

# 3

## Analisi del Problema Discretizzato in Formulazione Duale

Verrà presentata nel seguito una dimostrazione della convergenza ad un'unica soluzione dell'algoritmo proposto, che, come vedremo, si traduce in una contrazione. Allo stesso tempo sarà ricavata una stima d'errore.

### 3.1 Formulazione del problema discretizzato

Partendo dalla formulazione duale condensata descritta nel capitolo precedente, ci poniamo il problema di ricercare l'esistenza della soluzione per il problema discretizzato tridimensionale del contatto unilatero tra due corpi con attrito alla COULOMB. Come già detto in precedenza, il caso del problema di SIGNORINI di contatto di un corpo elastico contro un ostacolo rigido rappresenta una particolare particolare del problema generale.

Consideriamo il problema variazionale (2.42) nella sua forma discreta. Si assegni una partizione delle superfici che possono entrare in contatto  $\Gamma_c^{(1)}$  e  $\Gamma_c^{(2)}$  in  $n$  facce, avendo cura di scegliere la stessa discretizzazione per entrambe. In questo modo è possibile individuare per ciascuna faccia appartenente a  $\Gamma_c^{(1)}$  la corrispondente su  $\Gamma_c^{(2)}$ , con la quale si ipotizza che entri in contatto. Le funzioni incognite sono rappresentate dalle tensioni di contatto normale e tangenziale che si scambiano ciascuna coppia di facce a contatto. Il vettore  $N$  raccoglie le  $n$  incognite scalari rappresentate dalla tensione normale, il vettore  $T$  le  $2n$  componenti di tensione tangenziale.

Il problema si riscrive nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\text{Trovare } (N, T) \in \mathbb{R}_-^n \times K_{-\mu N} \text{ tali che, per ogni } (X, Y) \in \mathbb{R}_-^n \times K_{-\mu N} \\ &(X - N)^t(A_{NN}N + A_{NT}T + D_N) + (Y - T)^t(A_{TN}N + A_{TT}T + D_T) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

con  $K_Z$  rappresentato da:

$$K_Z = \{(Y_1, Y_2) \in \mathcal{A} \mid (Y_1^2 + Y_2^2)^{1/2} \leq Z\}. \quad (3.2)$$

per ogni  $Z \in \mathbb{R}_+^n$ . In questa relazione l'apice  $t$  indica l'operazione di trasposizione;  $\mathbb{R}^n$  è lo spazio dei vettori a  $n$  componenti reali;  $\mathbb{R}_+^n$  (rispettivamente  $\mathbb{R}_-^n$ ) è il cono di  $\mathbb{R}^n$  formato dai vettori a componenti non negative (rispettivamente non positive);  $\mathcal{A}$  rappresenta il prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ; i quadrati, le radici quadrate e le disequazioni nelle quali compaiano vettori vanno intesi componente per componente: ad esempio  $(Y_1^2 + Y_2^2)^{1/2} \leq Z$  vuol dire che la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti  $j$ -me di  $Y_1$  e di  $Y_2$  non supera il valore della  $j$ -ma componente di  $Z$ , per ogni  $j \in \{1 \dots n\}$ .

La norma Euclidea per i vettori è indicata con  $\|\bullet\|$  e lo stesso simbolo indica la norma indotta per le matrici. I vettori  $N \in \mathbb{R}^n$  e  $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{A}$ , come già scritto, raccolgono le reazioni normali e tangenziali sulla superficie di contatto. Gli operatori lineari

$$\begin{aligned} A_{NN} &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ A_{TN} = A_{NT}^t &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{A} \\ A_{TT} &: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \end{aligned}$$

sono le componenti a blocchi della matrice delle cedevolezze del corpo, condensata sulla superficie di contatto, e devono soddisfare la fondamentale relazione

$$\begin{aligned} N^t A_{NN} N + N^t A_{NT} T + T^t A_{TN} N + T^t A_{TT} T &> 0, \\ N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, T \in \mathcal{A} \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

I vettori  $\hat{D}_N \in \mathbb{R}^n$  e  $\hat{D}_T \in \mathcal{A}$  rappresentano le componenti normale e tangenziale dello spostamento relativo indotto dai carichi e dai cedimenti applicati in corrispondenza della superficie di contatto; inoltre  $D_T = \hat{D}_T$  mentre  $D_N$  deve tenere conto anche del distacco iniziale tra i corpi, cioè

$$D_N = \hat{D}_N - g_o, \text{ con } g_o \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Il coefficiente di attrito è indicato con  $\mu > 0$ .

