamente in regime membranale e flessionale:

- (*regime membranale*)

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0) + \tau_2\nabla w_1 + (2\varepsilon)^{-1}{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q}_0^{ni} = \rho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0, \\ &\varepsilon^2\eta\Delta w_1 - 3\tau_2\,\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 - 3\tau_1 w_1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^{-1}\mathbf{z}\cdot\mathbf{q}_1^{ni} = \varepsilon^2\rho\ddot{w}_1, \end{aligned} \tag{2.70}$$

- (*regime flessionale*)

$$\begin{aligned} &\eta\,\operatorname{div}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) + (2\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}\cdot\mathbf{q}_0^{ni} = \rho\ddot{w}_0, \\ &\varepsilon^2\left[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda+\mu)\,\nabla\,(\operatorname{div}\,\bar{\mathbf{u}}_1)\right] - 3\eta\,(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) + \tfrac{3}{2}\varepsilon^{-1}{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q}_1^{ni} = \varepsilon^2\rho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1, \end{aligned} \tag{2.71}$$

I due moti simmetrici rispettivamente longitudinale ($\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_0$) e trasversale ($\mathbf{u} = w_1\mathbf{z}$) che costituiscono le incognite del problema (2.70), in [81] sono separati in due problemi detti di “symmetric thickness-shear” e di “symmetric thickness-stretch” tramite l’adozione di particolari ipotesi semplificative. Analogamente, Mindlin *et al.* in [51] separa le (2.71) in due set di equazioni: uno per i moti di taglio nello spessore ed uno per quelli puramente flessionali. Questo disaccoppiamento è esteso da Lee *et al.* in [34] al caso di piastra elettroelastica.

Alle (2.70) e (2.71) aggiungiamo le condizioni al contorno. Le condizioni di tipo geometrico sono assegnate quando si richiede l’appartenenza all’insieme (2.3) degli spostamenti cinematicamente ammissibili. Qualora si prescrivano spostamenti $(2.46)_1$ di tipo membranale, la condizione geometrica sul mantello diventa:

$$\mathbf{P}\mathbf{u}_m = \hat{\mathbf{u}}_m \ \text{ su } \partial\mathcal{M}\times[0,\,t_0), \tag{2.72}$$

con $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_p$ (vedi (1.34)). Il dato cinematico $\hat{\mathbf{u}}_m$ deve avere la forma

$$\hat{\mathbf{u}}_m = (\hat{\bar{\mathbf{u}}}_0 + \zeta\hat{w}_1\mathbf{z}), \tag{2.73}$$

e, perché sia soddisfatta la condizione di mutua consistenza (1.4), i campi $\hat{\bar{\mathbf{u}}}_0$ e $\hat{w}_1$ devono essere tali che:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\hat{\bar{\mathbf{u}}}_0 = \hat{w}_1(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Le (2.72) si riducono alle seguenti relazioni

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\bar{\mathbf{u}}_0 = \hat{\bar{\mathbf{u}}}_0, \\ &\mathbf{P}w_1\mathbf{z} = \hat{w}_1\mathbf{z}, \end{aligned}\right. \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0). \tag{2.74}$$

Le condizioni al bordo di tipo dinamico, dedotte dal principio delle potenze virtuali, sono le $(2.49)_{3,4}$ che riscriviamo:

$$\left.\begin{aligned} &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\mathbf{N}_0\boldsymbol{\nu}) = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_0, \\ &(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{N}_1\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{z}, \end{aligned}\right. \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0). \tag{2.75}$$

Le equazioni (2.74) e (2.75) equivalgono ad assegnazioni “complementanti” compiute nelle terne rispettivamente di tipo dinamico e statico

$$\begin{array}{llll} (& (N_0)_{\nu\nu} - (p_0)_\nu = 0, & (N_0)_{\tau\nu} - (p_0)_\tau = 0, & (N_1)_{z\nu} - (p_1)_z = 0 \quad), \\ (& (\bar{u}_0)_\nu = \hat{\bar{u}}_\nu, & (\bar{u}_0)_\tau = \hat{\bar{u}}_\tau, & w_1 = \hat{w}_1 \quad). \end{array}$$

dove $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\bar{\mathbf{u}}_1$ sono scritti in componenti rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})$ definita in ogni punto della frontiera $\partial\mathcal{P}$.

Riportiamo alcune delle condizioni al contorno piú ricorrenti. Le condizioni di bordo incastrato sono

$$(\bar{u}_0)_\nu = 0, \quad w_1 = 0,$$

alle quali si aggiunge la condizioni $(\bar{u}_0)_\tau = 0$ per avere incastro *duro*, o $(N_0)_{\nu\tau} = 0$ per avere incastro *soffice*. Le assegnazioni di appoggio *duro* sono

$$(N_0)_{\nu\nu} = 0, \quad (\bar{u}_0)_\tau = 0, \quad w_0 = 0,$$

e quelle di appoggio *soffice*:

$$(N_0)_{\nu\nu} = 0, \quad (\bar{u}_0)_\tau = 0, \quad (N_0)_{\nu\tau} = 0.$$

Analogamente, quando lo spostamento assunto è quello flessionale $(2.46)_2$, la condizione al contorno di tipo Dirichlet vale

$$\mathbf{P}\mathbf{u}_f = \hat{\mathbf{u}}_f, \text{ su } \partial\mathcal{M} \times [0, t_0),$$

con $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\hat{\mathbf{u}}_f = 0$, la quale, dopo aver obbligato $\hat{\mathbf{u}}_f$ ad avere la forma $\hat{\mathbf{u}}_f = \hat{w}_0\mathbf{z} + \zeta\hat{\bar{\mathbf{u}}}_1$, diventa

