Capitolo 1

Deduzione delle equazioni dinamiche delle piastre

1.1 Principio delle potenze virtuali

In questo paragrafo, il problema dell'equilibrio elastico tridimensionale è presentato nel formato del principio delle potenze virtuali. Questo principio, viene qui adoperato nella forma adatta all'elasticità lineare ed utilizzato per dedurre le teorie di piastre che considereremo. Mutueremo in parte sviluppi e notazioni da [64] e [18].

Innanzitutto prescriviamo i dati del problema. Assegnamo un intervallo di tempo $[0, t_0) \subset$ $\mathbb{R}$ ed un corpo $\mathcal{B}$ che identifichiamo con la regione regolare[1] dello spazio Euclideo $\mathcal{E}$ occupata nell'istante iniziale $t = 0$. Un punto tipico del prodotto cartesiano $\mathcal{B} \times [0, t_0)$ è una coppia $(p,\, t)$ composta dalla posizione materiale p nella configurazione di riferimento e dall'istante di tempo t.

Assegnamo poi i dati cinematici e dinamici. Descriviamo il moto del corpo $\mathcal{B}$ con la funzione $f : \mathcal{B} \times [0,\, t_0) \mapsto \mathcal{E}$ ed indichiamo con

$$\mathbf{u}(p,\, t) = f(p,\, t) - p,$$

il vettore spostamento del punto p all'istante t. Denotiamo inoltre con $\mathbf{S}(p, t)$ il tensore degli sforzi di Cauchy definito in $\bar{\mathcal{B}} \times [0,\, t_0)$, con $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$. Dopo aver diviso la frontiera $\partial\mathcal{B}$ nelle due parti $\partial_1\mathcal{B}$ e $\partial_2\mathcal{B}$ tali che

$$\begin{aligned} \partial_1\mathcal{B} \cap \partial_2\mathcal{B} &= \varnothing, \\ \partial_1\mathcal{B} \cup \partial_2\mathcal{B} &= \partial\mathcal{B}, \end{aligned}$$

le condizioni che usualmente si prescrivono sul bordo del corpo (*vid.* [21] § *32* o [20] § *62*) sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(p,\, t) &= \hat{\mathbf{u}}(p), \;\; \text{su } \partial_1\mathcal{B} \times [0,\, t_0), \\ \mathbf{S}(p,\, t)\boldsymbol{\nu} &= \hat{\mathbf{s}}(p), \;\; \text{su } \partial_2\mathcal{B} \times [0,\, t_0), \end{aligned} \tag{1.1}$$

[1] Una regione $\mathcal{B} \in \mathcal{E}$ è regolare se è limitata e la sua frontiera $\partial\mathcal{B}$ è l'unione di un numero finito di superfici di classe $\mathcal{C}^1$. Su $\partial\mathcal{B}$ è definito quasi ovunque il campo $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(p)$ dei versori della normale esterna.

dove $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{s}}$ sono campi di spostamento e di forze superficiali assegnati.

Le (1.1) risultano, però, inadeguate per la formulazione di molte teorie strutturali. Ci sono problemi, infatti, in cui, sui punti della frontiera $\partial\mathcal{B}$, si richiedono condizioni al contorno di tipo misto, e cioè sia cinematiche che dinamiche. Pensiamo, ad esempio, al vincolo di appoggio in presenza del quale sono assegnati lo spostamento nella direzione normale $\boldsymbol{\nu}$ ed il carico nel piano tangente. Le (1.1) esprimono invece solo condizioni o puramente geometriche o puramente dinamiche per i punti della frontiera, senza contemplare la possibilità di assegnazioni miste.

Ci proponiamo allora di introdurre condizioni al contorno di tipo misto. Due in particolare: dato il generico punto $p \in \partial\mathcal{B}$, la prima assegna in p lo spostamento nella direzione $\boldsymbol{\nu}$ normale al contorno e la trazione nel piano tangente; la seconda assegna trazione e spostamento, rispettivamente, nella direzione normale e nel piano tangente.

Per modellare queste nuove prescrizioni, introduciamo il tensore $\mathbf{P}$, definito su $\partial\mathcal{B}$, i cui valori sono i proiettori ortogonali che appartengono alla seguente lista:

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{I}, \mathbf{0}; \boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}, \mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}\}. \tag{1.2}$$

Si può dimostrare che il problema elastico lineare è "ben posto", ossia, secondo la nozione di Hadamard, la sua soluzione esiste, è unica e dipende con continuità dai dati, se, in ogni punto della frontiera $\partial\mathcal{B}$, è assegnato uno dei due termini della combinazione $\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}$.

Se scriviamo il prodotto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}$ dei vettori di spostamento e di trazione nel seguente modo:

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{P} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}))\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{1} - \mathbf{P})\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{u}, \tag{1.3}$$

assegnazioni compatibili sono lo spostamento $\mathbf{P}\mathbf{u}$ e la trazione $(\mathbf{1} - \mathbf{P})\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}$. Diciamo che le condizioni cinematiche e dinamiche sono assegnate in maniera "complementante". Data la terna $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \mathbf{P})$ definita su $\partial\mathcal{P}$, nella quale $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$ e i campi di spostamento $\hat{\mathbf{u}}$ e di forze superficiali $\hat{\mathbf{s}}$ soddisfano i requisiti di mutua consistenza

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}(p))\hat{\mathbf{u}}(p) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(p)\hat{\mathbf{s}}(p) = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$

le condizioni al contorno (1.1) sono sostituite dalle seguenti relazioni

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}(p)\mathbf{u}(p,\, t) = \hat{\mathbf{u}}(p), \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}(p))\mathbf{S}(p,\, t)\boldsymbol{\nu} = \hat{\mathbf{s}}(p), \end{array} \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{B}\times[0,\, t_0). \tag{1.5}$$

Osserviamo che quando si assegnano a $\mathbf{P}$ i valori $\mathbf{I}$ e $\mathbf{0}$ rispettivamente sulle parti della frontiera $\partial_1\mathcal{B}$ e $\partial_2\mathcal{B}$, allora si hanno le equazioni (1.1). L'assegnazione $\mathbf{P} = \boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}$ permette di definire condizioni di spostamento nella direzione $\boldsymbol{\nu}$ e di trazione nel piano tangente e la posizione $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}$ consente le condizioni complementari.

In [56] l'assegnazione di dati al contorno compatibili di tipo misto è estesa al caso elettroelastico.

Diciamo che un moto è ammissibile se $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$, $\operatorname{sym}\nabla\mathbf{u}$ e $\operatorname{sym}\nabla\dot{\mathbf{u}}$ sono continui su $\bar{\mathcal{B}}\times[0,\, t_0)$; un moto ammissibile è detto cinematicamente ammissibile se verifica le condizioni al contorno cinematiche $(1.5)_1$.

Definiamo la famiglia delle velocità test $\mathcal{T}$ come l'insieme di tutti i campi vettoriali $\mathbf{v} : \bar{\mathcal{B}} \mapsto \mathcal{V}$ che soddisfano i seguenti requisiti:

1. in ogni istante di tempo fissato $t \in [0, t_0)$, l'insieme $\mathcal{T}$ include tutte le velocità realizzabili, ossia, tutte le velocità
$$\mathbf{v}(p) = \dot{\mathbf{u}}(p, t), \text{ con } \mathbf{u} \text{ spostamento cinematicamente ammissibile;} \tag{1.6}$$

2. $\mathcal{T}$ è chiuso rispetto all'operazione di addizione di campi di velocità rigida, ossia, data una generica velocità rigida $\mathbf{v}_r$ in un istante $t \in [0, t_0)$ fissato, allora
$$(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \in \mathcal{T}$$
qualunque sia $\mathbf{v} \in \mathcal{T}$. In elasticità lineare una velocità rigida, ha una rappresentazione analoga a quella di un spostamento rigido infinitesimo:
$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 + \mathbf{W}(p - o),$$
con $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$;

3. l'insieme $\mathcal{T}$ è sufficientemente ricco di campi regolari definiti su supporto piccolo a piacere da essere valido il teorema di localizzazione in qualsiasi punto di $\mathcal{B}$ e della sua frontiera $\partial\mathcal{B}$.

L'insieme $\mathcal{T}$ delle velocità test è altrimenti chiamato insieme delle velocità virtuali.

Definiamo i seguenti funzionali su $\mathcal{T}$:

- la *potenza delle forze*
$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}, \tag{1.7}$$
dove $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\cdot, t)$ e $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}(\cdot, t)$ sono le forze di volume e superficiale presenti, rispettivamente, in $\mathcal{B}$ e $\partial\mathcal{B}$ nell'istante di tempo $t \in [0, t_0)$ fissato. La forza di volume $\mathbf{b}$ si scompone nella somma della parte non inerziale ed inerziale:
$$\mathbf{b}(p) = \mathbf{b}^{ni}(p, t) - \varrho(p)\ddot{\mathbf{u}}(p, t),$$
dove la funzione scalare $\varrho(p)$ definita in $\mathcal{B}$ rappresenta la densità di massa. Osserviamo che
$$\int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} = \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{I} - \mathbf{P})\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}, \tag{1.8}$$
poiché
$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{P}\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1.9}$$
in quanto le velocità realizzabili includono tutte le velocità cinematicamente ammissibili per le quali $\mathbf{P}\mathbf{v}(p) = \mathbf{P}\dot{\mathbf{u}}(p, t) = 0$ su $\partial\mathcal{B}$;

- la *potenza degli sforzi*
$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v}. \tag{1.10}$$

Chiamiamo *potenza totale* la loro differenza:

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}. \tag{1.11}$$

Enunciamo il problema dell'equilibrio nella forma del

Principio delle Potenze Virtuali.
Fissato un istante di tempo $t \in [0,\, t_0)$, il sistema di forze $(\mathbf{S},\, (\mathbf{b},\, \hat{\mathbf{s}}))$ è in equilibrio se e solo se

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}) = 0, \;\; \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{T}. \tag{1.12}$$

Osserviamo che in elasticità finita il principio delle potenze virtuali ha la stessa formulazione che abbiamo appena dato, purchè $\mathbf{S}$ sia interpretato come il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff (*vid.* [18]).

