Appendice A

Il modello di turbolenza

A.1 Le scale della turbolenza

Com'è noto, per un flusso laminare si ha un moto ordinato del fluido assimilabile a quello di tante lamine fluide sottili che scorrono le une sulle altre. D'altro canto, in regime turbolento il campo di moto appare fortemente disordinato e caotico ed il fluido risulta continuamente rimescolato da strutture vorticose le cui dimensioni variano in un ampio *range* di lunghezze scala.

Mentre in regime laminare, qualora le condizioni al contorno dell'efflusso risultino costanti nel tempo, il moto del fluido è stazionario, in regime turbolento (sempre con condizioni al contorno costanti) le variazioni casuali delle grandezze caratterizzanti il flusso rendono il moto intrinsecamente non stazionario.

La causa fondamentale dell'instaurarsi di un campo di moto turbolento è da ricercarsi nella non linearità delle equazioni di conservazione che governano l'evoluzione del flusso. In dettaglio, da un punto di vista matematico, la turbolenza si genera per effetto di una instabilità del flusso a seguito dell'azione combinata dei termini non lineari, inerziali e viscosi, presenti in dette equazioni differenziali. In particolare, tale instabilità occorre quando il flusso è caratterizzato da un numero di Reynolds superiore ad un certo valore critico.

Nel caso di un flusso uniforme che investe un corpo non profilato è allora evidente che la presenza di discontinuità geometriche nel profilo induce una catalizzazione, come già accennato (*cf.* capitolo 2), di tale fenomeno.

A seguito dell'instaurarsi dell'instabilità del flusso, attraverso una progressiva amplificazione di disturbi infinitesimi il flusso passa da laminare a turbolento per effetto di un processo detto di transizione.

Osservando un flusso turbolento si possono immediatamente notare complesse strutture rotazionali che rappresentano una peculiarità di tale regime di moto e che vanno sotto il nome di vortici turbolenti. Essi sono alla base di tutta una serie di scambi energetici, rendendo il flusso turbolento radicalmente diverso da quello laminare, e possono avere dimensioni caratteristiche variabili dall'ordine di lunghezza scala del flusso medio fino a dimensioni piccolissime dell'ordine di 0.1, 0.01mm.

In particolare, i vortici di dimensioni maggiori sono responsabili di un forte rimescolamento del fluido ed il loro effetto complessivo è concreto in un aumento netto degli scambi di massa, quantità di moto ed energia e conseguentemente in un aumento dei coefficienti diffusivi per tali grandezze. Da un punto di vista energetico, tali vortici sono alimentati dal flusso medio attraverso un fenomeno di *vortex stretching* concreto nella distorsione ed allungamento delle strutture vorticose per effetto della presenza di gradienti della velocità media. L'energia cinetica acquisita dai vortici più grandi viene progressivamente ceduta via via alle strutture più piccole attraverso un vero e proprio processo in cascata di *stretching*.

È il caso di sottolineare che i vortici turbolenti di grande scala sono di fatto regolati da effetti sostanzialmente inerziali, mentre gli effetti di natura viscosa possono ritenersi trascurabili. D'altro canto, per i vortici di piccola scala sono prevalenti gli effetti viscosi. I vortici grandi, legati ad un carattere fortemente anisotropo a causa della loro profonda interazione con il moto medio, sono quindi praticamente inviscidi ed il momento angolare che li caratterizza è di fatto conservato durante il processo di *stretching*. Per piccole scale di moto, per le quali la preponderante azione diffusiva conduce ad un carattere isotropo, gli effetti di viscosità divengono importanti provocando una condizione di dissipazione energetica.

