Introduzione

1. Tema

Il tema principale di questa tesi è la deduzione e lo studio di alcune soluzioni di un sistema di equazioni alle derivate parziali che regola la dinamica delle piastre elettroelastiche lineari *incoerenti*.

Nell'incoerenza risiede l'elemento principale di novità del modello che viene costruito; conviene chiarire subito il significato del termine, limitandosi per semplicità al caso puramente meccanico. Una piastra tipica è un cilindro retto di modesto spessore, di asse $\mathbf{z}$, costituito da un materiale che, se non è isotropo, ha di regola almeno un asse $\mathbf{c}$ che assegna l'orientamento locale della risposta in sforzo alla deformazione: ad esempio, il materiale può essere *trasversalmente isotropo* rispetto alla direzione $\mathbf{c}$, oppure *monoclino* rispetto ad una giacitura perpendicolare a $\mathbf{c}$. Una piastra è *incoerente* quando $\mathbf{z} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, cioè, quando la geometria d'assieme e la geometria locale della risposta materiale non sono coerenti nel senso specificato.

L'esame degli effetti dell'incoerenza in una teoria di piastre è stato intrapreso solo molto di recente ([5, 66]). Questo carattere è assente in tutte le teorie di piastre classiche (Germain-Lagrange [78], Kirchhoff-Love [26, 42], Reissner-Mindlin [47, 45, 68, 69] e loro varianti), così come in teorie più moderne e generali [38, 59], *et pour cause*: tutte le teorie standard di piastre mirano ad ottenere un problema bidimensionale che abbia la massima semplicità compatibile con l'ottenere le predizioni desiderate senza risolvere il problema tridimensionale corrispondente;[1] invece l'incoerenza rende ogni teoria nella quale sia presente più complessa della corrispondente teoria coerente, tanto che introdurre incoerenza sembra addirittura contraddire la nostra intuizione profonda del comportamento di una piastra sottile.

Perchè, allora, studiare piastre incoerenti?

Le ragioni sono varie, oltre naturalmente alla mera curiosità. Intanto, una piastra reale può ben avere un indesiderato *difetto di coerenza*, che va rivelato e, possibilmente, quantificato. Poi, dato che una pur modesta incoerenza distrugge uno dei principali pregi di molte teorie coerenti, la separabilità dei comportamenti *membranale* e *flessionale*, un *attuatore* a forma di piastra potrebbe avere maggior capacità di azione se incoerente, un *sensore* avere una risposta insieme a spettro più ampio e a risoluzione più fine. Mentre dispositivi di questo genere non sono ancora stati realizzati, non è difficile immaginare alcuni elementari

[1] Questa è del resto la cifra comune a tutte le teorie di strutture (fili, travi, archi, gusci, ...): sostuire ad un problema tridimensionale complesso il più semplice problema di dimensione inferiore che ne catturi in modo sufficientemente approssimato le proprietà di interesse.

test di coerenza, quali quelli basati sulla propagazione di onde di cui trattiamo nel Capitolo 5.

2. Metodo

Le teorie di piastre formulate in questa tesi sono dedotte dall'equazione tridimensionale delle potenze virtuali.

Come si sa, quest'equazione esprime il bilancio tra sforzo e forze applicate in presenza di un qualsiasi moto virtuale ammesso. Qui, l'equazione viene scritta per un corpo tridimensionale *a forma di piastra*, cioè, un corpo che occupa un cilindro retto il cui punto generico si può identificare con la coppia (x, ζ) composta dalla posizione x nel piano medio $\mathcal{P}$ del cilindro e dalla coordinata assiale ζ. Perchè la tecnica di deduzione abbia successo, si sceglie per il campo di spostamenti (e, quindi, per le velocità virtuali ammissibili) una rappresentazione dove la dipendenza dalle variabili spaziali ζ e x è separata:

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\zeta)\mathbf{u}_i(x, t), \tag{1}$$

dove le funzioni $\varphi_i(\zeta)$ e $\mathbf{u}_i(x, t)$ costituiscono, rispettivamente, le prime $n+1$ funzioni scalari di un assegnato sistema completo ed una lista di $n + 1$ campi vettoriali incogniti.

Come conseguenza della specialità di forma del dominio di integrazione e delle velocità virtuali ammesse, e a seguito di un'integrazione sullo spessore del cilindro, l'equazione tridimensionale delle potenze virtuali viene ad esprimere il bilancio tra descrittori bidimensionali di sforzo e di forze applicate. D'altra parte, i descrittori bidimensionali di sforzo (le *caratteristiche di sollecitazione*) sono esprimibili in termini dei campi incogniti $\mathbf{u}_i(x, t)$ mediante l'impiego combinato delle relazioni tridimensionali di comportamento e di compatibilità. Introducendo queste espressioni nelle equazioni di bilancio bidimensionali si ottengono le *equazioni di evoluzione* di una teoria di piastra di $n-$esimo ordine.