Come anticipato nel capitolo precedente, al fine di risolvere la disequazione quasi-variazionale (3.1) è stato proposto il seguente algoritmo di rilassamento a blocchi.

Sia assegnato  $N_o \leq 0$ , alla  $k$ -ma generica iterazione si risolvono i due seguenti problemi

- $T_k$  è la soluzione del problema di attrito con assegnate azioni normali di contatto

$$T_k = \arg \min_T \left\{ \frac{1}{2} T^t A_{TT} T + T^t (D_T + A_{TN} N_{k-1}), T \in K_{-\mu N_{k-1}} \right\}; \quad (3.5)$$

- $N_k$  è la soluzione del problema di contatto unilatero con assegnate forze tangenziali

$$N_k = \arg \min_N \left\{ \frac{1}{2} N^t A_{NN} N + N^t (D_N + A_{NT} T_k), N \in \mathbb{R}_-^n \right\}. \quad (3.6)$$

che rappresentano minimizzazioni su convessi descritti dalla soluzione al passo di iterazione precedente. Inoltre, i problemi di minimo (3.5) e (3.6) hanno soluzione unica, dal momento che in essi compaiono funzionali strettamente convessi e che gli insiemi sui quali si minimizza sono convessi chiusi e non vuoti.

**NOTA 3.1.** *In un problema piano le reazioni tangenziali  $T$  appartengono ad  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  e quindi il convesso  $K_Z$  si riduce a*

$$\overline{K}_Z = \{(Y_1, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}: |Y_1| \leq Z\}, \quad (3.7)$$

*intendendo con  $|\bullet|$  il valore assoluto di ciascuna componente. La discussione dell'algoritmo di rilassamento a blocchi per problemi in due dimensioni è stato già proposto in [5] e risultati numerici sono stati presentati in [4].*

## 3.2 Analisi dell'algoritmo

### 3.2.1 Formulazione diagonalizzata

Per semplificare le notazioni nel corso della dimostrazione dell'esistenza è preferibile esprimere il problema in forma diagonalizzata attraverso un cambiamento di variabili.

Si ponga pertanto:

$$\sigma = (A_{NN})^{1/2}N, \quad \tau = (A_{TT})^{1/2}T, \quad (3.8)$$

e il problema del contatto con attrito, al discreto, descritto dalla (3.1) può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \text{Trovare } (\sigma, \tau) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}_{-\mu Q_\sigma \sigma} \text{ tale che, per ogni } (\xi, \theta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}_{-\mu Q_\sigma \sigma} \\ (\xi - \sigma)^t(\sigma + C^t\tau + d_\sigma) + (\theta - \tau)^t(C\sigma + \tau + d_\tau) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

avendo effettuato le seguenti sostituzioni

$$\begin{aligned} Q_\sigma &= (A_{NN})^{-1/2}, \\ Q_\tau &= (A_{TT})^{-1/2}, \\ d_\sigma &= (A_{NN})^{-1/2}D_N, \\ d_\tau &= (A_{TT})^{-1/2}D_T, \\ C &= (A_{TT})^{-1/2}A_{TN}(A_{NN})^{-1/2}, \\ \mathcal{H} &= \{x \in \mathbb{R}^n: Q_\sigma x \leq 0\}, \\ \mathcal{K}_z &= \{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}: ((Q_\tau^{11}x_1 + Q_\tau^{12}x_2)^2 + \\ &\quad + (Q_\tau^{21}x_1 + Q_\tau^{22}x_2)^2)^{1/2} \leq z\}, \quad z \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Entrambi gli operatori  $Q_\sigma$  e  $Q_\tau$  sono simmetrici e definiti positivi. In particolare il secondo è suddiviso in quattro blocchi

$$\begin{pmatrix} Q_\tau^{11} & Q_\tau^{12} \\ Q_\tau^{21} & Q_\tau^{22} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

che sono ricavati dalla decomposizione  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ . Analogamente  $C$  è partizionato nei due blocchi