Se ristabiliamo la dipendenza dalla variabile temporale e poniamo $\mathbf{b}(p,\, t) = \mathbf{b}^{ni}(p,\, t) + \varrho\ddot{\mathbf{u}}(p,\, t)$, la (1.12) diventa un'equazione di bilancio dinamico.

Introduciamo ora le equazioni di compatibilità e costitutive tipiche dell'elasticità lineare. Se chiamiamo $\mathbf{E}(p, t)$ il tensore di deformazione simmetrico definito in $\mathcal{B} \times [0,\, t_0)$, l'equazione di compatibilità si scrive:

$$\mathbf{E}(p,\, t) = \operatorname{sym} \nabla \mathbf{u}(p,\, t). \tag{1.13}$$

Aggiungiamo alla lista dei dati del problema il tensore di elasticità del quart'ordine $\mathbb{C}(p)$ definito in $\mathcal{B}$. L'equazione costitutiva si enuncia:

$$\mathbf{S}(p,\, t) = \mathbb{C}(p)[\mathbf{E}(p,\, t)]. \tag{1.14}$$

Dopo aver sostituito la condizione di compatibilità (1.13) nella relazione costitutiva (1.14) e quest'ultima in (1.12), otteniamo la seguente equazione nell'incognita $\mathbf{u}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}(\mathbf{u}(\cdot, t)) \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} - \int_{\mathcal{B}} \mathbb{C}[\operatorname{sym} \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)] \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \;\; \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{T}, \tag{1.15}$$

la quale, se soddisfatta qualunque sia l'istante di tempo $t \in [0,\, t_0)$ fissato, rappresenta l'equazione di evoluzione del corpo. Utilizzeremo proprio quest'ultima equazione per dedurre teorie di piastre.

Osservazione 1. Così come abbiamo presentato il problema dell'equilibrio nella veste del principio delle potenze virtuali, presentiamo ora due richieste costitutive nella forma alternativa di un bilancio di potenze (*vid.* [18]).

Sia $\Pi \subset \mathcal{B}$ una parte arbitraria del corpo $\mathcal{B}$ e sia definita la potenza dello sforzo sulla parte Π:

$$\mathcal{S}_{\Pi}(\mathbf{v}) = \int_{\Pi} \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

La prima richiesta costitutiva asserisce che la potenza dello sforzo compiuta per una qualsiasi velocità rigida $\mathbf{v}_r$ in Π, deve essere nulla:

$$\mathcal{S}_\Pi(\mathbf{v}) = \int_\Pi \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}_r = 0, \ \forall \Pi \in \mathcal{B}, \ \forall \mathbf{v}_r \in \mathcal{T}. \tag{1.16}$$

Nell'ipotesi assunta di piccoli spostamenti, si ha

$$\nabla \mathbf{v}_r = \mathbf{W},$$

dove $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$ è il tensore di rotazione. Grazie al lemma fondamentale e all'arbitrarietà della velocità rigida, la richiesta (1.16) si traduce nell'equazione

$$\mathrm{skw}\, \mathbf{S} = 0. \tag{1.17}$$

La seconda richiesta costitutiva è che lo sforzo $\mathbf{S}$ possa scomporsi nella somma di due termini:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^A + \mathbf{S}^R,$$

dove $\mathbf{S}^A$ è definito sforzo attivo ed $\mathbf{S}^R$ sforzo reattivo e lo sforzo reattivo non compie lavoro qualunque sia il campo $\mathbf{u}$ di spostamenti ammissibili:

$$\int_\Pi \mathbf{S}^R \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} = 0.$$

Quest'ultima relazione, data l'arbitrarietà della parte Π e grazie al teorema di localizzazione, diventa

$$\mathbf{S}^R \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0. \tag{1.18}$$

□

Osservazione 2. Enunciamo la *formulazione classica* del problema elastodinamico lineare. Siano assegnate la regione regolare $\mathcal{B}$ e l'intervallo di tempo $[0,\, t_0)$, un campo di spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ su $\partial_1 \mathcal{B} \times [0,\, t_0)$, la coppia $(\mathbf{b}^{ni}, \hat{\mathbf{s}})$ di carichi di volume non inerziali e di forze superficiali su $\mathcal{B} \times [0,\, t_0)$ e $\partial_2 \mathcal{B} \times [0,\, t_0)$ rispettivamente ed il tensore di elasticità $\mathbb{C}$ su $\mathcal{B}$. La terna $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S})$ si definisce processo elastico se soddisfa le seguenti condizioni:

- condizioni *cinematiche*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = \mathrm{sym}\, \nabla \mathbf{u} \ \text{ su } \ \mathcal{B} \times [0,\, t_0), \\ &\mathbf{P}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \ \text{ su } \partial \mathcal{B} \times (0,\, t_0), \\ &\mathbf{u}(\cdot,\, 0) = \mathbf{u}_0, \ \ \dot{\mathbf{u}}(\cdot,\, 0) = \mathbf{v}_0 \ \text{ su } \mathcal{B}; \end{aligned} \tag{1.19}$$

- condizioni *dinamiche*

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\, \mathbf{S} + \mathbf{b}^{ni} = \varrho \ddot{\mathbf{u}} \ \text{ su } \ \mathcal{B} \times [0,\, t_0); \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{S}\boldsymbol{\nu} = \hat{\mathbf{s}}, \ \text{ su } \partial \mathcal{B} \times (0,\, t_0) \end{aligned} \tag{1.20}$$

- condizioni *costitutive*

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}[\mathbf{E}] \ \text{ su } \ \mathcal{B} \times [0,\, t_0). \tag{1.21}$$

Le equazioni di bilancio (1.20) possono essere rimpiazzate dall'equazione delle potenze virtuali (1.12). In tal caso la terna $(\mathbf{u},\, \mathbf{E},\, \mathbf{S})$ che soddisfa le equazioni cinematiche (1.19) e costitutive (1.21) è un processo elastico se e solo se l'equazione delle potenze virtuali (1.12) è soddisfatta in qualunque istante $t \in [0,\, t_0)$ e per qualunque $\mathbf{v} \in \mathcal{T}$.

Dopo aver sostituito la $(1.19)_1$ nella (1.21) e quest'ultima nelle equazioni (1.20), il problema elastodinamico può essere riformulato in termini del solo campo di spostamenti $\mathbf{u}$ incognito (*vid.* [64] § *20.*) in questo modo: determinare un moto $\mathbf{u}$ tale che

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\mathbb{C}[\nabla\mathbf{u}]) + \mathbf{b} = \varrho\ddot{\mathbf{u}}, \;\; \text{su } \mathcal{B} \times (0,\, t_0),\\
&\mathbf{P}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \;\; (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbb{C}[\nabla\mathbf{u}]\mathbf{n} = \hat{\mathbf{s}}, \;\; \text{su } \partial\mathcal{B} \times (0,\, t_0),\\
&\mathbf{u}(\cdot,\, 0) = \mathbf{u}_0, \;\; \dot{\mathbf{u}}(\cdot,\, 0) = \mathbf{v}_0, \;\; \text{su } \mathcal{B}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Se usiamo la definizione di classe $\mathcal{C}^{N,M}$ $(N, M \in \mathbb{N})$ data in [20], § *9* per funzioni dipendenti dalla posizione e dal tempo, il campo di spostamenti $\mathbf{u}$ che soddisfa il problema (1.22) deve essere di classe $\mathcal{C}^{2,2}(\mathcal{B} \times (0,\, t_0)) \cap \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\mathcal{B}} \times [0,\, t_0))$ mentre per il soddisfacimento dell'equazione di evoluzione nella forma integrale (1.15) è sufficiente che il campo di spostamenti $\mathbf{u}$ sia $\mathcal{C}^{1,2}(\mathcal{B} \times (0,\, t_0)) \cap \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\mathcal{B}} \times [0,\, t_0))$. La formulazione (1.22) è detta *formulazione forte* del problema elastodinamico. La (1.15) a cui si aggiungono le condizioni iniziali $(1.22)_{3,4}$ è detta *formulazione debole.* $\square$

Nel principio delle potenze virtuali qui presentato, la regione $\mathcal{B}$, il campo di spostamenti $\mathbf{u}$ e la lista di dati dinamici e cinematici $(\mathbf{b}^{ni}, (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \mathbf{P}))$ sono lasciati arbitrari. Il nostro passo successivo sarà quello di assegnare al dominio $\mathcal{B}$ la geometria di un cilindro retto. Un corpo così fatto sarà detto *a forma di piastra.* Poi imporremo una forma particolare anche al campo di spostamenti $\mathbf{u}$ restringendo il suo dominio di appartenenza ad un sottospazio di $\mathcal{V}$ ed infine assegneremo condizioni al contorno tipiche dei problemi di piastra.

