Capitolo 5

Integrazione del modello

5.1 Introduzione

In meccanica dei continui deformabili, l'integrazione numerica di problemi non-lineari può essere basata sulla soluzione iterativa di una forma discretizzata dell'equazione dei lavori virtuali.

In particolare, da queste equazioni di bilancio si ricava un campo di spostamenti incrementale. Utilizzando le relazioni cinematiche, si calcolano le corrispondenti deformazioni; da queste, integrando localmente le equazioni costitutive, si ottengono le tensioni e le altre variabili di stato. Si verifica, quindi, l'ammissibilità di tale stato tensionale; se l'equilibrio è violato, la procedura viene ripetuta.

Una classica scelta per la discretizzazione del continuo deformabile (integrazione nello spazio) è il metodo degli elementi finiti.

L'integrazione nel tempo delle equazioni costitutive è un punto di fondamentale importanza, soprattutto nell'analisi dei continui elasto-plastici. In questo caso, se si applica una procedura implicita di tipo euleriano (*backward-Euler*), l'integrazione delle equazioni evolutive si trasforma nella soluzione di un problema di ottimizzazione vincolato. In particolare, tali vincoli sono rappresentati dalle condizioni di Kuhn-Tucker in forma discretizzata. L'applicazione di questa metodologia conduce allo sviluppo di tecniche di integrazione numerica note come algoritmi di *return mapping* (una trattazione generale di tali procedure è riportata in [76]).

Con riferimento al caso di un modello elastico-perfettamente plastico, lo schema di un algoritmo di *return mapping* è riportato in Fig. 5.1. All'interno del generico passo temporale $[t_n, t_{n+1}]$, si calcola lo stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+1}$ corrispondente all'assegnato incremento di deformazione, supponendo nullo il flusso plastico (*stato di tentativo elastico*). Se la condizione di snervamento viene violata $\left(f\left(\boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+1}\right) > 0\right)$, l'effettivo stato $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ è ottenuto proiettando lo stato di tentativo sulla superficie $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ del dominio di elasticità (*passo di correzione plastica*). Se si fa ricorso al metodo degli elementi finiti, questa proiezione è normalmente calcolata nei punti di Gauss.

Il problema globale viene in generale risolto utilizzando procedure iterative di tipo Newton o Newton-Raphson. Se nell'implementazione di tali procedure, si impiega l'operatore tangente ottenuto dalla linearizzazione del legame elasto-plastico, la ve-

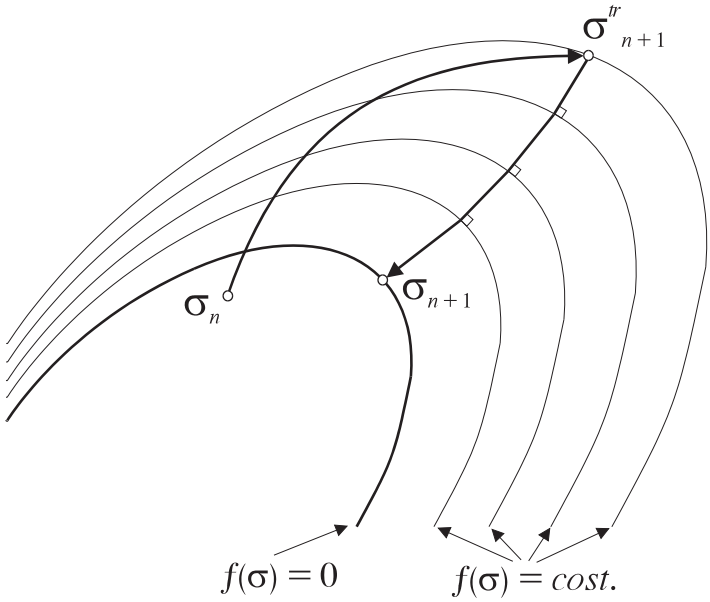


Figura 5.1: Schema di un algoritmo di return mapping per il caso di plasticità perfetta. Stato di tentativo elastico: si calcola $\boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+1}$ per mezzo delle relazioni costitutive elastiche. Passo di correzione plastica: lo stato tensionale di tentativo viene proiettato sulla superficie di snervamento $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$

locità di convergenza è poco soddisfacente, a causa della mancanza di consistenza fra questo operatore e l'algoritmo di *return mapping*. La linearizzazione delle equazioni algoritmiche, al posto di quelle costitutive, fornisce il tensore elasto-plastico *algoritmico*; tale operatore garantisce la velocità di convergenza quadratica propria del metodo di Newton [81, 83].