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

e la (3.3) si traduce in:

$$\sigma^t\sigma + \sigma^t C^t\tau + \tau^t C\sigma + \tau^t\tau > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \tau \in \mathcal{A} \setminus \{(0, 0)\}. \quad (3.13)$$

Assegnato  $\sigma_o \in \mathcal{H}$  riscriviamo la  $k$ -ma iterazione dell'algoritmo proposto come

$$\tau_k = \arg \min_{\tau} \left\{ \frac{1}{2} \tau^t \tau + \tau^t (d_\tau + C\sigma_{k-1}), \quad \tau \in \mathcal{K}_{-\mu Q_\sigma \sigma_{k-1}} \right\}; \quad (3.14)$$

$$\sigma_k = \arg \min_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^t \sigma + \sigma^t (d_\sigma + C^t \tau_k), \quad \sigma \in \mathcal{H} \right\}. \quad (3.15)$$

Le equazioni (3.14) e (3.15) suggeriscono di introdurre la funzione  $f$ ,

$$\begin{aligned} f: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ f: \sigma \in \mathcal{H} &\rightarrow q(-d_\sigma - C^t p(-d_\tau - C\sigma, -\mu Q_\sigma \sigma)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

con

$$q: b \in \mathbb{R}^n \rightarrow \arg \min_v \left\{ \frac{1}{2} v^t v - v^t b, v \in \mathcal{H} \right\} \quad (3.17)$$

e

$$p: (b, c) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \arg \min_v \left\{ \frac{1}{2} v^t v - v^t b, v \in \mathcal{K}_c \right\}. \quad (3.18)$$

Le funzioni  $p$  e  $q$  sono ben definite, dal momento che rappresentano proiettori su insiemi convessi non vuoti.

Se esiste un punto fisso  $\bar{\sigma} \in \mathcal{H}$  della trasformazione  $f$ , la coppia ordinata  $(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}_{-\mu Q_\sigma \bar{\sigma}}$  con  $\bar{\tau} = p(-d_\tau - C\bar{\sigma}, -\mu Q_\sigma \bar{\sigma})$ , è soluzione della disequazione quasi variazionale (3.9); al contrario la prima componente  $\bar{\sigma} \in \mathcal{H}$  di una soluzione  $(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}_{-\mu Q_\sigma \bar{\sigma}}$  della (3.9) è un punto fisso della  $f$ .

### 3.3 Risultati preliminari

Sono qui dimostrati due lemmi elementari che semplificano la dimostrazione della convergenza riportata nel seguito.

**Lemma 3.1.** *Sia  $C$  un operatore lineare di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathcal{A}$  che soddisfi l'equazione (3.13). Allora  $\|C\| < 1$ .*

*Dimostrazione.* Scegliendo  $\tau = -C\sigma$  nell'equazione (3.13), segue che

$$\sigma^t \sigma - \sigma^t C^t C \sigma > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \quad (3.19)$$

o, equivalentemente,

$$\|C\sigma\| < 1, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n: \|\sigma\| = 1. \quad (3.20)$$

Poiché la sfera di raggio unitario di  $\mathbb{R}^n$  è compatta, si ha

$$\|C\| = \sup_{\|\sigma\|=1} \|C\sigma\| = \max_{\|\sigma\|=1} \|C\sigma\| < 1. \quad (3.21)$$

□

**Lemma 3.2.** *Sia*

$$Q_\tau = \begin{pmatrix} Q_\tau^{11} & Q_\tau^{12} \\ Q_\tau^{21} & Q_\tau^{22} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