1.2 Geometria

Un corpo è detto *a forma di piastra* se occupa la regione

$$\Omega = \{\, x + \zeta\mathbf{z}, \;|\; x \in \mathcal{P},\, \zeta \in \mathcal{I}\,\}, \tag{1.23}$$

dove $\mathcal{P}$ è una regione piana e compatta, $\mathbf{z}$ è il versore normale a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I} = (-\varepsilon,\, +\varepsilon)$ un intervallo. Se istituiamo un sistema di riferimento cartesiano $(o;\, \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{z})$, allora si puó scrivere $x - o = x_\alpha\mathbf{c}_\alpha$, con $\alpha = 1,\, 2$. La sottigliezza della piastra si esprime attraverso la piccolezza del parametro $2\varepsilon/\text{diametro}(\mathcal{P})$, dove diametro$(\mathcal{P})$ è la massima distanza tra due punti di $\mathcal{P}$. La piastra Ω si identifica con il prodotto cartesiano $\mathcal{P} \times \mathcal{I}$ ed un qualsiasi suo punto con la coppia (x, ζ):

$$\Omega \ni x + \zeta\mathbf{z} \sim (x,\, \zeta) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}.$$

Le *parti* di Ω hanno anch'esse la forma di piastra $\mathcal{Q} \times \mathcal{I}$, con $\mathcal{Q}$ parte di $\mathcal{P}$. La struttura del corpo Ω e della collezione delle sue parti ci suggeriscono di definire come *atomi* di Ω le fibre $\{x\} \times \mathcal{I}$ con $x \in \mathcal{P}$.

Il bordo $\partial\Omega$ si compone di tre parti: il mantello laterale $\mathcal{M} = \partial\mathcal{P} \times \mathcal{I}$ e le facce superiori ed inferiori $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \times \{+\varepsilon\}$ e $\mathcal{P}^- = \mathcal{P} \times \{-\varepsilon\}$.

In quanto segue supporremo il semispessore ε costante. Rimandiamo a [33] e [51] per lo studio di piastre con spessore variabile.

Siano ϕ e $\boldsymbol{\psi}$ due generici campi rispettivamente scalare e vettoriale di classe almeno $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Useremo la notazione

$$\phi^{\pm}(p) = \phi(x,\, \pm\varepsilon)$$

per indicare il valore del campo ϕ sui punti delle facce e considereremo solo integrali su regioni dello spazio che sono parti di Ω del tipo $\mathcal{Q} \times \mathcal{I}$, cosí che

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}\times\mathcal{I}} \phi = \int_{\mathcal{Q}} (\int_{\mathcal{I}} \phi(\cdot,\, \zeta) d\zeta), \\ &\int_{\partial(\mathcal{Q}\times\mathcal{I})} \phi = \int_{\mathcal{Q}} (\phi^+ + \phi^-) + \int_{\partial\mathcal{Q}} (\int_{\mathcal{I}} \phi(\cdot,\, \zeta) d\zeta). \end{aligned}$$

Definiamo i seguenti operatori differenziali superficiali:

$$\begin{aligned} &{}^{s}\nabla\, \phi = {}^{s}\mathbf{I}\, \nabla\phi, \qquad &{}^{s}\Delta\phi = {}^{s}\mathrm{div}\, {}^{s}\nabla\, \phi, \\ &{}^{s}\nabla\, \boldsymbol{\psi} = {}^{s}\mathbf{I}\, \nabla\boldsymbol{\psi}{}^{s}\mathbf{I}\,, \quad &{}^{s}\mathrm{div}\, \boldsymbol{\psi} = \mathrm{tr}\, {}^{s}\nabla\, \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

con ${}^{s}\mathbf{I} = \mathbf{I} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}$, $\mathbf{I}$ il tensore identità del second'ordine, ed indichiamo

$$\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \tag{1.25}$$

la derivata parziale di φ rispetto alla coordinata trasversale ζ. Osserviamo che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} &\nabla\varphi = {}^{s}\nabla\, \varphi + \varphi'\mathbf{z}, \\ &\nabla\boldsymbol{\psi} = {}^{s}\nabla\, \boldsymbol{\psi} + \mathbf{z} \otimes {}^{s}\nabla\, (\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{z}) + \boldsymbol{\psi}' \otimes \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Infine definiamo *gradiente tangente*

$$D\boldsymbol{\psi} = \nabla\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}' \otimes \mathbf{z} = {}^{s}\nabla\, \boldsymbol{\psi} + \mathbf{z} \otimes {}^{s}\nabla\, (\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{z}). \tag{1.26}$$

In [63], vengono dedotte teorie bidimensionali per corpi elastici a forma di guscio, ossia, corpi il cui piano medio $\mathcal{P}$ è una superficie qualsiasi e non più una regione piana.

Osservazione. Quando si sviluppano teorie di travi, la regione occupata dal corpo nella configurazione di riferimento continua ad essere quella rappresentata da (1.23), ma la piccolezza della dimensione trasversale rispetto a quella longitudinale si esprime: diametro($\mathcal{P}$) $\ll$ lunghezza($\mathcal{I}$). Inoltre le *parti* del corpo sono del tipo $\mathcal{P} \times (\alpha,\, \beta)$, con $(\alpha,\, \beta) \subset \mathcal{I}$ e gli *atomi* di trave sono le sezioni trasversali $\mathcal{P} \times \{\zeta\}$, con $\zeta \in \mathcal{I}$. $\Box$

1.3 Ipotesi cinematiche

Un passo decisivo nella formulazione delle teorie di piastre è l'assegnazione del campo di spostamenti nella forma

$$\mathbf{u}(x, \zeta,\, t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{u}_i(x,\, t), \tag{1.27}$$

in cui la dipendenza spaziale dalle coordinate ζ e x è separata dalle funzioni $\varphi_i(\zeta)$ e $\mathbf{u}_i(x, t)$. I campi scalari $\varphi_i(\zeta)$ sono definiti nell'intervallo $\mathcal{I}$ e costituiscono le prime $(n+1)$ funzioni di un assegnato sistema completo e gli $(n+1)$ vettori $\mathbf{u}_i(x, t)$ definiti in $\mathcal{P} \times [0, t_0)$ sono incogniti.

Nella (1.27), la dipendenza dalla coordinata trasversale ζ è data a priori una volta fissata la lista $\{\varphi_i(\zeta)\}_{i=0}^n$; le incognite cinematiche costituiscono la $(n+1)$-upla di descrittori $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$. Come vedremo nelle teorie di Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin si impongono ulteriori condizioni sulle funzioni della lista $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$. Il problema che segue alla prescrizione (1.27) è detto *semi-inverso* perché la forma del campo di spostamenti è solo parzialmente prescritta.

Osserviamo che le incognite del problema passano dal singolo campo $\mathbf{u}(p, t)$ definito in $\Omega \times [0, t_0)$ alla lista $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$ di $(n+1)$ vettori definiti in $\mathcal{P} \times [0, t_0)$: alla riduzione di una dimensione del dominio di definizione spaziale fa seguito la possibilità di aumentare il numero di descrittori cinematici, controbilanciando la riduzione dimensionale con un arricchimento di struttura cinematica.

La lista $\{\mathbf{u}_i(x, t)\}_{i=0}^n$ è caratteristica di ogni fibra assiale $\{x\} \times \mathcal{I}$ e, grazie alla (1.27), è sufficiente a descrivere il campo di spostamenti in ogni punto $p = x + \zeta\mathbf{z}$ della fibra stessa.

L'assegnazione del campo di spostamenti (1.27) comporta la scelta delle funzioni $\{\varphi_i(\zeta)\}_{i=0}^n$ e dell'ordine n. Proprio sulla base di queste due scelte si distinguono diverse teorie di piastre dedotte dal tridimensionale.

Se poniamo
$$\varphi_i(\zeta) = \zeta^i, \tag{1.28}$$
il campo di spostamenti assume la forma polinomiale
$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \sum_{i=0}^{n} \zeta^i \mathbf{u}_i(x, t), \tag{1.29}$$
usata nei capitoli 2 e 3 per dedurre le equazioni delle piastre.

L'ipotesi (1.29) ha una interessante interpretazione. Sviluppiamo il campo di spostamenti tridimensionale $\mathbf{u}(p, t)$ in serie di Taylor rispetto alla coordinata trasversale ζ:
$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \sum_{i=0}^{n} \zeta^i \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial \zeta^i}(x, 0, t) + o(\zeta^{(n)}), \tag{1.30}$$
supponiamo poi che la piastra sia sottile così da poter trascurare gli infinitesimi $o(\zeta^{(n)})$ e infine poniamo
$$\mathbf{u}_0(x, t) = \mathbf{u}(x, 0, t)\ , \quad \mathbf{u}_1(x, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta}(x, 0, t)\ , \quad \mathbf{u}_2(x, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \zeta^2}(x, 0, t)\,, \ldots .$$
Otteniamo proprio l'espressione (1.29) che perciò può essere pensata come lo sviluppo in serie di Taylor rispetto a ζ dello spostamento tridimensionale $\mathbf{u}(x, \zeta, t)$ arrestato all'ordine n, le cui prime $(n+1)$ derivate parziali rispetto a ζ sono incognite. Per una piastra sottile, si può pensare che l'errore $o(\zeta^{(n)})$ sia trascurabile anche per un valore di $n \in \mathbb{N}$ piccolo, e che lo sviluppo (1.29) approssimi bene il campo di spostamenti tridimensionale anche se si arresta la sommatoria dopo pochi termini.