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}w_0\mathbf{z} = \hat{w}_0\mathbf{z}, \\ \mathbf{P}\bar{\mathbf{u}}_1 = \hat{\bar{\mathbf{u}}}_1, \end{array} \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0, t_0). \tag{2.76}$$

Le condizioni di tipo Neumann sono le $(2.50)_{3,4}$ che riscriviamo

$$\begin{array}{l} (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{N}_0\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{z}, \\ {}^s\mathbf{I}\,(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{N}_1\boldsymbol{\nu} = {}^s\mathbf{I}\,\mathbf{p}_1, \end{array} \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0, t_0). \tag{2.77}$$

Anche in questo caso le (2.76) e (2.77) sono equazioni scelte secondo il criterio della complementarietà dinamico-cinematica nelle seguenti liste

$$\begin{array}{llll} (& (N_0)_{z\nu} - (p)_{0_z} = 0, & (N_1)_{\nu\nu} - (p)_{1_\nu} = 0, & (N_1)_{\tau\nu} - (p)_{1_\tau} = 0 \quad), \\ (& w_0 = \hat{w}_0, & (\bar{u}_1)_\nu = \hat{\bar{u}}_\nu, & (\bar{u}_1)_\tau = \hat{\bar{u}}_\tau \quad), \end{array}$$

Riportiamo, anche in questo caso, alcune delle condizioni al contorno più ricorrenti: l'incastro *duro* richiede:

$$w_0 = 0, \quad (\bar{u}_1)_\nu = 0, \quad (\bar{u}_1)_\tau = 0,$$

l'incastro *soffice*:

$$w_0 = 0, \quad (\bar{u}_1)_\nu = 0, \quad (N_1)_{\nu\tau} = 0.$$

Le assegnazioni di appoggio *duro* sono

$$w_0 = 0, \quad (N_1)_{\nu\nu} = 0, \quad (\bar{u}_1)_\tau = 0,$$

e quelle di appoggio *soffice*:

$$w_0 = 0, \quad (N_1)_{\nu\nu} = 0, \quad (N_1)_{\nu\tau} = 0.$$

In [57] e [56] la teoria di ordine uno qui esposta è estesa al caso elettroelastico.

2.4 Piastre di ordine 3

In questo paragrafo dedurremo le equazioni delle piastre di ordine tre, trasversalmente isortrope, coerentemente orientate. Il campo di spostamenti che assumiamo è lo sviluppo polinomiale (2.9) arrestato all'ordine tre:

$$\mathbf{u}^{(3)}(x,\zeta,\,t) = \mathbf{u}_0(x,\,t) + \zeta\mathbf{u}_1(x,\,t) + \zeta^2\mathbf{u}_2(x,\,t) + \zeta^3\mathbf{u}_3(x,\,t), \tag{2.78}$$

il quale si scompone additivamente nelle due parti membranale e flessionale:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_m &= \bar{\mathbf{u}}_0 + \zeta w_1\mathbf{z} + \zeta^2\bar{\mathbf{u}}_2 + \zeta^3 w_3\mathbf{z},\\ \mathbf{u}_f &= w_0\mathbf{z} + \zeta\bar{\mathbf{u}}_1 + \zeta^2 w_2\mathbf{z} + \zeta^3\bar{\mathbf{u}}_3.\end{aligned} \tag{2.79}$$

Il tensore di deformazione associato allo spostamento $(2.79)_1$ è

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_m) = \mathbf{E}_0(\mathbf{u}_m) + \zeta\mathbf{E}_1(\mathbf{u}_m) + \zeta^2\mathbf{E}_2(\mathbf{u}_m) + \zeta^3\mathbf{E}_3(\mathbf{u}_m), \tag{2.80}$$

con

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_0(\mathbf{u}_m) = \operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_0 + w_1\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}, && \mathbf{E}_1(\mathbf{u}_m) = \operatorname{sym}(\nabla w_1 + 2\bar{\mathbf{u}}_2)\otimes\mathbf{z},\\ &\mathbf{E}_2(\mathbf{u}_m) = \operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_2 + 3w_3\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}, && \mathbf{E}_3(\mathbf{u}_m) = \operatorname{sym}(\nabla w_3\otimes\mathbf{z}),\end{aligned} \tag{2.81}$$

e quello associato al campo $(2.79)_2$ vale

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_f) = \mathbf{E}_0(\mathbf{u}_f) + \zeta\mathbf{E}_1(\mathbf{u}_f) + \zeta^2\mathbf{E}_2(\mathbf{u}_f) + \zeta^3\mathbf{E}_3(\mathbf{u}_f), \tag{2.82}$$

con

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_0(\mathbf{u}_f) = \operatorname{sym}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1)\otimes\mathbf{z}, && \mathbf{E}_1(\mathbf{u}_f) = \operatorname{sym}\nabla\bar{\mathbf{u}}_1 + 2w_2\mathbf{z}\otimes\mathbf{z},\\ &\mathbf{E}_2(\mathbf{u}_f) = \operatorname{sym}(\nabla w_2 + 3\bar{\mathbf{u}}_3)\otimes\mathbf{z}, && \mathbf{E}_3(\mathbf{u}_f) = \operatorname{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_3).\end{aligned} \tag{2.83}$$

Poichè la piastra è costituita da materiale omogeneo, trasversalmente isotropo, coerentemente orientato, i due regimi elastici membranale e flessionale sono disaccoppiati in due distinti problemi evolutivi, come già provato in § 2.2. Il tensore delle tensioni di tipo membranale vale