Nell'analisi di problemi in deformazioni finite, fino agli inizi degli anni '80, i metodi computazionali sono formulati soprattutto per l'integrazione di estensioni ipoelastiche dei classici modelli infinitesimali (cfr. par. 4.1). In tale contesto, il rispetto dell'assioma di obiettività implica la necessità di implementare algoritmi di integrazione "incrementalmente" obiettivi (cfr. ad es. [64]); questa circostanza risulta estremamente onerosa in termini sia concettuali, sia computazionali.

La maggiore correttezza formale dei modelli elasto-plastici moltiplicativi (cfr. par. 4.1 e par. 4.2) semplifica la formulazione di algoritmi di integrazione. Un importante progresso è quindi rappresentato dallo sviluppo di metodi computazionali basati sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione.

In quest'ambito, una delle prime procedure numeriche è proposta in [3]. Fondamentale è il contributo di Simo [72, 73, 74, 75], di Simo e Ortiz [79], di Simo e Taylor [82]; in questi lavori si evidenzia, fra l'altro, la possibilità di calcolare lo stato di tentativo a partire dalla configurazione intermedia, per mezzo di relazioni costitutive iperelastiche.

Dalla prima formulazione del Cam-clay [68], un notevole lavoro di ricerca è dedicato al miglioramento delle capacità di previsione del modello ed all'estensione del suo campo di applicabilità (cfr. par. 3.5). La presentazione di questi modelli elastoplastici, spesso estremamente sofisticati, è raramente accompagnata dalla formulazione di una efficace procedura di integrazione numerica. Eppure, l'implementazione di un algoritmo stabile ed accurato per un modello di tipo Cam-clay merita, per la sua complessità, particolare attenzione. Nell'ambito della meccanica computazionale, infatti, si considera l'integrazione di tale legame costitutivo come un severo test per gli algoritmi numerici [58].

Una delle prime implementazioni del Cam-clay in un codice agli elementi finiti è sviluppata in [94]. Fino alla fine degli anni '80, la maggior parte degli algoritmi proposti per questo tipo di modelli è basata sul trattamento esplicito delle equazioni evolutive, come può essere verificato nell'esauriente rassegna riportata in [29]. Procedure esplicite sono implementate, ad esempio, in codici agli elementi finiti molto utilizzati sia in ambito di ricerca che nelle pratiche applicazioni [11]. L'impiego di tali procedure, comunque, implica una non trascurabile dipendenza della soluzione dall'ampiezza del passo di integrazione [62]; a causa di tale dipendenza, affinché la risposta calcolata sia attendibile, è necessario utilizzare una fitta suddivisione della storia di carico. Non sempre, soprattutto nell'analisi di problemi geotecnici, tale controllo sugli incrementi di carico risulta agevole.

Più recentemente vengono proposti metodi semi-impliciti ed impliciti per l'integrazione del Cam-clay Modificato in deformazioni infinitesime [8, 10, 33]. Sostanzialmente, in questi lavori, non sono apportate modifiche alla formulazione originale del modello (cfr. par. 3.4). La presenza del volume specifico nelle relazioni costitutive, già non accettabile da un punto di vista fisico (cfr. par. 3.3), complica lo sviluppo dell'algoritmo di integrazione. La rigidezza elastica a taglio è variabile con la tensione media secondo la relazione ipoelastica (3.32).

