Capitolo 4

Modelli continui di un laminato tristrato piezoelettrico

L'argomento del presente capitolo è la modellazione dei laminati tristrato piezoelettrici. Tali strutture sono particolari tipologie di laminati piezoelettrici e trovano vasto impiego in diversi campi della tecnica [37, 96, 57]. I laminati piezoelettrici sono costituiti da diverse lamine incollate l'una sull'altra, di cui alcune costituite di materiale piezoelettrico ed aventi le facce ricoperte da elettrodi. Come spiegato nell'introduzione, la presenza delle lamine piezoelettriche conferisce a tali laminati l'appellativo di "intelligenti", in virtù dell'accoppiamento tra variabili meccaniche ed elettriche presentato da tali strutture e dovuto all'effetto piezoelettrico diretto ed inverso nelle lamine piezoelettriche. In particolare per l'effetto piezoelettrico diretto ad una deformazione del laminato, e dunque delle lamine piezoelettriche facenti parte del laminato, corrisponde una differenza di potenziale tra gli elettrodi che può essere misurata; in tal caso le lamine piezoelettriche hanno la funzione di sensori. Per l'effetto piezoelettrico inverso applicando una differenza di potenziale tra gli elettrodi delle lamine piezoelettriche queste subiscono una deformazione che a sua volta induce una deformazione in tutto il laminato; in tal caso le lamine piezoelettriche hanno la funzione di attuatori. Gli elementi piezoelettrici possono essere utilizzati per controllare in maniera attiva o passiva le vibrazioni della struttura o il rumore da essa irradiato, come trattato in parte della bibliografia citata nel capitolo 7; possono essere inoltre utilizzati per controllare la forma del laminato, come studiato in [4, 93].

Numerosissimi sono i lavori presenti in letteratura riguardanti la modellazione dei laminati piezoelettrici e più in generale di strutture con attuatori e sensori piezoelettrici; tali lavori possono essere divisi in due gruppi principali [31]. Nei lavori appartenenti al primo gruppo si compie un'analisi statica degli elementi piezoelettrici, considerati nel mo-

dello completo del sistema in termini della sollecitazione esercitata o della deformazione imposta sulla struttura che li ospita; tale metodologia da risultati soddisfacenti quanto gli attuatori sono molto sottili rispetto alla struttura che li ospita. A questo gruppo appartengono, ad esempio, i lavori [37, 38, 35, 41, 59, 98]. In [37] si fornisce un modello statico per l'azione di una coppia di attuatori piezoelettrici, incollati sulle superfici superiore ed inferiore di una trave o inseriti all'interno della trave stessa, considerando anche gli effetti dello strato di colla. La trave può essere eccitata estensionalmente o flessionalmente applicando agli elettrodi dei due piezoelettrici differenze di potenziale tra loro in fase o in opposizione di fase, rispettivamente. Per gli attuatori incollati sulla superficie della trave si considera un modello unidimensionale con deformazione estensionale costante nello spessore dell'attuatore, per quelli immersi si considera un modello unidimensionale con deformazione costante o lineare nello spessore, a seconda che la trave sia in estensione o in flessione. Si dimostra poi che, nel caso di perfetto incollaggio e di eccitazione a flessione della trave, l'azione statica degli attuatori sulla superficie della trave consiste in momenti flettenti esercitati sulla trave lungo i bordi degli attuatori stessi. In [38] il lavoro [37] viene esteso considerando una deformazione lineare lungo tutta la sezione trasversale (trave più attuatori piezoelettrici), per modellare in modo più accurato la flessione della trave. In [35] si considera il caso di trave eccitata da diversi attuatori piezoelettrici indipendenti tra loro, assumendo una distribuzione lineare delle tensioni normali nello spessore dei piezoelettrici avente la stessa inclinazione della distribuzione lineare di tensioni nello spessore della trave. In [41] si estende la teoria unidimensionale proposta in [38] al caso bidimensionale di piastra con attuatori piezoelettrici incollati sulle facce; le tensioni normali nello spessore della piastra e degli attuatori sono lineari con uguale inclinazione nei vari strati. In [59] si generalizza il modello in [41] assumendo inclinazioni diverse degli andamenti delle tensioni normali nello spessore della piastra e dei piezoelettrici. In [98] si presenta un modello per travi e piastre con attuatori incollati sulle facce o inseriti all'interno della piastra; si considerano distribuzioni lineari delle deformazioni estensionali in ogni tratto di spessore compreso tra due attuatori.

Al secondo gruppo appartengono i lavori nei quali il sistema accoppiato struttura-attuatori e sensori piezoelettrici è modellato nel suo insieme. In [95, 58] sono studiati laminati piezoelettrici generici mediante formulazioni tridimensionali agli elementi finiti. Modelli siffatti non sono molto efficienti dal punto di vista computazionale e forniscono valori sovrastimati per la rigidezza meccanica del laminato. In [106, 12] si forniscono modelli

per la flessione di un tristrato piezoelettrico dove le lamine piezoelettriche sono riguardate come membrane mentre per la piastra è descritta con un modello tridimensionale; in [106] si considera la flessione cilindrica mentre in [12] la flessione bidirezionale.

Modelli più efficienti da un punto di vista computazionale si ottengono impiegando una teoria bidimensionale di laminato per lo studio della struttura composita laminata. In [91] si deduce un teoria flessionale di tristrato piezoelettrico nella quale la piastra è modellata alla Kirchhoff-Love mentre le lamine piezoelettriche sono considerate come membrane, trascurando dunque la loro rigidezza flessionale. In [64, 65, 4, 101, 93] il campo di spostamenti in ogni strato componente il laminato piezoelettrico è rappresentato secondo la teoria di Kirchhoff-Love mentre il campo elettrico nelle lamine piezoelettriche è diretto lungo lo spessore; in tali lavori si considera dunque la rigidezza flessionale degli elementi piezoelettrici. In [65] si considera un profilo di polarizzazione nel piezoelettrico, costituito da un sottile film di PVF_2, variabile lungo il piano medio del film e scelto in modo ottimale per la rilevazione o l'eccitazione di un singolo modo di vibrazione della struttura. In [93] si considera il caso di lamine piezoelettriche anisotrope; in [1] si utilizza un modello alla Kirchhoff-Love per ogni strato di un laminato piezoelettrico multistrato con lamine piezoelettriche anisotrope, assumendo un potenziale elettrico variabile lungo il piano medio di ciascun piezoelettrico. In [14] le lamine di un laminato multistrato sono modellate secondo la teoria alla Kirchhoff-Love presentata in [15]. In [105] si presenta un modello di un laminato costituito da una piastra piezoelettrica, con asse di polarizzazione parallelo al suo piano medio, racchiusa tra due piastre elastiche; applicando una differenza di potenziale tra gli elettrodi sulle due facce del piezoelettrico si induce una deformazione di scorrimento nel piezoelettrico che provoca una flessione del laminato. Le piastre elastiche sono descritte da un modello alla Kirchhoff-Love mentre per la piastra piezoelettrica si adotta un modello alla Reissner-Mindlin. Il vantaggio di questi modelli bidimensionali e di essere più efficienti dal punto di vista computazionale; d'altro canto sono modelli piuttosto semplificati in quanto vengono trascurati gli sforzi di taglio all'interno di ciascuno strato del laminato e si applicano quindi al caso di laminati sottili. Inoltre, poichè un modello alla Kirchhoff-Love è descritto da equazioni differenziali alle derivate parziali del quarto ordine, lo studio con il metodo degli elementi finiti richiede l'impiego di funzioni interpolanti di classe C_1 di non agevole costruzione.