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}_m) = \mathbf{S}_0(\mathbf{u}_m) + \zeta\mathbf{S}_1(\mathbf{u}_m) + \zeta^2\mathbf{S}_2(\mathbf{u}_m) + \zeta^3\mathbf{S}_3(\mathbf{u}_m), \tag{2.84}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_m) &= 2\mu\operatorname{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_0) + [\lambda(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0) + \tau_2 w_1]^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + [\tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0) + \tau_1 w_1]\mathbf{z}\otimes\mathbf{z},\\ \mathbf{S}_1(\mathbf{u}_m) &= 2\mu\operatorname{sym}(\nabla w_1\otimes\mathbf{z} + 2\bar{\mathbf{u}}_2\otimes\mathbf{z}),\\ \mathbf{S}_2(\mathbf{u}_m) &= 2\mu\operatorname{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_2) + [\lambda(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2) + 3\tau_2 w_3]^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + [\tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2) + 3\tau_1 w_3]\mathbf{z}\otimes\mathbf{z},\\ \mathbf{S}_3(\mathbf{u}_m) &= 2\eta\operatorname{sym}(\nabla w_3\otimes\mathbf{z}),\end{aligned} \tag{2.85}$$

ed il tensore delle tensioni flessionali è:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}_f) = \mathbf{S}_0(\mathbf{u}_f) + \zeta\mathbf{S}_1(\mathbf{u}_f) + \zeta^2\mathbf{S}_2(\mathbf{u}_f) + \zeta^3\mathbf{S}_3(\mathbf{u}_f), \tag{2.86}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_f) &= 2\eta\operatorname{sym}(\nabla w_0\otimes\mathbf{z} + \bar{\mathbf{u}}_1\otimes\mathbf{z}),\\ \mathbf{S}_1(\mathbf{u}_f) &= 2\mu\operatorname{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_1) + [\lambda(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + 2\tau_2 w_2]^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + [\tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + 2\tau_1 w_2]\mathbf{z}\otimes\mathbf{z},\\ \mathbf{S}_2(\mathbf{u}_f) &= 2\eta\operatorname{sym}(\nabla w_2\otimes\mathbf{z} + 3\bar{\mathbf{u}}_3\otimes\mathbf{z}),\\ \mathbf{S}_3(\mathbf{u}_f) &= 2\mu\operatorname{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_3) + \lambda(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3)^{\mathrm{s}}\mathbf{I} + \tau_2(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3)\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}.\end{aligned} \tag{2.87}$$

Le equazioni di bilancio per il regime membranale sono le (2.23)-(2.24) nelle quali è fissato $N = 1$:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\operatorname{div}\mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0) = 2\varepsilon\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_2,\\
&\mathbf{z}\cdot(\operatorname{div}\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0\mathbf{z} + \mathbf{q}_1) = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{w}_1 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{w}_3,\\
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\operatorname{div}\mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1\mathbf{z} + \mathbf{q}_2) = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_2,\\
&\mathbf{z}\cdot(\operatorname{div}\mathbf{M}_3 - 3\mathbf{M}_2\mathbf{z} + \mathbf{q}_3) = \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{w}_1 + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\varrho\ddot{w}_3,
\end{aligned}\right\} \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0),\\
&\left.\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_0\boldsymbol{\nu} = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_0,\\
&\mathbf{z}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_1\boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{z},\\
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_2\boldsymbol{\nu} = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_2,\\
&\mathbf{z}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_3\boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_3\cdot\mathbf{z},
\end{aligned}\right\} \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Se esprimiamo le caratteristiche di sollecitazione in termini del campo di spostamenti $(2.79)_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0 &= 2\varepsilon\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_m) + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\mathbf{S}_2(\mathbf{u}_m), & \mathbf{M}_1 &= \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\mathbf{S}_1(\mathbf{u}_m) + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\mathbf{S}_3(\mathbf{u}_m),\\
\mathbf{M}_2 &= \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_m) + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\mathbf{S}_2(\mathbf{u}_m), & \mathbf{M}_3 &= \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\mathbf{S}_1(\mathbf{u}_m) + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\mathbf{S}_3(\mathbf{u}_m),
\end{aligned} \tag{2.89}$$

le $(2.88)_{1,2,3,4}$ diventano le equazioni di evoluzione per il regime membranale:

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2\nabla w_1] + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_2 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2 + 3\tau_2\nabla w_3]+\\
&+{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q} = 2\varepsilon\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_2,\\
&\tfrac{2}{3}\varepsilon^3\eta(\Delta w_1 + 2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2) + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\eta\Delta w_3 - 2\varepsilon(\tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_1 w_1) - \tfrac{2}{3}\varepsilon^3(\tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2 + 3\tau_1 w_3)+\\
&+\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{z} = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{w}_1 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{w}_3,\\
&\tfrac{2}{3}\varepsilon^3[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_0 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_2\nabla w_1] + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_2 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2 + 3\tau_2\nabla w_3]+\\
&-\tfrac{4}{3}\varepsilon^3\eta(\nabla w_1 + 2\bar{\mathbf{u}}_2) - \tfrac{4}{5}\varepsilon^5\eta\nabla w_3 + {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q}_2 = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_2,\\
&\tfrac{2}{5}\varepsilon^5\eta(\Delta w_1 + 2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2) + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\eta\Delta w_3 - 2\varepsilon^3(\tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_0 + \tau_1 w_1) - \tfrac{6}{5}\varepsilon^5(\tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_2 + 3\tau_1 w_3)+\\
&+\mathbf{q}_3\cdot\mathbf{z} = \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{w}_1 + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\varrho\ddot{w}_3,
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Analogamente per il regime flessionale, le equazioni di bilancio (2.26)-(2.27), una volta fissato $N = 1$, diventano:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\mathbf{z}\cdot(\operatorname{div}\mathbf{M}_0 + \mathbf{q}_0) = 2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{w}_2,\\
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\operatorname{div}\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0\mathbf{z} + \mathbf{q}_1) = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_3,\\
&\mathbf{z}\cdot(\operatorname{div}\mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_1\mathbf{z} + \mathbf{q}_2) = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{w}_0 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{w}_2,\\
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\operatorname{div}\mathbf{M}_3 - 3\mathbf{M}_2\mathbf{z} + \mathbf{q}_3) = \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1 + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_3,
\end{aligned}\right\} \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0),\\
&\left.\begin{aligned}
&\mathbf{z}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_0\boldsymbol{\nu} = \mathbf{z}\cdot\mathbf{p}_0,\\
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_1\boldsymbol{\nu} = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_1,\\
&\mathbf{z}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_2\boldsymbol{\nu} = \mathbf{z}\cdot\mathbf{p}_2,\\
&{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_3\boldsymbol{\nu} = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_3,
\end{aligned}\right\} \quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0),
\end{aligned} \tag{2.91}$$

