

CAPITOLO III

ANALISI LIMITE PER LA VALUTAZIONE DELLA RESISTENZA ULTIMA

3.1. Introduzione

Nel presente capitolo viene analizzato il comportamento di elementi bidimensionali nell'ambito del modello elastico perfettamente plastico con diversa resistenza a trazione e compressione. Nel seguito pertanto viene richiamata la formulazione generale e vengono esplicitate le condizioni relative al teorema statico e cinematico.

Successivamente vengono esaminati due schemi di parete soggetti a carichi verticali e azioni taglianti che corrispondono agli schemi ricorrenti di pannelli murari in presenza di azioni orizzontali di tipo sismico.

Infine si esamina il caso di lastra rettangolare con armatura inferiore appoggiata agli estremi soggetta a carico concentrato trasversale. Tale elemento riprende lo schema di lastra trave in calcestruzzo armato, nell'ipotesi di armatura diffusa ed armatura inferiore concentrata. Quest'ultima applicazione è diretta alla schematizzazione dei comportamenti a rottura del pannello al variare della geometria, evidenziando le situazioni di rottura per flessione e taglio.

3.2. Comportamento rigido plastico

Il comportamento di un materiale rigido plastico è definito dalla tensione al limite di snervamento. Il materiale è caratterizzato da deformazioni nulle per sollecitazioni inferiori al valore limite in corrispondenza del quale, viceversa, si sviluppano deformazioni teoricamente illimitate senza alterazioni delle sollecitazioni applicate. La tensione per la quale sono possibili grandi deformazioni plastiche è detta tensione di snervamento.

In generale il comportamento di un continuo rigido perfettamente plastico è definito dalla relazione tra le tensioni ($\sigma_1, \dots, \sigma_n$) e le corrispondenti deformazioni ($\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$).

In un continuo tridimensionale le σ_i rappresentano le sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi e le ε_i rappresentano le sei componenti del tensore di deformazione.

Considerato un sistema di riferimento bidimensionale, rappresenteremo lo stato di sforzo mediante un vettore:

$$\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}) \tag{3.1.}$$

Per un arbitrario campo di sforzo il punto di snervamento è definito da una relazione funzionale denominata condizione di snervamento:

$$f(\bar{\sigma}) = f(\sigma_x, \dots, \tau_{yx}) = 0 \tag{3.2.}$$

Il gruppo di coordinate $(\sigma_x, \dots, \tau_{yx})$ che soddisfa la precedente relazione definisce uno stato di sforzo in corrispondenza del quale sono possibili deformazioni illimitate. La condizione di snervamento individua nello spazio degli sforzi una superficie denominata superficie di snervamento, che viene assunta convessa chiusa e contenente l'origine degli assi.

Si assume la f positiva nei punti esterni alla superficie di snervamento e negativa per punti interni. Stati di sforzo ammissibili risultano interni alla superficie e punti esterni rappresentano stati di sforzo non compatibili con la resistenza del materiale.

Si definisce lavoro virtuale riferito all'unità di volume area o superficie il prodotto tra gli sforzi e le componenti di deformazione:

$$W = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \tag{3.3.}$$

con $\bar{\varepsilon}$ vettore delle deformazioni

$$\bar{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{yx}}{2} \right) \tag{3.4.}$$

Il lavoro necessario per deformare plasticamente un corpo ad un dato campo di deformazioni è esprimibile come:

$$D = \int_V W \, dv = \int_V \sigma_x \varepsilon_x \dots \tau_{xy} \gamma_{xy} \, dv = \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \, dv \tag{3.5.}$$

quantità conosciuta con il termine di dissipazione (energia di deformazione).

Assegnato un campo di deformazione, lo stato di sforzo corrispondente è determinato facendo ricorso all'ipotesi di Von Mises secondo la quale fra tutte le combinazioni di sforzi che soddisfano la condizione di snervamento quella ricercata rende massima l'espressione del lavoro W .

Fissato il vettore $\bar{\varepsilon}$, il vettore $\bar{\sigma}$ che soddisfa la condizione $f(\bar{\sigma})=0$ si determina imponendo:

$$\delta W = \delta \sigma_x \varepsilon_x \dots \delta \tau_{xy} \varepsilon_{xy} = 0 \tag{3.6.}$$

Consideriamo una variazione del campo di sforzi:

$$\sigma^{(2)} = (\sigma_x + \delta \sigma_x; \dots \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) \tag{3.7.}$$

appartenente alla superficie di snervamento; poiché soddisfa la condizione di snervamento si ha $f(\sigma^{(2)}) = 0$, la variazione della funzione f sarà nulla, cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \dots \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} = 0 \quad (3.8.)$$

confrontando le (3.6) e (3.8) si ricava la condizione necessaria affinché il lavoro assuma il valore massimo ovvero:

$$\varepsilon_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad i = x, y, xy \quad (3.9.)$$

con λ fattore indeterminato maggiore di zero. Il vettore $\bar{\varepsilon}$ così individuato rappresenta il gradiente della funzione f . La (3.9) è conosciuta come condizione di normalità. Poiché la funzione f è negativa all'interno della superficie di snervamento e positiva all'esterno e ricordando che il verso del gradiente è quello nel quale la f aumenta, la quantità $\frac{\partial f}{\partial s_i}$ risulta

positiva e quindi il vettore $\bar{\varepsilon}$, normale alla superficie di snervamento, è diretto verso l'esterno (figura 3.1).

Assegnato il campo di deformazioni lo stato di sforzo è univocamente determinato dal punto in corrispondenza del quale $\bar{\varepsilon}$ è normale alla superficie di snervamento. I vettori $\bar{\sigma}$ ed $\bar{\varepsilon}$ così individuati rendono massima l'espressione del lavoro. Infatti, considerato un secondo campo di sforzi.

$$\sigma^I = \bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma} = (\sigma_x^I, \dots, \tau_{xy}^I) = (\sigma_x + \Delta \sigma_x, \dots, \tau_{xy} + \Delta \tau_{xy})$$

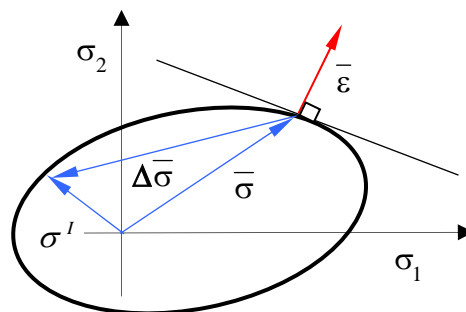


Figura 3.1: Ipotesi del massimo lavoro (riferimento principale).

appartenente alla superficie di snervamento e calcolato il lavoro corrispondente al campo di deformazioni $\bar{\varepsilon}$ si ottiene:

$$W^I = \sigma_x^I \varepsilon_x + \dots \tau_{xy}^I \gamma_{xy}$$

$$W^I = (\sigma_x + \Delta \sigma_x) \varepsilon_x + \dots (\tau_{xy} + \Delta \tau_{xy}) \varepsilon_{xy} = \sigma_x \varepsilon_x + \dots \tau_{xy} \gamma_{xy} + \Delta \sigma_x \varepsilon_x + \Delta \sigma_{xy} \gamma_{xy} \quad (3.10.)$$

ossia

$$W^I = \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} + \Delta \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} = W + \Delta \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} \quad (3.10b)$$

Vista la convessità della superficie di snervamento il prodotto scalare $\Delta\bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}$ risulta negativo, si ha quindi:

$$W \geq W'$$
(3.11.)

Se poi il campo tensionale $\bar{\sigma}^I = \bar{\sigma} + \Delta\bar{\sigma}$ è completamente all'interno della superficie di snervamento si ha:

$$W > W'$$
(3.12.)

La condizione di normalità consente di determinare il campo di deformazioni a meno del fattore di proporzionalità λ ; in altre parole è solo possibile individuare il rapporto tra le componenti dello stato deformativo.

Se la superficie di snervamento contiene parti piane, non è possibile individuare una relazione univoca tra $\bar{\sigma}$ ed $\bar{\varepsilon}$ *figura 3.2*. Il lavoro W viceversa è univocamente determinato; per vettori $\bar{\varepsilon}$ ortogonali alla superficie, infatti, il prodotto scalare $\bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}$ assume valori costanti lungo la parte piana.

In corrispondenza degli spigoli il vettore $\bar{\varepsilon}$ può assumere una posizione qualsiasi entro il campo delimitato dalle posizioni limite assunte dai vettori sui lati che definiscono lo spigolo (*figura 3.3*). Il vettore $\bar{\varepsilon}$ si ottiene come combinazione lineare positiva dei vettori appartenenti all'angolo determinato dalle due posizioni limite di $\bar{\varepsilon}$.

La legge di flusso descritta può applicarsi sia ai materiali isotropi che anisotropi. Le deformazioni di cui si è parlato per un materiale rigido-plastico rappresentano per il materiale

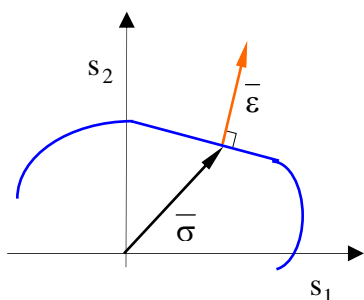


Figura 3.2: Legge di flusso lungo parti rettilinee.

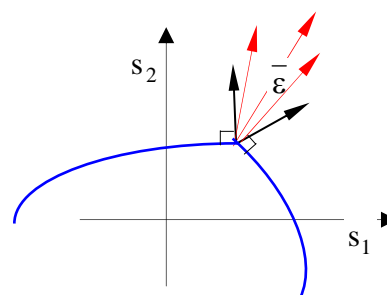


Figura3.3: Legge di flusso agli apici.

reale gli incrementi di deformazione che possono, ma non necessariamente, aver luogo quando il vettore di tensione raggiunge la superficie.

La legge di flusso descritta dalla (3.9) si dimostra valida quando applicata a metalli con comportamento perfettamente plastico, ed oggi è generalmente riconosciuto che equazioni fondamentali di tipo incrementale siano da preferirsi ad altri tipi di relazione. Può essere invece discutibile che l'utilizzo di queste relazioni per il calcestruzzo dia risultati attendibili

sulla deformazione plastica e questo per due motivi: primo perché la resistenza a trazione del calcestruzzo causa distribuzioni di fratture discontinue e non distribuzioni continue come presuppone la teoria, e in secondo luogo poiché il calcestruzzo non è un materiale perfettamente plastico. Tuttavia la teoria plastica è in molti casi capace di prevedere in maniera accurata la capacità portante di strutture in calcestruzzo anche se la valutazione delle deformazioni plastiche non è necessariamente precisa.

3.2.1. I teoremi dell'analisi limite

Un campo di sforzi è detto *staticamente ammissibile* se è continuo, se soddisfa le condizioni indefinite di equilibrio interno e di equilibrio al contorno, e se non raggiunge il limite di snervamento.

Un campo di spostamenti è detto cinematicamente ammissibile se gode della proprietà di continuità e se rispetta i vincoli ai quali il continuo è soggetto.

Dato un corpo costituito di materiale rigido perfettamente plastico, quando i carichi ad esso applicati aumentano fino a raggiungere il limite di snervamento possono svilupparsi deformazioni illimitate senza alterazioni del carico applicato. Nell'ipotesi che le deformazioni (determinate utilizzando la condizione di normalità) corrispondano a un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, il carico è definito carico di collasso, capacità portante del corpo o carico di snervamento.

Per la determinazione della capacità di carico di un corpo rigido plastico sono stati sviluppati due teoremi:

- 1- teorema statico o teorema del limite inferiore,
- 2- teorema cinematico o teorema del limite superiore.

3.2.1.1. Il teorema statico

Tale teorema afferma che un continuo rigido perfettamente plastico non può deformarsi plasticamente sotto carichi per i quali esiste un campo di tensioni staticamente ammissibile e che non raggiunge il limite di snervamento (stabile).

Il teorema si dimostra per assurdo. Siano $P(p, q)$ i carichi esterni applicati, e $\bar{\sigma}^1$ la corrispondente distribuzione di sforzi, staticamente ammissibili e stabile.

Se il teorema non avesse valore in corrispondenza dei carichi P , si manifesterebbe la deformazione plastica.

Individuiamo il punto $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \dots, \tau_{xy})$ appartenente alla superficie di snervamento rappresentativo dello stato di sforzo staticamente ammissibile corrispondente ai carichi $P(p,$

q). Sia $\bar{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \dots, \dots, \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)$ il vettore delle deformazioni corrispondente a $\bar{\sigma}$, determinato secondo la condizione di normalità e associato ad un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile $U(u, v)$.

Applichiamo il principio dei lavori virtuali considerando $\bar{\sigma}$ e P come sistema di sforzi e forze, ed $\bar{\varepsilon}$ ed U come sistema di deformazioni e spostamenti, ottenendo

$$P \cdot U = \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \, dv \tag{3.13.}$$

con dv elemento di volume, area o lunghezza.

Consideriamo ora una distribuzione di tensioni staticamente ammissibile e corrispondente a punti interni alla superficie che abbiamo detto $\bar{\sigma}' = (\sigma_x, \dots)$ per essa si ha:

$$P \cdot U = \int_V \bar{\sigma}' \cdot \bar{\varepsilon} \, dv \tag{3.14.}$$

Confrontando la (3.13) con la (3.14) risulta:

$$\int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \, dv = \int_V \bar{\sigma}' \cdot \bar{\varepsilon} \, dv \tag{3.15.}$$

ma per l'ipotesi (3.12) ossia l'ipotesi di Von Mises viceversa si deve avere

$$\int_V \bar{\sigma}' \cdot \bar{\varepsilon} \, dv < \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \, dv \tag{3.16.}$$

non potendo verificarsi contemporaneamente la (3.15) e la (3.16) si giunge per assurdo alla dimostrazione del teorema. Da quanto esposto si deduce che il carico corrispondente ad una qualunque distribuzione di sforzi stabile e staticamente ammissibile risulterà inferiore al limite di collasso. Supponendo che i carichi esterni siano assegnati a meno di un fattore di proporzionalità μ_s , il teorema può essere utilizzato per trovare valori di carico che sono inferiori al carico di collasso corrispondente a $\mu_s = \mu_p$; da qui il nome di teorema del *limite inferiore*. Scelta una distribuzione di sforzi compatibile ovunque con la resistenza del materiale, la scrittura delle equazioni di equilibrio consente di ricavare il coefficiente μ_s . In base al teorema statico si ricava:

$$\mu_s < \mu_p \tag{3.17.}$$

Vista l'arbitrarietà della scelta del campo di sforzi, esisteranno diverse soluzioni staticamente ammissibili, l'insieme di tali soluzioni contiene quella effettiva di collasso. Il teorema statico consente di affermare che il moltiplicatore al limite di collasso è il massimo dei moltiplicatori staticamente ammissibili:

$$\mu_p = \max \mu_s \tag{3.18.}$$

Il regime di sforzi staticamente ammissibile scelto non coincide con il regime statico effettivo, influenzato da diversi fattori quali il comportamento del materiale, cedimenti vincolari, distorsioni, storia di carico e congruenza.