Modelli alla Reissner-Mindlin del laminato tristrato piezoelettrico sono contenuti in [102, 19, 24]. In tali lavori la piastra è modellata secondo la teoria di Reissner-Mindlin, che

considera la deformazioni di scorrimento nella piastra, mentre gli attuatori piezoelettrici sono modellati come membrane sottili. Poichè le equazioni di campo ottenute dal modello di Reissner-Mindlin sono del secondo ordine, la risoluzione col metodo degli elementi finiti richiede funzioni interpolanti di classe C_0 di facile costruzione. In [103] si arricchisce la modellazione presentata in [102] per ottenere un modello applicabile al caso in cui gli spessori della piastra e degli attuatori piezoelettrici non siano più trascurabili. In tale modello si considera la rigidezza flessionale degli attuatori piezoelettrici, valutata secondo un modello alla Kirchhoff-Love, e si assume una variazione quadratica del potenziale nello spessore. Esso non considera però le deformazioni estensionali nella piastra e le deformazioni di scorrimento negli attuatori piezoelettrici che, come meglio spiegato nel paragrafo 4.2, dovrebbero essere portate in conto nel caso di attuatori spessi. In [30] si considera un altro modello alla Reissner-Mindlin del laminato; gli spostamenti in ogni strato sono funzione dei soli spostamenti e delle sole rotazioni sul piano medio del laminato e di due termini che tengono conto della variazione della rotazione delle fibre trasversali in ogni strato (effetto "zig-zag"), il potenziale elettrico in ogni lamina piezoelettrica è assunto quadratico nello spessore. In [42] si fornisce un modello di laminato applicabile nel caso di lamine spesse; in esso infatti ogni strato è descritto da un modello di piastra alla Reissner-Mindlin, considerando inoltre anche gli effetti termici nel laminato. Le equazioni di governo sono dedotte mediante un approccio variazionale ma i valori di rigidezza previsti da tale modello non sono coerenti con quelli derivanti dalla teoria tridimensionale della piezoelettricità. In [18, 22, 23] si presenta un modello di laminato piezoelettrico nel quale ogni strato è descritto da un modello alla Reissner-Mindlin; opportune ipotesi a priori sullo stato tensionale all'interno delle lamine consente di ottenere valori di rigidezza coerenti con quelli della teoria tridimensionale.

In questo capitolo sono presentati due modelli di laminato tristrato piezoelettrico. Il primo modello è quello riportato in [19, 24]; in esso si deducono le stesse equazioni di equilibrio ricavate in [102] ma con un approccio differente. Più esattamente le equazioni di equilibrio sono dedotte dalla stazionarietà del funzionale dell'energia potenziale totale relativo al laminato tristrato. Tale approccio, come è ben noto, consente di ricavare in maniera automatica gli operatori di bordo compatibili con gli operatori di campo. Inoltre un approccio variazionale consente di ottenere formulazioni agli elementi finiti del problema; alcune formulazioni agli elementi finiti derivate da tale modello sono presentate nel

capitolo 5. Il secondo modello, più raffinato, di tristrato piezoelettrico è quello presentato in [22, 23]. In tale modello si tiene conto della rigidezza membranale e flessionale di ogni strato; in particolare il comportamento flessionale di ciascuno strato è descritto secondo la teoria alla Reissner-Mindlin riportata nel paragrafo 3.5.3 mentre quello membranale secondo la teoria riportata nel paragrafo 3.4.1. Tale modello si applica dunque al caso di laminati spessi, in quanto tiene conto della deformazione di scorrimento all'interno degli attuatori e della deformazione estensionale della piastra.

4.1 Un modello semplice di laminato tristrato piezoelettrico

Si illustra in questo paragrafo la teoria di laminato tristrato piezoelettrico descritta in [24].

4.1.1 Geometria del laminato

Il laminato tristrato, rappresentato schematicamente in figura 4.1, è costituito da due strati piezoelettrici (attuatori), perfettamente incollati rispettivamente alla faccia superiore ed inferiore di una piastra elastica; si suppone che la colla sia un perfetto isolante elettrico e che abbia spessore trascurabile.

In ciò che segue, ogni quantità relativa allo strato piezoelettrico superiore è distinta dall'apice s, ogni quantità relativa allo strato piezoelettrico inferiore è distinta con l'apice i mentre le quantità relative alla piastra non hanno alcun apice. Siano dunque h, h^s e h^i gli spessori della piastra, del piezoelettrico superiore e del piezoelettrico inferiore, rispettivamente; sia Ω la regione limitata nel piano (x_1, x_2) e costituente il piano medio della piastra, con frontiera regolare $\partial\Omega$ e siano $\mathbf{n}$ e $\mathbf{t}$, rispettivamente, la normale esterna e la tangente a $\partial\Omega$. Il riferimento cartesiano (O, x_1, x_2, x_3) è scelto con l'asse x_3 orientato secondo lo spessore del laminato e l'origine nel piano (x_1, x_2), come mostrato in figura 4.1.

La regione dello spazio euclideo occupata dalla piastra è $\Omega \times (-h/2, h/2)$, con frontiera $\partial\Omega \times (-h/2, h/2) \cup \mathcal{V}^+ \cup \mathcal{V}^-$, essendo $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ le interfacce piezoelettrico superiore/piastra e piezoelettrico inferiore/piastra, rispettivamente. Le regioni occupate dagli attuatori superiore ed inferiore sono, rispettivamente, $\Omega \times (h/2, h/2 + h^s)$ e $\Omega \times (-h/2 - h^i, -h/2)$; le corrispondenti frontiere sono $\partial\Omega \times (h/2, h/2 + h^s) \cup \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{V}^+$ e $\partial\Omega \times (-h/2 - h^i, -h/2) \cup$

Figura 4.1: Rappresentazione schematica del tristrato piezoelettrico

$\mathcal{V}^- \cup \mathcal{S}^-$, dove $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ sono, rispettivamente, le facce superiore ed inferiore del laminato. In virtù dell'ipotesi di perfetto incollaggio, gli spostamenti relativi tra piastra e strati piezoelettrici in corrispondenza delle interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ sono nulli.

Nel seguito si costruisce un modello per studiare il comportamento flessionale di tale laminato.

4.1.2 Ipotesi di lavoro

La piastra si considera costituita di materiale elastico, omogeneo ed isotropo; sia E il modulo di Young di tale materiale, ν il modulo di Poisson, $G = E/[2(1+\nu)]$ il modulo di elasticità trasversale e ρ la sua densità. Il modello qui adottato per descrivere il comportamento flessionale della piastra è quello di Reissner-Mindlin [85] riportato nel paragrafo 3.5.3 nel caso più generale di materiale omogeneo, trasversalmente isotropo e piezoelettrico lineare; tale modello, considerando la deformabilità a taglio della piastra, è adatto alla descrizione di piastre spesse. Gli attuatori superiore ed inferiore sono considerati costituiti di materiale omogeneo, lineare piezoelettrico e trasversalmente isotropo, con asse di trasversa isotropia orientato lungo x_3. Come illustrato nella (2.26), il comportamento costitutivo di tale materiale è caratterizzato da dieci costanti indipendenti; in particolare, con riferimento al piezoelettrico superiore, c^s_{11}, c^s_{12}, c^s_{13}, c^s_{33}, e c^s_{44} sono le cinque costanti elastiche, valutate a campo elettrico costante, ε^s_{11} ed ε^s_{33} sono le due permettività dielettriche, valutate a deformazione costante, ed infine e^s_{31}, e^s_{33} ed e^s_{15} sono le tre costanti piezoelettriche. Costanti analoghe descrivono il comportamento costitutivo del

piezoelettrico inferiore. Le densità dell'attuatore piezoelettrico superiore ed inferiore sono, rispettivamente, ρ^s e ρ^i. Si considerano inoltre valide le seguenti ipotesi semplificative.

i) La rigidezza planare $h^s\overline{c}^s_{11}$ degli attuatori piezoelettrici è considerata trascurabile rispetto alla rigidezza planare della piastra $hE/(1-\nu)^2$; in altre parole il piezoelettrico può provocare una flessione della piastra ma non può provocare una deformazione membranale della stessa. In conseguenza di tale assunzione il comportamento membranale ed il comportamento flessionale della piastra sono tra loro disaccoppiati.

ii) Gli spessori h^s e h^i dei piezoelettrici sono trascurabili rispetto allo spessore h della piastra. Di conseguenza la rigidezza flessionale dei piezoelettrici è trascurabile rispetto alla rigidezza estensionale. Gli attuatori piezoelettrici sono dunque modellati come membrane; in particolare si utilizza il modello di membrana descritto nel paragrafo 3.4.1.

4.1.3 Campo di spostamenti e potenziale elettrico nel laminato

Si richiamano qui le espressioni del campo di spostamenti e del potenziale elettrico nella piastra e negli attuatori piezoelettrici, conseguenti alle ipotesi sul laminato formulate nel paragrafo precedente.

Campo di spostamenti nella piastra

In accordo alle ipotesi relative alla teoria di Reissner-Mindlin, il campo di spostamenti $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ nella piastra in flessione è rappresentato come segue:

$$\begin{aligned} s_1(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_1(x_1, x_2)\, x_3 \\ s_2(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_2(x_1, x_2)\, x_3 \\ s_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

dove il significato dei simboli nelle (4.1) è quello fornito nel paragrafo 3.5.3.