Sulla base delle considerazioni svolte, è allora possibile caratterizzare le scale di lunghezza, tempo e velocità per le piccole strutture vorticose. Si indichi con k l'energia cinetica turbolenta specifica che viene trasferita dalle grandi strutture vorticose a quelle piccole. Tale energia verrà dissipata per il tramite della viscosità molecolare sulla scala dei vortici piccoli. Ipotizzando che questi ultimi siano in condizioni di equilibrio, *i.e.* che dissipino energia alla stessa velocità con cui la ricevono (ipotesi di Kolmogorov), è possibile supporre che il moto, a livello di piccole lunghezze scala, sia funzione della velocità alla quale i vortici grandi forniscono energia, indicata generalmente come $\epsilon = -\partial k/\partial t$, oltre che della viscosità cinematica (ν) del flusso. Attraverso considerazioni di carattere dimensionale è allora facile caratterizzare le seguenti scale di lunghezza, tempo e velocità dei piccoli vortici (scale di Kolmogorov) [A.3]:

$$S_L^K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \qquad S_t^K = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \qquad S_v^K = (\nu\epsilon)^{1/4} \tag{A.1}$$

Inoltre, avendo introdotto l'energia cinetica turbolenta k in ragione del processo di sottrazione di energia al moto medio da parte delle strutture vorticose di larga scala, è possibile esprimere k come

$$k \sim (\epsilon L_T)^{2/3} \tag{A.2}$$

cioè in funzione di ϵ oltre che della scala delle lunghezze L_T, detta scala integrale (*cf.* capitolo 1), che caratterizza il moto medio e quindi i vortici grandi.

La lunghezza scala di Kolmogorov e quella integrale possono riguardarsi come i limiti estremi delle scale dimensionali alle quali si manifestano i processi peculiari della turbolenza ed il loro rapporto può esprimersi tramite il numero di Reynolds turbolento Re_T:

$$\frac{L_T}{S_L^K} = \frac{L_T}{(\nu^3/\epsilon)^{1/4}} \sim \frac{L_T(k^{3/2}/L_T)^{1/4}}{\nu^{3/4}} = Re_T^{3/4} \tag{A.3}$$

essendo

$$Re_T = k^{1/2} L_T/\nu \tag{A.4}$$

ed avendo assunto come scala delle velocità la quantità $k^{1/2}$ per i fenomeni turbolenti che interessano la scala dimensionale L_T.

A.2 Esigenza di un modello: approccio statistico

Da un punto di vista numerico, nulla impedirebbe di risolvere le equazioni di governo di un fluido scritte nella loro forma classica. In questo modo si andrebbe a descrivere in modo praticamente esatto, partendo solo dalle equazioni dette, il comportamento del flusso anche in regime turbolento.

Tale tecnica, detta di simulazione diretta (*Direct Numerical Simulation DNS*) è di solito adottabile solo in casi relativamente semplici e comunque caratterizzati da bassi numeri di Reynolds. L'aumentare del numero di Reynolds provoca infatti un rapido incremento degli intervalli possibili per le scale temporali e di lunghezza caratterizzanti il regime turbolento del flusso. Ciò conduce, in questi casi, ad una impossibilità pratica di attuare metodologie numeriche di tale tipologia. Per comprendere quanto detto basti considerare che per un tipico dominio fluido di dimensioni caratteristiche dell'ordine di $0.1m$, interessato da un flusso con numero di Reynolds dell'ordine di 10^6, le strutture vorticose che esso contiene possono presentare dimensioni ben al di sotto di $100\mu m$. Affinchè sia possibile descrivere i processi di interesse a tutte le scale di lunghezza (e questo è necessario per tenere in conto in modo corretto l'effettiva condizione di dissipazione energetica del moto medio, la quale è connessa, come detto, alle piccole strutture vorticose) sarebbe necessario considerare, con gli usuali metodi computazionali, discretizzazioni del dominio fluido che contemplino l'utilizzo di un numero di nodi di calcolo almeno pari a $10^9 - 10^{11}$. Inoltre, con l'intento di cogliere gli aspetti più rapidi dei fenomeni turbolenti, i quali hanno luogo con una frequenza dell'ordine di $10kHz$, si renderebbe necessario un passo temporale di integrazione non superiore a valori dell'ordine di $100\mu s$ [A.4].

Dal momento che il moto in regime turbolento è caratterizzato da fluttuazioni casuali delle grandezze in gioco, un approccio più conveniente rispetto alla soluzione numerica diretta consiste nell'effettuare un'operazione di filtraggio, *i.e.* di media, delle equazioni di governo. In altri termini, si fissa l'attenzione sul valore medio delle prorprietà del fluido, tralasciando gli aspetti caotici locali ed istantanei.