*un operatore lineare invertibile di  $\mathcal{A}$  in se stesso. La funzione  $p$  definita dall'equazione (3.18) ha la proprietà*

$$\|p(b_1, c_1) - p(b_2, c_2)\| \leq \|b_1 - b_2\| + \|Q_\tau^{-1}\| \|c_1 - c_2\|, \quad (b_1, c_1), (b_2, c_2) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^n. \quad (3.23)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei numeri naturali. Per ogni  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 3$ , consideriamo la seguente applicazione che proietta  $b$  su  $\mathcal{K}_c^s$ :

$$p_s: (b, c) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \arg \min_v \left\{ \frac{1}{2} v^t v - v^t b, v \in \mathcal{K}_c^s \right\}, \quad (3.24)$$

e, per  $\alpha_i = 2(i-1)\pi/s$

$$\mathcal{K}_c^s = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}: (Q_\tau^{11}x_1 + Q_\tau^{12}x_2) \cos \alpha_i + (Q_\tau^{21}x_1 + Q_\tau^{22}x_2) \sin \alpha_i \leq c, \\ i = 1 \dots s\}. \quad (3.25)$$

Evidentemente,  $p_s$  proietta  $b$  sul poliedro convesso chiuso non vuoto  $\mathcal{K}_c^s$  che approssima  $\mathcal{K}_c$  dall'esterno per  $s$  che tende all'infinito.

Si può facilmente vedere che, per ogni fissata coppia  $(b, c) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^n$  la sequenza  $\{p_s(b, c)\}_{s \in \mathbb{N}}$  converge a  $p(b, c)$ . A questo fine, si osservi che  $\{p_s(b, c)\}_{s \in \mathbb{N}}$  è limitato poiché

$$\mathcal{K}_c \subseteq \mathcal{K}_c^s \subseteq \mathcal{K}_{c/\cos(\pi/s)} \subseteq \mathcal{K}_{2c}. \quad (3.26)$$

Sia  $\{p_{s_m}(b, c)\}_{m \in \mathbb{N}}$  una sottosequenza convergente il cui limite è indicato con  $\hat{p}$ . Per la (3.26) risulta che

$$\hat{p} \in \mathcal{K}_c. \quad (3.27)$$

D'altra parte, poiché

$$\|p_{s_m}(b, c) - b\| \leq \|v - b\|, \quad v \in \mathcal{K}_c^{s_m}, \quad (3.28)$$

si ha che

$$\|\hat{p} - b\| \leq \|v - b\|, \quad v \in \mathcal{K}_c, \quad (3.29)$$

che, assieme alla (3.27), implica che  $\hat{p} = p(b, c)$ . Ecco allora che  $p_s(b, c)$  converge a  $p(b, c)$ .

Di conseguenza, l'enunciato del Lemma 3.2 risulta dalla seguente stima, che è valida per ogni  $(b_1, c_1)$  e  $(b_2, c_2)$  appartenenti a  $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^n$ :

$$\|p_s(b_1, c_1) - p_s(b_2, c_2)\| \leq \|b_1 - b_2\| + (\cos(\pi/s))^{-1} \|Q_\tau^{-1}\| \|c_1 - c_2\|, \quad (3.30)$$

che a sua volta segue dalla disuguaglianza triangolare

$$\|p_s(b_1, c_1) - p_s(b_2, c_2)\| \leq \|p_s(b_1, c_1) - p_s(b_2, c_1)\| + \|p_s(b_2, c_1) - p_s(b_2, c_2)\|. \quad (3.31)$$

Infatti, la stima del primo termine della parte destra della (3.31) attraverso la relazione  $\|b_1 - b_2\|$  rappresenta un classico risultato [10], mentre la stima del secondo termine mediante l'equazione

$$(\cos(\pi/s))^{-1} \|Q_\tau^{-1}\| \|c_1 - c_2\| \quad (3.32)$$

è un risultato del Lemma seguente. □

**Lemma 3.3.** *Sia*

$$Q_\tau = \begin{pmatrix} Q_\tau^{11} & Q_\tau^{12} \\ Q_\tau^{21} & Q_\tau^{22} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