Campo di spostamenti e potenziale elettrico negli attuatori

In accordo al modello di membrana piezoelettrica descritto nel paragrafo 3.4.1, lo spostamento parallelo al piano Ω è costante nello spessore. Il campo degli spostamenti $\overline{\mathbf{s}}^s = (s^s_1, s^s_2)$ nel piezoelettrico superiore è rappresentato come segue:

$$
\begin{aligned}
s_1^s(x_1, x_2, x_3) &= u_1^s(x_1, x_2) \\
s_2^s(x_1, x_2, x_3) &= u_2^s(x_1, x_2)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Il campo di spostamenti nel piezoelettrico inferiore ha una rappresentazione analoga. Il potenziale elettrico ϕ^s nel piezoelettrico superiore ha la seguente rappresentazione:

$$
\phi^s(x_1, x_2, x_3) = \chi^s(x_1, x_2)\, x_3 \tag{4.3}
$$

Analoga rappresentazione vale per il piezoelettrico inferiore. Le funzioni w, $\boldsymbol{\varphi}$, χ^s e χ^i sono le incognite indipendenti del problema, mentre le funzioni $\mathbf{u}^s$, $\mathbf{u}^i$, descrittori del campo degli spostamenti negli attuatori piezoelettrici, sono dipendenti da $\boldsymbol{\varphi}$. Imponendo infatti la continuità degli spostamenti attraverso le interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ si ottengono le relazioni:

$$
\mathbf{u}^s = \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} \qquad\qquad \mathbf{u}^i = -\boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} \tag{4.4}
$$

4.1.4 Condizioni esterne di carico e di vincolo

Si descrivono in questo paragrafo le condizioni di carico e di vincolo considerate nel presente modello di tristrato piezoelettrico. Le condizioni sul contorno laterale sono qui assegnate in maniera più generale rispetto a quanto fatto nel dedurre le teorie di piastra piezoelettrica presentate nel precedente capitolo, dove per esigenze di chiarezza si è ritenuto opportuno non appesantire la trattazione con un simbolismo eccessivo. Si considera infatti ora un problema con condizioni al contorno generalizzate [51].

Sulle faccia superiore $\mathcal{S}^+$ è assegnata una densità di carica elettrica superficiale ω^s, mentre sull'interfaccia $\mathcal{V}^+$ è assegnata la densità di carica $-\omega^s$. Sulla faccia inferiore $\mathcal{S}^-$ e sull'interfaccia $\mathcal{V}^-$ sono assegnate, rispettivamente, le densità di carica elettrica superficiale $-\omega^i$ e ω^i. Inoltre q è il carico trasversale sul piano medio della piastra e $\mathbf{m}$ sono le coppie distribuite sulla piastra.

Per assegnare le condizioni sul contorno laterale del laminato, in virtù delle rappresentazioni adottate per il campo di spostamenti e per il potenziale elettrico in ogni strato, si considerano i seguenti sottoinsiemi di $\partial\Omega$: $\partial\Omega_w$, $\partial\Omega_{\varphi_t}$,$\partial\Omega_{\varphi_n}$, $\partial\Omega_{\phi^s}$ e $\partial\Omega_{\phi^i}$, indicando con un apice $\mathcal{C}$ i rispettivi sottoinsiemi complementari. Su $\partial\Omega_w$ sono assegnati gli spostamenti trasversali w^l, su $\partial\Omega_{\varphi_t}$ sono assegnate le rotazioni φ_t^l lungo $\mathbf{t}$, su $\partial\Omega_{\varphi_n}$ sono assegnate le rotazioni φ_n^l lungo $\mathbf{n}$, infine su $\partial\Omega_{\phi^s}$ e $\partial\Omega_{\phi^i}$ sono assegnati i potenziali elettrici $(x_3\chi^s)^l$ e $(x_3\chi^i)^l$, rispettivamente. Inoltre, su $\partial\Omega_w^{\mathcal{C}}$ è assegnata la forza trasversale distribuita q^l,

su $\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi_t}$ sono assegnate le coppie distribuite m^l_t lungo $\mathbf{t}$ applicate alla piastra e le forze distribuite $(f^s_t)^l$ e $(f^i_t)^l$ lungo $\mathbf{t}$ applicate, rispettivamente, al piezoelettrico superiore ed inferiore; su $\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi_n}$ sono assegnate le coppie distribuite m^l_n lungo $\mathbf{n}$ applicate alla piastra e le forze distribuite $(f^s_n)^l$ e $(f^i_n)^l$ lungo $\mathbf{n}$ applicate, rispettivamente, al piezoelettrico superiore ed inferiore. Infine su $\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\phi^s}$ e $\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\phi^i}$ sono assegnati, rispettivamente, i momenti distribuiti di carica elettrica $(\mu^s)^l$ e $(\mu^i)^l$.

4.1.5 Funzionale dell'energia potenziale totale

Si costruisce ora il funzionale dell'energia potenziale totale del laminato, dalla cui stazionarietà sono ottenute le equazioni di equilibrio.

Contributo della piastra

Il contributo della piastra al funzionale dell'energia potenziale totale è somma dei termini:

$$\mathcal{E}_m + \mathcal{U}_m + (\mathcal{U}_m)^l \tag{4.5}$$

aventi il seguente significato:

- $\mathcal{E}_m$ è l'energia di deformazione nella piastra:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\mathcal{D}\int_\Omega [(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\,da + \frac{hG}{2}\int_\Omega ||\boldsymbol{\varphi} + \nabla w||^2\,da \tag{4.6}$$

  Nella (4.6) il primo integrale è l'energia di flessione, il secondo integrale rappresenta l'energia di deformazione legata allo scorrimento mentre $\mathcal{D} = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ è la rigidezza flessionale della piastra.

- $\mathcal{U}_m$ è l'energia potenziale dei carichi esterni sulla piastra:

$$\mathcal{U}_m = -\int_\Omega (q\,w + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\varphi})\,da \tag{4.7}$$

- $(\mathcal{U}_m)^l$ è l'energia legata ai carichi esterni sul bordo:

$$(\mathcal{U}_m)^l = -\int_{\partial\Omega_w} q^l w\,dl - \int_{\partial\Omega^t_\varphi} m^l_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{t}\,dl - \int_{\partial\Omega^n_\varphi} m^l_n\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\,dl \tag{4.8}$$

Contributo degli attuatori piezoelettrici

Il contributo del piezoelettrico superiore al funzionale dell'energia potenziale è la somma dei seguenti termini:

$$\mathcal{E}_m^s + \mathcal{E}_e^s + \mathcal{E}_{em}^s + \mathcal{U}_e^s + (\mathcal{U}_m^s)^l + (\mathcal{U}_e^s)^l \tag{4.9}$$

aventi il seguente significato:

- $\mathcal{E}_m^s$ è l'energia elastica di deformazione nell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{E}_m^s = \frac{\overline{c}_{11}^s h^s}{2} \int_\Omega [(1-\overline{\nu}^s)||\mathrm{sym}\nabla \mathbf{u}^s||^2 + \overline{\nu}^s (\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s)^2]\, da \tag{4.10}$$

- $\mathcal{E}_e^s$ è l'energia elettrostatica nell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{E}_e^s = -\frac{h^s}{2}\overline{\varepsilon}_{33}^s \int_\Omega (\chi^s)^2\, da - \frac{(h^s)^3}{24}\overline{\varepsilon}_{11}^s \int_\Omega ||\nabla \chi^s||^2\, da \tag{4.11}$$

- $\mathcal{E}_{em}^s$ è l'energia dovuta all'accoppiamento elettromeccanico nell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{E}_{em}^s = h^s \overline{e}_{31}^s \int_\Omega \chi^s \mathrm{div}\,\mathbf{u}^s\, da \tag{4.12}$$

- $\mathcal{U}_e^s$ è l'energia potenziale associata alla distribuzione di cariche superficiali $+\omega^s$ e $-\omega^s$, rispettivamente sulla superficie superiore ed inferiore dell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{U}_e^s = h^s \int_\Omega \omega^s \chi^s\, da \tag{4.13}$$

- $(\mathcal{U}_m^s)^l$ è l'energia potenziale associata ai carichi esterni di natura meccanica sul bordo.

$$(\mathcal{U}_m^s)^l = -\int_{\partial\Omega_{\varphi n}^{\mathcal{C}}} (f_n^s)^l \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}\, dl - \int_{\partial\Omega_{\varphi t}^{\mathcal{C}}} (f_t^s)^l \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{t}\, dl \tag{4.14}$$