Pertanto, seguendo una procedura proposta da Reynolds, si esprimono tutte le grandezze come somma di una parte media ed una fluttuante e si procede mediando le equazioni differenziali di governo fino ad ottenere delle nuove equazioni in cui le incognite siano le medie stesse.

A causa delle non linearità presenti nelle equazioni differenziali classiche di conservazione, attraverso questo processo di media compaiono dei termini incogniti ed è appunto tramite un opportuno modello di turbolenza che si ricavano le relazioni necessarie a chiudere il problema.

Si prenda in considerazione la generica proprietà fisica f, funzione in generale della posizione spaziale $\mathbf{x}$ e del tempo t, e sia $f_n(\mathbf{x}, t)$ il suo valore associato al rilievo sperimentale n-esimo. Per essa possono introdursi in generale tre differenti tipologie di medie [A.3]:

$$\text{media temporale} \qquad F_T(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f_n(\mathbf{x}, t)dt \tag{A.5}$$

$$\text{media spaziale} \qquad F_V(t) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \int_V f_n(\mathbf{x}, t)dV \tag{A.6}$$

$$\text{media di insieme} \qquad F(\mathbf{x}, t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_n(\mathbf{x}, t) \tag{A.7}$$

Sotto l'ipotesi di ergodicità del fenomeno[1] le tre medie coincidono e possono adottarsi indifferentemente. Generalmente si usa accettare questa ipotesi e fare quindi riferimento alla media temporale detta anche media alla Reynolds. Questa nel seguito si indicherà soprasegnando le corrispondenti quantità.

[1]Cioè assumendo il fenomeno stazionario ed omogeneo.

Considerando allora la componente i-esima della velocità del fluido, u_i, essa può scriversi come somma di una aliquota media e di una parte fluttuante (indicata con $\tilde{u}_i$):

$$u_i(\mathbf{x},t) = U_i(\mathbf{x}) + \tilde{u}_i(\mathbf{x},t) \tag{A.8}$$

dove

$$U_i(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \int_t^{t+T} u_i(\mathbf{x},t)dt = \overline{u_i(\mathbf{x},t)} \tag{A.9}$$

e potendo definire la media temporale dell'aliquota fluttuante come:

$$\overline{\tilde{u}_i} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [u_i(\mathbf{x},t) - U_i(\mathbf{x})]dt = 0 \tag{A.10}$$

Inoltre, valgono in generale le seguenti proprietà

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \tag{A.11}$$

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(U_i + \tilde{u}_i)(U_j + \tilde{u}_j)} = U_i U_j + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \tag{A.12}$$

Nel caso in cui il valore medio non sia stazionario, scegliendo un periodo T opportuno, *i.e.* sufficientemente piccolo rispetto alle variazioni delle condizioni al contorno al flusso medio e contemporaneamente sufficientemente grande rispetto ai tempi caratteristici delle fluttuazioni turbolente, si può scrivere comunque una relazione del tipo la (A.8) dove però ora $U_i = U_i(\mathbf{x},t)$. In questo caso assume allora significato non banale il concetto di derivata temporale mediata nel tempo:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial t}(U_i + \tilde{u}_i)dt = \frac{U_i(\mathbf{x},t+T) - U_i(\mathbf{x},t)}{T} + \frac{\tilde{u}_i(\mathbf{x},t+T) - \tilde{u}_i(\mathbf{x},t)}{T} \tag{A.13}$$

In virtù della scelta detta per T è possibile ritenere il secondo termine nel membro di destra della precedente relazione trascurabile rispetto al primo, cosicchè risulta:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} \cong \frac{\partial U_i}{\partial t} \tag{A.14}$$