La prescrizione del campo di spostamenti nella forma (1.29) è alla base delle teorie di piastre di Kirchhoff-Love [26]-[42], di Reissner-Mindlin [68]-[45] e di ordine superiore [39] e [40]. Tuttavia si possono effettuare altre scelte per le funzioni $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$. Ne passiamo in rassegna alcune. In [52], Mindlin e Medick scelgono i primi $(n+1)$ polinomi di Legendre, i quali hanno la felice proprietà di essere mutuamente ortogonali ed agevolare i calcoli di deduzione delle equazioni bidimensionali. Nikodem e Lee in [59] e Mindlin in [49] assegnano

$$\varphi_i(\zeta) = \cos\left(\frac{i\pi}{2}(1-\frac{\zeta}{\varepsilon})\right),$$

ed il campo di spostamenti diventa una serie di funzioni trigonometriche nella coordinata ζ:

$$\mathbf{u}(x,\zeta,\,t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{u}_i(x,\,t)\cos\left(\frac{i\pi}{2}(1-\frac{\zeta}{\varepsilon})\right). \tag{1.31}$$

In [32], Lee *et al.* estendono questa particolare cinematica al caso elettroelastico. In [35], Lee *et al.* aggiungono al campo (1.31) il termine correttivo $-\nabla(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{z})$ capace di migliorare le predizioni della teoria per quanto riguarda la propagazione di onde armoniche in condizioni di vibrazione libera. Infine, in [61], Peach sceglie come lista $\{\varphi_i(\zeta)\}_{i=0}^n$ l'insieme completo di funzioni che compaiono nella soluzione esatta del problema tridimensionale di vibrazione libera al cut-off.

Osservazione 1. In [58], Nicotra *et al.*, generalizzando i risultati di Levinson in [37] e Pan in [60], ricavano una soluzione esatta per il problema tridimensionale dell'equilibrio di un corpo a forma di piastra, trasversalmente isotropo, soggetto a condizioni di appoggio sul mantello. Il campo di spostamenti che risolve il suddetto problema ha la seguente forma:

$$\mathbf{u}(x,\zeta) = f(\zeta)w(x)\mathbf{z} - g(\zeta)\nabla w(x),$$

dove, di nuovo si ritrova la struttura (1.27), in cui la dipendenza da ζ e x è separata, ma, in questo caso, le funzioni $f(\zeta)$ e $g(\zeta)$ non sono assegnate a priori, ma sono le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali con condizioni al contorno. □

Osservazione 2. Nel caso in cui le equazioni di bilancio siano dedotte dal principio di minimo dell'energia complementare (*vid.* [64], § 22), alle assunzioni cinematiche (1.27) si devono sostituire analoghe prescrizioni sul tensore degli sforzi al quale è richiesto di assumere la forma

$$\mathbf{S}(x,\zeta,\,t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\zeta)\mathbf{S}_i(x,\,t). \tag{1.32}$$

Se l'equilibrio è ottenuto imponendo la stazionarietà di funzionali misti, allora vanno prescritte sia le assegnazioni cinematiche (1.27) che quelle dinamiche (1.32). A tale proposito, segnaliamo gli articoli [9], dove le equazioni delle piastre sono dedotte da principi variazionali basati sul funzionale misto di Hu-Washizu, e [75], dove sono confrontate le teorie di piastre alla Raissner-Mindlin dedotte dalla stazionarietà dei funzionali dell'energia potenziale, dell'energia complementare e di Hellinger-Prange-Reissner. In [16] e [6] le equazioni di piastre elettroelastiche sono dedotte dal principio di Hellinger-Prange-Reissner. $\square$

1.4 Condizioni al contorno

Sulle basi $\mathcal{P}^{\pm}$ assegnamo le azioni di contatto $\hat{\mathbf{s}}^{+}(x)$ e $\hat{\mathbf{s}}^{-}(x)$. Le relative condizioni al bordo si scrivono:

$$\pm\mathbf{S}(x, \pm\epsilon, t)\mathbf{z} = \hat{\mathbf{s}}^{\pm}(x) \;\text{ su }\; \mathcal{P}^{\pm} \times [0, t_0). \tag{1.33}$$

Nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche, infatti, sulle facce della piastra sono applicati dei carichi.

Sul mantello laterale $\mathcal{M}$ lasciamo la possibilità di assegnare condizioni miste. Grazie alla particolare geometria di $\mathcal{M}$ ortogonale al piano $\mathcal{P}$, allargheremo l'insieme delle proiezioni (1.2) così da poter prescrivere una più ampia varietà di condizioni al contorno di tipo misto. Innanzitutto istituiamo in ogni punto $p \in \mathcal{M}$ la terna di versori $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{z})$ tali che $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{z} \times \boldsymbol{\nu}$. Definiamo poi il seguente insieme di proiettori:

$$\mathcal{L}_p = \{\, \mathbf{P} \;\text{ somma qualsiasi tra i seguenti tensori : }\; \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu},\, \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau},\, \mathbf{z} \otimes \mathbf{z},\, \mathbf{0}\}, \tag{1.34}$$

ed osserviamo che la lista $\mathcal{L}$ di proiettori definiti in (1.2) è contenuta in (1.34).

Le condizioni al contorno sul mantello si enunciano così:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{Pu}(x, \zeta, t) & = & \hat{\mathbf{u}}(x, \zeta) \\ (\mathbf{1} - \mathbf{P})\mathbf{S}(x, \zeta, t)\boldsymbol{\nu}(x) & = & \hat{\mathbf{s}}(x, \zeta) \end{array}\right. \;\text{ su }\; \mathcal{M} \times [0, t_0)\,, \tag{1.35}$$

con $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_p$ e la coppia di campi $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}})$ soddisfa i requisiti di mutua consistenza (1.4).

Solitamente le condizioni su $\mathcal{M} \times [0, t_0)$ sono prescritte indipendentemente dall'ascissa longitudinale ζ, ossia sono date per fibre $\{x\} \times \mathcal{I}$.

1.5 Equazioni delle piastre

Nei paragrafi precedenti sono stati introdotti tutti gli ingredienti necessari alla formulazione delle equazioni delle piastre: il dominio (1.23) e la sua suddivisione in parti, l'ipotesi cinematica (1.27) e le condizioni al contorno (1.33) e (1.35). In questo paragrafo, a partire dall'equazione tridimensionale delle potenze virtuali (1.12) dedurremo le equazioni di bilancio bidimensionali attraverso una semplice integrazione nello spessore $\mathcal{I}$.

Sia dato il corpo a forma di piastra Ω che identifichiamo con il prodotto cartesiano $\mathcal{P} \times \mathcal{I}$. Assegnati un numero $n \in \mathbb{N}$ e la lista $\{\varphi_i(\zeta)\}_{i=0}^{n}$ delle prime $(n+1)$ funzioni di un sistema completo, definiamo lo spazio degli spostamenti ammissibili:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(n)} = \{ \quad \mathbf{u}(p, t) \quad | \quad & \mathbf{u}(p, t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{u}_i(x, t), \\ & \mathbf{Pu}(p, t) = \hat{\mathbf{u}}(p) \;\text{ su }\; \partial\mathcal{M} \times [0, t_0)\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Di conseguenza le velocità test appartengono al sottospazio:

$$\mathcal{W}^{(n)} = \{\mathbf{v}(p) \quad | \quad \mathbf{v}(p) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{v}_i(x), \ \mathbf{P}\mathbf{v}(p) = 0 \ \text{su} \ \partial\mathcal{M}\}. \tag{1.37}$$

Affinché la condizione al contorno

$$\mathbf{Pu}(p, t) = \hat{\mathbf{u}}(p) \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \times [0, t_0) \tag{1.38}$$

abbia senso, bisogna assegnare sul mantello un campo $\hat{\mathbf{u}}(p)$ che abbia la stessa forma dello spostamento ipotizzato:

$$\hat{\mathbf{u}}(p, t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\zeta)\hat{\mathbf{u}}_i(x, t),$$

così che la (1.38) diventa equivalente alle seguenti $(n+1)$ condizioni:

$$\mathbf{Pu}_i(x, t) = \hat{\mathbf{u}}_i(x), \ \ i = 0, ..., n, \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0, t_0) \tag{1.39}$$