e, se esprimiamo le caratteristiche di sollecitazione in termini del campo di spostamenti $(2.79)_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0 &= 2\varepsilon\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_f) + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\mathbf{S}_2(\mathbf{u}_f), & \mathbf{M}_1 &= \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\mathbf{S}_1(\mathbf{u}_f) + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\mathbf{S}_3(\mathbf{u}_f),\\
\mathbf{M}_2 &= \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_f) + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\mathbf{S}_2(\mathbf{u}_f), & \mathbf{M}_3 &= \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\mathbf{S}_1(\mathbf{u}_f) + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\mathbf{S}_3(\mathbf{u}_f),
\end{aligned} \tag{2.92}$$

le $(2.91)_{1,2,3,4}$ diventano le equazioni di evoluzione per il regime flessionale:

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon\eta(\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\eta(\Delta w_2 + 3\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3) + \mathbf{q}_0\cdot\mathbf{z} = 2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{w}_2,\\
&\tfrac{2}{3}\varepsilon^3[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 + 2\tau_2\nabla w_2] + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_3 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3]+\\
&-2\varepsilon\eta(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) - \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\eta(\nabla w_2 + 3\bar{\mathbf{u}}_3) + {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q}_1 = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_3,\\
&\tfrac{2}{3}\varepsilon^3\eta(\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1) + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\eta(\Delta w_2 + 3\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3) - \tfrac{4}{3}\varepsilon^3(\tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 + 2\tau_1 w_2)+\\
&-\tfrac{4}{5}\varepsilon^5\tau_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3 + \mathbf{q}_2\cdot\mathbf{z} = \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\ddot{w}_0 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{w}_2,\\
&\tfrac{2}{5}\varepsilon^5[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 + 2\tau_2\nabla w_2] + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_3 + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_3]+\\
&-2\varepsilon^3\eta(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) - \tfrac{6}{5}\varepsilon^5\eta(\nabla w_2 + 3\bar{\mathbf{u}}_3) + {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q}_3 = \tfrac{2}{5}\varepsilon^5\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1 + \tfrac{2}{7}\varepsilon^7\varrho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_3.
\end{aligned}\tag{2.93}$$

Osserviamo che le equazioni (2.90) e (2.93) si riducono alle (2.70) e (2.71) una volta posto $\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{0}$ e $w_2 = w_3 = 0$.

2.5 Teorie di piastre con vincoli interni

In questo paragrafo le teorie di Reissner-Mindlin e di Kirchhoff-Love sono presentate come casi particolari della teoria di ordine uno (paragrafo 2.3) nella quale sono aggiunte le condizioni di vincolo (1.66)-(1.68) e (1.66)-(1.67) rispettivamente.

2.5.1 Piastra di Reissner-Mindlin

Iniziamo dalla teoria di Reissner-Mindlin (*vid.* [68], [69], [45], [44]). Nella seguente esposizione facciamo riferimento a [54] e [36] e rimandiamo a [46] per l'estensione della teoria al caso elettroelastico.

Il campo di spostamenti assunto, come già accennato nel paragrafo 1.8, è

$$\mathbf{u}_{_{RM}}(x,\zeta,t) = w_0(x,t)\mathbf{z} + \zeta\bar{\mathbf{u}}_1(x,t), \quad \bar{\mathbf{u}}_1(x,t)\cdot\mathbf{z} = 0, \tag{2.94}$$

il quale concede alla generica fibra di piastra $\{x\}\times\mathcal{I}$ la possibilità di muoversi rigidamente nella direzione trasversale e ruotare senza permetterle di estendersi. Il tensore delle deformazioni si scrive:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_{_{RM}}) = \zeta\,\mathrm{sym}({}^{\mathrm{s}}\nabla\,\bar{\mathbf{u}}_1) + \mathbf{z}\otimes\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1\otimes\mathbf{z}, \tag{2.95}$$

e soddisfa l'equazione di vincolo interno

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_{_{RM}})\cdot\mathbf{z}\otimes\mathbf{z} = 0, \tag{2.96}$$

che impone l'inestensibilità nella direzione $\mathbf{z}$. Lo *spazio di vincolo* è costituito dall'insieme

$$\mathcal{M}_{_{RM}} = \{\mathbf{A}\in\mathrm{Sym}\ \text{ tale che }\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{z}\otimes\mathbf{z} = 0\ \}, \tag{2.97}$$

e il *gruppo di vincolo* associato è rappresentato da tutte le rotazioni intorno all'asse $\mathbf{z}$:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}} = \mathrm{Rot}(\mathbf{z}).$$

Il più ampio gruppo di simmetrie materiali che soddisfa la relazione di compatibilità (1.87) è quello che caratterizza un materiale trasversalmente isotropo, coerentemente orientato. Assumiamo quindi quest'ultimo legame costitutivo, il cui tensore di elasticità (2.61), una volta introdotto il vincolo (2.96), si modifica così:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{RM} \;=\;& (2\mu+\lambda)(\mathbf{X}_1\otimes\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\otimes\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_6\otimes\mathbf{X}_6)+\\ &+\lambda(\mathbf{X}_1\otimes\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_2\otimes\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_6\otimes\mathbf{X}_6)+\\ &+2\eta(\mathbf{X}_4\otimes\mathbf{X}_4+\mathbf{X}_5\otimes\mathbf{X}_5).\end{aligned} \tag{2.98}$$