- $(\mathcal{U}_e^s)^l$ è l'energia potenziale associata ai carichi esterni di natura elettrica sul bordo.

$$(\mathcal{U}_e^s)^l = \int_{\partial\Omega_{\phi s}^{\mathcal{C}}} (\mu^s)^l \chi^s\, dl \tag{4.15}$$

Il contributo al funzionale dell'energia potenziale totale relativo al piezoelettrico inferiore è la somma dei seguenti termini:

$$\mathcal{E}_m^i + \mathcal{E}_e^i + \mathcal{E}_{em}^i + \mathcal{U}_e^i + (\mathcal{U}_m^i)^l + (\mathcal{U}_e^i)^l \tag{4.16}$$

il cui significato e la cui espressione sono analoghi a quelli relativi all'attuatore piezoelettrico superiore. Il funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}$ relativo al laminato tristrato piezoelettrico sopra descritto è la somma dei contributi relativi agli attuatori piezoelettrici superiore ed inferiore ed alla piastra centrale, cioè:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_m^s + \mathcal{E}_e^s + \mathcal{E}_{em}^s + \mathcal{E}_m^i + \mathcal{E}_e^i + \mathcal{E}_{em}^i + \\ &+ \mathcal{U}_m + \mathcal{U}_e^s + \mathcal{U}_e^i + (\mathcal{U}_m)^l + (\mathcal{U}_m^s)^l + (\mathcal{U}_e^s)^l + (\mathcal{U}_m^i)^l + (\mathcal{U}_e^i)^l \end{aligned} \tag{4.17}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned} & w = w^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_w \quad \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi}_n^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_{\varphi_n} \quad \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{t} = \boldsymbol{\varphi}_t^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_{\varphi_t} \\ & \chi^s = (\chi^s)^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_{\phi^s} \quad \chi^i = (\chi^i)^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_{\phi^i} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Le condizioni di vincolo (4.4) sulle variabili di spostamento possono essere imposte direttamente, sostituendo le (4.4) nella (4.17). Si può altresì utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [70, 69], ottenendo un funzionale dell'energia potenziale totale vincolato; a tal scopo si devono aggiungere al funzionale dell'energia potenziale totale (4.17) i termini lagrangiani $\mathcal{L}^s$ e $\mathcal{L}^i$, la cui espressione è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^s &= \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^s \cdot \left(\mathbf{u}^s - \frac{h}{2}\boldsymbol{\varphi}\right) da \\ \mathcal{L}^i &= \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^i \cdot \left(\mathbf{u}^i + \frac{h}{2}\boldsymbol{\varphi}\right) da \end{aligned} \tag{4.19}$$

ed i termini lagrangiani sul bordo $\mathcal{L}_b^s$ e $\mathcal{L}_b^i$, la cui espressione è:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^s)^l &= \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}^s)^l \cdot \left(\mathbf{u}^s - \frac{h}{2}\boldsymbol{\varphi}\right) dl \\ (\mathcal{L}^i)^l &= \int_\Omega (\boldsymbol{\lambda}^i)^l \cdot \left(\mathbf{u}^i + \frac{h}{2}\boldsymbol{\varphi}\right) dl \end{aligned} \tag{4.20}$$

Il funzionale vincolato dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}_v$ si scrive dunque come:

$$\mathcal{E}_v = \mathcal{E} + \mathcal{L}^s + \mathcal{L}^i + (\mathcal{L}^s)^l + (\mathcal{L}^i)^l \tag{4.21}$$

definito sulla varietà (4.18).

I moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}^s$ e $\boldsymbol{\lambda}^i$ nella (4.19) sono, rispettivamente, le azioni parallele al piano Ω che gli attuatori piezoelettrici superiore ed inferiore esercitano sulla piastra centrale attraverso le interfacce. I corrispondenti moltiplicatori $(\boldsymbol{\lambda}^s)^l$, $(\boldsymbol{\lambda}^i)^l$ nella (4.20) tengono invece conto delle azioni concentrate sul bordo e parallele a Ω.

4.1.6 Equazioni di equilibrio

Le equazioni di equilibrio e le relative condizioni al contorno per la piastra centrale e gli attuatori piezoelettrici possono essere ottenute dalle condizioni di stazionarietà del funzionale $\mathcal{E}_v$. In particolare la stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a w e $\boldsymbol{\varphi}$ fornisce le equazioni di equilibrio meccanico della piastra centrale mentre la stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}^s$ e $\mathbf{u}^i$ fornisce le equazioni di equilibrio meccanico dell'attuatore superiore ed inferiore. La stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a χ^s e χ^i fornisce le equazioni di equilibrio elettrostatico per gli attuatori superiore ed inferiore. Infine, la stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto ai parametri lagrangiani $\boldsymbol{\lambda}^s$, $\boldsymbol{\lambda}^i$, $(\boldsymbol{\lambda}^s)^l$ e $(\boldsymbol{\lambda}^i)^l$ fornisce le equazioni di vincolo (4.4). Tali condizioni di stazionarietà si scrivono come segue:

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a w:

$$
\begin{aligned}
&-hG\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)\,\delta w\,da-\int_\Omega q\,\delta w\,da+hG\int_{\partial\Omega_w^c}(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)\cdot\mathbf{n}\,\delta w\,dl+\\
&-\int_{\partial\Omega_w^c} q^l\,\delta w\,dl=0
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\boldsymbol{\varphi}$:

$$
\begin{aligned}
&-\mathcal{D}\int_\Omega \operatorname{div}[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}]\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\,da+hG\int_\Omega(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\,da+\\
&-\int_\Omega(\mathbf{m}+\frac{h(\boldsymbol{\lambda}^s-\boldsymbol{\lambda}^i)}{2})\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\,da-\int_{\partial\Omega}\frac{h[(\boldsymbol{\lambda}^s)^l-(\boldsymbol{\lambda}^i)^l]}{2}\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\,dl+\\
&+\mathcal{D}\int_{\partial\Omega_{\varphi^n}^c}[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n}\,\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\,dl+\\
&+\mathcal{D}\int_{\partial\Omega_{\varphi^t}^c}[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}\,\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{t}\,dl+\\
&-\int_{\partial\Omega_{\varphi^n}^c} m_n^l\,\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\,dl-\int_{\partial\Omega_{\varphi^t}^c} m_t^l\,\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{t}\,dl=0
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}^s$:

$$
\begin{aligned}
&-\overline{c}_{11}^s h^s\int_\Omega \operatorname{div}[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\operatorname{div}\mathbf{u}^s]\cdot\delta\mathbf{u}^s\,da-h^s\overline{e}_{31}^s\int_\Omega\nabla\chi^s\cdot\delta\mathbf{u}^s\,da+\\
&+\int_\Omega\boldsymbol{\lambda}^s\cdot\delta\mathbf{u}^s\,da+\overline{c}_{11}^s h^s\int_{\partial\Omega}[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\operatorname{div}\mathbf{u}^s][\mathbf{n}]\cdot\delta\mathbf{u}^s\,dl+\\
&+h^s\overline{e}_{31}^s\int_{\partial\Omega_\phi^{sc}}\chi^s\,\delta\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}\,dl+\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\lambda}^s)^l\cdot\delta\mathbf{u}^s\,dl+\\
&-\int_{\partial\Omega_{\varphi n}^c}(f_n^s)^l\,\delta\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}\,dl-\int_{\partial\Omega_{\varphi t}^c}(f_t^s)^l\,\delta\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{t}\,dl=0
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}^i$:
  Fornisce una condizione analoga alla (4.24).

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a χ^s:

$$-h^s\overline{\varepsilon}^s_{33}\int_\Omega \chi^s\delta\chi^s\,da + h^s\overline{e}^s_{31}\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}^s\delta\chi^s\,da + \overline{\varepsilon}^s_{11}\frac{(h^s)^3}{12}\int_\Omega \Delta\chi^s\delta\chi^s\,da +$$
$$+h^s\int_\Omega \omega^s\delta\chi^s\,da - \overline{\varepsilon}^s_{11}\frac{(h^s)^3}{12}\int_{\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\phi^s}} \nabla\chi^s\cdot\mathbf{n}\,\delta\chi^s\,dl + \int_{\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\phi^s}} (\mu^s)^l\,\delta\chi^s\,dl = 0 \quad (4.25)$$

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a χ^i:
  Fornisce una condizione analoga alla (4.25).