Fissato l'istante di tempo $t \in [0, t_0)$, assegnate le forze di volume $\mathbf{b}$ in Ω e le forze di superficie $\hat{\mathbf{s}}^{\pm}$ in $\partial\Omega$, la terna $(\mathbf{S}, (\mathbf{b}, \hat{\mathbf{s}}))$ è in equilibrio se soddisfa l'equazione delle potenze virtuali

$$\int_{\mathcal{P}} [\int_{\mathcal{I}} \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v} - \int_{\mathcal{I}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}] - \int_{\mathcal{P}^{\pm}} \hat{\mathbf{s}}^{\pm} \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial\mathcal{P}} \int_{\mathcal{I}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} = 0, \ \forall \ \mathbf{v} \in \mathcal{W}^{(n)}, \tag{1.40}$$

la quale, se specifichiamo le condizioni al contorno (1.33) e (1.35), diventa

$$\int_{\mathcal{P}} [\int_{\mathcal{I}} \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v} - \int_{\mathcal{I}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}] - \int_{\mathcal{P}^{+}} \hat{\mathbf{s}}^{+} \cdot \mathbf{v} - \int_{\mathcal{P}^{-}} \hat{\mathbf{s}}^{-} \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial\mathcal{P}} \int_{\mathcal{I}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} = 0, \ \forall \ \mathbf{v} \in \mathcal{W}^{(n)}. \tag{1.41}$$

Il gradiente di $\mathbf{v} \in \mathcal{W}^{(n)}$ vale

$$\nabla\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \nabla\mathbf{v}_i + \varphi_i' \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{z}),$$

e la (1.41) diventa

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{P}} [\int_{\mathcal{I}} \mathbf{S} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \nabla\mathbf{v}_i + \varphi_i' \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{z}) - \int_{\mathcal{I}} \mathbf{b} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \mathbf{v}_i)] + \\ &- \int_{\mathcal{P}^{+}} \hat{\mathbf{s}}^{+} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \mathbf{v}_i) - \int_{\mathcal{P}^{-}} \hat{\mathbf{s}}^{-} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \mathbf{v}_i) \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \mathbf{v}_i) + \\ &- \int_{\partial\mathcal{P}} \int_{\mathcal{I}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \mathbf{v}_i) = 0, \ \forall \ \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{V}^{(n)} \end{aligned} \tag{1.42}$$

L'arbitrarietà della velocità test si esprime attraverso l'arbitrarietà della $(n+1)$-upla $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{n}$ indipendente dalla coordinata trasversale ζ e dunque l'equazione delle potenze virtuali, tenuto presente che le operazioni di integrazione e di sommatoria commutano, si può scrivere

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \{ \int_{\mathcal{P}} [\int_{\mathcal{I}} (\varphi_i \mathbf{S}) \cdot \nabla\mathbf{v}_i + \int_{\mathcal{I}} (\varphi_i' \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{z} - \int_{\mathcal{I}} (\varphi_i \mathbf{b} + \varphi_i(\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^{+} + \varphi_i(-\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^{-}) \cdot \mathbf{v}_i)] + \\ &- \int_{\partial\mathcal{P}} \int_{\mathcal{I}} \varphi_i \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}_i \} = 0, \ \forall \ \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{V}^{(n)}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Definiamo in $\mathcal{P}$ le seguenti grandezze dinamiche:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_i(x,\,t) := \int_{\mathcal{I}} \varphi_i(\zeta)\mathbf{S}(x,\,t), \quad \mathbf{N}_i(x,\,t) := \int_{\mathcal{I}} \varphi_i'(\zeta)\mathbf{S}(x,\,t),\\
&\mathbf{q}_i(x,\,t) := \int_{\mathcal{I}} \varphi_i(\zeta)\mathbf{b}(x,\,t) + \varphi_i(\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^+(x) + \varphi_i(-\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^-(x),
\end{aligned} \tag{1.44}$$

e su $\partial\mathcal{P}$:

$$\mathbf{p}_i(x) := \int_{\mathcal{I}} \varphi_i(\zeta)\hat{\mathbf{s}}(x). \tag{1.45}$$

Le $(1.44)_{1,2}$ concentrano tutte le informazioni di sforzo sul piano della piastra compiendo, a meno di un fattore $(2\varepsilon)^{-1}$, una media del tensore $\mathbf{S}$ nello spessore $\mathcal{I}$ pesata attraverso le funzioni φ_i e φ_i'. Le $(1.44)_{1,2}$ rappresentano le caratteristiche di sollecitazione del problema di piastra. Analogamente le $(1.44)_3$ e (1.45) concentrano le informazioni sui carichi esterni in $\mathcal{P}$ e $\partial\mathcal{P}$ e rappresentano rispettivamente forze superficiali e di linea.

Se sostituiamo le (1.44) e (1.45) nella (1.43), questa diventa un'equazione integrale definita nel dominio piano $\mathcal{P}$:

$$\sum_{i=1}^{n}[\int_{\mathcal{P}}(\mathbf{M}_i\cdot\nabla\mathbf{v}_i + \mathbf{N}_i\cdot\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{z} - \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{v}_i) - \int_{\partial\mathcal{P}}\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{v}_i] = 0,\ \forall\ \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{n}\in\mathcal{V}^{(n)}. \tag{1.46}$$

Per l'identità di divergenza ed il lemma di integrazione per parti vale la relazione

$$\int_{\mathcal{P}}\mathbf{M}_i\cdot\nabla\mathbf{v}_i = -\int_{\mathcal{P}}\operatorname{div}\mathbf{M}_i\cdot\mathbf{v}_i + \int_{\partial\mathcal{P}}\mathbf{M}_i\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{v}_i, \tag{1.47}$$

grazie alla quale la (1.46) si riscrive

$$\sum_{i=1}^{n}[\int_{\mathcal{P}}(\operatorname{div}\mathbf{M}_i\cdot\mathbf{v}_i - \mathbf{N}_i\mathbf{z}\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{v}_i) + \int_{\partial\mathcal{P}}(\mathbf{p}_i - \mathbf{M}_i\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{v}_i] = 0,\ \forall\ \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{n}\in\mathcal{V}^{(n)}. \tag{1.48}$$

Per l'arbitrarietà e la localizzabilità della lista di descrittori test $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{n}$, l'equazione integrale (1.48) è equivalente alle equazioni di bilancio locali

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i\mathbf{z} + \mathbf{q}_i = 0, \quad \text{con} \quad i = 0...n, \quad \text{in}\ \ \mathcal{P},\\
&(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{M}_i\boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_i, \quad \text{con} \quad i = 0...n, \quad \text{su}\ \ \partial\mathcal{P}.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Poiché le funzioni $\varphi_i(\zeta)$ sono le prime $(n+1)$ di un sistema completo, la derivata della generica i-esima funzione $\varphi_i(\zeta)$ si può scrivere come combinazione lineare

$$\varphi_i'(\zeta) = \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(\zeta),$$

delle funzioni $\{\varphi_i(\zeta)\}_{i=0}^{n}$ attraverso opportuni coefficienti a_j. Segue che i descrittori dinamici $\mathbf{N}_i(x)$ definiti in $(1.44)_2$ si esprimono in termini delle caratteristiche di sollecitazione $\mathbf{M}_i(x)$ e le equazioni $(1.49)_1$ costituiscono un sistema di $(n+1)$ equazioni differenziali con le condizioni al contorno $(1.49)_2$ nelle $(n+1)$ incognite $\{\mathbf{M}_i(x)\}_{i=0}^{n}$.

Le (1.49) si possono confrontare con le equazioni di bilancio del corrispondente problema tridimensionale:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in}\ \ \Omega,\\
&(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{S}\boldsymbol{\nu} = \hat{\mathbf{s}} \quad \text{su}\ \ \mathcal{M},\\
&\pm\mathbf{S}\mathbf{z} = \hat{\mathbf{s}}^{\pm} \quad \text{su}\ \ \mathcal{P}^{\pm}.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

In (1.49) la misura di sforzo tridimensionale $\mathbf{S}$ è sostituita dalla lista di $(n+1)$ caratteristiche di sollecitazione $\{\mathbf{M}_i(x)\}_{i=0}^n$ definite nel piano $\mathcal{P}$. Il passaggio da un problema tridimensionale ad uno bidimensionale aumenta il numero di descrittori di sforzo (si passa da 1 ad $(n+1)$ tensori) e pur tuttavia si verifica una consistente perdita di informazioni. Infatti la conoscenza delle $(n+1)$ misure di forza $\{\mathbf{M}_i(x)\}_{i=0}^n$ non basta a ricostruire il tensore di sforzo $\mathbf{S}(\mathbf{p})$. Come l'equazione delle potenze virtuali tridimensionale mostra la dualità tra lo sforzo $\mathbf{S}(p)$ e la deformazione $\mathbf{E}(p)$, così la (1.46) mette in evidenza la dualità tra i tensori $\mathbf{M}_i(x)$ e $\nabla\mathbf{v}_i(x)$. Nel problema (1.49) i dati di forze applicate sono opportune medie combinate delle forze di volume $\mathbf{b}$ in Ω e delle forze superficiali $\hat{\mathbf{s}}$ agenti su $\mathcal{M}$, medie pesate tramite le funzioni $\varphi_i(\zeta)$; queste medie servono a costruire le due liste $\{\mathbf{q}_i\}_{i=0}^n$ e $\{\mathbf{p}_i\}_{i=0}^n$.