3.2.1.2. Il teorema cinematico

Consideriamo un campo di spostamenti geometricamente possibili \bar{u} e un corrispondente campo di deformazioni $\bar{\varepsilon}$ ricavato in accordo con le condizioni di normalità.

L'energia necessaria per deformare il corpo è esprimibile come:

$$D = \int_V W(\varepsilon_x, \dots) dv = \int_V \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} dv \quad (3.19.)$$

dove $\bar{\sigma}$ rappresenta lo stato di sforzo corrispondente ad $\bar{\varepsilon}$ ed appartenente alla superficie di snervamento.

Il teorema cinematico afferma che; carichi P per i quali il lavoro compiuto sia superiore all'energia di dissipazione D , ovvero:

$$P \cdot U > \int_V W dv = \int_V \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} dv \quad (3.20.)$$

non possono essere sopportati dal corpo, ossia non sono compatibili con la resistenza del continuo. Anche questo teorema viene dimostrato per assurdo. Supponiamo che il carico possa essere portato dal corpo, e individuiamo uno stato di sforzo $\bar{\sigma}^I$ appartenente o meno alla superficie di snervamento in equilibrio con i carichi applicati.

Applicando il principio dei lavori virtuali si ottiene.

$$P U = \int_V \bar{\sigma}^I \bar{\varepsilon} dv \quad (3.21.)$$

Si precisa che il campo di deformazione $\bar{\varepsilon}$ in generale non corrisponde al campo di sforzi $\bar{\sigma}^I$.

In accordo con la (3.11) si deve avere:

$$\int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} dv \geq \int_V \bar{\sigma}^I \cdot \bar{\varepsilon} dv \quad (3.22.)$$

date allora le due ultime espressioni:

$$P \cdot U \leq \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} dv \quad (3.23.)$$

tale relazione è in conflitto con la (3.20) e il teorema è dimostrato.

Detto μ_c il generico fattore di proporzionalità del carico, in condizione di incipiente collasso con $\mu_c = \mu_p$ si ha

$$\mu_p P \cdot U = \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \, dv \quad (3.24.)$$

per un arbitrario fattore μ_c in virtù del teorema cinematico avremo

$$\mu_c P \cdot U \geq \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \, dv = \mu_p \sum_i P_i u_i \quad (3.25.)$$

ovvero

$$\mu_c \geq \mu_p \quad (3.26.)$$

da cui il nome di teorema del *limite superiore*.

Scelto un meccanismo cinematicamente ammissibile (ossia che rispetti la congruenza interna quella sul contorno e la legge di scorrimento) eguagliando il lavoro delle forze esterne con l'energia di dissipazione si ottiene un limite superiore del carico di collasso.

L'insieme di tutte le soluzioni cinematicamente ammissibili contiene quella effettiva di collasso. Il teorema cinematico afferma che il coefficiente μ_p è il minimo dei moltiplicatori cinematicamente ammissibili.

$$\mu_p = \min \mu_c \quad (3.27.)$$

Una delimitazione superiore di μ_p rappresenta un'informazione utilizzabile con cautela poiché conduce a una sopravvalutazione della capacità portante della struttura.

Le equazioni di base per la teoria plastica sono per la parte statica e geometrica le stesse della teoria elastica, solo le equazioni costitutive sono differenti. La stima del carico ultimo di un generico continuo può ottenersi utilizzando i due teoremi dell'analisi limite: teorema statico e teorema cinematico.

3.2.2. Linee di discontinuità

L'applicazione dei due teoremi dell'analisi limite richiede alcune precisazioni riguardo le linee di discontinuità. I metodi facenti capo al teorema statico consistono nella scelta di un campo di tensioni staticamente ammissibile (cioè tale da verificare ovunque le equazioni di equilibrio) e che non violi in alcun punto la resistenza del materiale. La scrittura delle equazioni di equilibrio permette di individuare un limite inferiore del carico ultimo. Spesso per l'applicazione del teorema statico è vantaggioso dividere il sistema in campi tali che, in ciascuno di essi, lo stato di sforzo si mantenga costante concentrando le discontinuità lungo le linee di frontiera tra zone adiacenti. Utilizzando il teorema cinematico, viceversa, scegliendo un meccanismo di crisi cinematicamente ammissibile (cioè rispetta la congruenza interna e al

contorno e la legge di scorrimento), ed eguagliando il lavoro delle forze esterne e l'energia dissipata dagli sforzi si ottiene un limite superiore del carico ultimo [3.1, 3.2, 3.3, 3.4].

3.2.2.1. Linee di discontinuità del campo di sforzi

Nella costruzione di distribuzioni di sforzi equilibrati che non superino la resistenza del materiale, spesso si procede suddividendo il corpo in zone di sforzo omogenee che soddisfino le equazioni di equilibrio e non violino le condizioni al contorno. Una distribuzione molto particolare di tensioni equilibrate può essere quella corrispondente alla soluzione elastica, che tuttavia risulta spesso assai complessa. Devono quindi essere ricercate distribuzioni di sforzo equilibrate più agevoli da costruirsi della soluzione elastica. In particolare si prestano bene allo scopo in molte applicazioni soluzioni a campi discontinui a sforzo costante, nelle quali si richiede il rispetto della continuità voluta dall'equilibrio delle sole componenti di tensioni tangenziale e normale, sulle linee che delimitano i campi. Soluzioni di questo tipo sono state fornite in [3.6], [3.7], [3.8] per stati piani di deformazione, assumendo come criterio di resistenza quello di Tresca in [3.9] con estensione al criterio di Coulomb, e in [3.10] per stati piani di sforzo. Per le murature l'adozione di campi di sforzo discontinui è stata proposta in [3.11]. Riferendoci ad uno stato di sforzo piano, consideriamo due zone (campi) caratterizzate da uno stato di sforzo costante e distinguiamole con gli indici **I** e **II** ed indichiamo con ℓ la linea che le separa. Sia α l'angolo che la normale all'elemento forma con l'orizzontale (figura 3.4.)

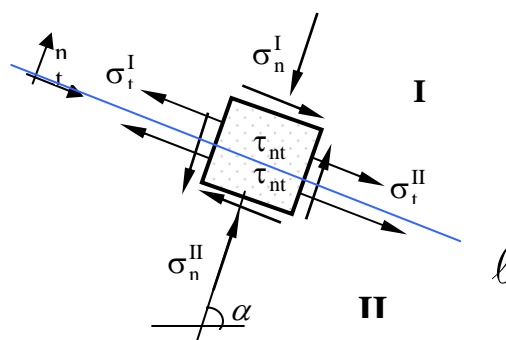


Figura 3.4: Discontinuità nelle tensioni.

Isoliamo un elementino nell'intorno del punto P appartenente ad ℓ ed introduciamo un sistema di coordinate locali ($n-t$) con t tangente alla linea ℓ ed n normale a t .

Trascurando l'effetto del peso proprio la scrittura delle equazioni di equilibrio lungo la linea ℓ nelle direzioni normale e tangente richiede che alcuni sforzi siano continui ossia:

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)} ; \quad \tau_{nt}^{(1)} = \tau_{nt}^{(2)}$$

Essendo σ e τ le tensioni normale e tangenziale su ℓ , senza coinvolgere lo sforzo σ_t , la ℓ è definita linea di discontinuità se lo sforzo σ_t differisce nelle zone I e II, cioè se $\sigma_t^{(1)} \neq \sigma_t^{(2)}$.

Lo stato di sforzo sull'elemento è rappresentato nel piano di Mohr nella *figura 3.5* dove sono tracciati i cerchi di Mohr associati alle due zone e distinti con gli indici I e II.

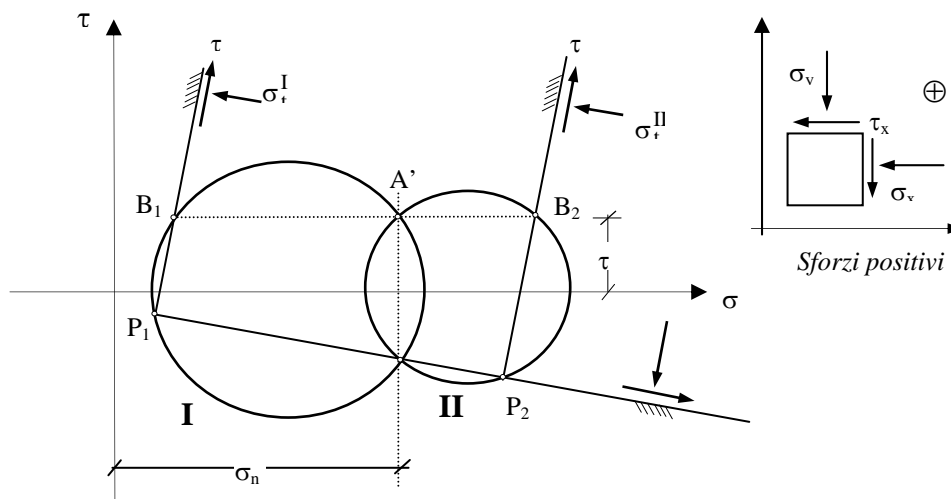


Figura 3.5: I cerchi di Mohr corrispondenti allo stato di sforzo della figura precedente.

Indichiamo con **A** il punto rappresentativo dello stato di sforzo corrispondente a piani paralleli ad ℓ , comune alle zone I e II, e siano **P₁** e **P₂** i poli dei due cerchi ottenuti tracciando attraverso **A** la parallela ad ℓ . I punti **B₁** ed **B₂** che rappresentano lo stato di sforzo sui piani ortogonali ad ℓ rispettivamente nella zona I e II sono caratterizzati dalla medesima ordinata, ma ascissa diversa: ne consegue che $\sigma_t^{(1)} \neq \sigma_t^{(2)}$. In generale fissando un punto **A** di coordinate (σ_n, τ) è possibile tracciare infinite coppie di cerchi, tutte aventi i due cerchi ad ascisse diverse e con centro sull'asse delle ascisse. Se si vuole che le zone **I** e **II** siano ambedue sede di plasticizzazione ovvero, per ottenere la maggiore soluzione limite inferiore compatibile con la distribuzione di sforzi scelta e con la resistenza del materiale, ambedue i cerchi dovranno essere tangenti al dominio di resistenza assunto; si imporrà quindi la condizione di tangenza con la superficie di snervamento [3.5]

Per stati di sforzo piani i criteri possono essere graficamente rappresentati nel piano di Mohr. Tale rappresentazione è fornita dall'involuppo dei cerchi di Mohr relativi agli stati di sforzo appartenenti alla frontiera del dominio elastico. Il contorno del dominio così definito prende il nome di *curva limite* e quella relativa al criterio di Rankine rappresentata dal cerchio di Mohr con estremi σ^+ e σ^- che rappresentano le tensioni limite a trazione e compressione del

materiale. In tal caso gli stati tensionali possibili per i campi I e II supposti “full stressed” sono illustrati nella *figura 3.6*.

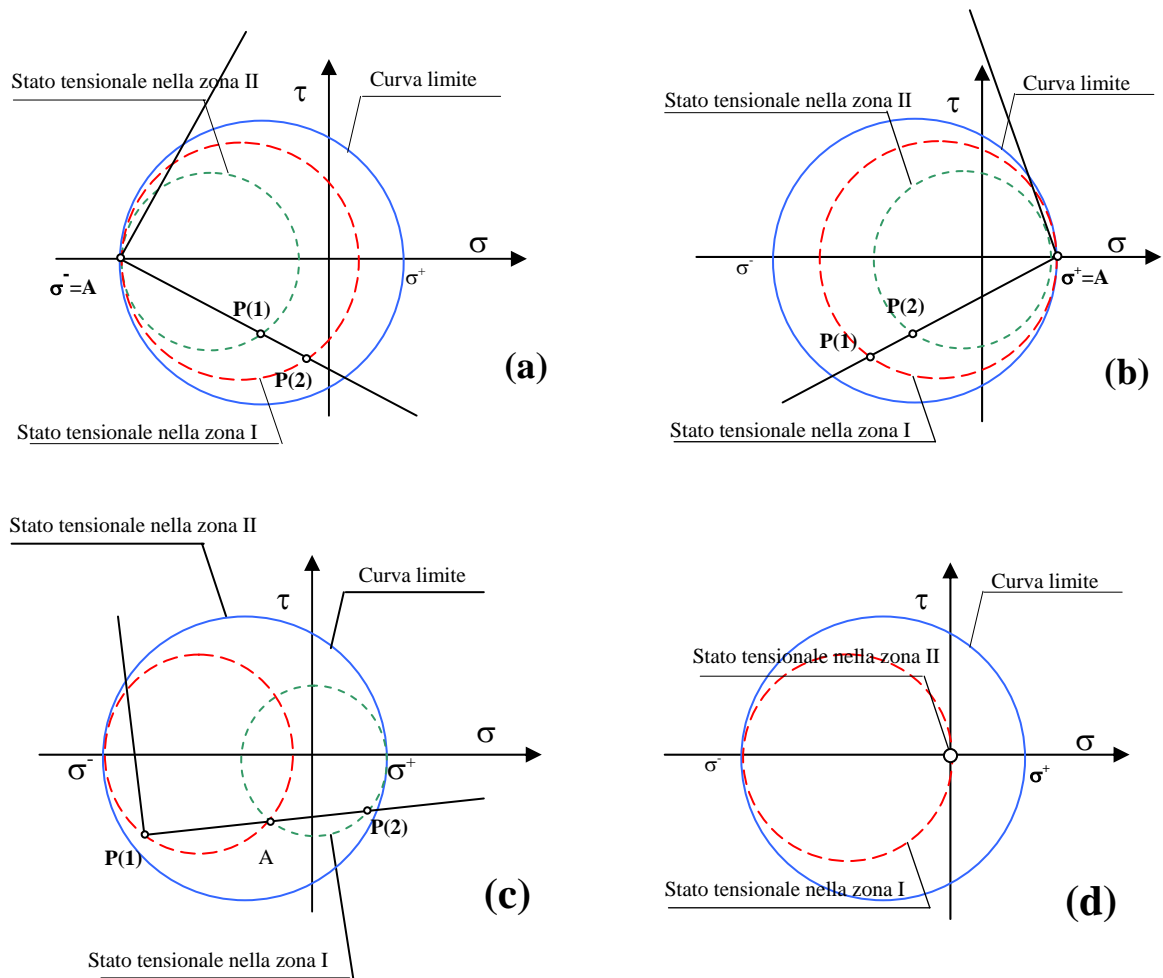


Figura 3.6: Stato tensionale lungo le linee di discontinuità.