Nel caso di fluido comprimibile, una notevole semplificazione delle equazioni del moto scritte in termini di moto medio si ottiene se, invece di considerare la media temporale alla Reynolds, per alcune delle proprietà termofluidodinamiche si considera la media pesata tramite la densità ρ, *i.e.* la cosiddetta media alla Favre [A.5]. In dettaglio, per la componente di velocità u_i tale operazione di media si definisce come:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho(\mathbf{x},t) u_i(\mathbf{x},t)dt \tag{A.15}$$

essendo $\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}$ e potendo ora porre

$$u_i = \hat{u}_i + \tilde{\tilde{u}}_i \tag{A.16}$$

dove $\tilde{\tilde{u}}_i$ è la componente fluttuante di u_i rispetto alla media alla Favre. Conseguentemente valgono le fondamentali relazioni:

$$\bar{\rho}\hat{u}_i = \overline{\rho u_i} = \bar{\rho} U_i + \overline{\tilde{\rho}\tilde{u}_i} \tag{A.17}$$

$$\overline{\rho \tilde{\tilde{u}}_i} = 0 \tag{A.18}$$

A.3 Equazioni del moto medio

Si considerino le classiche equazioni di conservazione, scritte in termini spaziali, di massa, quantità di moto ed energia, le quali si accompagnano con l'equazione di stato del fluido che, nel caso dell'aria, si assume essere quella tipica di un gas ideale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j h)}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_j} u_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{A.21}$$

$$p = \rho \frac{R^*}{M_w} T \tag{A.22}$$

essendo $\mathbf{f}$ il vettore di forze di volume agenti sul fluido, τ_{ji} la generica componente degli sforzi tangenziali viscosi, $\mathbf{q}$ il flusso termico specifico, h l'entalpia specifica tale che $e = h - p/\rho$, $R^* = 8.31451 J/molK$ la costante universale dei gas e M_w il peso molecolare del fluido. Al solito, si intende che indici ripetuti indichino sommatoria sugli stessi indici e nell'opportuno intervallo di valori.

Le variabili in gioco possono allora decomporsi come:

$$u_i = \hat{u}_i + \tilde{\tilde{u}}_i \qquad \rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho} \tag{A.23}$$

$$p = P + \tilde{p} \qquad e = \hat{e} + \tilde{\tilde{e}} \tag{A.24}$$

$$h = \hat{h} + \tilde{\tilde{h}} \qquad T = \hat{T} + \tilde{\tilde{T}} \tag{A.25}$$

$$q_j = q_{\ell_j} + \tilde{q}_j \tag{A.26}$$

essendo $\mathbf{q}_\ell$ il flusso termico medio, *i.e.* presente anche in condizioni di corrispondente flusso laminare, esprimibile tramite una legge di conduzione isotropa alla Fourier:

$$q_{\ell_i} = -\Lambda_\ell \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} \tag{A.27}$$

avendo indicato con Λ_ℓ la conducibilità termica dell'aria in regime laminare, la quale può porsi pari a: $\Lambda_\ell = \frac{\mu_\ell c_p}{Pr}$, dove c_p è il calore specifico del fluido a pressione costante, Pr il relativo numero di Prandtl e μ_ℓ la viscosità laminare.

Sostituendo le grandezze così decomposte ed eseguendo le medie temporali si perviene alle seguenti equazioni per il moto medio:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\hat{u}_i) = 0 \tag{A.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\hat{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j\hat{u}_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\tau}_{ji} - \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\tilde{\tilde{u}}_i}\right] + \bar{\rho} f_i \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{\rho}\hat{e})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_j\hat{h})}{\partial x_j} = {} & \frac{\partial P}{\partial x_i}\hat{u}_i + \frac{\partial P}{\partial x_i}\overline{\tilde{\tilde{u}}_i} + \overline{\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}} + \bar{\tau}_{ij}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \\ & + \overline{\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{\ell_j} + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\tilde{\tilde{h}}}\right]\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$P = \bar{\rho}\frac{R^*}{M_w}\hat{T} \tag{A.31}$$

Si tenga conto che la quantità $\hat{h} = \hat{e} + \frac{P}{\bar{\rho}}$ e, generalmente, i contributi $\overline{\tilde{\tilde{u}}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}$ e $\frac{\partial P}{\partial x_i}\overline{\tilde{\tilde{u}}_i}$ sono ritenuti trascurabili.