Questa formula si ottiene applicando la tecnica di *rappresentazione vincolata* mostrata nel paragrafo 1.9 (*vid.* [64], [54]). Il tensore degli sforzi si scompone additivamente in questo modo

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}^A+\mathbf{S}^R, \tag{2.99}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^A &= \mathbb{C}_{RM}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_{RM})]\in\mathcal{M}_{RM},\\ \mathbf{S}^R &= \sigma\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Analogamente le caratteristiche di sollecitazione $(2.5)_1$ si scompongono in parte attiva e reattiva:

$$\mathbf{M}_i=\mathbf{M}_i^A+\mathbf{M}_i^R,\quad i=0,\,1,$$

con

$$\mathbf{M}_i^A=\int_{\mathcal{I}}\zeta^i\mathbf{S}^A,\qquad \mathbf{M}_i^R=\int_{\mathcal{I}}\zeta^i\sigma\mathbf{z}\otimes\mathbf{z}.$$

Dopo aver specializzato gli spazi degli spostamenti ammissibili vincolati (1.80) e delle velocità test (1.81) al caso di campi di spostamento di Reissner-Mindlin (2.94), dall'equazione delle potenze virtuali (1.82) si ricavano le seguenti equazioni di bilancio

$$\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&\mathbf{z}\cdot({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_0^A+\mathbf{q}_0^{ni})=2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0,\\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,({}^{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{M}_1^A-\mathbf{M}_0^A\mathbf{z}+\mathbf{q}_1^{ni})=\frac{2}{3}\varepsilon^3\rho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1,\end{aligned}\right.\quad \text{su } \mathcal{P}\times[0,\,t_0),\\ &\left.\begin{aligned}&\mathbf{z}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_0^A\boldsymbol{\nu}=\mathbf{z}\cdot\mathbf{p}_0,\\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_1^A\boldsymbol{\nu}={}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_1,\end{aligned}\right.\quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0),\end{aligned} \tag{2.101}$$

che coinvolgono solo le caratteristiche di sollecitazione attive e sono note come equazioni di Reissner-Mindlin. Se esprimiamo il tensore degli sforzi attivi in termini del campo di spostamenti:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^A(\mathbf{u}_{RM})=\mathbb{C}_{RM}[\mathbf{E}(\mathbf{u}_{RM})]=\;&\lambda\zeta(\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}_1)^{\mathrm{s}}\mathbf{I}+2\mu\zeta\,\mathrm{sym}(\nabla\bar{\mathbf{u}}_1)+\\ &+2\eta\,\mathrm{sym}(\nabla w_0+\bar{\mathbf{u}}_1)\otimes\mathbf{z},\end{aligned} \tag{2.102}$$

le caratteristiche delle forze e dei momenti attivi diventano:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_0^A &= 4\varepsilon\eta\,\mathrm{sym}(\nabla w_0+\bar{\mathbf{u}}_1)\otimes\mathbf{z},\\ \mathbf{M}_1^A &= \tfrac{2}{3}\varepsilon^3[\lambda(\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}_1)^{\mathrm{s}}\mathbf{I}+2\mu\,\mathrm{sym}\,\nabla\bar{\mathbf{u}}_1],\end{aligned} \tag{2.103}$$

così che le equazioni di campo $(2.101)_{1,2}$ si riscrivono in termini del campo di spostamenti:

$$\begin{aligned}&\eta\,\mathrm{div}\,(\nabla w_0+\bar{\mathbf{u}}_1)+(2\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}\cdot\mathbf{q}_0^{ni}=\rho\ddot{w}_0,\\ &\varepsilon^2\,[\mu\Delta\bar{\mathbf{u}}_1+(\lambda+\mu)\,\nabla\,(\mathrm{div}\;\bar{\mathbf{u}}_1)]-3\eta\,(\nabla w_0+\bar{\mathbf{u}}_1)+\tfrac{3}{2}\varepsilon^{-1}{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{q}_1^{ni}=\varepsilon^2\rho\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1,\end{aligned} \tag{2.104}$$

le quali sono proprio le equazioni di evoluzione (2.71) di ordine uno per il regime flessionale. Alle equazioni (2.104) si aggiungono le condizioni al contorno

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_0^A\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{z},\\ {}^{s}\mathbf{I}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_1^A\boldsymbol{\nu}={}^{s}\mathbf{I}\,\mathbf{p}_1,\\ \mathbf{P}w_0\mathbf{z}=\hat{w}_0\mathbf{z},\\ \mathbf{P}\bar{\mathbf{u}}_1=\hat{\bar{\mathbf{u}}}_1,\end{array}\right.\quad \text{su } \partial\mathcal{P}\times[0,\,t_0). \tag{2.105}$$

Una volta determinata la coppia di descrittori cinematici $(w_0,\,\bar{\mathbf{u}}_1)$, rimane da definire il valore del moltiplicatore $\sigma(x,\zeta)$ nello sforzo reattivo $(2.100)_2$ per mezzo delle equazioni (1.79). Dal'equazione $(1.79)_1$ proiettata nella direzione $\mathbf{z}$ abbiamo:

$$\sigma'=-\mathbf{z}\cdot\operatorname{div}\mathbf{S}^A-\mathbf{b}^{ni}\cdot\mathbf{z}+\varrho\ddot{w}_0,$$

la quale, essendo

$$\mathbf{z}\cdot\operatorname{div}\mathbf{S}^A=\eta(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1+\Delta w_0),$$

diventa

$$\sigma'=-\eta(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1+\Delta w_0)-\mathbf{b}^{ni}\cdot\mathbf{z}+\varrho\ddot{w}_0.$$