Nel caso (a) e nel caso (b) il punto **A** coincide con un estremo del cerchio. Nel primo caso $\sigma^n = \sigma^{(-)}$ mentre nel secondo $\sigma^n = \sigma^{(+)}$, la $\tau = 0$ in entrambi i casi e la linea ℓ di discontinuità coinciderà con una direzione principale.

Nel caso (c) si tratterà di verificare che gli stati tensionali nel campo I e II soddisfino le relazioni:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_I - x_C^I)^2 + \tau^2 &= (\sigma^+ - x_C^I)^2 & \text{con} & & x_C^I &= \frac{\sigma_p^I + \sigma^+}{2}; \\
 (\sigma_I - x_C^{II})^2 + \tau^2 &= (\sigma^- - x_C^{II})^2 & & & x_C^{II} &= \frac{\sigma_p^{II} + \sigma^-}{2}
 \end{aligned}$$

I due campi non devono essere però necessariamente “full stressed”; staticamente ammissibili saranno anche situazioni come quelle in *figura 3.6 d* dove in uno dei due campi il cerchio di

Mohr coincide con l'origine. Anche in tal caso la linea di discontinuità coincide con una direzione principale.

3.3. Formulazione dello schema generale di lastra-pannello

In questo paragrafo ed in quello successivo si esamineranno elementi bidimensionali sottili di forma rettangolare soggetti a forze agenti nel piano medio distribuite o applicate lungo il contorno.

In coordinate rettangolari x ed y , considerando l'ipotesi di stato piano di tensione, le condizioni di equilibrio interno sono:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = 0 \quad (3.28.)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y = 0 \quad (3.29.)$$

dette f_x ed f_y forze di massa rispettivamente in direzione x ed in direzione y , mentre le condizioni al contorno statiche sono:

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (3.30.)$$

$$p_y = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (3.31.)$$

nelle quali p_x e p_y sono le componenti delle tensioni sul contorno e α è l'angolo che l'asse x forma con la normale uscente al bordo, presa positiva se diretta nel verso positivo del piano x, y . Se le condizioni al contorno saranno soddisfatte allora le tensioni totali sono uguali alle tensioni applicate ai bordi.

La relazione tra una generica distribuzione di spostamenti u e v e le deformazioni ε_x , ε_y , e γ_{xy} riferendoci sempre a coordinate rettangolari è:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.32.)$$

Le deformazioni devono soddisfare le equazione di compatibilità:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Il soddisfacimento della precedente relazione per una regione semplicemente connessa garantisce che gli spostamenti continui u ed v corrispondenti alle deformazioni ε_x ed ε_y , esistano.

L'espressione del lavoro virtuale sarà

$$\iint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \iint (\rho f_x u + \rho f_y v) dx dy + \int (p_x u + p_y v) ds \quad (3.33.)$$

L'equazione è un'identità se le condizioni statiche sono soddisfatte ed è allora valida per qualsiasi campo di spostamenti. Se al contrario l'equazione è valida per ogni campo di spostamenti, le condizioni statiche sono soddisfatte.

3.3.1. Il criterio di rottura ed il legame costitutivo plastico

Il criterio di rottura adottato è quello di Rankine. Le equazioni della superficie di snervamento definita da questo criterio sono nello spazio delle tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma^+ &= 0, & \sigma_2 - \sigma^+ &= 0, & \sigma_3 - \sigma^+ &= 0, \\ \sigma_1 - \sigma^- &= 0, & \sigma_2 - \sigma^- &= 0, & \sigma_3 - \sigma^- &= 0, \end{aligned} \quad (3.34.)$$

dove le σ^+ e la σ^- indicano rispettivamente la tensione limite a trazione e a compressione; tensioni valutate attraverso prove mono-assiali. Tale superficie risulta composta da sei piani perpendicolari agli assi delle $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ovvero è rappresentata da un cubo traslato rispetto l'origine nello spazio delle tensioni principali così come rappresentato in *figura 3.7 a*.

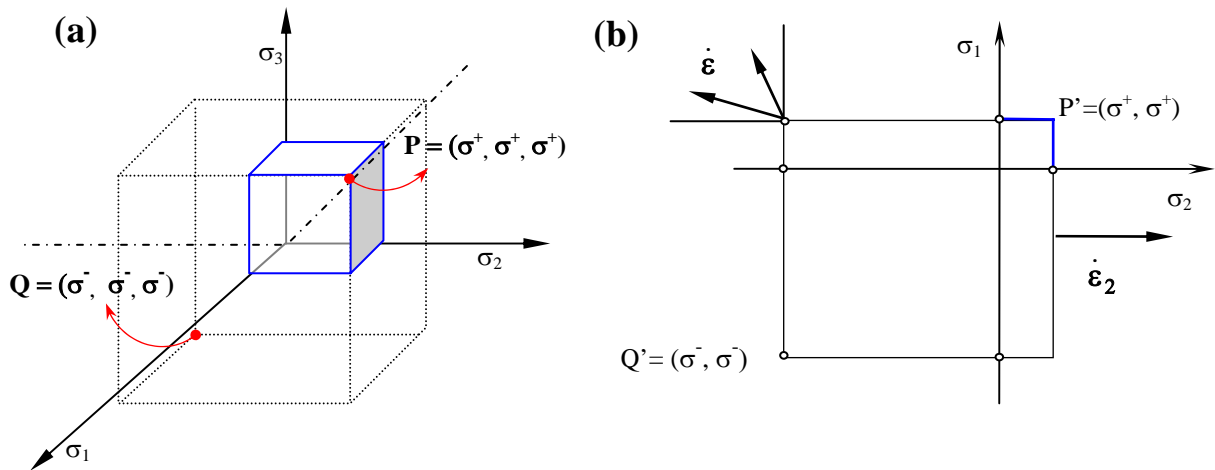


Figura 3.7: Dominio di Rankine a) nello spazio delle tensioni principali, b) nel piano delle tensioni principali.

Nel caso di stati piani di tensione, ove la σ_3 è considerata nulla, il limite del dominio è espresso nello spazio delle tensioni principali σ_1, σ_2 dalle quattro relazioni:

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma^+ = 0; f_2 = \sigma_2 - \sigma^+; f_3 = -\sigma_1 + \sigma^-; f_4 = -\sigma_2 + \sigma^- \quad (3.35.)$$

con σ^+ ed σ^- rispettivamente la resistenza ultima a trazione ed a compressione.

In accordo con la legge di flusso (3.9), e considerando la relazione di snervamento (3.35), le deformazioni plastiche saranno nel riferimento principale (*figura 3.7 b*):

$$\begin{array}{llll}
 f_1 \geq 0 & f_2 \geq 0 & f_3 \geq 0 & f_4 \geq 0 \\
 \varepsilon_1 = \lambda_1 & ; & \varepsilon_1 = 0 & ; & \varepsilon_1 = -\lambda_1 & ; & \varepsilon_1 = 0 \\
 \varepsilon_2 = 0, (\lambda_1 \geq 0) & \varepsilon_2 = \lambda_2, (\lambda_2 \geq 0) & \varepsilon_2 = 0, (\lambda_1 \geq 0) & & \varepsilon_2 = -\lambda_2, \left(\lambda_2 \geq 0 \right)
 \end{array}$$

3.3.2. Teorema statico e teorema cinematico

Con riferimento agli elementi bidimensionali in esame (*figura 3.8*) l'applicazione dell'analisi limite si esplicherà in quanto segue.

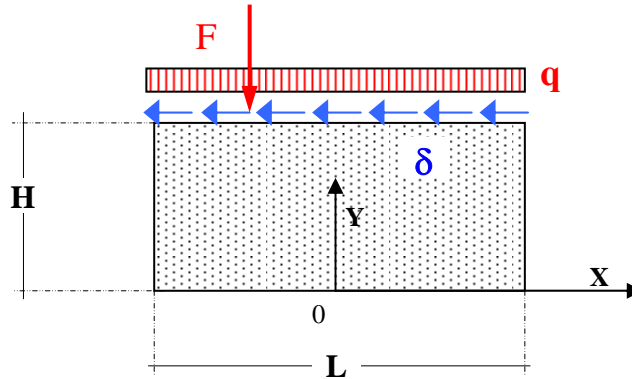


Figura 3.8: Schema generale di pannello.

In assenza di forze di massa le condizioni di equilibrio (3.30) e (3.31) diventano

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{3.36.}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{3.37.}$$

In accordo con il teorema statico dell'analisi limite, scelta una qualsiasi distribuzione di tensioni staticamente ammissibili, imponendo l'equilibrio si ricava un valore del moltiplicatore dei carichi inferiore a quello di collasso.

Le condizioni di ammissibilità per lo stato tensionale sono le (3.35). Il moltiplicatore statico è quello per cui sono rispettate tali condizioni.

La valutazione del moltiplicatore cinematico richiede la valutazione della dissipazione per unità di volume corrispondente ad un assegnata distribuzione di spostamenti. Detto **t** lo spessore della lastra la dissipazione è:

$$D = \int_V \sigma^+ \varepsilon^+ + \sigma^- \varepsilon^- dv = t \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} (\sigma^+ \varepsilon^+ + \sigma^- \varepsilon^-) dx dy \tag{3.38.}$$

l'espressione ricavata dall'uguaglianza tra quest'ultima relazione ed il lavoro esterno, minimizzata, fornisce il moltiplicatore cinematico.

3.4. Applicazioni a pareti

In questo paragrafo si esamineranno due schemi di parete, l'uno soggetto a solo carico tagliante e l'altro anche con carico superiore in conformità a quanto detto finora.

3.4.1. Parete soggetta a taglio

Si consideri il caso di una lastra rettangolare in calcestruzzo di larghezza L , altezza H e spessore t ; incastrata al bordo inferiore. Al bordo superiore siano impediti gli spostamenti verticali e sia imposto uno spostamento orizzontale distribuito. La geometria e gli assi di riferimento siano quelli indicati in *figura 3.9*.

Si vuole determinare per tale condizione di vincolo e carico il valore del carico in corrispondenza del quale si verifica il collasso. Faremo questo basandoci sui teoremi dell'analisi limite.

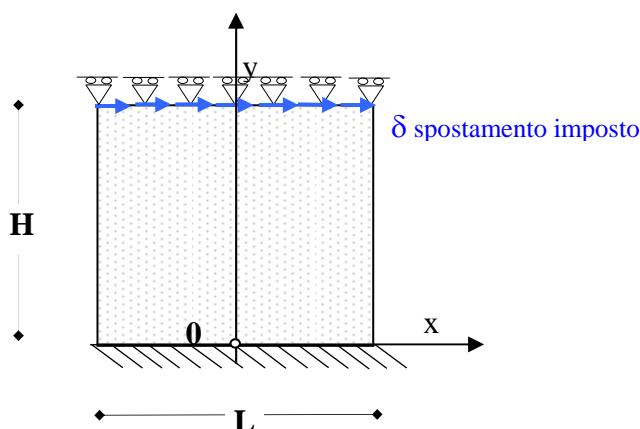


Figura 3.9: Geometria e condizioni di carico.

3.4.1.1. Moltiplicatore statico

Un limite inferiore del carico di collasso è fornito dal teorema statico in corrispondenza di una distribuzione equilibrata di sollecitazioni tale da rispettare la condizione di plasticità.

Immaginando che sottoposta al carico tagliante la struttura sviluppi un meccanismo reagente del tipo *tirante – puntone*, suddividiamo il campo della lastra in quattro regioni: “A”, “B”, “C”, “D” in funzione dell'angolo $\hat{\alpha}$ così come indicato in *figura 3.10 a*. Supponiamo costanti i valori delle sollecitazioni in ciascuna di esse. La regione “A” è costituita da parti di lastra caratterizzate da tensioni nulle, mentre le regioni “B” e “C” da parti di lastra dove lo

stato di tensione è mono-assiale e rispettivamente di trazione nella regione “**B**” e compressione nella regione “**C**” così come rappresentato in *figura 3.10 b*.

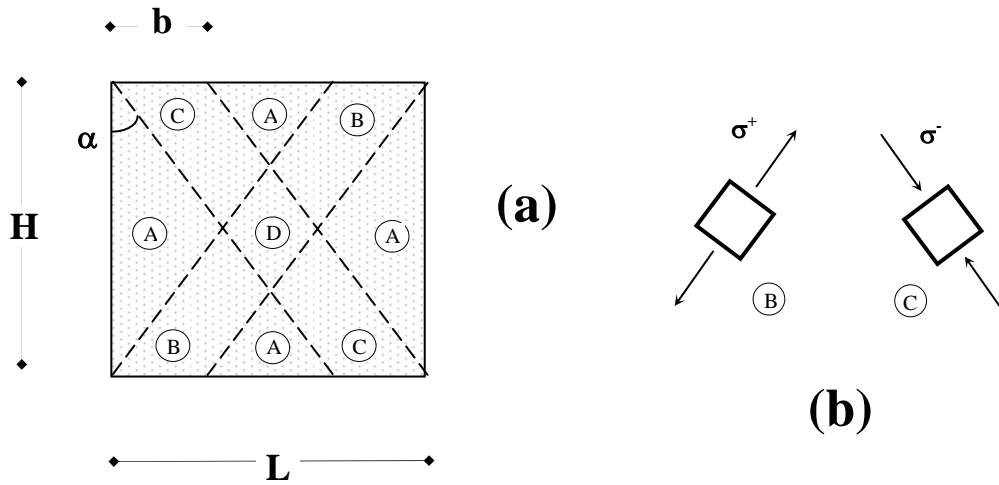


Figura 3.10.