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\boldsymbol{\lambda}^s$

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}^s - \frac{h}{2}\boldsymbol{\varphi}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\lambda}^s\,da = 0 \quad (4.26)$$

- Stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\boldsymbol{\lambda}^i$

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}^i + \frac{h}{2}\boldsymbol{\varphi}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\lambda}^i\,da = 0 \quad (4.27)$$

  Le condizioni di stazionarietà rispetto a $(\boldsymbol{\lambda}^s)^l$ e $(\boldsymbol{\lambda}^i)^l$ sono le corrispondenti delle (4.26) e (4.27), dove ora l'integrale è sul bordo $\partial\Omega$.

Equilibrio della piastra centrale

In accordo alla teoria di Reissner-Mindlin, utilizzata per modellare la piastra centrale, si possono scrivere due equazioni di equilibrio per la piastra (una scalare e l'altra vettoriale). La prima equazione si ottiene dalla (4.22) e si scrive come:

$$-hG\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) = q \qquad \text{in} \quad \Omega \quad (4.28)$$

La condizione al contorno associata alla (4.28) risulta:

$$hG(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w)\cdot\mathbf{n} = q^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega^{\mathcal{C}}_w \quad (4.29)$$

La seconda equazione si ottiene dalla (4.23) e si scrive come:

$$-\mathcal{D}\operatorname{div}\left[(1-\nu)\operatorname{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nu\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\right] + hG(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) = \mathbf{m} + \frac{h(\boldsymbol{\lambda}^s - \boldsymbol{\lambda}^i)}{2} \qquad \text{in} \quad \Omega \quad (4.30)$$

La condizione al contorno associata alla (4.30) risulta:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\left[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\right][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n}=m_n^l+\frac{h[(\boldsymbol{\lambda}^s)^l-(\boldsymbol{\lambda}^i)^l]}{2}\cdot\mathbf{n} \quad \text{su}\,\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi_n}\\
&\mathcal{D}\left[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\right][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}=m_t^l+\frac{h[(\boldsymbol{\lambda}^s)^l-(\boldsymbol{\lambda}^i)^l]}{2}\cdot\mathbf{t} \quad \text{su}\,\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi_t}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Equilibrio degli attuatori piezoelettrici

Poichè gli attuatori piezoelettrici sono stati modellati come membrane, per ciascuno di essi potrà essere scritta un'equazione di equilibrio meccanico più un'equazione di equilibrio elettrostatico. L'equazione di equilibrio meccanico per l'attuatore piezoelettrico superiore, ottenuta dalla (4.24), si scrive come:

$$-\overline{c}^s_{11}h^s\mathrm{div}\left[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s\right]-h^s\overline{e}^s_{31}\nabla\chi^s=-\boldsymbol{\lambda}^s \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4.32}$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}
&\overline{c}_{11}h^s[(1-\nu^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n}+h^s\overline{e}_{31}\chi^s=-(\boldsymbol{\lambda}^s)^l\cdot\mathbf{n} && \text{su}\,\partial\Omega_{\varphi_n}\\
&\overline{c}^s_{11}h^s[(1-\nu^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\nu^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}=-(\boldsymbol{\lambda}^s)^l\cdot\mathbf{t} && \text{su}\,\partial\Omega_{\varphi_t}\\
&\overline{c}_{11}h^s[(1-\nu^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n}+h^s\overline{e}_{31}\chi^s=-(\boldsymbol{\lambda}^s)^l\cdot\mathbf{n}+(f^s_n)^l && \text{su}\,\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi_n}\\
&\overline{c}^s_{11}h^s[(1-\nu^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\nu^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s][\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}=-(\boldsymbol{\lambda}^s)^l\cdot\mathbf{t}+(f^s_t)^l && \text{su}\,\partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi_t}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

La corrispondente equazione per il piezoelettrico inferiore e le relative condizioni al contorno si scrivono in maniera analoga.

L' equazione di bilancio elettrostatico per l'attuatore superiore si ottiene dalla (4.25) e si scrive come:

$$-h^s\overline{\varepsilon}^s_{33}\chi^s+h^s\overline{e}^s_{31}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s+\overline{\varepsilon}^s_{11}\frac{(h^s)^3}{12}\Delta\chi^s=-h^s\omega^s \tag{4.34}$$

cui è associata la seguente condizione al contorno:

$$\overline{\varepsilon}^s_{11}\frac{(h^s)^3}{12}\nabla\chi^s\cdot\mathbf{n}=(\mu^s)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\phi^s} \tag{4.35}$$

Analoga forma assume l'equazione di equilibrio elettrostatico e la relativa condizione al contorno per l'attuatore piezoelettrico inferiore.

Le condizioni di stazionarietà rispetto ai moltiplicatori di Lagrange forniscono le equazioni di vincolo (4.4) definite nell'interno di Ω e sul suo contorno $\partial\Omega$. Sostituendo le (4.4)

nella (4.32) e nell'analoga riferita al piezoelettrico inferiore si ottengono le espressioni delle azioni $\boldsymbol{\lambda}^s$ e $\boldsymbol{\lambda}^i$ esercitate, rispettivamente, dal piezoelettrico superiore e dal piezoelettrico inferiore sulla piastra attraverso le interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$, in termini delle funzioni incognite del problema. Sostituendo le (4.4) nelle (4.33) e nelle analoghe riferite al piezoelettrico inferiore si ottengono le espressioni delle azioni $(\boldsymbol{\lambda}^s)^l$ e $(\boldsymbol{\lambda}^i)^l$ esercitate, rispettivamente, dal piezoelettrico superiore e dal piezoelettrico inferiore sulla piastra lungo i contorni delle interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$, in termini delle funzioni incognite del problema.

4.1.7 Una formulazione variazionale di tipo misto

Ai fini di applicare la teoria di laminato tristrato piezoelettrico prima trattata all'analisi dello smorzamento delle vibrazioni di piastre mediante attuatori piezoelettrici, è utile ottenere una formulazione agli elementi finiti di tale teoria. È però ben noto [28, 6] che la discretizzazione di un funzionale agli spostamenti di piastra quale il funzionale dell'energia potenziale totale del tristrato (4.17) presenta il problema del locking; tale problema è analizzato nel capitolo successivo, dedicato alla formulazione agli elementi finiti dei modelli dedotti nel presente capitolo. Un metodo per ovviare al problema del "locking" è quello di discretizzare un funzionale di tipo misto [28, 6]; a tale scopo un funzionale di tipo misto è qui ottenuto da (4.17) introducendo la nuova incognita

$$\boldsymbol{\tau} = hG(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) \tag{4.36}$$

rappresentante la risultante nello spessore della piastra degli sforzi di taglio. Di conseguenza il funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}$ si trasforma nel funzionale misto $\mathcal{M}$, avente la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{E}_m^f + \mathcal{E}_m^t + \mathcal{L}_m + \mathcal{E}_m^s + \mathcal{E}_e^s + \mathcal{E}_{em}^s + \mathcal{E}_m^i + \mathcal{E}_e^i + \mathcal{E}_{em}^i + \\ &+ \mathcal{U}_m + \mathcal{U}_e^s + \mathcal{U}_e^i + (\mathcal{U}_m)^l + (\mathcal{U}_m^s)^l + (\mathcal{U}_e^s)^l + (\mathcal{U}_m^i)^l + (\mathcal{U}_e^i)^l \end{aligned} \tag{4.37}$$

dove

$$\mathcal{E}_m^f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_\Omega [(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\, da \tag{4.38}$$

è l'energia dovuta alla deformazione flessionale nella piastra,

$$\mathcal{E}_m^t = -\frac{1}{2hG} \int_\Omega ||\boldsymbol{\tau}||^2\, da \tag{4.39}$$

è l'energia complementare dovuta al taglio e

$$\mathcal{L}_m = \int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \nabla w)\, da \tag{4.40}$$

è il termine lagrangiano associato. Imponendo la condizione di stazionarietà di (4.37) rispetto a $\boldsymbol{\tau}$ si riottiene il funzionale dell'energia potenziale totale (4.17).

4.2 Un modello più raffinato di laminato tristrato piezoelettrico

Qualora la rigidezza nel piano degli attuatori piezoelettrici non sia più trascurabile rispetto alla rigidezza nel piano della piastra (ipotesi *i* nel paragrafo (4.1.2)), gli attuatori piezoelettrici sono in grado di estendere la piastra e dunque è necessario considerare, come nuove variabili incognite, gli spostamenti nel piano della piastra.

Se poi gli spessori degli attuatori piezoelettrici non sono più trascurabili rispetto allo spessore della piastra (ipotesi *ii* nel paragrafo 4.1.2), è necessario considerare la rigidezza flessionale degli attuatori ai fini del calcolo dell'energia potenziale totale del tristrato.