Si osservi che il termine $\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\tilde{\tilde{h}}}$ rappresenta il trasporto di calore aggiuntivo rispetto a quello laminare e la sua presenza è strettamente dipendente dalle fluttuazioni turbolente del flusso. Esso induce, pertanto, un aumento netto della diffusione termica rispetto al caso di moto prettamente laminare. Infine, i termini del tipo $-\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\tilde{\tilde{u}}_i}$ rappresentano gli sforzi tangenziali turbolenti detti di Reynolds e si sovrappongono agli sforzi viscosi di natura laminare.

A.4 Equazione dell'energia cinetica turbolenta

L'energia cinetica turbolenta, indicata con k, viene definita come l'energia cinetica associata alle componenti fluttuanti di velocità. In altri termini:

$$\bar{\rho}k = \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i} \tag{A.32}$$

L'equazione di governo per k può ricavarsi premoltiplicando le equazioni della quantità di moto per la componente della omologa parte fluttuante di velocità, sommandole tra loro e mediandole:

$$\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\overline{\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i f_i} \tag{A.33}$$

È immediato rilevare che assumendo essere f_i una quantità deterministica, si ha $\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i f_i} = \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i}f_i = 0$. Inoltre, tenendo conto della (A.32), si ricava:

$$\begin{aligned}
\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial u_i}{\partial t}} &= \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial t}} = \overline{\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\right)} \\
&= \overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\right)} - \overline{\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial \rho}{\partial t}} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) - \overline{\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial \rho}{\partial t}}
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i}\hat{u}_j\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_j}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u_j\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}} \\
&= \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_j}\frac{\hat{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\right)} \\
&= \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_j}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\right)} - \overline{\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Sfruttando poi l'equazione di continuità gli ultimi termini delle due equazioni appena scritte si elidono e, tenendo presente la condizione

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i\right)} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j k) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i}\right) \tag{A.36}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j k) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i}\right) + \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_j}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Per quanto attiene ai termini di destra della (A.33), essi si sviluppano come:

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{\tilde{u}}_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \overline{\tilde{\tilde{u}}_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\tilde{p}\tilde{\tilde{u}}_i}) - \overline{\tilde{p}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_i}} && \text{(A.38)} \\
\overline{\tilde{\tilde{u}}_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\tau_{ij}\tilde{\tilde{u}}_i}) - \overline{\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}} && \text{(A.39)}
\end{aligned}$$

In definitiva, l'equazione differenziale che regola l'evoluzione di k nel tempo e nello spazio si ricava nella forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j k) &= -\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_j}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tau_{ij}\frac{\tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}} \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\tau_{ij}\tilde{\tilde{u}}_i} - \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i} - \overline{\tilde{p}\tilde{\tilde{u}}_i}\right] \\
&- \overline{\tilde{\tilde{u}}_i}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \overline{\tilde{p}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_i}} && \text{(A.40)}
\end{aligned}$$

A.5 Approssimazioni di chiusura

Fino a questo punto si sono presentate le equazioni medie di governo nella loro forma più generale e si è messa in evidenza la comparsa in esse di tutta una serie di termini 'nuovi', proporzionali alle correlazioni tra le grandezze fluttuanti, i quali devono essere opportunamente espressi per rendere il problema risolvibile.

Si tratta in particolare di esprimere tali nuove incognite per il tramite delle grandezze medie del flusso in modo tale che solo queste ultime compaiano come incognite del problema. Ciò avviene attraverso delle relazioni cosiddette di chiusura.

La prima relazione di chiusura riguarda il tensore degli sforzi di Reynolds ed è nota come approssimazione di Boussinesq. L'ipotesi fondamentale di Boussinesq è quella di poter esprimere le tensioni di Reynolds in funzione del tensore di velocità di deformazione medio per il tramite di un parametro detto di viscosità turbolenta μ_T[2]:

$$-\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i} = \tau_{Rij} = 2\mu_T\left(\hat{D}_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij} = S^T_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij} \qquad \text{(A.41)}$$

essendo δ_{ij} il simbolo di Kronecker ed il tensore di velocità di deformazione medio pari a

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right) \qquad \text{(A.42)}$$

Si è posto inoltre

$$S^T_{ij} = 2\mu_T\left(\hat{D}_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \qquad \text{(A.43)}$$

Il termine $\frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij}$ nella (A.41) serve a garantire che la traccia del tensore degli *stress* di Reynolds risulti congruente con la definizione di energia cinetica turbolenta fornita in precedenza.