Nella regione centrale “**D**” vi è uno stato tensionale dato dalla sovrapposizione di quello che si ha in “**B**” e “**C**”. Allora per la regione “**D**” le tensioni principali sono:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sigma^- + \sigma^+ \pm \sqrt{(\sigma^-)^2 + (\sigma^+)^2 + 2 \sigma^- \sigma^+ \cos 4\alpha} \right] \quad (3.39.)$$

Posto $k = \sqrt{(\sigma^-)^2 + (\sigma^+)^2 + 2 \sigma^- \sigma^+ \cos 4\alpha}$, essendo $\sigma^- \sigma^+ < 0$ e $\cos 4\alpha \in [-1, 1]$, risulta:

$$|\sigma^- + \sigma^+| = \sqrt{(\sigma^-)^2 + (\sigma^+)^2 + 2 \sigma^- \sigma^+} \leq k \leq \sqrt{(\sigma^-)^2 + (\sigma^+)^2 - 2 \sigma^- \sigma^+} = |\sigma^- - \sigma^+|$$

e dal momento che $\sigma^- < 0$, $\sigma^+ > 0$ e che sicuramente $|\sigma^+| < |\sigma^-|$, valgono le seguenti relazioni:

$$\sigma^- - \sigma^+ < 0 \quad \text{e quindi} \quad |\sigma^- - \sigma^+| = \sigma^+ - \sigma^-,$$

$$\sigma^- + \sigma^+ < 0 \quad \text{e quindi} \quad |\sigma^- + \sigma^+| = -(\sigma^- + \sigma^+)$$

$$-(\sigma^- + \sigma^+) \leq k \leq \sigma^+ - \sigma^- \quad \text{ovvero} \quad [\sigma^- + \sigma^+ \geq -k \geq -(\sigma^+ - \sigma^-)]$$

dalla (3.39):

$$\sigma^- = \frac{1}{2} [\sigma^- + \sigma^+ - (\sigma^- + \sigma^+)] \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{2} [\sigma^- + \sigma^+ + (\sigma^+ - \sigma^-)] = \sigma^+$$

$$\sigma^- = \frac{1}{2} [\sigma^- + \sigma^+ - \sigma^+ + \sigma^-] \leq \sigma_2 \leq \frac{1}{2} [\sigma^- + \sigma^+ + \sigma^- + \sigma^+] = \sigma^- + \sigma^+ \leq \sigma^+$$

Si può affermare in definitiva che è rispettata la condizione [3.35] dettata dal criterio di Rankine per la regione “D”, ovvero:

$$\begin{aligned} \max \{ \sigma_1, \sigma_2 \} &\leq \sigma^+ \\ \min \{ \sigma_1, \sigma_2 \} &\geq \sigma^- \end{aligned}$$

Essendo come detto σ^- ed σ^+ le tensioni massime a compressione e trazione. Il collasso globale della lastra si ha quando le tensioni nelle regioni “B” e “C” sono pari a quelle limite. L’equilibrio per le due fasce di ampiezza $b \cos \alpha$ in direzione orizzontale; essendo $b = L - h \operatorname{tg} \alpha$, fornisce la reazione orizzontale corrispondente al collasso:

$$F^{(-)} = (|\sigma^-| + \sigma^+) \sin \alpha \cos \alpha (L - H \operatorname{tg} \alpha) t \quad (3.40.)$$

al variare del parametro α . La migliore limitazione inferiore corrisponde ad un valore α_{\max} del parametro che massimizza la (3.40), posto $\operatorname{tg} \beta = L/H$, risulta:

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{L}{H} + \sqrt{\frac{L^2}{H^2} + 1} \right) = \beta/2.$$

Considerato

$$\tau_c = |\sigma^-| \sin \alpha \cos \alpha; \quad \tau_t = \sigma^+ \sin \alpha \cos \alpha, \quad \tau^{(-)} = \tau_c + \tau_t$$

il massimo per la $\tau^{(-)}$ limite è:

$$\tau^{(-)} = (\sigma^+ + |\sigma^-|) \frac{1}{2} \sin \beta \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta/2}{\operatorname{tg} \beta} \right).$$

Si ricava così un valore *adimensionale* del moltiplicatore ponendo:

$$\frac{\tau^{(-)}}{(\sigma^+ + |\sigma^-|)} = \frac{1}{2} \sin \beta \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta/2}{\operatorname{tg} \beta} \right) \quad (3.41.)$$

3.4.1.2. Moltiplicatore cinematico

Un limite superiore al carico di collasso è fornito dal teorema cinematico in corrispondenza di un sistema di spostamenti che individui un opportuno meccanismo di collasso.

A tal fine consideriamo le funzioni spostamento:

$$u(x, y) = U \frac{y}{H} \quad e \quad v(x, y) = V \frac{x}{L} \left(1 - \frac{y}{H} \right) \frac{y}{H} \quad (3.42.)$$

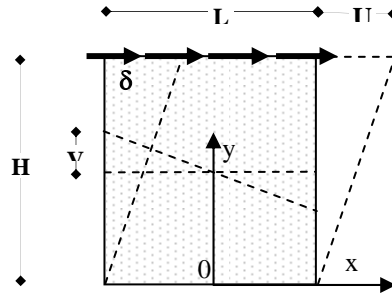


Figura 3.11: Spostamenti.

dove U e V rappresentano rispettivamente lo spostamento orizzontale al bordo superiore della lastra e lo spostamento verticale per effetto di una rotazione lungo l'asse y della stessa; così come mostrato nella *figura 3.11*. Il corrispondente stato di deformazione in termini di componenti nel riferimento cartesiano è:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 0 \\ \epsilon_y &= -\frac{8Vx}{HL} \left(1 - \frac{2y}{H}\right) \\ \gamma_{xy} &= 2\frac{U}{h} - \frac{8Vy}{LH} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \end{aligned} \quad (3.43.)$$

L'espressione della dissipazione (3.5), in componenti principali di tensione e deformazione, è la (3.38) con la geometria ed il riferimento indicati in *figura 3.11*. Poiché si ha:

$$\begin{aligned} \sigma^+ \epsilon^+ + \sigma^- \epsilon^- &= \frac{1}{2} (\sigma^+ + \sigma^-) (\epsilon_y + \sqrt{\epsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}) \\ \int_0^h \int_{-L/2}^{L/2} \epsilon_y \, dx \, dy &= 0 \end{aligned}$$

la (3.38) diventa:

$$D = \frac{1}{2} t (\sigma^+ - \sigma^-) \int_0^h \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\epsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2} \, dx \, dy \quad (3.44.)$$

la somma sotto radice può essere esplicitata in termini di spostamenti:

$$\epsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2 = \frac{V^2 64 x^2}{H^2 L^2} \left(1 - \frac{2y}{H}\right)^2 + \frac{U^2}{H^2} + \frac{V^2 64}{L^2} \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 \left(\frac{y}{H}\right)^2 - \frac{16UV}{HL} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \frac{y}{H}$$

e poiché in generale vale la disuguaglianza:

$$\int_a^b \int_c^d (f(x, y))^{1/2} \, dx \, dy \leq \left(\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy \right)^{1/2}$$

ed in particolare

$$\int_0^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2} \leq \left(\int_0^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2 \right)^{1/2}$$

si ha

$$D \leq \frac{1}{2} t (\sigma^+ - \sigma^-) \left(\int_0^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2 \right)^{1/2} \quad (3.45.)$$

con

$$\int_0^{h/2} \int_{-L/2}^{L/2} \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2 = \frac{16 V^2 L}{9 H} + \frac{U^2 L}{H} + \frac{64 V^2 H}{30 L} - \frac{16 U V}{6}$$

ponendo nell'espressione precedente in evidenza il prodotto $H L$ la (3.45) può esprimersi :

$$D \leq \frac{1}{2} t H L (\sigma^+ - \sigma^-) \left(\frac{16 V^2}{9 H^2} + \frac{U^2}{L^2} + \frac{64 V^2}{30 L^2} - \frac{16 U V}{6 L H} \right)^{1/2}$$

che posto $\bar{V} = \frac{V}{H}$ e $\bar{U} = \frac{U}{H}$ diventa:

$$D \leq \frac{1}{2} t H L (\sigma^+ - \sigma^-) \left(\frac{16 \bar{V}^2}{9} + \frac{\bar{U}^2 L^2}{H^2} + \frac{64 \bar{V}^2 H^2}{30 L^2} - \frac{16 \bar{U} \bar{V}}{6} \right) \quad (3.46.)$$

minimizzando la (3.46) rispetto a \bar{V} si ottiene il valore di \bar{V} in funzione di \bar{U} :

$$\bar{V} = z \bar{U} \quad \text{dove} \quad z = \frac{15 L^2}{4 (5 + 6 H^2)} \quad (3.47.)$$

eguagliando il lavoro delle forze applicate:

$$L = F^{(+)} U = \tau^{(+)} L t U$$

all'espressione della dissipazione, dopo aver sostituito il valore di \bar{V} ricavato nella (3.47) si ottiene il limite superiore per il carico.

$$\tau^+ = \frac{H}{2L} (\sigma^+ - \sigma^-) g; \quad \text{con} \quad g = \left(\frac{16 z^2}{9} + \frac{L^2}{H^2} + \frac{32 H^2 z^2}{15 L^2} - \frac{8 z}{3} \right)^{1/2}$$

In termini adimensionali:

$$\frac{\tau^{(+)}}{\sigma^+ + |\sigma^-|} = \frac{H}{2L} g \quad (3.48.)$$

Nella *figura 3.12* è riportato il confronto dei risultati teorici per la tensione limite per valori variabili del rapporto H/L . Per H/L minore di uno (pareti basse) i due moltiplicatori sono prossimi, per valori superiori (pareti alte) sino ad H/L uguale a 2, le due curve divergono.

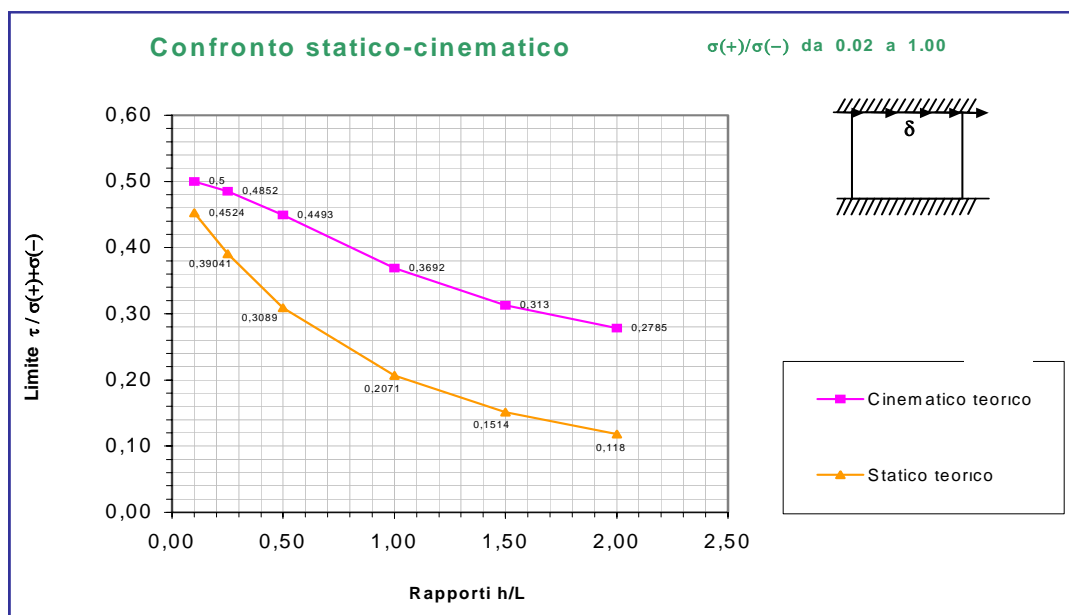


Figura 3.12: Confronto tra i due moltiplicatori in funzione di H/L .

I valori riportati in *figura 3.12* sono valori medi per un “range” di variabilità del rapporto σ^+/σ^- da 0.02 a 1.00.

3.4.2. Parete soggetta a taglio con carico superiore

Si consideri il caso di una parete di larghezza L , altezza H , spessore t ; incastrata ai bordi inferiore e superiore e soggetta lungo quest’ultimo ad uno spostamento orizzontale imposto ed un carico distribuito verticale (*figura 3.13*). Si vuole anche in questo caso valutare, basandoci sui teoremi dell’analisi limite, per tali condizioni di vincolo e carico il valore del carico in corrispondenza del quale si verifica il collasso.

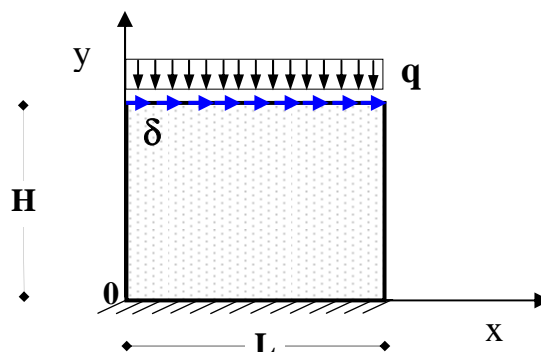


Figura 3.13: Schema geometrico e di vincolo.

3.4.2.1. Moltiplicatore statico

Un limite inferiore del carico di collasso è fornito dal teorema statico in corrispondenza di una distribuzione equilibrata di sollecitazioni tale da rispettare la condizione di plasticità. Si suppone che sottoposta al carico tagliante la struttura sviluppi un meccanismo reagente indicato in *figura 3.14 a*. Consideriamo dei campi costanti di tensione individuati dalle regioni illustrate in figura. La regione "A" è costituita da parti di lastra caratterizzate da tensioni nulle, mentre le regioni "B" e "C" da parti di lastra dove lo stato di tensione è monoassiale (*figura.3.14 b*). Lo stato tensionale nella regione "D" è la sovrapposizione dei due stati tensionali, la dimostrazione dell'ammissibilità dello stato tensionale in "D" è analoga a quella svolta al *paragrafo 3.3.1.1.* e per brevità non la riportiamo.

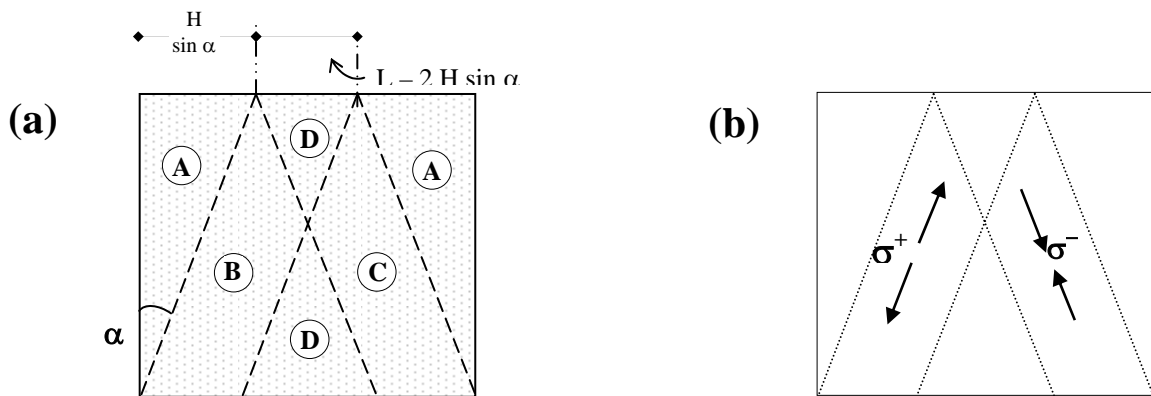


Figura 3.14: a) e b).