In [78] è presentato un algoritmo implicito per l'integrazione di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite. In tale modello, basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, il comportamento in compressione isotropa è descritto dalle tradizionali relazioni lineari $v - \ln p$; la rigidezza elastica a taglio è supposta costante (cfr. par. 4.6.1). Lo sviluppo di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite e della relativa procedura di integrazione è attualmente in corso [85].

Nel seguito, si espone la formulazione di un algoritmo implicito per l'integrazione del modello Cam-clay in deformazioni finite presentato nel Cap. 4 [14, 15, 16, 17].

Inizialmente si richiama una metodologia generale per l'integrazione di legami elastoplastici moltiplicativi (par. 5.2); quindi se ne sviluppa l'applicazione al modello in esame (par. 5.3). In particolare, l'integrazione delle equazioni evolutive è effettuata attraverso un algoritmo di *return mapping* (par. 5.3.1). La soluzione delle equazioni algoritmiche è ottenuta mediante una procedura di tipo Newton-Raphson (par. 5.3.2). Infine, dalla linearizzazione dell'algoritmo, si ricava l'operatore tangente necessario all'implementazione della procedura in un codice agli elementi finiti (par. 5.3.3).

5.2 Formulazione generale dell'algoritmo

Nel presente paragrafo è richiamata una metodologia [75] per l'integrazione di un modello in deformazioni finite formulato nell'ambito della classe di legami discussa all'inizio del Cap. 4. Per comodità, le ipotesi che caratterizzano questa classe di legami elasto-plastici moltiplicativi sono qui brevemente riepilogate:

1. Il dominio di elasticità è convesso e individuato da un criterio di snervamento formulato in termini di vere tensioni e di vere variabili interne; inoltre, affinché sia rispettato l'assioma di obiettività, la funzione che esprime il criterio di snervamento deve essere isotropa.

2. Il legame elastico è formulato assegnando una funzione energia di deformazione isotropa.

3. Le equazioni evolutive rispettano il Principio di Massima Dissipazione Plastica.

Si consideri, quindi, un generico intervallo temporale $[t_n,\ t_{n+1}]$ e si assuma che il gradiente di deformazione, il tensore di Cauchy-Green sinistro elastico e la variabile di incrudimento, siano assegnate come dati iniziali nel punto materiale $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$:

$$\{\mathbf{F}_n,\ \mathbf{b}^e_n,\ \xi_n\} \in Lin^+ \times Sym^+ \times R^+ \tag{5.1}$$

Anche il tensore degli sforzi di Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}_n$ è univocamente determinato dalle (5.1), mediante la relazione costitutiva (4.17). L'algoritmo deve fornire la soluzione approssimata delle equazioni di evoluzione del flusso plastico in $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ per deformazioni assegnate durante l'intervallo $[t_n,\ t_{n+1}]$. Si consideri, pertanto, un problema a deformazione controllata e sia:

$$\mathbf{u} : \varphi_n(\mathcal{B}) \times [t_n,\ t_{n+1}] \longrightarrow \mathcal{V} \tag{5.2}$$

un campo di spostamenti *incrementali* imposti sulla data configurazione $\varphi_n(\mathcal{B})$; il corrispondente gradiente di *deformazione relativa* è definito come (Fig. 5.2):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) := \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_n) \qquad \forall t \in [t_n,\ t_{n+1}] \tag{5.3}$$

Il gradiente di deformazione totale è quindi $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\varphi_n(\mathbf{X}))\,\mathbf{F}_n(\mathbf{X})$. Sostituendo le equazioni evolutive (4.20) nell'espressione (4.7) della derivata temporale di $\mathbf{b}^e$, si ottiene il seguente sistema di equazioni evolutive vincolate:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{l}\mathbf{f} \\
\dot{\mathbf{b}}^e &= \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T + 2\dot{\gamma}\left[\frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]\mathbf{b}^e \\
\dot{\xi} &= -\dot{\gamma}\left[\frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial i}\right] \\
\dot{\gamma} &\geq 0 \qquad \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0 \qquad \dot{\gamma}\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