Le teorie discusse in questa tesi riguardano piastre elastiche trasversalmente isotrope, orientate sia in maniera coerente che incoerente. Nel caso coerente, quanto al sistema di pesi per l'integrazione sullo spessore, si sceglie $\varphi_i(\zeta) = \zeta^i$ di modo che (1) diventa

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \mathbf{u}_i(x, t); \tag{2}$$

quanto all'ordine, si dedica maggiore, ma non esclusiva, attenzione a quello che ricomprende le teorie classiche, $n = 1$, per il quale la cinematica (1) si riduce a

$$\mathbf{u}(x, \zeta, t) = \mathbf{u}_0(x, t) + \zeta \mathbf{u}_1(x, t). \tag{3}$$

Nel caso incoerente, l'identificazione dei punti della piastra con la coppia (x, ζ) non è l'unica possibile: la si può anche fare con la coppia (y, ξ) costituita dal punto y di intersezione dell'asse di isotropia trasversa con il piano medio e dalla coordinata ξ staccata sull'asse stesso (naturalmente, tanto y che ξ dipendono da θ, oltre che da (x, ζ), nel modo precisato dalla (3.25)). Del pari, la cinematica (2) non è l'unica possibile: in questa tesi si introduce anche una cinematica che, nel caso più semplice, ha la forma

$$\mathbf{u}(y, \xi, t) = \tilde{\mathbf{u}}_0(y, t) + \xi \tilde{\mathbf{u}}_1(y, t)\,, \tag{4}$$

e si deduce la teoria di piastra corrispondente.

L'accuratezza di una teoria di piastra viene valutata confrontando le sue predizioni in tema di propagazione ondosa con quelle di una opportuna teoria tridimensionale di confronto: per la descrizione nell'ambito di una teoria di piastra della propagazione di onde armoniche in assenza di carichi funge da *benchmark* la soluzione di un problema di vibrazione libera di uno strato elastico (per *strato* si intende una regione tridimensionale doppiamente infinita di spessore costante). Il confronto mette in evidenza l'incidenza sulla qualità dell'approssimazione ottenibile delle prescrizioni cinematiche caratteristiche della teoria, in particolare, del suo ordine e della sua eventuale dipendenza dall'angolo di incoerenza. Si osserva, inoltre, che una pur modesta incoerenza apporta significative varianti alla fenomenologia della propagazione di onde tipica del caso coerente.

3. Contenuto

La tecnica di deduzione delle equazioni delle piastre è presentata nel Capitolo 1. Fissata la cinematica (1), le equazioni di bilancio sono ricavate da una versione dell' equazione tridimensionale delle potenze virtuali nella quale l'assegnazione delle condizioni al contorno è generalizzata in maniera da poter prescrivere condizioni miste di spostamento e di carico in ogni punto della porzione laterale della frontiera. In questo modo, nel problema bidimensionale risultante le condizioni sul contorno possono essere del tipo misto incontrato nelle usuali teorie di piastre.

Il Capitolo 2 è dedicato alle teorie di piastre coerenti. Assegnata al campo di spostamenti la forma di un polinomio in ζ di ordine n, vengono dedotte le equazioni di bilancio bidimensionali per i regimi membranale e flessionale. Si scrivono poi le equazioni di evoluzione per le piastre di ordine $n = 1$ e $n = 3$; infine, le teorie di Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin sono presentate come casi particolari della teoria di ordine uno.

Nel Capitolo 3 sono considerate le piastre incoerenti. Viene dedotta una formula compatta che permette di costruire il tensore di elasticità di una piastra incoerente a partire da quello di una piastra coerente, in funzione dell'*angolo di incoerenza* θ tra l'asse isotropia trasversa e la normale al piano della piastra. Quando quest'angolo è piccolo, la piastra è *debolmente incoerente* e il tensore di elasticità che le compete si ottiene calcolando l'approssimazione lineare della formula esatta. Linearizzando rispetto a θ la cinematica (4), vengono anche dedotte per integrazione sullo spessore le equazioni di una nuova teoria di piastra debolmente incoerente. La cinematica esatta è invece adoperata per ottenere le equazioni di vibrazione libera di una piastra di angolo di incoerenza compreso tra 0 e $\pi/2$.