Il valore delle tensioni σ_x , σ_y e τ_{xy} considerando una sola *fascia* attiva ad esempio la "B" sono:

$$\tau_{xy} = \sigma^- \sin \alpha \cos \alpha ; \quad \text{e} \quad \sigma_y = \sigma^- \cos^2 \alpha$$

Le risultanti delle tensioni i sul bordo superiore sono:

$$T = \tau_{xy} (L - H 2 \sin \alpha) = \left| \sigma^- \right| \sin \alpha \cos \alpha (L - H 2 \sin \alpha)$$

$$F = \sigma_y (L - H 2 \sin \alpha) = \left| \sigma^- \right| \cos^2 \alpha (L - H 2 \sin \alpha)$$

essendo per l'equilibrio $F = q \cdot L$, si ha:

$$\left| \sigma^- \right| \cos^2 \alpha (L - H 2 \sin \alpha) = q L$$

dalle relazioni precedenti risulta inoltre

$$T = \frac{|\sigma^-| \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha (L - H 2 \sin \alpha)}{\cos \alpha} = q L \tan \alpha$$

$$\tau^{(-)} = q \tan \alpha$$

I parametri che intervengono sono:

$$\frac{q}{\sigma^-}, \frac{\sigma^+}{\sigma^-}, \frac{H}{L} \quad (3.49.)$$

Considerando entrambe le fasce “A” e “B” si determinano le risultanti:

$$F = \left(|\sigma^-| - \sigma^+ \right) \left[\cos^2 \alpha (L - H 2 \sin \alpha) \right] = q L \quad (3.50.)$$

$$T = \left(|\sigma^-| + \sigma^+ \right) \tan \alpha \cos^2 \alpha (L - H 2 \sin \alpha) \quad (3.51.)$$

$$T = \frac{|\sigma^-| + \sigma^+}{|\sigma^-| + \sigma^+} q L \tan \alpha \quad \text{da cui} \quad \tau^{(-)} = \frac{|\sigma^-| + \sigma^+}{|\sigma^-| - \sigma^+} q \tan \alpha$$

adimensionalizzando diventa:

$$\frac{\tau^{(-)}}{|\sigma^-| + \sigma^+} = \frac{q \tan \alpha}{|\sigma^-| - \sigma^+} \quad (3.52.)$$

che espressa in funzione dei parametri è:

$$\frac{\tau^{(-)}}{|\sigma^-| + \sigma^+} = \frac{\frac{q}{|\sigma^-|}}{1 - \frac{\sigma^+}{|\sigma^-|}} \tan \alpha \quad (3.53.)$$

dalla (3.49) si ricava il valore di α : (3.54) che sostituito nella (3.52) fornisce il valore limite cercato.

$$\cos^2 \alpha \left(1 - \frac{2H}{L} \sin \alpha \right) = \frac{\frac{q}{|\sigma^-|}}{1 - \frac{\sigma^+}{|\sigma^-|}} \tan \alpha \quad (3.54.)$$

3.4.2.2. Moltiplicatore cinematico

Per la parete considerata nel paragrafo precedente, consideriamo le funzioni spostamento:

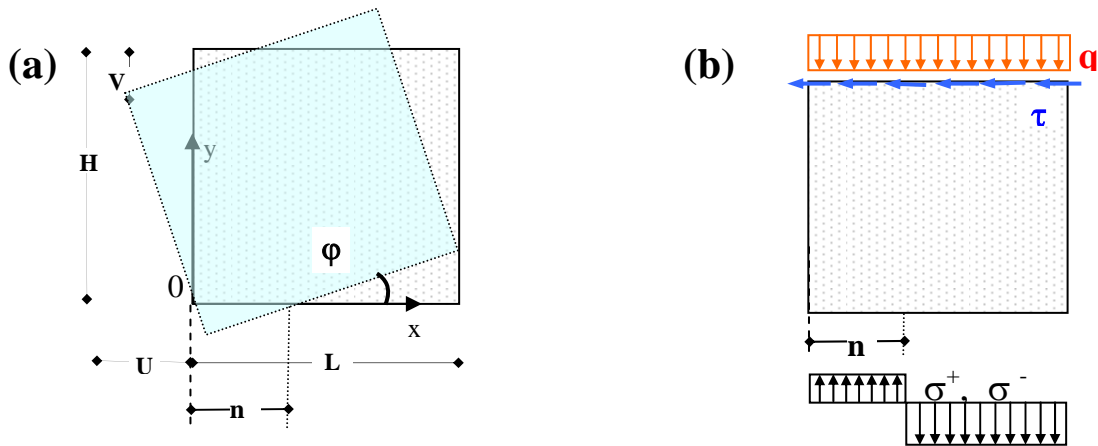


Figura 3.15: (a) Meccanismo ipotizzato, (b) tensioni ai bordi.

$$u(x, y) = -\varphi y$$

$$v(x, y) = \varphi(x - u)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

L'espressione del lavoro esterno è:

$$L_e = \tau L \varphi H - \sigma^+(L-n)t\varphi \frac{(L-n)}{2} - |\sigma^-| n t \varphi n - q(L-n) \frac{(L-n)}{2} \varphi + q n \frac{n}{2} = 0$$

dalla quale posto $t = l$ si ha

$$\tau L H = \frac{\sigma^+}{2} (L-n)^2 + \frac{|\sigma^-|}{2} n^2 + \frac{q}{2} (L-n)^2 - q \frac{n^2}{2} \quad (3.55.)$$

ricavato il valore di n minimizzando la (3.55):

$$n = \frac{L(\sigma^+ + q)}{\sigma^+ + |\sigma^-|} \quad (3.56.)$$

è possibile derivare il valore limite cercato:

$$\tau_{(+)} = \frac{L}{2H} \frac{(\sigma^+ - q)(\sigma^+ + |\sigma^-|) - (\sigma^+ + q)^2}{(\sigma^+ + |\sigma^-|)}$$

ovvero

$$\tau^{(+)} = \frac{L}{2H} \frac{\sigma^+ |\sigma^-| - \sigma^+ q - q^2 + q |\sigma^-|}{(\sigma^+ + |\sigma^-|)}$$

da cui

$$\frac{\tau^{(+)}}{\sigma^+ + |\sigma^-|} = \frac{L(\sigma^+ |\sigma^-| - \sigma^+ q - q^2 + q |\sigma^-|)}{2H(\sigma^+ + |\sigma^-|)^2} \quad (3.57.)$$

Tenuto conto dei parametri in gioco dall'ultima espressione si ottiene:

$$\frac{\tau^+}{\sigma^+ + |\sigma^-|} = \frac{L}{2H} \left[\frac{\frac{q}{|\sigma^-|} + \frac{\sigma^+}{|\sigma^-|}}{1 + \frac{\sigma^+}{|\sigma^-|}} + \left(\frac{\frac{q}{|\sigma^-|} + \frac{\sigma^+}{|\sigma^-|}}{1 + \frac{\sigma^+}{|\sigma^-|}} \right)^2 \right] \quad (3.58.)$$

Il confronto tra i due moltiplicatori di carico (τ limiti adimensionali) trovati rivela un buon accordo di risultati per valori di H/L superiori a 0.5 (*figura 3.16*), per valori inferiori le due curve divergono in maniera notevole.

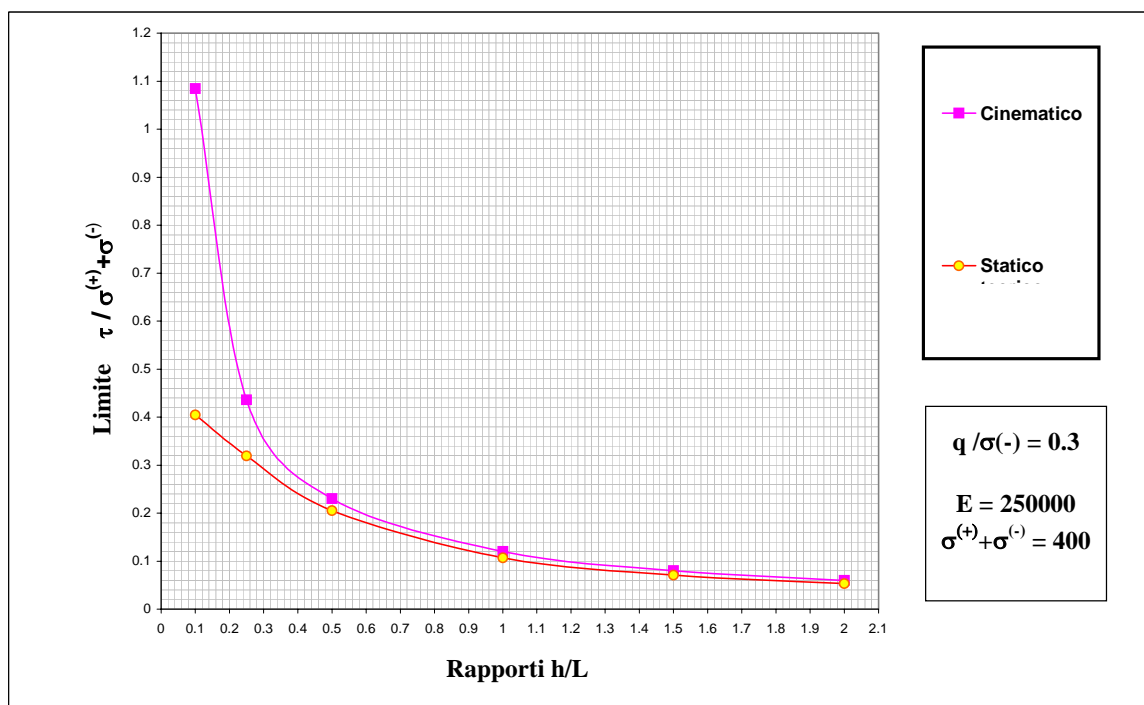


Figura 3.16: Confronto tra i due moltiplicatori in funzione di H/L .

3.5. Lastra semplicemente appoggiata con carico concentrato in mezzeria

Nel calcolo plastico delle travi inflesse si suppone in genere che le uniche componenti di tensioni attive ai fini della plasticizzazione siano le tensioni normali σ_z agenti nella direzione delle fibre longitudinali della trave; il collasso della trave si può collegare allora direttamente al valore dell'unica caratteristica della sollecitazione che nelle travi inflesse provoca tensione del tipo σ_z e cioè al momento flettente. Tale modo di procedere pienamente giustificato nel caso di travi snelle è invece inadeguato nel caso di travi tozze ove le componenti di tensione σ_y e τ_{zy} hanno un ruolo non trascurabile nel fenomeno del collasso plastico della struttura. Nel 1967 avvalendosi della teoria delle lastre congiunta con il criterio di plasticità di Tresca, Capurso [3.19] studia il problema suddetto per due casi di lastra appoggiata con carico concentrato in mezzeria e poi distribuito. Negli esempi analizzati l'autore tiene conto delle varie componenti di tensione sul collasso plastico delle lastre travi e fornisce l'ordine di grandezza del rapporto limite fra altezza e luce della struttura al di sotto del quale è ragionevole attendersi che la teoria tecnica del calcolo a rottura delle travi inflesse dia risultati tecnicamente e razionalmente accettabili.

In questo paragrafo si studia un esempio analogo per carichi e per vincoli a quello sviluppato in [3.19].

Si consideri una lastra rettangolare con il sistema di coordinate illustrato in *figura 3.17*, sottoposta ad un carico F applicato in mezzeria attraverso un diaframma che ha la funzione di trasformare tale carico in una generica distribuzione di tensioni tangenziali lungo l'altezza della sezione stessa. La lastra è appoggiata alle estremità su due timpani atti ad assorbire, senza plasticizzarsi, qualsiasi distribuzione di tensioni tangenziali.

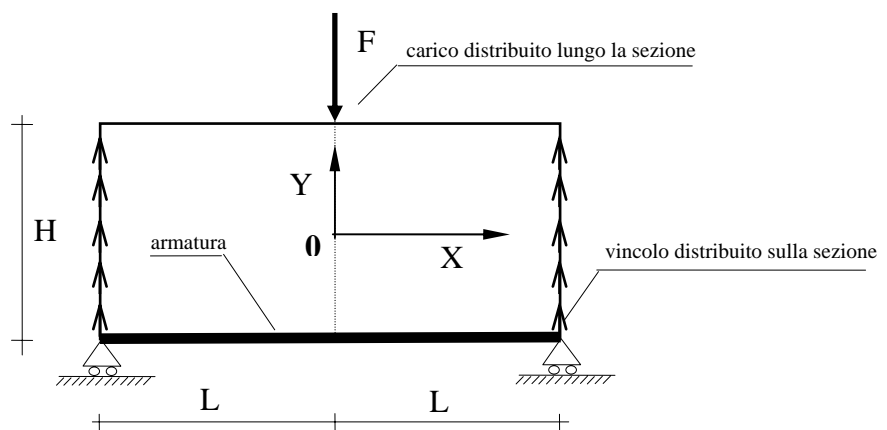


Figura 3.17: Lastra semplicemente appoggiata con carico concentrato in mezzeria.

La lastra di spessore t , altezza H e luce $2L$ si pensa costituita di due materiali: l'uno con caratteristiche diverse a trazione e compressione (tipo calcestruzzo) e l'altro equivalente a un rinforzo (acciaio) corrente lungo tutto il bordo inferiore.

Il comportamento ipotizzato per il calcestruzzo è sempre quello associato al criterio di Rankine come illustrato ai paragrafi precedenti mentre il comportamento del rinforzo è mostrato in *figura 3.18* dove σ_s è il limite della tensione sia a trazione che a compressione

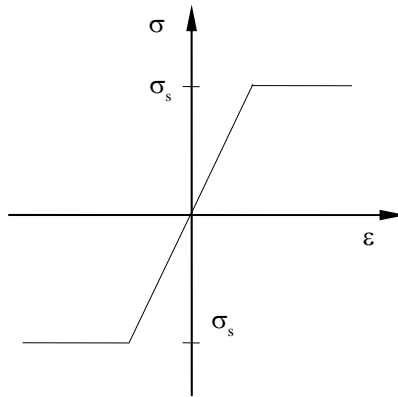


Figura 3.18: Legge elastoplastica per l'acciaio, caso uniaassiale.