dove $\mathbf{l}$ è il gradiente di velocità spaziale definito dalla (2.50) e $(\boldsymbol{\tau}, i)$ sono determinate in funzione delle variabili $\{\mathbf{f},\ \mathbf{b}^e,\ \xi\}$ per mezzo dell'equazione costitutiva elastica (4.17) e della legge di incrudimento (4.18):

$$\boldsymbol{\tau} = -2\frac{\partial \check{W}(\mathbf{b}^e)}{\partial \mathbf{b}^e}\mathbf{b}^e \tag{5.5}$$

$$i = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \tag{5.6}$$

Le equazioni evolutive (5.4) sono soggette alle condizioni iniziali:

$$\{\mathbf{f},\ \mathbf{b}^e,\ \xi\}|_{t=t_n} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{b}^e_n,\ \xi_n\} \tag{5.7}$$

La soluzione del sistema (5.4, 5.5, 5.6) fornisce l'evoluzione delle variabili $\{\mathbf{f},\ \mathbf{b}^e,\ \xi\}$ nel punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, durante l'intervallo di tempo $[t_n,\ t_{n+1}]$. Una soluzione approssimata di questo sistema può essere ottenuta tramite un procedimento algoritmico (*product formula algorithm*) basato sulla seguente suddivisione (*operator split*) del problema evolutivo:

1. *Stato di tentativo elastico (trial state):*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{l}\mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{b}}^e &= \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T \\ \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

2. *Passo di correzione plastica (return mapping):*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{b}}^e &= 2\dot{\gamma}\left[\frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]\mathbf{b}^e \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma}\left[\frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial i}\right] \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \qquad \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0 \qquad \dot{\gamma}\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = 0$$

Gli algoritmi associati a ciascuno di questi due problemi sono esposti nei seguenti paragrafi.

5.2.1 Stato di tentativo elastico

Questo problema è ottenuto dal problema originale (5.4, 5.5, 5.6) supponendo nullo il flusso plastico e ignorando il vincolo imposto dal criterio di snervamento sullo stato tensionale. La soluzione $\{\mathbf{f}^{tr},\ \mathbf{b}^{e,tr},\ \xi^{tr}\}$ di questo problema può essere calcolata esattamente per mezzo delle seguenti espressioni in forma chiusa:

$$\mathbf{f}^{tr} = \mathbf{f} \tag{5.10}$$

$$\mathbf{b}^{e,tr} = \mathbf{f}\,\mathbf{b}^e_n\mathbf{f}^T \tag{5.11}$$

$$\xi^{tr} = \xi_n \tag{5.12}$$

dove il gradiente di deformazione relativa $\mathbf{f}$ è dato dalla (5.3) in funzione degli assegnati incrementi di spostamento (5.2). L'algoritmo può essere così interpretato (Fig. 5.2):

- la configurazione intermedia viene tenuta fissa mentre la configurazione corrente viene portata nella sua posizione finale rappresentata da $\mathbf{F} = \mathbf{f}\,\mathbf{F}_n$ (5.10)**;**
- il tensore di Cauchy-Green sinistro elastico $\mathbf{b}_n^e$ è quindi trasformato mediante l'operazione di *push-forward* (5.11), in modo da ottenere il valore corrispondente alla configurazione corrente;
- Il tensore degli sforzi di Kirchhoff viene calcolato mediante la relazione costitutiva elastica (5.5), si ha quindi:

$$\boldsymbol{\tau}^{tr} = -2\left[\frac{\partial \check{W}\left(\mathbf{b}^e\right)}{\partial \mathbf{b}^e}\right]\mathbf{b}^{e,tr} \tag{5.13}$$

5.2.2 Passo di correzione plastica

Si indichi con $\left\{\bar{\mathbf{f}},\ \bar{\mathbf{b}}^e,\ \bar{\xi}\right\}$ la soluzione approssimata del problema (5.4, 5.5, 5.6) fornita dall'algoritmo. La prima delle equazioni che definiscono il passo di correzione plastica (5.9), unitamente alla (5.10), implica:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^{tr} = \mathbf{f} \tag{5.14}$$

Il passo di correzione plastica è quindi formulato sulla configurazione corrente che viene mantenuta fissa nella posizione raggiunta nel passo di tentativo per mezzo del gradiente di deformazione relativa (fig. 5.2).