Se integriamo quest'ultima relazione nell'intervallo $(-\varepsilon,\zeta)$ e sfruttiamo la condizione al contorno

$$\sigma(x,-\varepsilon)=-\hat{\mathbf{s}}^-(x)\cdot\mathbf{z},$$

otteniamo:

$$\sigma(x,\zeta)=-\eta\varepsilon(1+\frac{\zeta}{\varepsilon})(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1+\Delta w_0)-\hat{\mathbf{s}}^-\cdot\mathbf{z}-\int_{-\varepsilon}^{\zeta}\mathbf{b}^{ni}\cdot\mathbf{z}+\varrho\varepsilon(1+\frac{\zeta}{\varepsilon})\ddot{w}_0,$$

ed infine, utilizzando l'equazione $(2.104)_2$, abbiamo:

$$\sigma(x,\zeta)=\frac{1}{2}(\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{z})(1+\frac{\zeta}{\varepsilon})-\hat{\mathbf{s}}^-\cdot\mathbf{z}-\int_{-\varepsilon}^{\zeta}\mathbf{b}^{ni}\cdot\mathbf{z},$$

nella quale la tensione reattiva è espressa in termini dei soli carichi esterni.

2.5.2 Piastra di Kirchhoff-Love

Passiamo alla teoria di Kirchhoff-Love [26], [42]. Per una più dettagliata trattazione rimandiamo a [62]. Prescriviamo il campo di spostamenti nella forma

$$\mathbf{u}_{KL}(x,\zeta,\,t)=w_0(x,\,t)\mathbf{z}-\zeta\nabla w_0(x,\,t) \tag{2.106}$$

dove w_0 rappresenta lo spostamento trasversale del piano medio ed è l'unica grandezza cinematica incognita. Il gradiente dello spostamento è:

$$\nabla\mathbf{u}_{KL}=\mathbf{z}\otimes\nabla w_0-\zeta\nabla^{(2)}w_0-\nabla w_0\otimes\mathbf{z}, \tag{2.107}$$

e poichè $\mathbf{z}\otimes\nabla w_0(x)-\nabla w_0(x)\otimes\mathbf{z}$ è antisimmetrico, il tensore delle deformazioni si riduce al solo termine:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_{KL})=\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u}_{KL})=-\zeta\nabla^{(2)}w_0. \tag{2.108}$$

che soddisfa la condizione di vincolo

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_{KL})\mathbf{z} = 0. \tag{2.109}$$

Osserviamo che le uniche componenti non nulle del tensore di deformazione sono le elongazioni $\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{E}\mathbf{c}_\alpha$ delle fibre parallele alle direzioni $\mathbf{c}_\alpha$ e lo scorrimento $\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{E}\mathbf{c}_\beta$ tra due fibre parallele rispettivamente a $\mathbf{c}_\alpha$ e $\mathbf{c}_\beta$ (con $\alpha \neq \beta$). Il campo di spostamenti (2.106) conserva la lunghezza e l'ortogonalità al piano medio della generica fibra $\{x\} \times \mathcal{I}$. La (2.109) si può riscrivere

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_{KL}) \cdot \mathrm{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{z}) = 0, \quad \forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.110}$$

per mezzo del tensore di vincolo $\mathrm{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{z})$. Segue che lo spazio di vincolo associato è:

$$\mathcal{M}_{KL} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \mid \mathbf{A} \cdot \mathrm{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{z}) = 0\ , \quad \forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}, \tag{2.111}$$

ed il tensore di elasticità trasversalmente isotropo (2.61), in presenza della condizione di vincolo di Kirchhoff-Love (2.110), si riduce alla forma (*vid.* [64] §18, [62]):

$$\mathbb{C}_{KL} = 2\mu^{\mathrm{s}}\mathbb{I} + \lambda^{\mathrm{s}}\mathbf{I} \otimes {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}, \tag{2.112}$$

dove ${}^{\mathrm{s}}\mathbb{I}$ e ${}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} \otimes {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}$ operano nel seguente modo

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{s}}\mathbb{I}[\mathbf{A}] = {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{A}\,{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}^{\mathrm{T}} \\ &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} \otimes {}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,[\mathbf{A}] = ({}^{\mathrm{s}}\mathbf{I} \cdot \mathbf{A})\,{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,, \ \ \forall\ \mathbf{A} \in \mathrm{Lin}. \end{aligned}$$

Il tensore degli sforzi si scompone additivamente nella sua parte attiva

$$\mathbf{S}^{A}(x, \zeta,\, t) = -\zeta\bar{\mathbf{S}}(x,\, t), \tag{2.113}$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(x,\, t) &= \mathbb{C}_{KL}[\bar{\mathbf{E}}(x,\, t)], \\ \bar{\mathbf{E}}(x,\, t) &= \nabla^{(2)} w_0(x,\, t), \end{aligned} \tag{2.114}$$

e reattiva:

$$\mathbf{S}^{R}(x, \zeta,\, t) = \mathrm{sym}\,\boldsymbol{\tau}(x, \zeta,\, t) \otimes \mathbf{z} + \sigma(x, \zeta,\, t)\,\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}, \tag{2.115}$$

con $\boldsymbol{\tau}$ e σ rispettivamente sforzi di taglio e normale nelle giaciture parallele al piano medio $\mathcal{P}$.