1.6 Valutazione delle forze di inerzia

Le (1.49) sono riguardate come equazioni di equilibrio nell'istante $t \in [0, t_0)$ fissato. E' sufficiente esplicitare le parti inerziali e non inerziali nella lista $\{\mathbf{q}_i\}_{i=0}^n$, facendo uso della decomposizione additiva

$$\mathbf{b}(p) = \mathbf{b}^{ni}(p,\, t) + \mathbf{b}^{in}(p,\, t) \tag{1.51}$$

delle forze di volume, ed istituire di nuovo la dipendenza dal tempo t, affinché le (1.49) diventino equazioni di bilancio dinamico.

Se sostituiamo la (1.51) ed il campo di velocità test

$$\mathbf{v}(p) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{v}_i(x),$$

nei termini

$$\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} + \int_{\mathcal{P}^\pm} \hat{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{v}$$

dell'equazione delle potenze virtuali (1.40), otteniamo

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} + \int_{\mathcal{P}^\pm} \hat{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{v} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{P}}\{\int_{\mathcal{I}}[\varphi_i\mathbf{b}^{ni} - \varrho\varphi_i\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j\ddot{\mathbf{u}}_j)] + \varphi_i(\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^+(x) + \varphi_i(-\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^-(x)\}\cdot\mathbf{v}_i.\end{aligned} \tag{1.52}$$

Definiamo

$$\mathbf{q}_i^{ni}(x) := \int_{\mathcal{I}} \varphi_i(\zeta)\mathbf{b}^{ni}(x,\zeta) + \varphi_i(\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^+(x) + \varphi_i(-\varepsilon)\hat{\mathbf{s}}^-(x), \tag{1.53}$$

gli $(n+1)$ descrittori delle forze non inerziali e

$$r_i(x) := \int_{\mathcal{I}} \varrho(x,\zeta)\varphi_i(\zeta), \tag{1.54}$$

gli $(n+1)$ descrittori d'inerzia, i quali concentrano nel piano medio le informazioni relative alla densità di massa del cilindro così che la potenza (1.52) delle forze di massa e delle forze superficiali che agiscono sulle basi diventa

$$\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{I}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} + \int_{\mathcal{P}^\pm} \hat{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{v} = \int_{\mathcal{P}}[\mathbf{q}_i^{ni} - \sum_{j=0}^{n}(r_{(i+j)}\ddot{\mathbf{u}}_j)]\cdot\mathbf{v}_i. \tag{1.55}$$

La lista $\{r_i(x)\}_{i=0}^n$ rappresenta la struttura di massa di cui dotiamo il dominio $\mathcal{P}$. Le equazioni di bilancio (1.49), una volta espressa la dipendenza dalla variabile temporale t nel dominio $[0,\, t_0)$, si modificano così:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{z} + \mathbf{q}_i^{ni} = \sum_{j=0}^{n} (r_{(i+j)} \ddot{\mathbf{u}}_j) \quad \text{in } \mathcal{P} \times [0,\, t_0), \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{M}_i \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_i \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0,\, t_0). \end{aligned} \tag{1.56}$$

Un ultimo passo da compiere è quello di utilizzare le equazioni di compatibilità (1.13) e le relazioni costitutive (1.14) per ottenere, da (1.56), le equazioni di evoluzione del problema.

1.7 Equazioni di evoluzione

Assegnato il campo di spostamenti nella forma (1.27), l'equazione di compatibilità (1.13) diventa:

$$\mathbf{E}(x, \zeta,\, t) = \operatorname{sym} \nabla \mathbf{u}(x, \zeta,\, t) = \sum_{j=0}^{n} (\varphi_j(\zeta) \nabla \mathbf{u}_j(x,\, t) + \varphi_j'(\zeta) \mathbf{u}_j(x,\, t) \otimes \mathbf{z}). \tag{1.57}$$

Se sostituiamo quest'ultima relazione nella legge costitutiva (1.14), le caratteristiche di sollecitazione $(1.44)_{1,2}$ si possono esprimere in termini della $(n{+}1)$-upla di descrittori cinematici $\{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^n$ incogniti:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n) &= \int_{\mathcal{I}} \varphi_i \sum_{j=0}^{n} \mathbb{C}[\varphi_j \nabla \mathbf{u}_j + \varphi_j' \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{z}], \\ \mathbf{N}_i(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n) &= \int_{\mathcal{I}} \varphi_i' \sum_{j=0}^{n} \mathbb{C}[\varphi_j \nabla \mathbf{u}_j + \varphi_j' \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{z}]. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Nel caso in cui sia assegnato un tensore di elasticità $\mathbb{C} = \mathbb{C}(x)$ funzione solo della posizione x nel piano $\mathcal{P}$, le (1.58) diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathcal{I}} \varphi_i \varphi_j \right) \mathbb{C}[\nabla \mathbf{u}_j] + \left(\int_{\mathcal{I}} \varphi_i \varphi_j' \right) \mathbb{C}[\mathbf{u}_j \otimes \mathbf{z}], \\ \mathbf{N}_i(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathcal{I}} \varphi_i' \varphi_j \right) \mathbb{C}[\nabla \mathbf{u}_j] + \left(\int_{\mathcal{I}} \varphi_i' \varphi_j' \right) \mathbb{C}[\mathbf{u}_j \otimes \mathbf{z}]. \end{aligned} \tag{1.59}$$

In particolare nelle teorie che dedurremo, considereremo piastre omogenee, ossia supporremo $\mathbb{C}$ costante in tutto il corpo. Se sostituiamo le (1.58) nelle equazioni di bilancio (1.56), otteniamo il seguente problema di evoluzione nelle incognite $\{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^n$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{M}_i \left(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n \right) - \mathbf{N}_i \left(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n \right) \mathbf{z} + \mathbf{q}_i^{ni} = \sum_{h=1}^{n} (r_{(i+h)} \ddot{\mathbf{u}}_h), \quad \text{con} \quad i = 0 \ldots n, \quad \text{in } \mathcal{P} \times [0,\, t_0), \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{M}_i \left(\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^n \right) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_i, \quad \text{con} \quad i = 0 \ldots n, \quad \text{su } \partial\mathcal{P} \times [0,\, t_0). \end{aligned} \tag{1.60}$$

Al sistema appena scritto si aggiungono le condizioni al contorno di tipo cinematico (1.39).

La possibilità di scegliere $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_p$ fa si che le condizioni $(1.60)_2$ e (1.39) descrivano un'ampia gamma di condizioni sul mantello. La condizione di bordo incastrato richiede $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{z})$. Definiamo questo vincolo incastro *soffice* per distinguerlo dal vincolo di incastro *duro* che si ha quando $\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Nel primo caso lo spostamento nella direzione tangente $\boldsymbol{\tau}$ è lasciato libero, nel secondo caso è prescritto.

Analogamente la condizione di appoggio *soffice* richiede $\mathbf{P} = \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}$ e quella di appoggio *duro*: $\mathbf{P} = (\mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau})$. Si ha incastro flessionale *soffice* quando $\mathbf{P} = \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}$ e incastro flessionale *duro* quando $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau})$. Infine la condizione di bordo libero *soffice* vuole $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e quella di bordo libero *duro* $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}$.

1.8 Piastre con vincoli cinematici interni

Nelle teorie di piastre di Kirchhoff-Love [26], [42] e Reissner-Mindlin [44], oltre a porre

$$\begin{aligned} &n = 1, \\ &\varphi_i(\zeta) = \zeta^i, \end{aligned} \tag{1.61}$$

nell'espressione del campo di spostamenti (1.27), si richiedono ulteriori condizioni sulla $(n+1)$-upla incognita $\{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^n$.

- Nella teoria di Kirchhoff-Love si impone che

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0(x,\, t) = w(x,\, t)\mathbf{z}, \\ &\mathbf{u}_1(x,\, t) = -\nabla w(x,\, t), \end{aligned} \tag{1.62}$$

  così che il campo di spostamenti conseguente è

$$\mathbf{u}_{KL}(x, \zeta,\, t) = w(x,\, t)\mathbf{z} - \zeta \nabla w(x,\, t); \tag{1.63}$$

- Nella teoria di Reissner-Mindlin si chiede che

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0(x,\, t) = w(x,\, t)\mathbf{z}, \\ &\mathbf{u}_1(x,\, t) \cdot \mathbf{z} = 0, \end{aligned} \tag{1.64}$$

  ed il conseguente spostamento è

$$\mathbf{u}_{RM}(x, \zeta,\, t) = w(x,\, t)\mathbf{z} + \zeta \bar{\mathbf{u}}_1(x,\, t), \;\; \bar{\mathbf{u}}_1(x,\, t) \cdot \mathbf{z} = 0. \tag{1.65}$$

A meno di uno spostamento nel piano della piastra $\bar{\mathbf{u}}_0$ ($\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{z} = 0$), che qui consideriamo nullo, le condizioni (1.62) ed (1.64) equivalgono a richiedere che i tensori delle deformazioni $\mathbf{E}(\mathbf{u}(p,\, t))$ associati ai due campi (1.63) e (1.65) soddisfino l'equazione

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}(p,\, t)) = 0, \;\; (p,\, t) \in \bar{\Omega} \times [0,\, t_0), \tag{1.66}$$

dove per la piastra di Kirchhoff-Love:

$$\mathbf{V} = \mathrm{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{z}), \quad\; \forall \;\; \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{1.67}$$

e per quella di Reissner-Mindlin

$$\mathbf{V} = \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}. \tag{1.68}$$

In generale, dato un corpo $\mathcal{B}$ ed assegnati m $(1 \leq m \leq 6)$ tensori $\mathbf{V}_i \in \mathrm{Sym}$ linearmente indipendenti, detti *tensori di vincolo*, imporre un *vincolo interno* di tipo lineare significa richiedere che il tensore di deformazione $\mathbf{E}(\mathbf{u}(p,\, t))$ soddisfi le equazioni di natura costitutiva

$$\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}(p,\, t)) = 0, \ \ i = 1, ...m, \ \ (p,\, t) \in \bar{\Omega} \times [0,\, t_0). \tag{1.69}$$

Le (1.69) sono condizioni lineari per $\mathbf{E}$ e quindi la varietà di tutti i tensori di deformazione $\mathbf{E}$ che le soddisfano è piatta. In [64], § 17.1, è presentata l'analogia con il problema del moto di un punto materiale vincolato ad appartenere ad una superficie. Anche in quel caso la varietà delle velocità concesse è piatta.