*un'applicazione lineare di  $\mathcal{A}$  in se stesso. La funzione  $p_s$  definita dalla (3.24) ha la proprietà:*

$$\|p_s(b, c_1) - p_s(b, c_2)\| \leq (\cos(\pi/s))^{-1} \|Q_\tau^{-1}\| \|c_1 - c_2\|, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^n, \quad b \in \mathcal{A}. \quad (3.34)$$

*Dimostrazione.* Si fissi  $b \in \mathcal{A}$ . La proiezione  $p_s(b, c)$  di  $b$  su  $\mathcal{K}_c^s$  attiva (ad esempio con il segno di uguale) un determinato sottoinsieme dei vincoli espressi da disequazioni che definiscono  $\mathcal{K}_c^s$ , che dipende da  $c \in \mathbb{R}_+^n$ .

L'idea della dimostrazione è di prendere l'insieme quoziente di  $\mathbb{R}_+^n$  secondo la relazione di equivalenza che afferma che due  $c$  sono equivalenti se attivano lo stesso sottoinsieme di vincoli forniti dalle disequazioni. Assegnato  $c \in \mathbb{R}_+^n$ , dato  $p(b, c) = (x_1, x_2)$ , indichiamo con  $c_j$ ,  $A_j$  e  $B_j$  le  $j$ -me componenti rispettivamente di  $c$ , di  $Q_\tau^{11}x_1 + Q_\tau^{12}x_2$  e di  $Q_\tau^{21}x_1 + Q_\tau^{22}x_2$  e sia

- $J_o$  l'insieme degli indici  $j \in [1 \dots n]$  tale che  $c_j = 0$ ;
- $J_e$  l'insieme degli indici  $j \in [1 \dots n]$  tale che  $A_j \cos \alpha_i + B_j \sin \alpha_i = c_j$  con esattamente un indice  $i$ , diciamo  $i(j)$ ; la funzione  $j \in J_e \mapsto i(j) \in [1 \dots s]$  viene indicata con  $i_e$ ;

- $J_v$  l'insieme degli indici  $j \in [1 \dots n]$  tale che  $A_j \cos \alpha_i + B_j \sin \alpha_i = c_j$  per esattamente due indici  $i$  consecutivi, ad esempio  $i(j)$  and  $i(j) + 1$  (in particolare,  $i(j) + 1$  vale 1 se  $i(j) = s$ ); la funzione

$$j \in J_v \mapsto i(j) \in [1 \dots s] \quad (3.35)$$

è rappresentata da  $i_v$ ;

Si verifica facilmente che i cinque termini  $(J_o; J_e, i_e; J_v, i_v)$  caratterizzano completamente l'insieme dei vincoli attivi, poiché  $A_j \cos \alpha_i + B_j \sin \alpha_i$  può essere uguale a  $c_j$  per nessuno, solo uno, oppure due indici  $i$  consecutivi, a meno che non risulti  $c_j = 0$ . Si definiscono equivalenti due  $c$  se i corrispondenti cinque termini sono gli stessi. Ne consegue che  $\mathbb{R}_+^n$  è suddiviso in  $(2 + 2s)^n$  classi di equivalenza disgiunte, indicando la generica come  $\mathcal{R}_{J_o; J_e, i_e; J_v, i_v}$ .

Si fissi una classe di equivalenza  $\mathcal{R}_{J_o; J_e, i_e; J_v, i_v}$ . Introduciamo alcune definizioni per potere descrivere in modo sintetico i vincoli attivati da un qualsiasi  $c \in \mathcal{R}_{J_o; J_e, i_e; J_v, i_v}$ . Assegnata  $J \subseteq [1 \dots n]$  di cardinalità  $n_J$ , sia  $\Pi_J$  l'operatore che proietta  $\mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}^{n_J}$  ed associa ad ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  il vettore  $\Pi_J v \in \mathbb{R}^{n_J}$  costituito dalle componenti di  $v$  i cui indici appartengono a  $J$ . Sia  $\Pi_\emptyset$  l'operatore di proiezione sullo spazio vettoriale di dimensione nulla. La varietà dei vincoli e dei vincoli attivi per disequazione da essi definita può essere descritta come