La seconda relazione di chiusura riguarda il flusso termico turbolento ed, in perfetta analogia con quanto visto a proposito del tensore di Reynolds, si basa sull'ipotesi che sia possibile esprimere tale flusso per mezzo del gradiente di temperatura medio e di un numero di Prandtl turbolento Pr_T:

[2]La viscosità turbolenta viene generalmente valutata in funzione di k con espressioni differenti a seconda del modello di turbolenza adottato.

$$\overline{\rho \tilde{\tilde{u}}_j \tilde{\tilde{h}}} = q_{T\,j} = -\frac{\mu_T c_p}{Pr_T}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} = -\Lambda_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} \tag{A.44}$$

È appena il caso di osservare che quest'ultima relazione è del tutto analoga alla sua controparte laminare (A.27).

La terza relazione riguarda la dissipazione di energia turbolenta ovvero la relazione che coinvolge il termine $\overline{\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}}$. Tale termine occorre nella (A.30) e (A.40) ed è immediato rilevare che esso rappresenta la dissipazione di energia turbolenta connessa ai gradienti delle fluttuazioni di velocità ed agli sforzi viscosi. Pertanto si pone:

$$\bar{\rho}\epsilon = \overline{\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}} \tag{A.45}$$

Un'ultima relazione riguarda i termini di diffusione molecolare e trasporto della turbolenza presenti nella (A.30), *i.e.* i termini $\overline{\tau_{ij}\tilde{\tilde{u}}_i}$, $-\overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i}$.

In particolare, si pone:

$$\overline{\tau_{ij}\tilde{\tilde{u}}_i} - \overline{\rho\tilde{\tilde{u}}_j\frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}_i\tilde{\tilde{u}}_i} = \left(\mu_\ell + \frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{A.46}$$

essendo Pr_k una sorta di numero di Prandtl che regola la diffusione di k ed è da determinarsi empiricamente.

Pertanto, omettendo le forze di volume sul fluido, non significative per i problemi di interesse, le equazioni di governo in forma media e sotto le approssimazioni di chiusura dette si riscrivono, in formulazione spaziale, come:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\hat{u}_i) = 0 \tag{A.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\hat{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j\hat{u}_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\tau}_{ji} + \tau_{Rij}\right] \tag{A.48}$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\hat{e})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_j\hat{e})}{\partial x_j} = -P\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} + \bar{\tau}_{ij}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\Lambda\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}\right] + \bar{\rho}\epsilon \tag{A.49}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j k) = \tau_{Rij}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho}\epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_\ell + \frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{A.50}$$

avendo indicato con Λ la conducibilità globale del fluido, *i.e.* $\Lambda = \Lambda_\ell + \Lambda_T$. In particolare per l'aria si può ritenere: $\Lambda \cong (\mu_\ell + \mu_T)c_p/Pr$.

Il problema risulta allora risolubile in termini delle grandezze medie una volta espresso il termine di dissipazione di energia turbolenta ϵ. A seconda della legge di trasporto adottata per tale quantità si caratterizzano differenti modelli di turbolenza cosiddetti a due equazioni.

A.6 Il modello $k - \epsilon$

Nel corso degli anni numerose sono le versioni sviluppate del modello di turbolenza $k-\epsilon$. Il modello *standard* fu formalizzato da Jones e Launder [A.1] e uno dei suoi sviluppi è rappresentato dal modello RNG (*Renormalization Group*) sviluppato da Yakhot e Orszag [A.7].

L'idea di base consiste chiaramente nel ricavare un'equazione di governo per ϵ in modo tale da chiudere il problema.