3.5.1. Moltiplicatore statico

Le condizioni di equilibrio interno da soddisfare, quando le forze di massa sono nulle, nella notazione usuale sono le (3.36), (3.37) mentre le condizioni al contorno per le tensioni si esplicitano come segue:

$$\begin{aligned}\sigma_{x(\pm L, y)} &= 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy(\pm L, y)} dy &= \pm \frac{F}{2} \\ \sigma_{y(x, \pm \frac{h}{2})} &= 0 \\ \tau_{xy(x, \pm \frac{h}{2})} &= 0\end{aligned}\tag{3.59}$$

Una limitazione inferiore per il carico è definita attraverso un campo staticamente ammissibile, nel quale devono essere rispettate le condizioni di equilibrio interno (3.36), (3.37) e le condizioni al contorno (3.59) e non deve essere violato in alcun punto il criterio di plasticizzazione adottato.

L'esame delle (3.36), (3.37) rivela che σ_x e σ_y possono essere discontinue in "y" ed "x" e, rispettivamente, soddisfare comunque le equazioni di equilibrio. Mentre τ_{xy} deve essere continua in entrambe le direzioni.

Se poi si pone per ipotesi che la σ_y sia ovunque nulla, la (3.37) porge l'indipendenza della τ_{xy} da "x". Il problema è, allora, quello di determinare una distribuzione equilibrata di sforzi interni tale da dar luogo a regimi che soddisfino sempre in termini di sforzi principali le limitazioni associate al criterio scelto.

Si sceglie quale distribuzione delle tensioni normali σ_x una legge *a tratti* lungo H con una zona centrale a valore nullo. Per le tensioni tangenziali τ_{xy} si opta per una legge *trapezoidale*. Per la generica sezione trasversale di ascissa "x" le due distribuzioni sono illustrate in *figura 3.19* ove le ampiezze ξ' e δ' sono delle variabili.

Al fine di rendere *adimensionale* il carico esterno e la geometria del problema, si fanno le seguenti posizioni:

$$f = \frac{F}{\sigma^- t L} \quad ; \quad h = \frac{H}{L} \quad , \quad x = \frac{X}{L} \quad , \quad y = \frac{Y}{L} \quad , \quad \xi = \frac{\xi'}{L} \quad , \quad \delta = \frac{\delta'}{L}$$

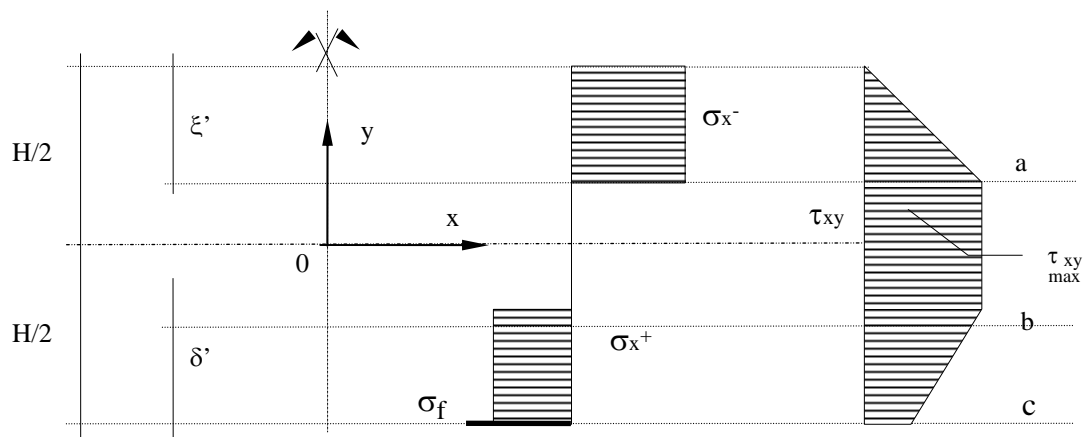


Figura 3.19: Distribuzione delle tensioni normali σ_x e tangenziali τ_{xy} per la generica sezione trasversale

Indicheremo con σ_x^- e σ_x^+ rispettivamente la tensione di compressione e di trazione nel calcestruzzo in direzione x e con σ_f la tensione nell'acciaio. Ciò posto si ottiene la distribuzione delle tensioni per la sezione di mezzeria:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x^- &= \left(|\sigma^-| f + \bar{\sigma}_x^+ \delta^2 \right) \frac{1}{\xi(2h - \xi)} \\ \bar{\sigma}_f &= \left[\frac{|\sigma^-| f}{2h - \xi} + |\bar{\sigma}_x^+| \delta \left(\frac{\delta}{2h - \xi} - 1 \right) \right] \frac{1}{\mu h} \\ \tau_{xy}^{\max} &= \left(|\sigma^-| f + \bar{\sigma}_x^+ \delta^2 \right) \frac{1}{2h - \xi}\end{aligned}$$

Dove i simboli $\bar{\sigma}_x^-$, $\bar{\sigma}_f^-$, μ sono rispettivamente pari a:

$$\bar{\sigma}_x^- = \frac{\sigma_x}{1 - x} \quad ; \quad \bar{\sigma}_f^- = \frac{\sigma_f}{1 - x} \quad ; \quad \mu = \frac{A_f}{H t}$$

Date le condizioni di plasticità, assunte imponendo l'ammissibilità dello stato tensionale sulla fibra **a**, sulla fibra **b** e all'intradosso sulla fibra **c** e considerando le situazioni più gravose si ottengono le tre condizioni corrispondenti rispettivamente alla limitazione sulla massima tensione principale di compressione sulla fibra **a**, alla limitazione sulla massima tensione di trazione sulla fibra **b** e alla massima tensione di trazione sulla fibra **c**:

$$\begin{aligned}f^- &\leq \frac{2\xi(2h - \xi)}{1 + \sqrt{1 + 4\xi^2}} - \gamma \beta \delta^2 = f_1(\xi, \delta, \gamma) \\ f^- &\leq (2h - \xi) \beta \sqrt{1 - \gamma} - \gamma \beta \delta^2 = f_2(\xi, \delta, \gamma) \\ f^- &\leq (2h - \xi) (\bar{\mu} h + \gamma \beta \delta) - \gamma \beta \delta^2 = f_3(\xi, \delta, \gamma)\end{aligned} \tag{3.60}$$

Dove:

$$b = \frac{|\sigma^+|}{|\sigma^-|} \quad ; \quad \gamma = \frac{|\sigma_x^+|}{|\sigma^-|} \quad ; \quad \bar{\mu} = \frac{|\sigma_s|}{|\sigma_c^-|} \frac{A_f}{t H} \tag{3.61}$$

Un limite inferiore al carico di collasso è fornito da:

$$f^- = \min \{ f_1(\xi, \delta, \gamma); f_2(\xi, \delta, \gamma); f_3(\xi, \delta, \gamma) \} \tag{3.62}$$

Per ottenere la migliore limitazione inferiore per ogni **h**, considerando **h** compreso tra 0,1 e 3, è necessario determinare il valore delle variabili ξ , δ , γ ottimale che rende massima la (3.62); tali parametri variano rispettivamente negli intervalli:

$$0 \leq \xi \leq h \quad ; \quad 0 \leq \delta \leq h - \xi \quad ; \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.63)$$

mentre per β e $\bar{\mu}$ gli intervalli presi in considerazione sono:

$$0 \leq \beta \leq \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{1}{25} \leq \bar{\mu} \leq \frac{2}{5}$$

Il sistema di disequazioni (3.60) è non lineare in ξ e δ . La sua soluzione in termini simbolici presenta notevoli difficoltà algebriche. Per δ nullo il sistema (3.60) si riduce a quello (3.64) dove le f dipendono dall'unica variabile ξ :

$$\begin{aligned} f^- &\leq \frac{2\xi (2h - \xi)}{1 - \sqrt{1 + 4\xi^2}} = f_1^0(\xi) \\ f^- &\leq \beta (2h - \xi) = f_2^0(\xi) \\ f^- &\leq \bar{\mu}h (2h - \xi) = f_3^0(\xi) \end{aligned} \quad (3.64)$$

che corrisponde alla distribuzione di tensioni di *figura 3.19*. Tali tensioni sono espresse dalle tre relazioni che seguono:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{|\sigma^-| f}{\xi (2h - \xi)} \\ \bar{\sigma}_f &= \frac{|\sigma^-| f}{(2h - \xi) \mu h} \\ \tau_{xy}^{\max} &= \frac{|\sigma^-| f}{(2h - \xi)} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Consideriamo il sistema costituito dalle f_1, f_2, f_3 a meno del fattore comune $\gamma \beta \delta^2$:

$$\begin{aligned} f_1^*(\xi, \delta, \gamma) &= \frac{2\xi (2h - \xi)}{1 + \sqrt{1 + 4\xi^2}} \\ f_2^*(\xi, \delta, \gamma) &= (2h - \xi) \beta \sqrt{1 - \gamma} \\ f_3^*(\xi, \delta, \gamma) &= (2h - \xi) (\bar{\mu} h + \gamma \beta \delta) \end{aligned} \quad (3.66)$$

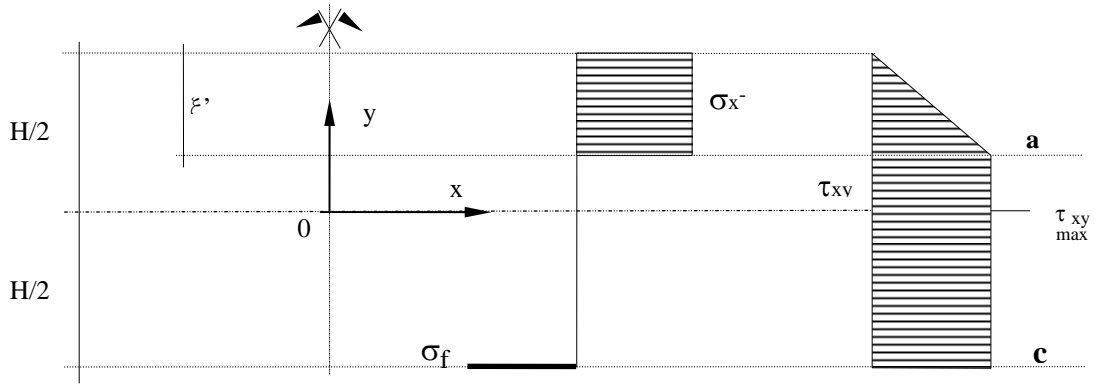


Figura 3.19: Distribuzione delle tensioni σ_x e τ_{xy} per la generica sezione trasversale nel caso di δ nullo

Il confronto tra i sistemi (3.64) e (3.66) consente di definire due insiemi, l'uno in cui vale a rigore:

$$\max_{\delta, \xi, \gamma} \{ \min (f_1, f_2, f_3) \} = \max_{\xi} \{ \min (f_1^0, f_2^0, f_3^0) \} \quad (3.67)$$

definito da tutti gli h tali che:

$$h \geq \beta / \bar{\mu}$$

e l'altro in cui tale massimo è da definire. Si è verificato tuttavia che con buona approssimazione anche per l'insieme

$$h \leq \beta / \bar{\mu}$$

vale la (3.67) che fornisce il moltiplicatore:

$$\begin{aligned} f^- &= \beta \left(2h - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \right) && \text{per } h \geq \frac{\beta}{\mu} \\ f^- &= \bar{\mu} h \left(2h - \frac{\bar{\mu} h}{1 - \bar{\mu}^{-2} h^2} \right) && \text{per } h \leq \frac{\beta}{\mu} \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.5.2. Moltiplicatore cinematico

Per il calcolo di una limitazione superiore si sceglie il meccanismo illustrato in *figura 3.20* dove ξ' e δ' sono delle variabili:

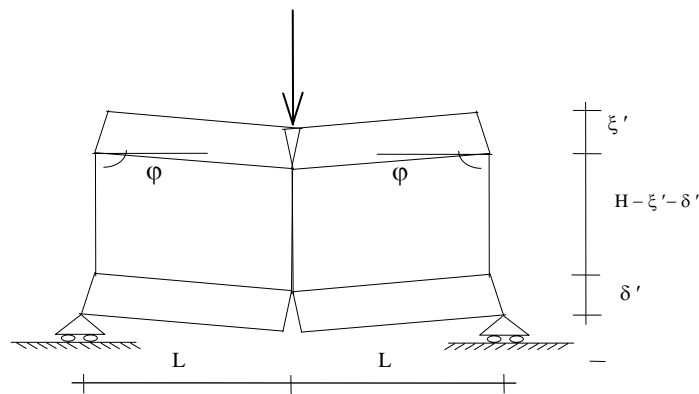


Figura 3.20: Meccanismo di rottura

ricordando che:

$$f = \frac{F}{\sigma_0 s L} \quad ; \quad h = \frac{H}{L} \quad , \quad x = \frac{X}{L} \quad , \quad y = \frac{Y}{L} \quad , \quad \xi = \frac{\xi'}{L} \quad , \quad \delta = \frac{\delta'}{L}$$

la dissipazione interna associata al suddetto meccanismo risulta così composta dalle quattro aliquote :

$$Di_{\xi} = \Delta x \ t \int_0^{\xi} |\sigma^-| \ \epsilon_I \ dy = \Delta x \ t \int_0^{\xi} |\sigma^-| \ \frac{\phi \ y}{Dx} \ dy = |\sigma^-| \ \xi^2 \ t \ \phi$$

$$Di_{\delta} = |\sigma^+| \ \delta^2 \ t \ \phi$$

$$Di_{(h - \xi - \delta)} = (|\sigma^-| + |\sigma^+|) \ \gamma_{xy} \ (h - \xi - \delta) \ t \ L = (|\sigma^-| + |\sigma^+|) \ \phi \ (h - \xi - \delta) \ t \ L$$

$$Di_a = \sigma_s \ A_f \ \phi \ \delta$$

Che corrispondono rispettivamente

- alla fascia superiore di spessore ξ ,
- alla fascia intermedia $(h - \xi - \delta)$,
- quella inferiore di spessore δ ,
- al bordo inferiore c .