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{A}: VPQ_\tau x = D\Pi c\}, \quad (3.36)$$

con

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{pmatrix} \Pi_{J_o} \\ \Pi_{J_e} \\ \Pi_{J_v} \end{pmatrix}, & P &= \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & C_e & 0 & 0 & S_e & 0 \\ 0 & 0 & C_v & 0 & 0 & S_v \\ 0 & 0 & C'_v & 0 & 0 & S'_v \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Qui le matrici  $C_e$  e  $S_e$  sono matrici diagonali i cui termini diversi da zero sono rispettivamente  $\cos \alpha_i$  e  $\sin \alpha_i$ , con  $i$  che descrive l'immagine di  $i_e$ ; analogamente  $C_v$  e  $S_v$ , [rispettivamente,  $C'_v$  e  $S'_v$ ] sono matrici diagonali con i termini diversi da zero rappresentati da  $\cos \alpha_i$  e  $\sin \alpha_i$  [rispettivamente,  $\cos \alpha_{i+1}$  e  $\sin \alpha_{i+1}$ ], con  $i$  che descrive l'immagine di  $i_v$ ; inoltre  $I$  individua appropriati operatori identici (ad esempio  $I$  nella posizione  $(1, 1)$  di  $V$  è  $\Pi_{J_o} \Pi_{J_o}^t$ , mentre



$I$  nella posizione (3, 2) di  $D$  è  $\Pi_{J_e} \Pi_{J_e}^t$ ); analogamente 0 individua appropriati operatori nulli.

Si osservi che  $p(b, c)$  può essere visto come la proiezione di  $b$  sulla varietà lineare  $\mathcal{L}$ . Inoltre, fissando  $\delta = \sin(2\pi/s)$  e

$$W = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_v/\delta & -S_v/\delta \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C'_v/\delta & C_v/\delta \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

si verifica facilmente che  $Q_\tau^{-1} P^t W$  rappresenta un'inversa destra di  $VPQ_\tau$ . Quindi, sfruttando il Lemma 3.4, riportato nel seguito, per ogni  $c_1, c_2$  appartenente a  $\mathcal{R}_{J_o; J_e, i_e; J_v, i_v}$  ed ogni  $b$  appartenente a  $\mathcal{A}$ , risulta che:

$$\|p_s(b, c_1) - p_s(b, c_2)\| \leq \|Q_\tau^{-1}\| \|P^t\| \|WD\| \|\Pi\| \|c_1 - c_2\|. \quad (3.39)$$

Da qui segue che la stima (3.34), nel caso in cui  $c_1$  e  $c_2$  appartengano alla stessa classe di equivalenza, osservando che  $P^t$  e  $\Pi$  sono proiettori e

$$WD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_e & 0 \\ 0 & 0 & (S'_v - S_v)/\delta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_e & 0 \\ 0 & 0 & -(C'_v - C_v)/\delta \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

ha norma Euclidea non maggiore di  $(\cos(\pi/s))^{-1}$ .

Al fine di dimostrare la stima (3.34) nel caso generale, sia assegnato  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^n$ . Il segmento che unisce  $c_1$  e  $c_2$ , che, naturalmente, appartiene a  $\mathbb{R}_+^n$ , può essere decomposto nell'unione di un numero finito di segmenti, ciascuno dei quali ha la parte interna in qualche classe di equivalenza  $\mathcal{R}_{J_o; J_e, i_e; J_v, i_v}$ . Dal momento che  $c \mapsto p_s(b, c)$  è continua, si perviene all'enunciato del Lemma 3.3 scrivendo la stima (3.34) per gli estremi di ciascuno di questi segmenti e quindi sommando le relative disequazioni. Resta da dimostrare che la funzione  $c \mapsto p_s(b, c)$  è continua. A tal fine sia  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\mathbb{R}_+^n$  convergente a un  $\hat{c}$  appartenente a una classe di equivalenza  $\mathcal{R}_{J_o; J_e, i_e; J_v, i_v}$ . Si verifica l'enunciato dimostrando che  $p_s(b, c_k)$  converge a  $p_s(b, \hat{c})$ . Poiché esiste solamente un numero finito di classi di equivalenza, considerando un numero finito di successioni, si può pensare, senza ledere