Nel modello che segue si prende in considerazione sia il comportamento flessionale che il comportamento membranale di ogni strato costituente il laminato, rispettivamente secondo il modello di membrana descritto nel paragrafo 3.4.1 e il modello di piastra alla Reissner-Mindlin descritto nel paragrafo 3.5.3.

4.2.1 Campi di spostamento e potenziale elettrico nel laminato

Nelle ipotesi più generali considerate per dedurre questo modello raffinato di tristrato piezoelettrico, il campo di spostamento in ogni strato ed il potenziale elettrico negli attuatori sono ora rappresentati in maniera più ricca, come descritto appresso.

Campo di spostamenti nella piastra

Il campo di spostamenti $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ nella piastra è rappresentato come segue:

$$\begin{aligned} s_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) + \varphi_1(x_1, x_2)\, x_3 \\ s_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2)\, x_3 \\ s_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.41}$$

dove il significato dei termini nelle (4.41) è quello fornito nei paragrafi 3.4.1 e 3.5.3.

Campo di spostamenti e potenziale elettrico negli attuatori

Il campo degli spostamenti $\mathbf{s}^s = (s_1^s, s_2^s, s_3^s)$ nel piezoelettrico superiore è rappresentato come segue:

$$\begin{aligned} s_1^s(x_1, x_2, x_3) &= u_1^s(x_1, x_2) + \varphi_1^s(x_1, x_2)\, x_3 \\ s_2^s(x_1, x_2, x_3) &= u_2^s(x_1, x_2) + \varphi_2^s(x_1, x_2)\, x_3 \\ s_3^s(x_1, x_2, x_3) &= w^s(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Il campo degli spostamenti nel piezoelettrico inferiore ha una rappresentazione analoga. Il potenziale elettrico ϕ^s nel piezoelettrico superiore ha la seguente rappresentazione:

$$\phi^s(x_1, x_2, x_3) = \eta^s(x_1, x_2) + \chi^s(x_1, x_2)\, x_3 \tag{4.43}$$

Nel piezoelettrico inferiore si ha una rappresentazione analoga.

Le funzioni $\mathbf{u}$, w, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}^s$, $\boldsymbol{\varphi}^i$, η^s, η^i, χ^s e χ^i sono le incognite del problema mentre le funzioni $\mathbf{u}^s$, $\mathbf{u}^i$, w^s e w^i sono dipendenti da $\mathbf{u}$, w, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}^s$ e $\boldsymbol{\varphi}^i$. Imponendo infatti la continuità degli spostamenti attraverso le interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ si ottengono le relazioni:

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} + \boldsymbol{\varphi}^s\frac{h^s}{2} \qquad \mathbf{u}^i = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} - \boldsymbol{\varphi}^i\frac{h^i}{2} \qquad w^s = w^i = w \tag{4.44}$$

4.2.2 Condizioni esterne di carico e di vincolo

Nel dedurre la presente teoria di laminato tristrato sono assegnate le stesse condizioni di carico distribuito riportate nel paragrafo 4.1.4 e riferite al primo modello di tristrato prima dedotto.

Dato il numero elevato di incognite che descrivono il presente modello, le condizioni al contorno sono assegnate in maniera meno generale di quanto fatto per il primo modello, in modo da non appesantire la trattazione. Si considerano allora le seguenti partizioni di $\partial\Omega$: $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_w$, $\partial\Omega_\varphi$, $\partial\Omega_{\varphi^s}$, $\partial\Omega_{\varphi^i}$, $\partial\Omega_{\phi^s}$ e $\partial\Omega_{\phi^i}$. Su $\partial\Omega_u$ è nullo lo spostamento $\mathbf{u}$ della piastra nel piano Ω, su $\partial\Omega_w$ è nullo lo spostamento trasversale w della piastra, su $\partial\Omega_\varphi$, $\partial\Omega_\varphi^s$ e $\partial\Omega_\varphi^i$ sono nulle, rispettivamente, le rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$ nella piastra, le rotazioni $\boldsymbol{\varphi}^s$ nel piezoelettrico superiore e le rotazioni $\boldsymbol{\varphi}^i$ nel piezoelettrico inferiore; infine su $\partial\Omega_{\phi^s}$ e $\partial\Omega_{\phi^i}$ sono nulli, rispettivamente, il potenziale elettrico nel piezoelettrico superiore (cioè sono nulli η^s e χ^s) ed il potenziale elettrico nel piezoelettrico inferiore (cioè sono nulli η^i e χ^i). Sugli insiemi complementari delle partizioni prima viste non sono applicate azioni esterne.

4.2.3 Funzionale dell'energia potenziale totale

Si costruisce ora il funzionale dell'energia potenziale totale del laminato, dalla cui stazionarietà sono ottenute le equazioni di equilibrio.

Contributo della piastra

Il contributo della piastra al funzionale dell'energia potenziale totale è somma dei seguenti termini:

$$\mathcal{E}_m + \mathcal{U}_m \tag{4.45}$$

aventi il seguente significato:

- $\mathcal{E}_m$ è l'energia di deformazione nella piastra:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}\mathcal{B}\int_\Omega [(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2]\,da + \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{D}\int_\Omega [(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\,da + \\ &+ \frac{h}{2}G\int_\Omega ||\boldsymbol{\varphi} + \nabla w||^2\,da \end{aligned} \tag{4.46}$$

  essendo $\mathcal{B} = Eh/(1-\nu^2)$ la rigidezza membranale della piastra. Nella (4.46) il primo integrale è l'energia estensionale, il secondo integrale è l'energia flessionale mentre il terzo integrale rappresenta l'energia di scorrimento.

- $\mathcal{U}_m$ è l'energia potenziale dei carichi esterni sulla piastra:

$$\mathcal{U}_m = -\int_\Omega (q\,w + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\varphi})\,da \tag{4.47}$$

Contributo degli attuatori piezoelettrici

Il contributo del piezoelettrico superiore al funzionale dell'energia potenziale è la somma dei seguenti termini:

$$\mathcal{E}_m^s + \mathcal{E}_e^s + \mathcal{E}_{em}^s + \mathcal{U}_e^s \tag{4.48}$$

aventi il seguente significato:

- $\mathcal{E}_m^s$ è l'energia elastica di deformazione nell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m^s &= \frac{\overline{c}_{11}^s h^s}{2}\int_\Omega [(1-\overline{\nu}^s)||\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s||^2 + \overline{\nu}^s(\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s)^2]\,da + \\ &+ \frac{\hat{c}_{11}^s (h^s)^3}{24}\int_\Omega [(1-\hat{\nu}^s)||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}^s||^2 + \hat{\nu}^s(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^s)^2]\,da + \\ &+ \frac{h^s}{2}c_{44}^s\int_\Omega ||\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s||^2\,da \end{aligned} \tag{4.49}$$

i cui termini hanno la stessa interpretazione dei corrispondenti termini nella (4.46).

- $\mathcal{E}_e^s$ è l'energia elettrostatica nell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{E}_e^s = -\frac{h^s}{2}\overline{\varepsilon}_{33}^s \int_\Omega (\chi^s)^2\, da - \frac{(h^s)^3}{24}\overline{\varepsilon}_{11}^s \int_\Omega ||\nabla\chi^s||^2\, da - \frac{h^s}{2}\varepsilon_{11}^s \int_\Omega ||\nabla\eta^s||^2\, da \tag{4.50}$$

- $\mathcal{E}_{em}^s$ è l'energia dovuta all'accoppiamento elettromeccanico nell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{E}_{em}^s = h^s\overline{e}_{31}^s \int_\Omega \chi^s \mathrm{div}\,\mathbf{u}^s\, da + h^s e_{15}^s \int_\Omega (\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s)\cdot\nabla\eta^s\, da \tag{4.51}$$