Per giustificare l'approssimazione algoritmica delle rimanenti equazioni di evoluzione, si ricordi che la soluzione della seguente equazione differenziale del primo ordine:

$$\dot{z}\left(t\right) = A\ z\left(t\right) \quad \text{in } \left[t_n,\ t_{n+1}\right] \qquad \text{con } \left.z\left(t\right)\right|_{t=t_n} = z\left(t_n\right) \tag{5.15}$$

è data da $z\left(t\right) = \exp\left[\left(t-t_n\right)A\right]\ z\left(t_n\right)$. Pertanto, la forma delle equazioni che governano l'evoluzione di $\mathbf{b}^e$ e di ξ (5.9_{2-3}) suggerisce un'approssimazione esponenziale per l'algoritmo di integrazione del problema; che, ponendo $\Delta\gamma = \left(t-t_n\right)\gamma$, assume la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^{e,tr} &= \mathbf{f}\,\mathbf{b}_n^e\mathbf{f}^T && (5.16)\\
\bar{\mathbf{b}}^e &= \exp\left\{2\Delta\gamma\left[\frac{\partial \check{f}\left(\boldsymbol{\tau},i\right)}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]\right\}\mathbf{b}^{e,tr} && (5.17)\\
\bar{\xi} &= \xi_n - \Delta\gamma\left[\frac{\partial \check{f}\left(\boldsymbol{\tau},i\right)}{\partial i}\right] && (5.18)\\
\Delta\gamma &\geq 0 \qquad \check{f}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}},\bar{i}\right) \leq 0 \qquad \Delta\gamma\ \check{f}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}},\bar{i}\right) = 0
\end{aligned}$$

dove le derivate della funzione di snervamento $\check{f}$ sono calcolate in $\left(\bar{\boldsymbol{\tau}},\bar{i}\right)$, a sua volta valutato a partire da $\left(\bar{\mathbf{b}}^e,\bar{\xi}\right)$ mediante le relazioni costitutive (5.5-5.6).