Osservazione 1. In generale, i tensori di vincolo $\mathbf{V}_i$ possono dipendere dalla posizione $p \in \Omega$ e dal tempo $t \in [0,\, t_0)$. Per quanto riguarda la dipendenza spaziale, pensiamo, ad esempio, ad una piastra a spessore variabile nella quale le condizioni (1.66)-(1.67) o (1.66)-(1.68) sono imposte soltanto in quelle zone dove lo spessore è inferiore ad un valore minimo $(\varepsilon < \varepsilon_{min})$. Invece la dipendenza dal tempo può essere usata per descrivere fenomeni di invecchiamento del materiale. □

Rifacendoci a [64], § 6, 17, 26, vediamo come si modifica il problema dell'equilibrio in presenza di questo tipo di vincolo interno.

Una volta fissati gli m tensori di vincolo $\mathbf{V}_i$, lo spazio Sym si può scrivere come somma diretta

$$\mathrm{Sym} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp},$$

tra lo *spazio di vincolo*

$$\mathcal{M} = \{ \mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \quad | \quad \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{A} = 0, \quad i = 1...m \}, \tag{1.70}$$

ed il suo complemento ortogonale

$$\mathcal{M}^{\perp} = \mathrm{span}(\, \mathbf{V}_i, \quad i = 1...m\,). \tag{1.71}$$

Osserviamo subito che il tensore di deformazione $\mathbf{E}$, per via della (1.69) appartiene ad $\mathcal{M}$. Notiamo che la richiesta costitutiva (1.18) secondo la quale lo sforzo reattivo non spende potenza per nessun moto ammissibile è soddisfatta.

Accompagniamo le assunzioni costitutive di tipo cinematico (1.69) con le seguenti condizioni dinamiche: il tensore degli sforzi $\mathbf{S}$ si scompone additivamente nelle parti *attiva* e *reattiva*

$$\mathbf{S}(p,t) = \mathbf{S}^A(p,t) + \mathbf{S}^R(p,t),$$

dove lo sforzo reattivo è

$$\mathbf{S}^R(p,t) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(p,t)\mathbf{V}_i \in \mathcal{M}^{\perp}, \quad \text{con} \quad \psi_i(p,t) \in \mathbb{R}, \tag{1.72}$$

e dove, assegnata la trasformazione lineare

$$\mathbb{C} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \tag{1.73}$$

lo sforzo attivo vale

$$\mathbf{S}^A(p,t) = \mathbb{C}[\mathbf{E}(p,t)] \in \mathcal{M}. \tag{1.74}$$

Osservazione 2. Scegliere $\mathcal{M}$ come codominio dell'applicazione $\mathbb{C}$ non è indispensabile, ma realizza una comoda normalizzazione senza ledere la generalità. Infatti, primo, un'eventuale porzione di sforzo attivo appartenente a $\mathcal{M}^{\perp}$ si sommerebbe comunque ad una parallela reazione di modulo costitutivamente indeterminato; secondo, è comodo avere $\mathbf{S}^A \cdot \mathbf{S}^R = 0$. $\square$

Definiamo lo spazio degli spostamenti vincolati

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_c := \{ \quad & \mathbf{u}(p,t) \quad | \quad \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}_i = 0, \;\; i = 1, ..., m \;\text{ in }\; \mathcal{B}\times[0,\, t_0), \\ & \mathbf{P}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \;\text{ su }\; \partial\mathcal{B}\times[0,\, t_0)\,\}. \end{aligned} \tag{1.75}$$

In presenza di vincoli interni, il problema dell'equilibrio elastico si può formulare così: assegnati m tensori di vincolo $\mathbf{V}_i \in \text{Sym}$, $i = 1, ..., m$, linearmente indipendenti, determinare un campo di spostamenti $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_c$ ed una lista di moltiplicatori reattivi $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ tali che, qualunque sia l'istante di tempo $t \in [0,\, t_0)$ fissato, sia soddisfatta l'equazione delle potenze virtuali

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}, \tag{1.76}$$

per qualsiasi velocità test $\mathbf{v}$, con

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] + \sum_{i=1}^{m} \psi_i \mathbf{V}_i.$$

Se selezioniamo velocità test che soddisfano la condizione di vincolo

$$\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}_i, \;\; i = 1, ..., m, \tag{1.77}$$

l'equazione delle potenze virtuali (1.76) si riduce ad essere un'equazione nella sola incognita $\mathbf{u}$. Infatti l'integrando del primo membro della (1.76) diventa

$$\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} = \mathbb{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]\cdot\nabla\mathbf{v},$$

dato che, per le (1.77),

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i \mathbf{V}_i \cdot \nabla\mathbf{v} = 0.$$

Una volta determinato il campo di spostamenti $\mathbf{u}$ soluzione dell'equazione delle potenze virtuali, la lista dei coefficienti reattivi $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ si determina dalle equazioni di bilancio del problema elastico lineare in presenza di vincoli:

$$\begin{aligned} & \text{div}(\mathbb{C}[\nabla\mathbf{u}]) + \text{div}\,\mathbf{S}^R + \mathbf{b}^{ni} = \varrho\ddot{\mathbf{u}}, \qquad \text{su } \mathcal{B}\times[0,\, t_0), \\ & \mathbf{P}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \qquad (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\mathbb{C}[\nabla\mathbf{u}] + \mathbf{S}^R)\boldsymbol{\nu} = \hat{\mathbf{s}}, \qquad \text{su } \partial\mathcal{B}\times(0,\, t_0). \end{aligned} \tag{1.78}$$

Le $(1.78)_{1,3}$ infatti si riscrivono

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\sum_{i=1}^{m} \psi_i \mathbf{V}_i) = -\operatorname{div}(\mathbb{C}[\nabla \mathbf{u}]) - \mathbf{b}^{ni} + \varrho \ddot{\mathbf{u}}, \ \text{ su } \mathcal{B} \times [0, t_0), \\ &\sum_{i=1}^{m} \psi_i \mathbf{V}_i \boldsymbol{\nu} = -\mathbb{C}[\nabla \mathbf{u}]\boldsymbol{\nu} + \hat{\mathbf{s}}, \ \text{ su } \partial\mathcal{B} \times (0, t_0), \end{aligned} \tag{1.79}$$

nelle quali i secondi membri sono noti e dunque le uniche incognite sono gli m coefficienti di vincolo $\{\psi_i\}_{i=1}^m$.

Ritorniamo ora al problema dell'equilibrio elastico per un corpo a forma di piastra formulato nel paragrafo precedente. Fissati gli m tensori di vincolo interno $\mathbf{V}_i$, lo spazio degli *spostamenti ammissibili vincolati* diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_c^{(n)} = \{ \quad & \mathbf{u}(p, t) \quad | \quad \mathbf{u}(p, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{u}_i(x, t), \ \mathbf{V}_j \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \ \ j = 1...m, \\ & \mathbf{P}\mathbf{u}(p, t) = \hat{\mathbf{u}}(p) \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \times [0, t_0) \ \}, \end{aligned} \tag{1.80}$$

e analogamente lo spazio delle velocità test (1.37):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_c^{(n)} \ = \{ \quad & \mathbf{v}(p) \quad | \quad \mathbf{v}(p) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{v}_i(x), \ \mathbf{V}_j \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \ \ j = 1...m, \\ & \mathbf{P}\mathbf{v}(p) = 0 \ \text{ su } \partial\mathcal{M} \ \}. \end{aligned} \tag{1.81}$$

L'equazione delle potenze virtuali

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}^A \cdot \nabla \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}, \ \ \mathbf{v} \in \mathcal{W}_c^{(n)}, \tag{1.82}$$

coinvolge solo la parte attiva $\mathbf{S}^A$ del tensore degli sforzi e, tramite la relazione costitutiva (1.74), diventa un'equazione la cui incognita è il campo di spostamenti $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_c^{(n)}$. Una volta determinato il campo di spostamenti $\mathbf{u}$, i coefficienti reattivi $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ si ottengono dalle equazioni tridimensionali (1.79).