- $\mathcal{U}_e^s$ è l'energia potenziale associata alla distribuzione di cariche superficiali $+\omega^s$ e $-\omega^s$, rispettivamente sulla superficie superiore ed inferiore dell'attuatore piezoelettrico superiore:

$$\mathcal{U}_e^s = h^s \int_\Omega \omega^s\chi^s\, da \tag{4.52}$$

Il contributo al funzionale dell'energia potenziale totale del piezoelettrico inferiore è la somma dei seguenti termini:

$$\mathcal{E}_m^i + \mathcal{E}_e^i + \mathcal{E}_{em}^i + \mathcal{U}_e^i \tag{4.53}$$

il cui significato e la cui espressione sono analoghi a quelli relativi all'attuatore piezoelettrico superiore. Il funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}$ relativo al laminato tristrato piezoelettrico si scrive allora come:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_m^s + \mathcal{E}_e^s + \mathcal{E}_{em}^s + \mathcal{E}_m^i + \mathcal{E}_e^i + \mathcal{E}_{em}^i + \mathcal{U}_m + \mathcal{U}_e^s + \mathcal{U}_e^i \tag{4.54}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{u} = 0 & \text{su} & \partial\Omega_u, & w = 0 & \text{su} & \partial\Omega_w, \quad \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega_\varphi, \\ \boldsymbol{\varphi}^s = 0 & \text{su} & \partial\Omega_{\varphi^s}, & \boldsymbol{\varphi}^i = 0 & \text{su} & \partial\Omega_{\varphi^i}, \\ \eta^s = \chi^s = 0 & \text{su} & \partial\Omega_{\phi^s}, & \eta^i = \chi^i = 0 & \text{su} & \partial\Omega_{\phi^i} \end{array} \tag{4.55}$$

I termini lagrangiani dovuti ai vincoli (4.44) in Ω hanno la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^s &= \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^s \cdot \left(\mathbf{u}^s - \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} - \boldsymbol{\varphi}^s\frac{h^s}{2}\right) da + \int_\Omega \lambda^s(w^s - w)\, da \\ \mathcal{L}^i &= \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^i \cdot \left(\mathbf{u}^i - \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} + \boldsymbol{\varphi}^i\frac{h^i}{2}\right) da + \int_\Omega \lambda^i(w^i - w)\, da \end{aligned} \tag{4.56}$$

Analoga espressione presentano i vincoli lagrangiani sul bordo:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^s)^l &= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\lambda}^s)^l \cdot \left(\mathbf{u}^s - \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} - \boldsymbol{\varphi}^s\frac{h^s}{2} \right) da + \int_{\partial\Omega} (\lambda^s)^l (w^s - w)\, da \\
(\mathcal{L}^i)^l &= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\lambda}^i)^l \cdot \left(\mathbf{u}^i - \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}\frac{h}{2} + \boldsymbol{\varphi}^i\frac{h^i}{2} \right) da + \int_{\partial\Omega} (\lambda^i)^l (w^i - w)\, da
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Il funzionale vincolato dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}_v$ si scrive dunque come:

$$
\mathcal{E}_v = \mathcal{E} + \mathcal{L}^s + \mathcal{L}^i + (\mathcal{L}^s)^l + (\mathcal{L}^i)^l \tag{4.58}
$$

definito sulla varietà (4.55).

4.2.4 Equazioni di equilibrio

Omettendo la scrittura esplicita delle espressioni rappresentanti le variazioni del funzionale $\mathcal{E}_v$, si riportano ora le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno compatibili relative al modello in esame.

Equilibrio della piastra centrale

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}$ si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$
-\mathcal{B}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}] = \boldsymbol{\lambda}^s + \boldsymbol{\lambda}^i \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4.59}
$$

Alla (4.59) è associata la condizione al contorno:

$$
\mathcal{B}\mathrm{div}\,[(1-\nu^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s][\mathbf{n}] = (\boldsymbol{\lambda}^s)^l + (\boldsymbol{\lambda}^i)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_u^{\mathcal{C}} \tag{4.60}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a w si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$
-hG\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) = q + \lambda^s + \lambda^i \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4.61}
$$

insieme con la condizione al contorno:

$$
hG(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w)\cdot\mathbf{n} = (\lambda^s)^l + (\lambda^i)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_w^{\mathcal{C}} \tag{4.62}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\boldsymbol{\varphi}$ si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$
-\mathcal{D}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}] + hG\,(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) = \mathbf{m} + \frac{h(\boldsymbol{\lambda}^s - \boldsymbol{\lambda}^i)}{2} \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4.63}
$$

insieme con la condizione al contorno:

$$
\mathcal{D}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}]\,[\mathbf{n}] = \frac{h[(\boldsymbol{\lambda}^s)^l - (\boldsymbol{\lambda}^i)^l]}{2} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\varphi^{\mathcal{C}} \tag{4.64}
$$

Equilibrio degli attuatori piezoelettrici

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}^s$ si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$-\overline{c}^s_{11} h^s \mathrm{div}\,[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s + \overline{\nu}^s \mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s] - h^s \overline{e}^s_{31}\nabla\chi^s = -\boldsymbol{\lambda}^s \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4.65}$$

con la condizione al contorno:

$$\overline{c}^s_{11} h^s \mathrm{div}\,[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s + \overline{\nu}^s \mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s][\mathbf{n}] + h^s \overline{e}_{31}\chi^s \mathbf{n} = -(\boldsymbol{\lambda}^s)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega \tag{4.66}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a w si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$-h^s \mathrm{div}\,[c^s_{44}(\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s) + e^s_{15}\nabla\eta^s] = -\lambda^s \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4.67}$$

insieme con la condizione al contorno:

$$h^s[c^s_{44}(\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s) + e^s_{15}\nabla\eta^s]\cdot\mathbf{n} = -(\lambda^s)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega \tag{4.68}$$

La stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}^i$ e w^i porta ad espressioni analoghe a quelle relative alla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\mathbf{u}^s$ e w^s.

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\boldsymbol{\varphi}^s$ si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$\begin{aligned} &-\frac{(h^s)^3\hat{c}^s_{11}}{12}\mathrm{div}\,[(1-\hat{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}^s + \hat{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^s] + \\ &+h^s[c^s_{44}(\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s) + e^s_{15}\nabla\eta^s] = \frac{h^s}{2}\boldsymbol{\lambda}^s \qquad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{4.69}$$

con la condizione al contorno:

$$\frac{(h^s)^3\hat{c}^s_{11}}{12}[(1-\hat{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}^s + \hat{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^s][\mathbf{n}] = \frac{h^s}{2}(\boldsymbol{\lambda}^s)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi^s} \tag{4.70}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a $\boldsymbol{\varphi}^i$ si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$\begin{aligned} &-\frac{(h^i)^3\hat{c}^i_{11}}{12}\mathrm{div}\,[(1-\hat{\nu}^i)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}^i + \hat{\nu}^i\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^i] + \\ &+h^i[c^i_{44}(\boldsymbol{\varphi}^i + \nabla w^i) + e^i_{15}\nabla\eta^i] = -\frac{h^i}{2}\boldsymbol{\lambda}^i \qquad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{4.71}$$

con la condizione al contorno:

$$\frac{(h^i)^3\hat{c}^i_{11}}{12}[(1-\hat{\nu}^i)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}^i + \hat{\nu}^i\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^i][\mathbf{n}] = -\frac{h^i}{2}(\boldsymbol{\lambda}^i)^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega^{\mathcal{C}}_{\varphi^i} \tag{4.72}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_v$ rispetto a η^s e χ^s si ottengono le equazioni di equilibrio elettrostatico nel piezoelettrico superiore:

$$
\begin{aligned}
&-h^s \mathrm{div}\,[-\varepsilon_{11}^s \nabla \eta^s + e_{15}^s(\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s)] = 0 && \text{in} \quad \Omega \\
&\frac{(h^s)^3 \overline{\varepsilon}_{11}^s}{12} \Delta \chi^s + h^s(-\overline{\varepsilon}_{33}^s \chi^s + \overline{e}_{31}^s \mathrm{div}\,\mathbf{u}^s) = -h^s \omega^s && \text{in} \quad \Omega
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

con le condizioni al contorno:

$$
h^s[-\varepsilon_{11}^s \nabla \eta^s + e_{15}^s(\boldsymbol{\varphi}^s + \nabla w^s)] \cdot \mathbf{n} = -\frac{(h^s)^3 \overline{\varepsilon}_{11}^s}{12} \nabla \chi^s \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_{\phi^s}^{\mathcal{C}} \tag{4.74}
$$

L'equazioni di equilibrio elettrostatico e le relative condizioni al contorno per l'attuatore piezoelettrico inferiore si scrivono in maniera analoga.

4.3 Soluzioni analitiche per i modelli di laminato tristrato piezoelettrico

In questo paragrafo viene dedotta la soluzione analitica di alcuni problemi particolari di laminato tristrato piezoelettrico. Tali soluzioni sono utilizzate per la validazione di alcune formulazioni agli elementi finiti, presentate nel prossimo capitolo, basate sulle teorie di tristrato piezoelettrico esposte nel presente capitolo.