la generalità, che ogni  $c_k$  appartenga alla medesima classe di equivalenza. Pertanto, la successione  $p_s(b, c_k)$  è una successione di CAUCHY, secondo la (3.34), e converge ad un  $\hat{p} \in \mathcal{A}$ . Per costruzione,  $p_s(b, c_k) \in \mathcal{K}_{c_k}^s$ : pertanto, facendo il limite per  $k \rightarrow \infty$ , risulta che:

$$\hat{p} \in \mathcal{K}_{\hat{c}}^s. \quad (3.41)$$

D'altra parte, per un valore di  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo, esiste un numero naturale  $\nu$  tale che, per  $k > \nu$ ,  $\Pi_{J_o} c_k > \Pi_{J_o}(\hat{c} - \varepsilon)$ , con  $\bar{J}_o = [1 \dots n] \setminus J_o$  mentre il segno  $-$  è da intendersi per componenti. Ponendo quindi

$$\hat{c}_\varepsilon = \Pi_{J_o}^t \Pi_{J_o} \hat{c} + \Pi_{\bar{J}_o}^t \Pi_{\bar{J}_o}(\hat{c} - \varepsilon). \quad (3.42)$$

segue che

$$k > \nu \Rightarrow \|p_s(b, c_k) - b\| \leq \|v - b\|, \quad v \in \mathcal{K}_{\hat{c}_\varepsilon}^s. \quad (3.43)$$

Passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  nella (3.43) e sfruttando l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  e la continuità della norma, si ottiene che

$$\|\hat{p} - b\| \leq \|v - b\|, \quad v \in \mathcal{K}_{\hat{c}}^s, \quad (3.44)$$

che, insieme alla (3.41), implica che  $\hat{p} = p(b, \hat{c})$ . La conseguenza è rappresentata dalla continuità di  $c \mapsto p_s(b, c)$ .  $\square$

**Lemma 3.4.** *Sia  $F$  un operatore lineare di  $\mathbb{R}^k$  su  $\mathbb{R}^m$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$  e  $d \in \mathbb{R}^m$ . L'espressione della proiezione ortogonale di  $b$  sulla varietà lineare*

$$\{x \in \mathbb{R}^k : Fx = d\} \quad (3.45)$$

definita da

$$\bar{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} x^t x - x^t b, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad Fx = d \right\} \quad (3.46)$$

è data da

$$\bar{x} = (I - \mathcal{P})b + \mathcal{P}Md \quad (3.47)$$

con  $I$  che rappresenta l'operatore identico di  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathcal{P}$  il proiettore ortogonale sull'immagine di  $F^t$  e  $M$  un operatore lineare di  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^k$  tale che  $FM$  sia l'identità di  $\mathbb{R}^m$  (cioè  $M$  è un'inversa destra di  $F$ ).

*Dimostrazione.* E' ben noto (ad esempio [10]) che

$$\bar{x} = b + F^t \lambda, \quad (3.48)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  moltiplicatore di LAGRANGE del vincolo  $Fx = d$ , e che soddisfa la seguente equazione:

$$Fb + FF^t\lambda = d. \quad (3.49)$$

Dal momento che  $F$  è suriettiva,  $FF^t$  è invertibile e la (3.49) fornisce un unico  $\lambda$  che, dopo la sostituzione nell'equazione (3.48), fornisce la (3.47). Si osservi che  $\mathcal{P} = F^t(FF^t)^{-1}F$  rappresenta l'operatore che proietta ortogonalmente su  $\text{Im}F^t$ , poiché trasforma  $\ker F$  nel vettore nullo, ed il complemento ortogonale di  $\ker F$ , cioè  $\text{Im}F^t$  in se stesso. □