Nel caso di fluido incomprimibile[3] la condizione differenziale che regola l'evoluzione del campo ϵ si pone [A.6]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j\epsilon)=a_{\epsilon 1}\frac{\epsilon}{k}S_{ij}^T\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}-a_{\epsilon 2}\bar{\rho}\frac{\epsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_\ell+\frac{\mu_T}{P_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right] \tag{A.51}$$

essendo le quantità $a_{\epsilon i}$ e Pr_ϵ costanti da determinare empiricamente.

Essa può modificarsi nel caso di flussi comprimibili tenendo conto prima di tutto che:

$$\bar{\rho}\epsilon=\overline{\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}}=\frac{1}{2}\overline{\tau_{ij}\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial x_i}\right)}=\overline{\tau_{ij}\tilde{\tilde{D}}_{ij}} \tag{A.52}$$

Assumendo inoltre per il fluido in esame un comportamento Newtoniano e ritenendo valida l'ipotesi di Stokes [A.2] si ha:

$$\tau_{ij}=2\mu_\ell D_{ij}-\frac{2}{3}\mu_\ell\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{A.53}$$

e quindi

$$\bar{\rho}\epsilon=\overline{\mu_\ell\left[2D_{ji}\tilde{\tilde{D}}_{ij}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_i}\right]} \tag{A.54}$$

Trascurando la correlazione fra le fluttuazioni della viscosità e le fluttuazioni del gradiente di velocità, si perviene alla seguente uguaglianza:

$$\bar{\rho}\epsilon=\nu_\ell\left[2\rho\overline{\tilde{\tilde{D}}_{ji}\tilde{\tilde{D}}_{ij}}-\frac{2}{3}\rho\overline{\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_k}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_i}}\right] \tag{A.55}$$

Questa relazione può essere decomposta in un termine di dissipazione solenoidale (ricavabile direttamente sotto l'ipotesi di fluido incomprimibile) ed uno di dissipazione da dilatazione (dipendente dalla divergenza della velocità del flusso):

$$\bar{\rho}\epsilon=\bar{\rho}(\epsilon_s+\epsilon_d) \tag{A.56}$$

In altri termini, nel caso di flusso comprimibile esiste un termine di dissipazione turbolenta aggiuntivo che svanisce quando la divergenza della parte fluttuante della velocità è nulla. D'altro canto, quest'ultimo contributo è di norma trascurabile.

L'equazione (A.51) si può allora intendere come l'equazione di governo per il campo ϵ_s e, al fine di tenere conto delle fluttuazioni di densità, in essa viene aggiunto un termine dissipativo espresso in termini della divergenza del campo di velocità media (che caratterizza la compressibilità del flusso) e di ϵ_s stesso:

$$\left(\frac{2}{3}a_{\epsilon 1}-a_{\epsilon 3}\right)\bar{\rho}\epsilon_s\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \tag{A.57}$$

Si ottengono pertanto le seguenti equazioni per il modello $k-\epsilon$ *standard* relative ad un fluido comprimibile:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_jk)=S_{ij}^T\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}-\bar{\rho}\epsilon_s-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_\ell+\frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{A.58}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon_s)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j\epsilon_s)&=a_{\epsilon 1}\frac{\epsilon_s}{k}S_{ij}^T\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}-\left(\frac{2}{3}a_{\epsilon 1}-a_{\epsilon 3}\right)\bar{\rho}\epsilon_s\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i}\\&\quad-a_{\epsilon 2}\bar{\rho}\frac{\epsilon_s^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_\ell+\frac{\mu_T}{P_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon_s}{\partial x_j}\right]\end{aligned} \tag{A.59}$$

[3]Nel caso di flusso incomprimibile le medie alla Reynolds e quelle alla Favre sono coincidenti: l'utilizzo di grandezze del tipo la $\tilde{\tilde{u}}_i$ è quindi perfettamente congruente.

dove le espressioni di chiusura ed i valori dei coefficienti di calibrazione del modello sono ([A.6], [A.7]):

$$\mu_T = \bar{\rho}\nu_T = \bar{\rho}c_\mu \frac{k^2}{\epsilon_s} \tag{A.60}$$

$$L_T = c_\mu \frac{k^{3/2}}{\epsilon_s} \tag{A.61}$$

$$\begin{aligned} &a_{\epsilon 1} = 1.44 \qquad a_{\epsilon 2} = 1.92 \qquad a_{\epsilon 3} = -1.0 \\ &c_\mu = 0.09 \qquad Pr_k = 1.0 \qquad Pr_\epsilon = 1.3 \end{aligned} \tag{A.62}$$