Il Capitolo 4 contiene una presentazione, introdotta allo scopo di meglio inquadrare i successivi sviluppi, del problema della propagazione di onde in un uno strato linearmente elastico omogeneo. Per un'onda progressiva, l'equazione differenziale del moto si riduce ad un'equazione algebrica; il problema di propagazione diviene il problema di determinazione degli autovalori ed autovettori del *tensore acustico*. Si considerano, in particolare, le onde armoniche di *Rayleigh-Lamb* in uno strato in *vibrazione libera.* Condizione necessaria perchè queste onde propaghino è che siano soddisfatte le *relazioni di dispersione*, equazioni che legano il numero d'onda k alla frequenza f; nel piano Real$\{f\}$-Real$\{k\}$, il luogo dei punti che soddisfano le relazioni di dispersione è costituito dai *rami di dispersione*. Il calcolo delle relazioni di dispersione viene fatto di solito per un mezzo isotropo; qui è generalizzato al caso di risposta materiale trasversalmente isotropa, tanto coerente che incoerente; vengono anche tracciati i rami di dispersione per un materiale ceramico di produzione corrente.

Nel Capitolo 5 è trattato il problema della propagazione libera di onde armoniche in piastre modellate secondo le teorie bidimensionali dedotte nei Capitoli 2 e 3. I rami di dispersione che si ottengono sono confrontati con quelli determinati nel Capitolo 4 per i corrispondenti problemi di vibrazione di uno strato.

4. Discussione dei Principali Risultati

Per piastre coerenti, un campo di spostamenti tipo (2) e un legame costitutivo trasversalmente isotropo bastano a disaccoppiare il problema bidimensionale nei due problemi *membranale* e *flessionale*. Lo *spostamento membranale* è specularmente simmetrico rispetto al piano medio $\mathcal{P}$ e consiste di spostamenti trasversali dispari nella coordinata ζ e spostamenti piani pari. Lo *spostamento flessionale* soddisfa la condizione di antisimmetria speculare rispetto a $\mathcal{P}$ ed è costituito da spostamenti trasversali pari in ζ e spostamenti piani dispari. Gli addendi del campo di un spostamento generale si possono ripartire in quattro collezioni (vedi (3.17), le quali hanno tutte lo stesso numero di termini soltanto se la teoria di piastra in esame è di ordine dispari. E' per questa ragione che qui, a titolo di esemplificazione esplicita, vengono formulate le teorie di ordine uno e tre.

L'incremento dell'ordine influisce positivamente sulla descrizione della propagazione libera di onde armoniche. Infatti, passando dalla teoria di ordine uno a quella di ordine tre, oltre ad aggiungersi nuovi rami di dispersione, si correggono i rami di bassa frequenza, che si avvicinano alle corrispondenti curve del problema di oscillazione tridimensionale. Si nota poi che le curve di dispersione che discendono dai problemi bidimensionali approssimano i corrispondenti rami del problema tridimensionale di benchmark tanto meglio quanto più piccolo è il rapporto tra lo spessore della piastra e la lunghezza d'onda.

In una piastra incoerente, non importa quanto debolmente, il problema di evoluzione non si può disaccoppiare in problemi più semplici. Infatti, la più generale legge costitutiva che consente il disaccoppiamento è quella monoclina di asse $\mathbf{z}$ e la risposta trasversalmente isotropa incoerente può invece essere vista come monoclina solo rispetto ad un asse parallelo a $\mathbf{z} \times \mathbf{c}$.

Gli effetti dell'incoerenza sulla propagazione ondosa sono l'accoppiamento tra i modi di vibrare longitudinali (specularmente simmetrici rispetto al piano medio) e trasversali (specularmente antisimmetrici); inoltre, al *cut-off*, vale a dire per quelle frequenze cui corrispondono numeri d'onda nulli, le oscillazioni smettono di essere o solo isocore o solo dilatazionali. L'incoerenza produce poi uno slittamento delle curve di dispersione lungo l'asse delle frequenze; con ciò si formano intervalli di frequenza, cui vanno associati modi di vibrare che sono stazionari o progressivi a seconda che la piastra sia coerente o incoerente. Le discontinuità che caratterizzano i suddetti modi di vibrare sono osservabili e possono essere usate per rivelare la presenza di zone incoerenti all'interno di una piastra.

Cinematiche di tipo (2) e di tipo

$$\mathbf{u}(y,\xi,t) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \tilde{\mathbf{u}}_i(y,t), \tag{5}$$

producono teorie che possono dare predizioni sensibilmente diverse. Se per semplicità si arrestano in entrambi i casi al prim'ordine gli sviluppi in serie di potenze (formule (3) e (4), rispettivamente), si trae quanto segue dal confronto con il problema tridimensionale di benchmark: la teoria dedotta a partire da una cinematica del tipo (4) è da preferire quando l'angolo di incoerenza è piccolo ed il materiale nella direzione di trasversa isotropia è molto più rigido di quanto sia nel piano di isotropia (Sezione 5.4); quando invece l'angolo d'incoerenza è grande ed il carattere di trasversa isotropia debole, allora è preferibile ricorrere alle equazioni di evoluzione dedotte avendo prescritto la cinematica (3).