### 3.4 Buona posizione e convergenza

**Teorema 3.1.** *Sotto le ipotesi definite al punto (3.2.1), esiste una costante positiva  $\mathcal{M}$  tale che per  $0 \leq \mu < \mathcal{M}$  l'applicazione  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definita dalla (3.16) è una contrazione. Di conseguenza, per  $0 \leq \mu < \mathcal{M}$  la formulazione duale condensata al discreto (3.9) del problema di contatto con attrito alla COULOMB ammette un'unica soluzione  $(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}_{-\mu Q_\sigma \bar{\sigma}}$  e l'algoritmo proposto converge a tale soluzione per qualsiasi vettore iniziale ammissibile  $\sigma_o \in \mathcal{H}$ . inoltre esiste una costante  $0 \leq \beta < 1$  tale che valgano le seguenti stime d'errore*

$$\|\sigma_k - \bar{\sigma}\| \leq \frac{\|\sigma_o - \sigma_1\| \beta^k}{1 - \beta}, \quad \|\tau_k - \bar{\tau}\| \leq \frac{\|\sigma_o - \sigma_1\| \beta^k}{(1 - \beta) \|C\|}, \quad k \in N. \quad (3.50)$$

L'espressione delle costanti  $\mathcal{M}$  e  $\beta$  è fornita in maniera esplicita nelle (3.53) e (3.52).

*Dimostrazione.* Per ogni  $\tilde{\sigma}, \hat{\sigma} \in \mathcal{H}$ , sfruttando il teorema di proiezione in [10] e il Lemma 3.2, si ottiene la seguente stima:

$$\begin{aligned} \|f(\tilde{\sigma}) - f(\hat{\sigma})\| &\leq \|C^t(p(-d_\tau - C\tilde{\sigma}, -\mu Q_\sigma \tilde{\sigma}) - p(-d_\tau - C\hat{\sigma}, -\mu Q_\sigma \hat{\sigma}))\| \leq \\ &\|C\|(\| -C\tilde{\sigma} + C\hat{\sigma} \| + \|Q_\tau^{-1}\| \| -\mu Q_\sigma \tilde{\sigma} + \mu Q_\sigma \hat{\sigma} \|) \leq \\ &\|C\|(\|C\| + \mu \|Q_\sigma\| \|Q_\tau^{-1}\|) \|\tilde{\sigma} - \hat{\sigma}\|. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ne segue che la  $f$  è lipschitziana con coefficiente di LIPSCHITZ

$$\beta = \|C\|(\|C\| + \mu \|Q_\sigma\| \|Q_\tau^{-1}\|). \quad (3.52)$$

Dalla (3.13) e dal Lemma 3.1 segue che  $\|C\| < 1$ . Ponendo quindi

$$\mathcal{M} = \frac{(1 - \|C\|^2)}{(\|C\| \|Q_\sigma\| \|Q_\tau^{-1}\|)} > 0, \quad (3.53)$$

per ogni valore del coefficiente di attrito tale che  $0 \leq \mu < \mathcal{M}$  risulta  $0 \leq \beta < 1$ . Di qui, per il teorema delle contrazioni di BANACH-CACCIOPPOLI segue l'enunciato, osservando che le equazioni (3.14) e (3.15) possono essere riassunte attraverso l'equazione

$$\sigma_k = f(\sigma_{k-1}). \quad (3.54)$$

La stima d'errore per  $\tau_k$  segue facilmente dal Lemma 3.2.

Vale la pena di osservare che la costante  $\mathcal{M}$  dipende da grandezze relative ai corpi in esame e che presentano un interesse significativo dal punto di vista meccanico: esse sono  $\|C\|$ , misura dell'accoppiamento energetico tra  $\sigma$  e  $\tau$ , e  $\|Q_\sigma\| \|Q_\tau^{-1}\|$  relativa all'energia complementare associata a  $\sigma$  e  $\tau$ .  $\square$