Il modello $k - \epsilon$ RNG, adottato in questo lavoro, è ottenuto invece mantenendo inalterata l'equazione di governo per k e modificando l'equazione che regola l'evoluzione di ϵ. In particolare, quest'ultima viene riscritta nella forma [A.7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon_s) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\hat{u}_j\epsilon_s) = [a_{\epsilon 1} - \lambda^*]\frac{\epsilon_s}{k} S_{ij}^T \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - a_{\epsilon 13}\bar{\rho}\epsilon_s \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \\ -a_{\epsilon 2}\bar{\rho}\frac{\epsilon_s^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_\ell + \frac{\mu_T}{Pr_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon_s}{\partial x_j}\right] \end{aligned} \tag{A.63}$$

ed i coefficienti di chiusura valgono:

$$\begin{aligned} &a_{\epsilon 1} = 1.42 \qquad a_{\epsilon 2} = 1.68 \qquad Pr_k = Pr_\epsilon = 0.72 \qquad c_\mu = 0.085 \qquad \lambda_o = 4.38 \\ &\beta^* = 0.012 \qquad \tilde{a}_{\epsilon 3} = 0.4133 \qquad a_{\epsilon 3}^* = 0.0689 \\ &a_{\epsilon 3} = \tilde{a}_{\epsilon 3} + \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) a_{\epsilon 3}^* \lambda\lambda^* \qquad a_{\epsilon 13} = \frac{2}{3}a_{\epsilon 1} - a_{\epsilon 3} + \frac{2}{3}\frac{k}{\epsilon_s}c_\mu \lambda^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ &\lambda^* = \lambda \frac{(1 - \lambda/\lambda_o)}{(1 + \lambda\beta^{*3})} \qquad \lambda = 2\frac{k}{\epsilon_s}\sqrt{2\hat{D}_{ij}\hat{D}_{ji}} \end{aligned}$$

Al fine di ottenere una notazione meno pesante, nelle pagine precedenti si è indicata semplicemente con ϵ la grandezza qui riportata come ϵ_s, con ρ la quantità $\bar{\rho}$, con u_i la $\hat{u}_i$, con p la P, con T la $\hat{T}$, con D_{ij} il termine $\hat{D}_{ij}$. Inoltre, si è posto

$$S_{ij} = S_{ij}^\ell + S_{ij}^T = 2\mu\left(D_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{A.64}$$

essendo $\mu = \mu_\ell + \mu_T$.

D'altro canto, è possibile ritenere valide la seguente approssimazione:

$$\mu_\ell + \frac{\mu_T}{Pr_q} \cong \frac{\mu_T}{Pr_q} \tag{A.65}$$

dove $q = k, \epsilon$.

In questo modo, considerando una formulazione A.L.E., è banale ottenere, partendo dalle (A.47-A.49) e dalle (A.58) e (A.63), le relazioni di governo (5.12-5.14) e (5.18-5.19).

Bibliografia

[A.1] B. E. Launder, D. P. Spalding, "Mathematical models of turbulence", Academic Press, New York, (1972).

[A.2] H. Schlichting, "Boundary layer theory", McGraw-Hill, (1979).

[A.3] H. Tennekes, J. L. Lumley, "A first course in turbulence", MIT press (1972).

[A.4] J. F. Wendt, "Computational fluid dynamics", A von Kármán Institute Book, Springer-Verlag, (1992).

[A.5] F. M. White, "Viscous fluid flow", II ed., McGraw-Hill, (1991).

[A.6] D. C. Wilcox, "Turbulence modeling for CFD", DCW Ind., California (2nd Ed.), (1998).

[A.7] V. Yakhot, S. A. Orszag, "Renormalization Group Analysis of Turbulence: 1. Basic Theory", *J. Scientific Computing*, **1**, (1986) 3-51.