Osservazione 3. Se $\varphi_i(\zeta) = \zeta^i$, si può dare un'idea delle restrizioni sulle funzioni test $\mathbf{v}_i(x)$ che seguono da (1.81). Infatti,

$$\mathbf{V}_j \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{V}_j \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta^{k+1} \nabla \mathbf{v}_{(k+1)} + (k+1)\zeta^k \mathbf{v}_{(k+1)} \otimes \mathbf{z}) \cdot \mathbf{V}_j = 0,$$

da cui segue che $\mathbf{V}_j$ deve essere ortogonale a tutti i tensori della lista

$$\nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{z}, \ \nabla \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{z}, ..., \ \nabla \mathbf{v}_{(n-1)} + n\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{z}, \ \nabla \mathbf{v}_n.$$

1.9 Il tensore elastico vincolato

La condizione (1.73) richiede che il tensore di elasticità $\mathbb{C}$, in presenza di vincoli interni, sia:

$$\mathbb{C} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}. \tag{1.83}$$

Un qualsiasi tensore elastico $\mathbb{C}$ opera sullo spazio Sym dei simmetrici, e quindi per soddisfare la (1.83) deve essere modificato. In questo paragrafo vedremo come i *problemi di classificazione* e *rappresentazione* sono modificati in presenza di vincoli interni. Ci rifaremo a [64] dove le due questioni costitutive sono affrontate in condizioni non vincolate (§*16*) e vincolate (§*18*).

Iniziamo con il *problema di classificazione*. Innanzitutto, assegnato $\mathbf{Q} \in \mathrm{Rot}$, definiamo *coniugatore ortogonale* il tensore del quart'ordine $\mathbb{Q}$ che opera su un qualsiasi $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$ nel seguente modo:

$$\mathbb{Q}[\mathbf{A}] = \mathbf{QAQ}^T. \tag{1.84}$$

Indichiamo con $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ il gruppo di simmetrie materiali di $\mathbb{C}$. Poiché la (1.83) richiede che l'applicazione lineare $\mathbb{C}$ sia definita in $\mathcal{M}$, allora, se vogliamo che $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ sia una trasformazione di simmetria per il corpo vincolato, deve essere

$$\mathbb{Q}[\mathbf{E}] \in \mathcal{M}, \quad \forall\ \mathbf{E} \in \mathcal{M}. \tag{1.85}$$

Associamo allo spazio di vincolo $\mathcal{M}$ il gruppo

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}} := \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Rot} \quad | \quad \mathbb{Q}\mathcal{M} = \mathcal{M}\}, \tag{1.86}$$

costituito da tutte le rotazioni che lasciano $\mathcal{M}$ invariato, il quale rappresenta l'insieme delle rotazioni compatibili con il vincolo. Deve quindi essere soddisfatta la relazione:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}} \supset \mathcal{G}_{\mathbb{C}}. \tag{1.87}$$

Notiamo che per esaudire la (1.87), il tensore di elasticità può dover rinunciare ad alcune delle simmetrie materiali di cui gode in condizioni non vincolate. Il problema di *classificazione vincolata* consiste quindi nel restringere il gruppo $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ a tutte le rotazioni di simmetria materiale $\mathbf{Q}$ che soddisfano la (1.85).

Passiamo al *problema di rappresentazione*. In [64], § *16*, viene dimostrato che il tensore di elasticità $\mathbb{C}$, la cui simmetria di risposta è definita dall'insieme $\mathcal{G} \subset \mathrm{Rot}$, deve essere tale che ognuno dei sui spazi caratteristici $\mathcal{C}$ soddisfi:

$$\mathbb{Q}\mathcal{C} = \mathcal{C}, \ \ \forall\ \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \tag{1.88}$$

Dopo aver trovato tutti i sottospazi $\mathcal{C}_i$ non nulli di Sym che soddisfano la (1.88), il tensore $\mathbb{C}$ si costruisce:

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \mathbf{C}_i \otimes \mathbf{C}_i, \ \ \text{con } \operatorname{span}(\mathbf{C}_i) = \mathcal{C}_i, \ \ 1 \leq p \leq 6. \tag{1.89}$$

Una volta definito $\mathbb{C}$, si risale al gruppo delle simmetrie materiali associato $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} \supset \mathcal{G}$.

Il problema di *rappresentazione vincolata* consiste nel determinare la classe $\mathbb{E}\mathrm{la}(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ di tutti i tensori di elasticità la cui simmetria di risposta è determinata da $\mathcal{G}$ in maniera compatibile con l'insieme di vincolo $\mathcal{M}$. Sia $\mathbb{C}$ il tensore di elasticità del materiale non vincolato che, attraverso una parziale decomposizione spettrale, rappresentiamo così:

$$\mathbb{C} = \gamma \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} + \bar{\mathbb{C}}, \ \ \bar{\mathbb{C}}[\mathbf{C}] = 0. \tag{1.90}$$

Supponiamo di cercare la formula di rappresentazione del tensore di elasticità $\tilde{\mathbb{C}}$ del materiale che ha la stessa simmetria di risposta di $\mathbb{C}$ e che è vincolato internamente dalla condizione:

$$\mathbf{E} \in \mathcal{M} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \quad | \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0\}. \tag{1.91}$$

La (1.87) è soddisfatta senza alcun problema, infatti $\mathcal{M}$ coincide con lo spazio $\mathcal{C}^{\perp}$ ortogonale a $\mathcal{C} = \mathrm{span}(\mathbf{C})$ e dalla (1.88) abbiamo che

$$\mathbb{Q}\,\mathcal{C}^{\perp} = \mathcal{C}^{\perp}, \;\; \forall \;\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}. \tag{1.92}$$

Concludiamo che il gruppo delle simmetrie di $\tilde{\mathbb{C}}$ coincide con $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$, ossia

$$\mathcal{G}_{\tilde{\mathbb{C}}} := \{\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{\mathcal{M}} \;|\; \mathbb{Q}\tilde{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{C}}\mathbb{Q}\,|_{\mathcal{M}}\} \equiv \mathcal{G}_{\mathbb{C}}, \tag{1.93}$$

ed il tensore di elasticità in presenza del vincolo vale:

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\,|_{\mathcal{M}} = \bar{\mathbb{C}}. \tag{1.94}$$

Ricapitolando, assegnato lo spazio di vincolo $\mathcal{M}$, un sottogruppo $\mathcal{G}$ di Rot ed una formula di rappresentazione per tutti i tensori elastici che appartengono alla classe di materiali non vincolati $\mathbb{E}\mathrm{la}(\mathrm{Sym}, \mathcal{G})$, allora possiamo costruire $\mathbb{E}\mathrm{la}(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ come la collezione delle restrizioni ad $\mathcal{M}$ di tutti quegli elementi di $\mathbb{E}\mathrm{la}(\mathrm{Sym}, \mathcal{G})$ che hanno $(0, \mathcal{M}^{\perp})$ come coppie caratteristiche. Osserviamo che un requisito fondamentale perché la classe dei tensori $\mathbb{E}\mathrm{la}(\mathrm{Sym}, \mathcal{G})$ sia compatibile con il vincolo interno è che tra i suoi autotensori siano contenuti tutti i tensori di vincolo.

Nei capitoli successivi rappresenteremo il tensore elastico di trasversa isotropia ed una sua particolare versione vincolata.

1.10 Teorie gerarchiche di piastre

Se da un lato la costrizione cinematica (1.27) permette di ridurre il problema tridimensionale ad un problema bidimensionale, dall'altro la soluzione, quando esiste, è solo una approssimazione della soluzione esatta del corrispondente problema elastico tridimensionale. Le *teorie gerarchiche di piastre* si prefiggono lo scopo di giungere ad una prefissata discrepanza tra le soluzioni esatta ed approssimata mediante un progressivo arricchimento della cinematica ammissibile. Una volta fissato il sistema di funzioni $\varphi_i(\zeta)$, indichiamo con $\mathbf{u}^{(n)}$ il campo di spostamenti (1.27) composto da $(n+1)$ addendi. L'arricchimento cinematico si compie incrementando l'ordine n e, poichè gli spazi di approssimazioni $\mathcal{U}^{(n)}$ sono contenuti uno nell'altro al crescere dell'ordine gerarchico:

$$\mathcal{U}^{(0)} \subset \mathcal{U}^{(1)} \subset ... \subset \mathcal{U}^{(n)} \subset \mathcal{U}^{(n+1)} \subset ... \subset \mathcal{U},$$

ci si aspetta che tanto piú n è grande tanto più accurata sia la soluzione approssimata; nel limite $n \to \infty$ ci si aspetta di arrivare alla coincidenza tra le soluzioni approssimata ed esatta. In [12] è stato provato che, per particolari condizioni al contorno, una volta scelta la lista di funzioni $\{\varphi_i(\zeta) = \zeta^i\}_{i=0}^{n}$, la successione $\{\mathbf{u}^{(n)}\}_0^{\infty}$ converge alla soluzione esatta $\mathbf{u}$;

piú precisamente la successione $\{\mathbf{u}^{(n)}\}_0^\infty$ converge al campo $\mathbf{u}^{(\infty)}$ ed il limite $\mathbf{u}^{(\infty)}$ coincide con la soluzione esatta $\mathbf{u}$.

Un problema aperto è quello di definire un criterio che permetta di quantificare l'accuratezza della teoria così da rendersi conto se il passo dall'ordine n all'ordine $n+1$ è necessario. Vedremo che lo studio della propagazione di onde armoniche puó dare indicazioni sul grado di accuratezza. In particolare, esamineremo i benefici che si hanno passando da una teoria di piastre trasversalmente isotrope di ordine uno ad una di ordine tre.