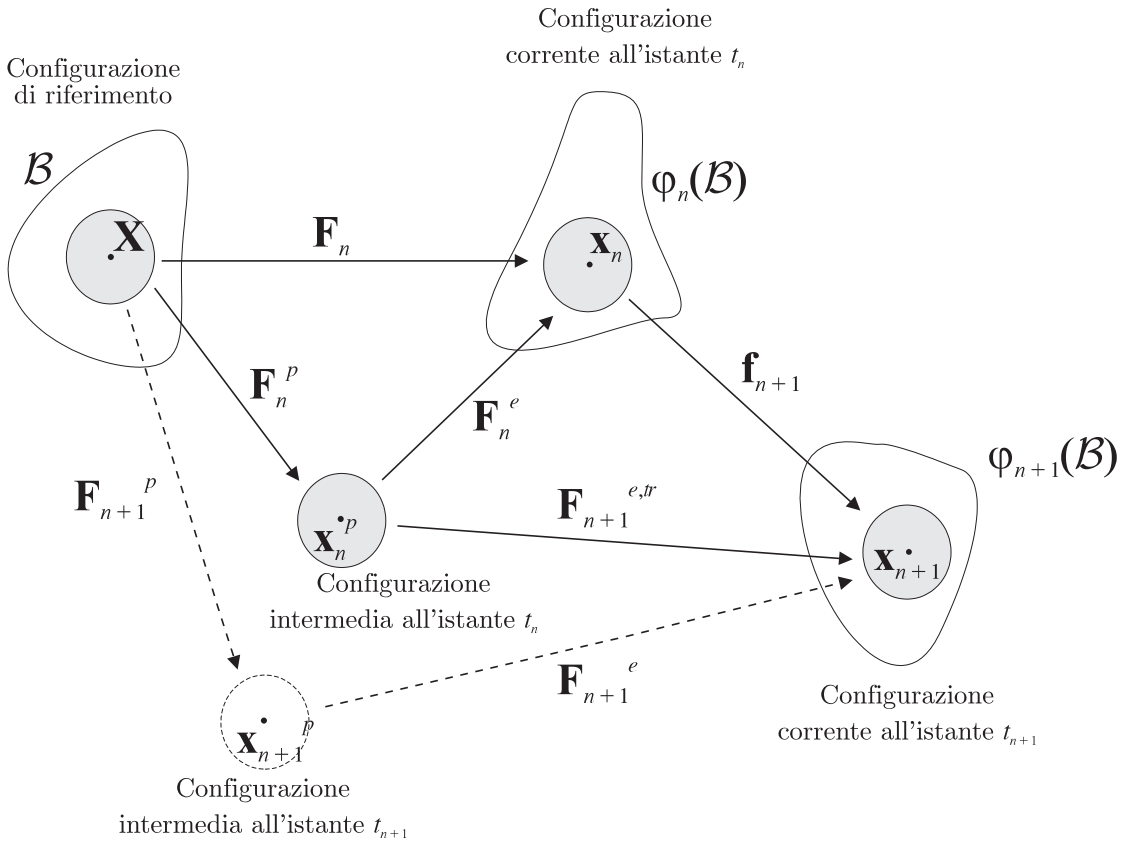


Figura 5.2: Schema dell'algoritmo. Passo di tentativo elastico: fissata la configurazione intermedia, si porta quella corrente nella sua posizione definitiva. Passo di correzione plastico: la configurazione intermedia viene aggiornata

5.2.3 Implementazione nello spazio delle direzioni principali

L'implementazione dell'algoritmo sopra descritto è basata sulla riformulazione delle espressioni (5.16-5.18) in termini di tensioni di Kirchhoff principali. A tal fine sono impiegate le relazioni discusse nel paragrafo 4.3.4.

Nel seguito si dimostra come le direzioni principali del tensore degli sforzi di Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ nella configurazione corrente, che per l'ipotesi di isotropia coincidono con quelle di $\mathbf{b}^e$, coincidono anche con le direzioni principali di $\mathbf{b}^{e,tr}$ calcolato nel passo di tentativo elastico.

Infatti, la sostituzione della (4.21_2) e della (4.26) nella (5.17) fornisce (per semplificare la notazione, da qui in poi il simbolo " $^-$ " è sottinteso):

$$\mathbf{b}^{e,tr} = \sum_{A=1}^{3} \left(\lambda_A^e\right)^2 \exp\left[-2\Delta\gamma \left(\frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)_A\right] \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \tag{5.19}$$

dal confronto della precedente relazione con la decomposizione spettrale di $\mathbf{b}^{e,tr}$, es-

pressa come:

$$\mathbf{b}^{e,tr} = \sum_{A=1}^{3} \left(\lambda_A^{e,tr}\right)^2 \ \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr} \tag{5.20}$$

si ricava, per l'unicità della decomposizione spettrale:

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_A^{tr} \quad \text{e} \quad \left(\lambda_A^{e}\right)^2 = \exp\left[2\Delta\gamma \left(\frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)_A\right] \left(\lambda_A^{e,tr}\right)^2 \quad \text{con} \quad A = 1,2,3 \tag{5.21}$$

Si è provato, quindi, che le direzioni principali $\mathbf{n}_A$ relative allo stato finale coincidono con le direzioni principali $\mathbf{n}_A^{tr}$. Pertanto l'algoritmo di *return mapping* è caratterizzato da direzioni principali fissate e definite nel passo di tentativo elastico.