In totale quindi il bilancio fra lavoro esterno, pari a:

$$L_e = F \phi L = f^+ \ |\sigma^-| \ t \ \phi \ L^2$$

e la dissipazione interna, pari alla somma delle quattro aliquote di cui sopra porge quale espressione del limite superiore del carico *adimensionale*:

$$f^+(x, \delta) = \xi^2 + \beta \delta^2 + (1 + \beta)(h - \xi - \delta) + 2 \bar{\mu} h \delta \quad (3.69)$$

Dove le variabili ξ , δ , e i parametri β , $\bar{\mu}$ hanno il significato specificato prima riportato e variano negli intervalli specificati nel paragrafo precedente. La (3.69) ottimizzata rispetto a ξ , δ , darà l'espressione del moltiplicatore cinematico:

$$f^+ = \min_{\xi, \delta} \{f^+(\xi, \delta)\} \quad (3.70)$$

Il dominio a cui restringere lo studio è definito dalle limitazioni di ξ e δ suddette; il minimo della (3.69) corrisponde ai valori di ξ e δ :

$$\xi_{\min} = \frac{1 + \beta}{2} \quad ; \quad \delta_{\min} = \frac{1 + \beta + 2 \bar{\mu} h}{2 \beta} \quad (3.71)$$

Per h compreso nell'intervallo:

$$\frac{(1 + \beta)^2}{2(\bar{\mu} + \beta)} \leq h \leq \frac{1 + \beta}{2 \bar{\mu}} \quad (3.72)$$

la limitazione superiore, che chiameremo f_{int}^+ corrispondente alla (3.69), si ottiene sostituendo i valori (3.71) nella (3.69) ed è pari a:

$$f_{\text{int}}^+ = \frac{4 h (1 + \beta) (1 + \beta) - 4 h^2 \bar{\mu}^{-2} - (1 + \beta)^3}{4 \beta} \quad (3.73.)$$

per h esterno all'intervallo (3.72) la funzione (3.69) va studiata sui bordi che chiameremo rispettivamente:

$$\text{bordo } a: \begin{cases} \delta = 0 \\ 0 \leq \xi \leq h \end{cases} \quad ; \quad \text{bordo } b: \begin{cases} \delta = h - \xi \\ 0 \leq \xi \leq h \end{cases} \quad ; \quad \text{bordo } c: \begin{cases} \xi = 0 \\ 0 \leq \delta \leq h \end{cases}$$

su tali bordi la (3.69) prende le forme:

$$\begin{aligned} f_a^+ &= \xi^2 + (1 + \beta)(h - \xi) \\ f_b^+ &= \xi^2 + \beta(h - \xi)^2 + 2 \bar{\mu} h (h - \xi) \\ f_c^+ &= \beta \delta^2 + (1 + \beta)(h - \delta) + 2 \bar{\mu} h \delta \end{aligned} \quad (3.74.)$$

Si sono confrontati i valori minimi e i valori estremi delle (3.74), ed infine tali valori si sono confrontati con quelli della (3.73). Attraverso questi confronti si sono individuati tre intervalli in h all'interno dei quali valgono tre diverse funzioni rappresentative del limite superiore. Le funzioni rappresentanti i moltiplicatori cinematici per ciascun intervallo di validità sono qui di seguito riportate:

$$f_{\min}^+ = \frac{h^2}{1 + \beta} \left(\beta + 2 \bar{\mu} - \bar{\mu}^2 \right) \quad \text{per} \quad 0 \leq h \leq \frac{(1 + \beta)^2}{2(\bar{\mu} + \beta)} \quad (3.75)$$

$$f_{a, \min}^+ = (1 + \beta) \left(h - \frac{1 + \beta}{4} \right) \quad \text{per} \quad \frac{1 + \beta}{2\bar{\mu}} \leq h \leq \infty \quad (3.76)$$

Il terzo intervallo è quello (3.72) in cui vale ancora la (3.73) quale limitazione superiore, la *figura 3.22* illustra i meccanismi di rottura possibili; a tratteggio sono indicate quelli associati alle tre funzioni determinate.

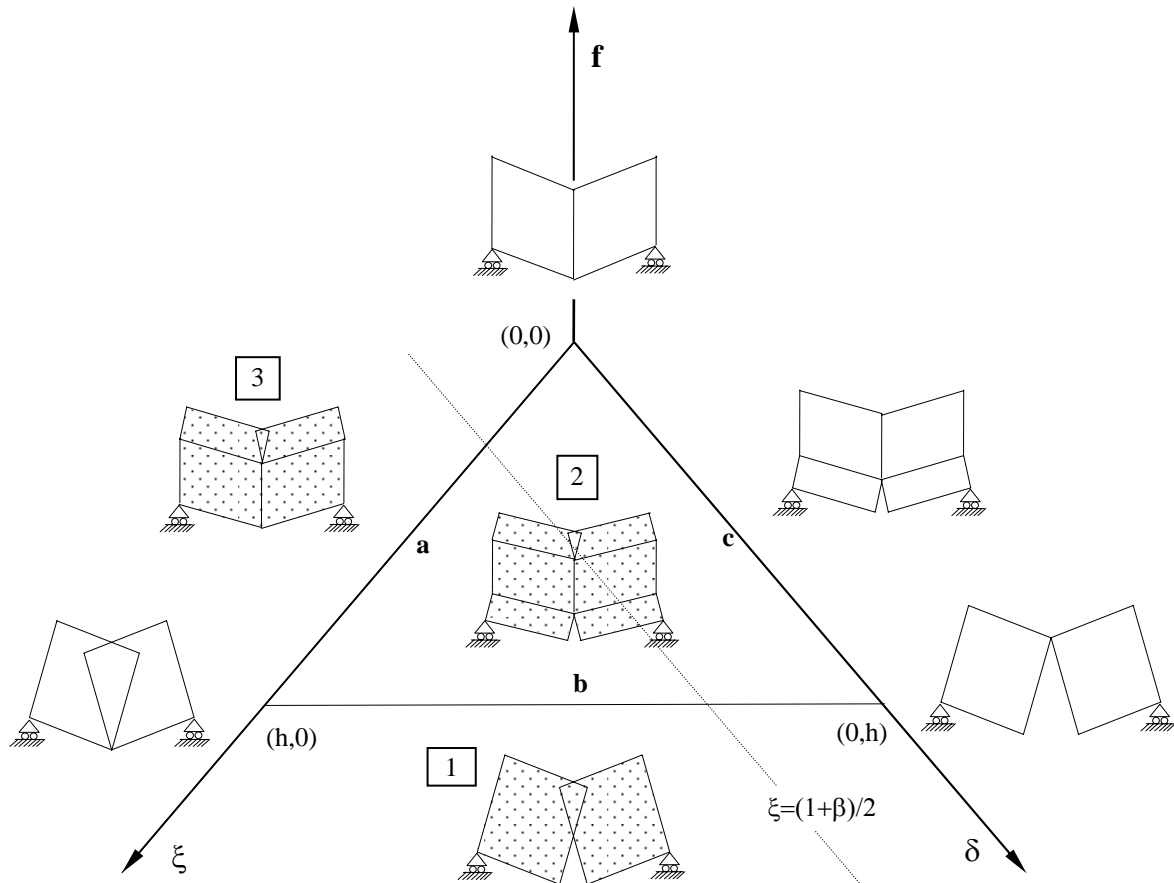


Figura 3.22.

Nella **Tabella 3.1** sono riportati i valori che definiscono gli intervalli per assegnati β ed assegnati $\bar{\mu}$. Per valori di β e $\bar{\mu}$ molto piccoli il limite destro della prima fascia risulta molto elevato, e anche per valori di h elevatissimi la rottura è associata al meccanismo [1].

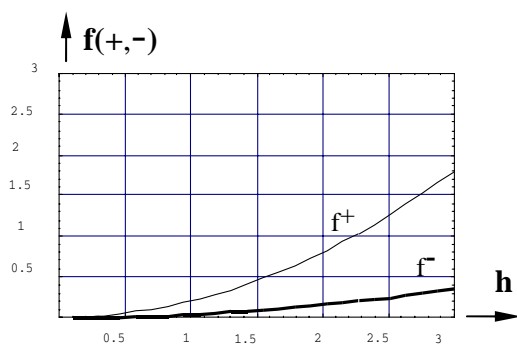
β	$\bar{\mu}$	$\frac{\beta}{\bar{\mu}}$	$\frac{(1 + \beta)^2}{2(\bar{\mu} + \beta)}$	$\frac{(1 + \beta)}{2\bar{\mu}}$
---------	-------------	---------------------------	--	----------------------------------

0.20	0.60	0.33	0.90	1.00
0.20	0.02	10	3.27	30.00
0.06	0.60	0.10	0.85	0.88
0.10	0.10	1.00	3.02	5.50
0.20	0.20	1.00	1.80	3.00
0.10	0.40	0.25	1.21	1.40
0.02	0.02	1.00	13.00	25.50
0.10	0.30	0.33	1.51	1.83
0.20	0.10	2.00	2.40	6.00
0.06	0.20	0.30	2.15	2.65

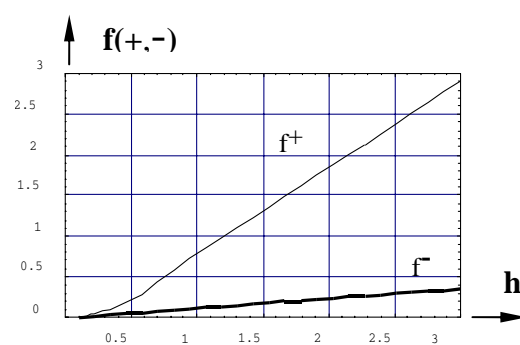
Tabella 3.1

3.5.3. Confronti

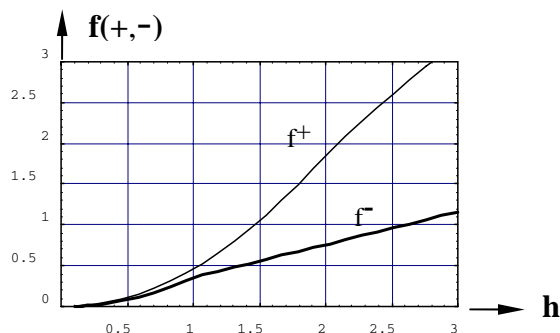
Per i valori di β e $\bar{\mu}$ riportati nelle righe della **Tabella 3.1** evidenziate in grassetto sono mostrati qui di seguito i grafici diagrammanti i due moltiplicatori statico e cinematico al variare del parametro adimensionale h . Si fa notare che per $h = 2$ la lastra corrispondente ha lati delle stesse dimensioni:



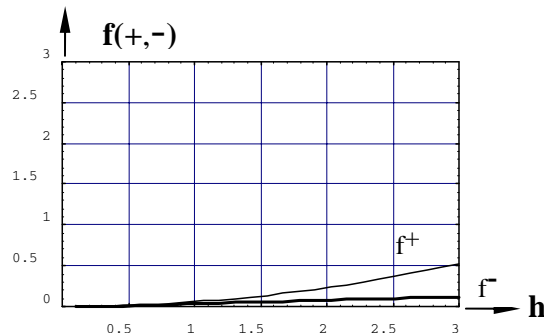
3.23 -Andamento f^+ ed f^- per $\beta=0.2$ e $\bar{\mu}=0.02$



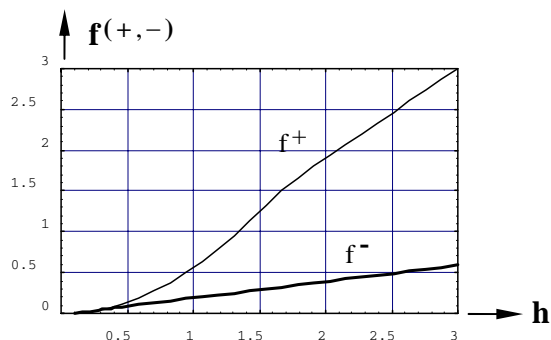
3.24 -Andamento f^+ ed f^- per $\beta=0.06$ e $\bar{\mu}=0.6$



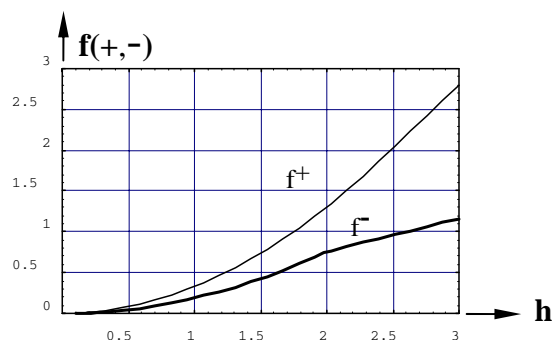
3.25-Andamento f^+ ed f^- per $\beta=0.2$ e $\bar{\mu}=0.2$



3.26-Andamento f^+ ed f^- per $\beta=0.02$ e $\bar{\mu}=0.02$



3.27 -Andamento f^+ ed f^- per $\beta=0.1$ e $\bar{\mu}=0.3$



3.28 - Andamento f^+ ed f^- per $\beta=0.2$ e $\bar{\mu}=0.1$

Nella **Tabella 3.2** con riferimento ai diagrammi illustrati nelle *figure 3.23-3.28* sono riportati i valori del rapporto tra f^+ ed f^- in percentuale per h da $0,2 \div 3$, passo $0,2$.