Aggiungiamo alcune ipotesi sui carichi. Assumiamo che le azioni superficiali sulle basi siano dirette solo nella direzione trasversale $\mathbf{z}$ e che le azioni di volume non inerziali siano nulle:

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\hat{\mathbf{s}}^{\pm}(x, \pm\varepsilon) = \pm{}^{\mathrm{s}}\mathbf{I}\,\mathbf{S}(x, \pm\varepsilon,\, t)\mathbf{z} = 0 \qquad && \text{su } \mathcal{P}^{\pm} \times [0,\, t_0), \\ &\mathbf{b}^{ni}(x, \pm\zeta,\, t) = 0 && \text{in } \Omega \times [0,\, t_0). \end{aligned} \tag{2.116}$$

Se specializziamo gli spazi degli spostamenti ammissibili vincolati (1.80) e delle velocità test (1.81) al caso di campi di spostamento di Kirchhoff-Love (2.106), l'equazione delle potenze virtuali (1.82) si riscrive:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{P}} (\frac{2}{3}\varepsilon^3 \varrho \ \mathrm{div}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{s}}^{\pm} \cdot \mathbf{z} + 2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0 - \frac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\Delta\ddot{w}_0)v + \\ &+ \int_{\partial\mathcal{P}} [\frac{2}{3}\varepsilon^3(-\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{S}} + \varrho\nabla\ddot{w}_0) \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{z}]v + (\mathbf{p}_1 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla v = 0, \end{aligned} \tag{2.117}$$

qualunque sia il campo test v. Per l'arbitrarietà e la localizzabilità del campo v, dal primo integrale della (2.117) si ottiene l'equazione di campo:

$$p - \frac{2}{3}\varepsilon^3 \ \mathrm{div}(\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{S}}) + \frac{2}{3}\varepsilon^3 \varrho\ ^{\mathrm{s}}\Delta\ddot{w} - 2\varepsilon\varrho\ddot{w} = 0, \quad \text{con } p = (\hat{\mathbf{s}}^+ + \hat{\mathbf{s}}^-)\cdot\mathbf{z}, \tag{2.118}$$

definita su $\mathcal{P} \times [0,\, t_0)$, la quale, grazie alle (2.112) e (2.114), si riscrive in termini del descrittore cinematico incognito w_0 nel modo seguente

$$p - \mathcal{D}(\varepsilon)\Delta\Delta w_0 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\Delta\ddot{w}_0 - 2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0 = 0, \tag{2.119}$$

dove

$$\mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{2}{3}\varepsilon^3(2\mu + \lambda) \tag{2.120}$$

è la rigidezza flessionale della piastra e dipende sia dai coefficienti costitutivi μ e λ che dal semi-spessore ε. Se nella (2.119) si trascura l'inerzia rotazionale $2/3\varepsilon^3\varrho^{\mathrm{s}}\Delta\ddot{w}_0$ (*vid* [27] § 2.5), si ottiene la nota *equazione di Kirchhoff-Love*.

Prima di enunciare le condizioni al bordo modifichiamo opportunamente il secondo integrale della (2.117). Definita in ogni punto x di $\partial\mathcal{P}$ la terna ortonormale di versori $(\boldsymbol{\nu},\, \boldsymbol{\tau},\, \mathbf{z})$ $(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{z})$, il gradiente superficiale di v si può esprimere in termini delle derivate nelle direzioni $\boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\tau}$:

$$\nabla v = (\partial_{\boldsymbol{\nu}} v)\boldsymbol{\nu} + (\partial_{\boldsymbol{\tau}} v)\boldsymbol{\tau},$$

e quindi, se chiamiamo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}_1 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}$, nella (2.117), il secondo termine dell'integrale su $\partial\mathcal{P}$ si modifica così:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\mathcal{P}}(\mathbf{p}_1 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu})\cdot\nabla v = \int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v = \int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{\alpha}\cdot[(\partial_{\boldsymbol{\nu}} v)\boldsymbol{\nu} + (\partial_{\boldsymbol{\tau}} v)\boldsymbol{\tau}] = \\ &= \int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}(\partial_{\boldsymbol{\nu}} v) + \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}v) - \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau})v = \int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}(\partial_{\boldsymbol{\nu}} v) - \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau})v.\end{aligned} \tag{2.121}$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il dominio di integrazione $\partial\mathcal{P}$ è supposto essere una curva chiusa regolare e quindi

$$\int_{\partial\mathcal{P}}\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}v) = 0.$$

Nell'equazione (2.117), l'integrale sulla frontiera si riscrive

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\mathcal{P}}[\frac{2}{3}\varepsilon^3(-\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{S}} + \varrho\nabla\ddot{w}_0)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{2}{3}\varepsilon^3\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{z} - \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p}_1\cdot\boldsymbol{\tau})]v + \\ &+(\mathbf{p}_1\cdot\boldsymbol{\nu} + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})\cdot\partial_{\boldsymbol{\nu}} v,\end{aligned} \tag{2.122}$$

e segue che le condizioni al contorno possono essere scelte in maniera "complementante" tra le seguenti due coppie di equazioni definite su $\partial\mathcal{P} \times [0,\, t_0)$:
condizioni di tipo cinematico

$$\begin{aligned}w_0(x) &= \hat{w}_0(x), \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} w_0(x) &= \partial_{\boldsymbol{\nu}}\hat{w}_0(x),\end{aligned} \tag{2.123}$$

condizioni di tipo dinamico

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{3}\varepsilon^3(-\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{S}} + \varrho\nabla\ddot{w}_0)\cdot\boldsymbol{\nu} - \tfrac{2}{3}\varepsilon^3\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{z} + \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p}_1\cdot\boldsymbol{\tau}), \\ &\tfrac{2}{3}\varepsilon^3\bar{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{p}_1\cdot\boldsymbol{\nu}.\end{aligned} \tag{2.124}$$

Le (2.123) richiedono l'assegnazione di un campo di spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ sul mantello che abbia la stessa forma del campo di Kirchhoff-Love:

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{w}_0 \mathbf{z} - \zeta \nabla \hat{w}_0. \tag{2.125}$$