Tutti i problemi considerati riguardano un laminato tristrato piezoelettrico simile a quello illustrato in figura 4.1, il cui piano medio Ω è un quadrato di lato L. Il laminato è semplicemente appoggiato e collegato a terra lungo il contorno laterale, cioè $w = \eta^s = \chi^s = \eta^i = \chi^i = 0$ su $\partial\Omega$. I carichi sul contorno sono tutti nulli. I differenti problemi si differenziano tra loro a seconda della condizione di carico assegnata sulle facce $\mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}^-$, sulle interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ e sul piano medio Ω della piastra.

4.3.1 Problemi campione di tristrato piezoelettrico

Per il modello di tristrato descritto nel paragrafo 4.1 si considerano i problemi relativi alle seguenti due condizioni di carico:

- Condizione di carico a_1

$$
\begin{aligned}
&q = q_0 \,\mathrm{sen}\, \frac{\pi x_1}{L} \mathrm{sen}\, \frac{\pi x_2}{L} \\
&\mathbf{m} = 0 \\
&\omega^s = \omega^i = 0
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

- Condizione di carico b_1

$$
\begin{aligned}
q &= 0 \\
\mathbf{m} &= 0 \\
\omega^s &= \omega_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{L} \\
\omega^i &= -\omega_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

Per il modello di tristrato descritto nel paragrafo 4.2 si considerano i problemi relativi alle seguenti due condizioni di carico:

- Condizione di carico a_2

$$
\begin{aligned}
q &= q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{L} \\
\mathbf{m} &= 0 \\
\omega^s &= \omega^i = 0
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

- Condizione di carico b_2

$$
\begin{aligned}
q &= 0 \\
\mathbf{m} &= 0 \\
\omega^s &= \omega_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{L} \\
\omega^i &= \omega_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

La tipologia di carico a_1 (identica ad a_2) è di natura meccanica e tende a flettere il laminato. La condizione di carico b_1 è di natura elettrica; essa comporta deformazioni nel piano di segno opposto per il piezoelettrico superiore ed inferiore e dunque, nel caso di attuatori superiore ed inferiore identici, porta ad una flessione pura della piastra centrale. La condizione di carico b_2 è di natura elettrica; essa comporta deformazioni nel piano di uguale segno per il piezoelettrico superiore ed inferiore e dunque, nel caso di attuatori superiore ed inferiore identici, porta ad una estensione pura della piastra.

4.3.2 Calcolo della soluzione analitica

Ai fini di calcolare la soluzione analitica dei problemi riportati nel paragrafo precedente, si assumono le seguenti rappresentazioni dei campi incogniti:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u_0 \left(\cos\frac{\pi x_1}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \cos\frac{\pi x_2}{2} \right) \\
w &= w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L} \\
\boldsymbol{\varphi} &= \varphi_0 \left(\cos\frac{\pi x_1}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \cos\frac{\pi x_2}{2} \right) \\
\boldsymbol{\varphi}^s &= \varphi_0^s \left(\cos\frac{\pi x_1}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \cos\frac{\pi x_2}{2} \right) \\
\boldsymbol{\varphi}^i &= \varphi_0^i \left(\cos\frac{\pi x_1}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \cos\frac{\pi x_2}{2} \right) \\
\eta^s &= \eta_0^s \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L} \\
\chi^s &= \chi_0^s \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L} \\
\eta^i &= \eta_0^i \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L} \\
\chi^i &= \chi_0^i \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L} \operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

Sostituendo le rappresentazioni (4.79) e le condizioni di carico esterno relative a ciascuno dei problemi campione nelle equazioni di equilibrio inerenti ai due modelli di laminato tristrato piezoelettrico dedotti in questo capitolo, si ottengono sistemi lineari algebrici la cui soluzione fornisce i valori delle incognite u_0, w_0, φ_0, φ_0^s, φ_0^i, η_0^s, χ_0^s, η_0^i e χ_0^i e quindi i campi incogniti (4.79). Le condizioni al contorno associate alle equazioni di equilibrio di entrambi i modelli sono automaticamente soddisfatte dalle rappresentazioni (4.79).

4.4 Analisi dinamica del laminato tristrato piezoelettrico

Un'analisi dinamica del laminato tristrato piezoelettrico può essere condotta utilizzando il principio variazionale per sistemi dinamici di Hamilton, applicato nel paragrafo (2.5.2) al problema tridimensionale dell'equilibrio di un corpo piezoelettrico. In particolare le equazioni di equilibrio dinamico sono ottenute dalla stazionarietà del funzionale (2.38), nel quale $\mathcal{E}$ è l'energia potenziale totale dedotta nel presente capitolo per i due modelli di tristrato proposti. $\mathcal{T}$ è l'energia cinetica che, per ciascuno dei due modelli di tristrato qui proposti, ha le seguenti espressioni:

- Modello presentato nel paragrafo 4.1

$$
\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_\Omega [\rho(h\dot{w}^2 + (h^3/12)||\dot{\boldsymbol{\varphi}}||^2) + \rho^s h^s ||\dot{\mathbf{u}}^s||^2 + \rho^i h^i ||\dot{\mathbf{u}}^i||^2] \, da \tag{4.80}
$$

- Modello presentato nel paragrafo 4.2

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2}\rho\int_\Omega [h(||\dot{\mathbf{u}}||^2+\dot{w}^2)+(h^3/12)||\dot{\boldsymbol{\varphi}}||^2]\,da + \\
&+ \frac{1}{2}\rho^s\int_\Omega [h^s(||\dot{\mathbf{u}}^s||^2+(\dot{w}^s)^2)+((h^s)^3/12)||\dot{\boldsymbol{\varphi}}^s||^2]\,da + \\
&+ \frac{1}{2}\rho^i\int_\Omega [h^i(||\dot{\mathbf{u}}^i||^2+(\dot{w}^i)^2)+((h^i)^3/12)||\dot{\boldsymbol{\varphi}}^i||^2]\,da
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

Si ottengono allora le seguenti equazioni di equilibrio meccanico dinamico:

- Modello presentato nel paragrafo 4.1

$$
\begin{aligned}
&-hG\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w) = q-\rho h\ddot{w} \\
&-\mathcal{D}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}]+hG\,(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w) = \\
&= \mathbf{m}+\frac{h(\boldsymbol{\lambda}^s-\boldsymbol{\lambda}^i)}{2}-\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \\
&-h^s\overline{c}^s_{11}\mathrm{div}\,[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s]-h^s\overline{e}^s_{31}\nabla\chi^s = -\boldsymbol{\lambda}^s-\rho^s h^s\ddot{\mathbf{u}}^s
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

  e un'equazione analoga alla $(4.82)_3$ per il piezoelettrico inferiore.

- Modello presentato nel paragrafo 4.2

$$
\begin{aligned}
&-\mathcal{B}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}] = \boldsymbol{\lambda}^s+\boldsymbol{\lambda}^i-\rho h\ddot{\mathbf{u}} \\
&-hG\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w) = q+\lambda^s+\lambda^i-\rho h\ddot{w} \\
&-\mathcal{D}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}]+hG\,(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w) = \\
&= \mathbf{m}+\frac{h(\boldsymbol{\lambda}^s-\boldsymbol{\lambda}^i)}{2}-\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \\
&-h^s\overline{c}^s_{11}\mathrm{div}\,[(1-\overline{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}^s+\overline{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s]-h^s\overline{e}^s_{31}\nabla\chi^s = -\boldsymbol{\lambda}^s-\rho^s h^s\ddot{\mathbf{u}}^s \\
&-h^s\mathrm{div}\,[c^s_{44}(\boldsymbol{\varphi}^s+\nabla w^s)+e^s_{15}\nabla\eta^s] = -\lambda^s-\rho^s h^s\ddot{w}^s \\
&-\frac{(h^s)^3\hat{c}^s_{11}}{12}\mathrm{div}\,[(1-\hat{\nu}^s)\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}^s+\hat{\nu}^s\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^s]+ \\
&+h^s[c^s_{44}(\boldsymbol{\varphi}^s+\nabla w^s)+e^s_{15}\nabla\eta^s] = \frac{h^s}{2}\boldsymbol{\lambda}^s-\rho^s\frac{h^3}{12}\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^s
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

  e tre equazioni analoghe alle $(4.83)_4$, $(4.83)_5$, $(4.83)_6$ per il piezoelettrico inferiore.

Le equazioni di equilibrio elettrostatico, per entrambi i modelli, coincidono con quelle ricavate nel caso statico.