E stato poi analizzato il caso di lastra senza armatura corrispondente cioè a $\beta = 1$ e $\bar{\mu} = 0$ (caso *simmetrico*). I valori ottenuti del rapporto tra f^+ ed f^- in percentuale sono riportati in **Tabella 3.3**. In tale tabella sono anche indicati i valori del suddetto rapporto ottenuti da Capurso nell'articolo citato facendo riferimento a un materiale con la medesima resistenza a trazione e a compressione ed utilizzando il dominio di plasticità di Tresca. Il caso *simmetrico* fornisce quale limite inferiore per il moltiplicatore di collasso associato al dominio di plasticizzazione di Rankine l'espressione:

$$f^- = -1 + \sqrt{1 + 4 (0,5 h - 0,055 h^2)^2}$$

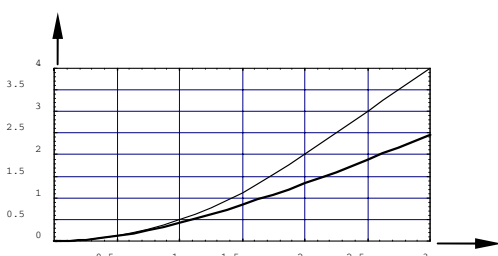
e quale limite superiore le due espressioni:

$$\begin{aligned} f^- &= \frac{h^2}{2} && \text{per } 0 \leq h \leq 2 \\ f^- &= 2 (h - 1) && \text{per } 0 \leq h \leq 2 \end{aligned} \tag{3.77}$$

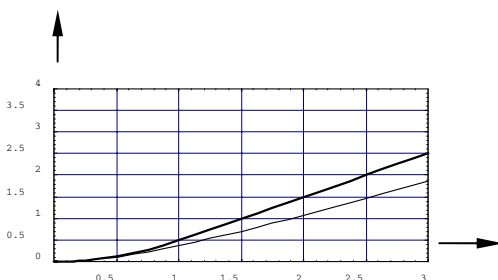
h	$\underline{\beta} = 0.20$ $\underline{\mu} = 0.02$	$\underline{\beta} = 0.06$ $\underline{\mu} = 0.60$	$\underline{\beta} = 0.2$ $\underline{\mu} = 0.2$	$\underline{\beta} = 0.02$ $\underline{\mu} = 0.02$	$\underline{\beta} = 0.10$ $\underline{\mu} = 0.30$	$\underline{\beta} = 0.20$ $\underline{\mu} = 0.10$
0.2	19.8331	60.0284	77.1291	67.7718	91.9086	58.4603
0.4	19.8330	32.6738	77.0876	67.7718	78.7796	58.4566
0.6	19.8330	22.3735	77.0176	67.7717	55.0496	58.4504
0.8	19.8330	17.0018	76.9177	67.7716	42.2359	58.4417
1.0	19.8330	14.9386	76.7857	67.7715	34.2441	58.4305
1.2	19.8329	14.1648	65.2282	56.5714	28.7897	58.4166
1.4	19.8329	13.6636	56.6691	48.5480	24.8318	58.4000
1.6	19.8328	13.3126	50.0837	42.5177	22.0021	58.3807
1.8	19.8328	13.0531	44.8633	37.8200	20.8708	58.3585
2.0	19.8327	12.8534	41.2138	34.0570	20.548	58.3333
2.2	19.8327	12.6950	38.9560	30.9750	20.3022	53.2952
2.4	19.8326	12.5663	37.5136	28.4046	20.1026	49.0563
2.6	19.8325	12.4596	36.5958	26.2281	19.9374	45.7531
2.8	19.8324	12.3697	36.0406	24.3614	19.7983	43.3414
3.0	19.8323	12.2930	35.7510	22.7427	19.6797	41.5173

Tabella 3.2

Per il caso sviluppato da Capurso con criterio di plasticizzazione di Tresca vedi [3.19]. Si può notare che i valori del rapporto tra f^+ ed f^- riportati nella **Tabella 3.2** sono nettamente inferiori a quelli della **tabella 3.3**. Per $h = 2$, ad esempio, nel modello *simmetrico* il carico di collasso statico è ancora circa il 70% di quello cinematico mentre nel modello con armatura



3.29-Andamento f^+ ed f^- caso simmetrico (Tresca)



3.30-Andamento f^+ ed f^- caso simmetrico (Rankine)

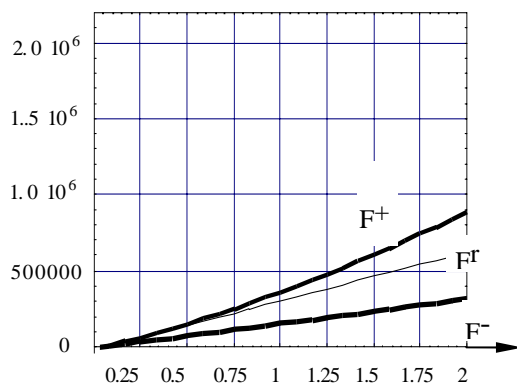
h	Rankine	Tresca
0.2	99.0134	98.0937
0.4	96.4024	93.268
0.6	92.7769	87.1573
0.8	88.6787	80.9057
1.0	84.4831	75.0416
1.2	80.4095	71.7314
1.4	76.5684	70.7922
1.6	73.0032	70.7727
1.8	69.7207	71.153
2.0	66.7088	71.7122
2.2	64.4793	72.3467
2.4	63.1644	73.0048
2.6	62.3979	73.6599
2.8	61.9785	74.2982
3.0	61.7863	74.9129

Tabella. 3.3

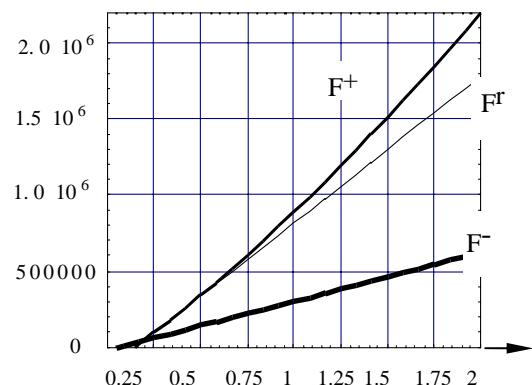
scende in alcuni casi anche al 20%. La **Tabella 3.4** mostra i risultati di alcuni esempi numerici per una lastra di spessore $t = 20$ cm, e valori degli altri parametri come riportati nella tabella. Dove F^- , F^+ , F^r sono rispettivamente il carico ottenuto con il moltiplicatore statico, quello ottenuto attraverso il moltiplicatore superiore e quello ricavato attraverso un calcolo a rottura classico.

N ₀	L (cm)	A _f (cm ²)	H (cm)	σ_c^- (Kg/cm ²)	σ_c^+ (Kg/cm ²)	σ_f (Kg/cm ²)	β	$\bar{\mu}$	F ⁻ (Kg)	F ⁺ (Kg)	F ^r (Kg)
1	200	5	200	200	40	3200	0.2	0.02	31679.9	101527	31680
2	200	250	200	330	20	3200	0.06	0.60	155134	1028790	1115150
3	200	50	200	330	20	3200	0.20	0.20	286667	373333	288000
4	200	10	200	200	4.00	1600	0.02	0.02	31679.9	46745.1	31680
5	200	100	200	400	40	4800	0.10	0.30	303838	887273	816000
6	200	80	200	400	80	2400	0.20	0.10	360623	567467	360960
7	400	50	50	300	40	2200	0.13	0.36	22447.7	24227.9	22458.3
8	200	50	50	300	40	2200	0.13	0.36	44831.2	48455.9	44916.7
9	200	50	60	300	40	2600	0.13	0.52	57371.4	59752.9	57720

Tabella 3.4



3.31: Andamento F^+ ed F^- e F^r per $\beta=0.2$ e $\bar{\mu}=0.2$



3.32: Andamento F^+ ed F^- e F^r per $\beta=0.1$ e $\bar{\mu}=0.3$

Al variare di h , i tre valori F^- , F^+ , F^r , per gli esempi “3” e “5” sono rappresentati nei grafici delle *figure 3.31 e 3.32*. Per gli altri casi il carico di rottura classico F^r ha un andamento analogo ad F^+ o ad F^- ed è comunque sempre compreso fra i due.

3.5.4. Considerazioni

Il sistema di disequazioni (3.60) non è risolvibile per via diretta, però confrontando il sistema (3.64) con quello (3.66), (ottenuto dal sistema (3.60) a meno del termine $\gamma \beta \delta^2$) si nota che essendo:

$$f_2^* \leq f_2^0 \quad \text{ed} \quad f_3^0 \leq f_3^*$$

quando $f_2^0 \leq f_3^0$ ossia per $h \geq \beta/\bar{\mu}$ si verifica che $f_2^* \leq f_3^*$ ed è allora la f_2^* che va confrontata con la f_1^* ed essendo:

$$b\sqrt{1-g} \leq b$$

si evince che il massimo in questo caso è rappresentato da quello che si ottiene dalla risoluzione del sistema (3.64).

Nel caso in cui $f_2^0 \geq f_3^0$ potrebbe verificarsi che:

$$f_2^* \leq f_3^*$$

e non è più quindi possibile utilizzare come soluzione quella del sistema (3.66).

Si è poi proceduto a studiare il sistema (3.64) fissando il parametro γ evidenziando così gli intervalli del piano ξ, δ all'interno dei quali ciascuna delle tre funzioni risulta inferiore alle altre due.

I punti **A, B, C, D** rappresentati nelle *figure 3.33 e 3.34* restituiscono i valori di ξ e δ che massimizzano le funzioni. In **A** e **D** ritroviamo rispettivamente la seconda e la prima delle

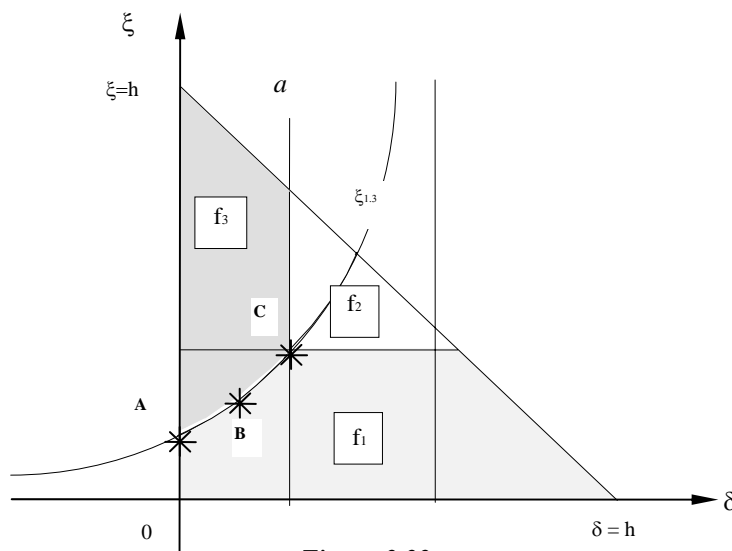


Figura 3.33.

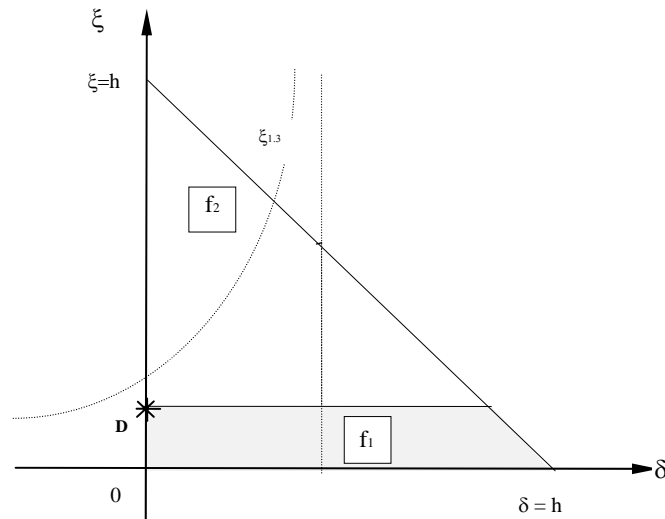


Figura 3.34.

(3.68). Difficoltà algebriche non hanno consentito di ricavare le espressioni corrispondenti ai punti **B** e **C** in *forma simbolica* né di individuare gli intervalli di pertinenza di ciascuna espressione; si è però potuto constatare a livello numerico, data anche la piccolezza dell'intervallo $[0, \delta_1]$ con:

$$\delta_1 = \frac{\beta \sqrt{1-\gamma} - \bar{\mu} h}{\beta \gamma}$$

che le espressioni in **C** e **B** differivano di poco da quelle in **A** e **D**, per δ e γ nulli.

Infine per valori di β e $\bar{\mu}$ assegnati si sono ricavati i moltiplicatori dal sistema (3.60) e i risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti per gli stessi valori attraverso le (3.68). I confronti hanno confermato la validità dell'approssimazione operata.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO III

- [3.1] Nielsen M. P., *Limit analysis and concrete Plasticity*. Prentice Hall ,1984.
- [3.2] Massonet Ch., Save M., *Calcolo plastico a rottura delle costruzioni*. Clup, 1980.
- [3.3] Massonet Ch., Save M., *Calcolo a rottura delle strutture. Strutture spaziali*. Zanichelli, Bologna, 1968.
- [3.4] Baldassino N., *Analisi Limite di elementi strutturali in cemento armato*. Tesi di specializzazione anno accademico 1991/92 , relatore prof. ing. Malerba P. G., Scuola di specializzazione in costruzioni in cemento armato.
- [3.5] Benedetti D., Binda L., *Comportamento statico e sismico delle strutture murarie*. Clup, Milano, 1982.
- [3.6] Prager W., Hodge P. G., *Theory of perfectly plastic solids*. Dover Pub., inc., New York, 1961.
- [3.7] Shield R. T., Drucker D. C., *The application of limit analysis to punch-indentation problems*. J. Appl. Mech., ASME, 75, 1953.
- [3.8] Brady W.G., Drucker D. C., *An experimental investigation and limit analysis of net area in tension*. Proc. ASME, 296, 1953.
- [1.9] Chen W. F., *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier Scient. Publ. Co., New York, 1975.
- [3.10] Zavellani Rossi A., *Sul criterio statico di calcolo a rottura nei sistemi bidimensionali piani*, rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett., vol. 102, 1968.
- [3.11] Sacchi G., *Caratteristiche meccaniche dei materiali e problemi di statica delle murature portanti*. Corso di aggiornamento sul recupero strutturale, Centro Edile, Milano 1981.
- [3.12] Capurso M., *Scienza delle costruzioni*.
- [3.13] Chen W.F., Zhang H., *Structural Plasticity*. Springer Verlag, 1991.
- [3.14] Chen W.F., Saleeb A. F., *Constitutive Equations for Engineering Materials*. Vol.1, Elsevier, Amsterdam - London – New York – Tokyo, 1994.
- [3.15] Corradi dell'Acqua L., *Meccanica delle strutture*. Vol. I, *Il comportamento dei mezzi continui*, McGraw-Hill Libri Italia srl.
- [3.16] Del Piero G., *Le costruzioni in muratura*. Lezioni tenute al 2° convegno di studio sul consolidamento delle costruzioni, Udine 20-24 giugno 1983, in collana di ingegneria strutturale n°2. Capitolo 2 pp. 5-22.
- [3.17] Capurso M. e Sacchi G. *Una condizione di plasticità per solidi anisotropi*. Atti del I congresso Aimeta, Udine, 1971.
- [3.18] Nielsen M.P., *Yield Conditions for reinforced concrete shell in the membrane state*. Proc. IASS Symp., North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [3.19] Capurso M., *Stati limite nelle lastre travi*. Giornale del Genio Civile 1967, pp.427-443.
- [3.20] Baldacci R., Ceradini V., Giangreco E., *Plasticità*, Collana Italsider.