Le tensioni reattive $\sigma(x, \zeta, t)$ e $\boldsymbol{\tau}(x, \zeta, t)$ si ricavano dalle equazioni di bilancio $(1.78)_1$, che riscriviamo così:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S}^A + \boldsymbol{\tau}' &= -\varrho \nabla \ddot{w}_0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \sigma' &= \varrho \ddot{w}_0. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Se integriamo la $(2.126)_1$ nell'intervallo $(-\varepsilon, \zeta)$ e ricordiamo la (2.113), otteniamo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \int_{-\varepsilon}^{\zeta} z(\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} - \varrho \nabla \ddot{w}_0)\, dz = \\ &= \frac{1}{2}((\frac{\zeta}{\varepsilon})^2 - 1)\varepsilon^2(\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} - \varrho \nabla \ddot{w}_0). \end{aligned} \tag{2.127}$$

Analogamente, se integriamo la $(2.126)_2$ nell'intervallo $(-\varepsilon, \zeta)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma &= \hat{\mathbf{s}}^- \cdot \mathbf{z} + \int_{-\varepsilon}^{\zeta} z(-\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \varrho \ddot{w}_0)\, dz = \\ &= \hat{\mathbf{s}}^- \cdot \mathbf{z} + (\frac{1}{6}(\frac{\zeta}{\varepsilon})^3 - \frac{\zeta}{2\varepsilon} - \frac{1}{3})\varepsilon^3(\operatorname{div}\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} - \varrho \Delta \ddot{w}_0) + 2\varepsilon \varrho \ddot{w}_0. \end{aligned} \tag{2.128}$$

Osserviamo che le tensioni reattive $\boldsymbol{\tau}$ e σ sono rispettivamente quadratiche e cubiche rispetto alla coordinata trasversale ζ. Definiamo

$$\mathbf{Q}^{R}(x,\, t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \boldsymbol{\tau}(x, \zeta,\, t), \tag{2.129}$$

$$\mathbf{M}_1^{A}(x,\, t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta \mathbf{S}^A(x, \zeta,\, t), \tag{2.130}$$

rispettivamente *risultante dei tagli* e *risultante dei momenti* attivi. Se sostituiamo la (2.127) nella (2.129) e la (2.113) nella (2.130), otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{R}(x,\, t) &= -\tfrac{2}{3}\varepsilon^3(\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} - \varrho \nabla \ddot{w}_0), \\ \mathbf{M}_1^{A}(x,\, t) &= -\tfrac{2}{3}\varepsilon^3 \bar{\mathbf{S}}, \end{aligned} \tag{2.131}$$

e le condizioni al contorno dinamiche (2.124) si possono riformulare così:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}^{R} \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{z} + \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}), \\ &\mathbf{M}_1^{A} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \tag{2.132}$$

dove il termine

$$\mathbf{Q}^{R} \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{M}_1^{A} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau})$$

nel primo membro della prima equazione è noto come *taglio efficacie di Kirchhoff.*

Osservazione. Mostriamo come la teoria di piastra di Kirchhoff-Love si possa riguardare come un caso particolare della teoria Reissner-Mindlin, scegliendo opportunamente la cinematica e le condizioni al bordo. Se poniamo

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = 0$$

nella (2.94), il campo di spostamenti di Reissner-Mindlin diventa:

$$\mathbf{u}_{_{RM}}(x,\zeta,t) = w_0\mathbf{z} + \zeta\bar{\mathbf{u}}_1(x,t), \quad \bar{\mathbf{u}}_1(x,t)\cdot\mathbf{z} = 0, \tag{2.133}$$

il quale si riduce a quello di Kirchhoff-Love (2.106) se si richiede che

$$\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0}. \tag{2.134}$$

Scriviamo la divergenza di quest'ultima relazione:

$$\Delta w_0 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 = 0. \tag{2.135}$$

Se si applica l'operatore di divergenza ad ambo i membri della $(2.104)_3$, grazie alle ipotesi di Kirchhoff-Love sui carichi (2.116) e grazie alla (2.135), questa diventa

$$\varepsilon^2(2\mu+\lambda)\Delta\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_1 - 3\eta\operatorname{div}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) = \varepsilon^2\varrho\operatorname{div}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_1. \tag{2.136}$$

Dalla $(2.104)_2$ si ha

$$\eta\operatorname{div}(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) = \rho\ddot{w}_0 - (2\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}\cdot\mathbf{q}^{ni}.$$

Se sostituiamo questa relazione nella (2.136), poi usiamo la (2.135), arriviamo alla equazione di Kirchhoff-Love

$$p - \mathcal{D}(\varepsilon)\Delta\Delta w_0 + \frac{2}{3}\varepsilon^3\varrho\Delta\ddot{w}_0 - 2\varepsilon\varrho\ddot{w}_0 = 0, \;\; \text{con } \mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{2}{3}\varepsilon^3(2\mu+\lambda), \;\; \text{e } \; p = \mathbf{z}\cdot\mathbf{q}_0^{ni}. \tag{2.137}$$

Per quanto riguarda le condizioni sul bordo $\partial\mathcal{P}\times[0,\, t_0)$, moltiplichiamo la (2.134) scalarmente per il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$. Otteniamo:

$$\boldsymbol{\tau}\cdot(\nabla w_0 + \bar{\mathbf{u}}_1) = (w_0)_{,\boldsymbol{\tau}} + (\bar{u}_1)_{\boldsymbol{\tau}} = 0, \tag{2.138}$$

e quindi se la piastra è appoggiata o incastrata, la condizione $w_0 = 0$ e la (2.138) richiedono che $(\bar{u}_1)_\tau = 0$, ossia che il vincolo sia *duro*. Concludiamo che, se assumiamo condizioni ai limiti di tipo *morbido* e facciamo tendere il problema di Reissner-Mindlin a quello di Kirchhoff-Love, otteniamo un problema sovradimensionato al bordo la cui soluzione non sempre esiste. □