Coerentemente con la (4.24), il vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche di tentativo è definito come:

$$\boldsymbol{\rho}^{e,tr} := \begin{bmatrix} \rho_1^{e,tr} \\ \rho_2^{e,tr} \\ \rho_3^{e,tr} \end{bmatrix} \qquad \text{dove } \rho_A^{e,tr} := -\ln \lambda_A^{e,tr} \qquad A = 1,2,3 \tag{5.22}$$

Se si considera il logaritmo di entrambi i membri della (5.21_2) e si utilizza la notazione vettoriale, l'algoritmo espresso dalle (5.16-5.18) viene così riformulato nello spazio delle direzioni principali:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^{e} &= \boldsymbol{\rho}^{e,tr} - \Delta\gamma \frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ \xi &= \xi_n - \Delta\gamma \frac{\partial \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, i\right)}{\partial i} \\ \Delta\gamma &\geq 0 \qquad \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, i\right) \leq 0 \qquad \Delta\gamma\, \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, i\right) = 0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

L'equazione costitutiva (4.25), la legge di incrudimento (5.6) e le formule algoritmiche (5.23) definiscono un problema algebrico non lineare vincolato le cui variabili principali sono $(\boldsymbol{\rho}^e, \xi) \in \mathcal{V} \times R$.

5.3 Integrazione del Cam-clay

Nel seguito si procede allo sviluppo di una procedura per l'integrazione del modello Cam-clay in deformazioni finite presentato nel Capitolo 4.

5.3.1 Algoritmo di return mapping

L'espressione del passo di correzione plastica è ottenuta sostituendo la (4.57) nella (5.23_1):

$$\boldsymbol{\rho}^{e} = \boldsymbol{\rho}^{e,tr} - \Delta\gamma \left[\frac{1}{3}\left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right)\mathbf{1} + \frac{3}{M^2}\mathbf{t}\right] \tag{5.24}$$

questa relazione puó essere decomposta nelle sue parti volumetrica e deviatorica:

$$\theta^e = \theta^{e,tr} - \Delta\gamma\,(2\breve{p} - \breve{p}_c) \tag{5.25}$$

$$\mathbf{e}^e = \mathbf{e}^{e,tr} - \Delta\gamma\frac{3}{M^2}\mathbf{t} \tag{5.26}$$

La formula di decomposizione (4.31) implica:

$$\theta^{e,tr} = \theta - \theta_n^p \tag{5.27}$$

quindi, l'equazione (5.25) fornisce:

$$\theta^p = \theta_n^p + \Delta\gamma\,(2\breve{p} - \breve{p}_c) \tag{5.28}$$

Gli sforzi di tentativo sono ricavati dalle relazioni costitutive elastiche (4.39-4.40) come:

$$\breve{p}^{tr} = p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\breve{k}}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\breve{k}}\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2\right) \tag{5.29}$$

$$\mathbf{t}^{tr} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\breve{k}}\right)\mathbf{e}^{e,tr} \tag{5.30}$$

Al fine di ottenere le relazioni esistenti fra gli sforzi effettivamente agenti all'istante $t \in [t_n,\ t_{n+1}]$ e le deformazioni elastiche di tentativo, si sostituiscono le (5.25-5.26) prima nella relazione costitutiva (4.39):

$$\begin{aligned}\breve{p} = {} & p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\breve{k}}\right)\exp\left[-\frac{1}{\breve{k}}\Delta\gamma\,(2\breve{p} - \breve{p}_c)\right] \\ & \left[1 + \frac{\alpha}{\breve{k}}\left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2 + \frac{9\alpha}{\breve{k}M^4}\Delta\gamma^2\left\|\mathbf{t}\right\|^2 - \frac{6\alpha}{\breve{k}M^2}\Delta\gamma\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}^{e,tr}\right]\end{aligned} \tag{5.31}$$

e quindi nella relazione costitutiva (4.40), in modo da ottenere, esplicitando rispetto a $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{tr}\exp\left[-\frac{1}{\breve{k}}\Delta\gamma\,(2\breve{p} - \breve{p}_c)\right] \tag{5.32}$$

$$\left\{1 + \frac{6\alpha}{M^2}\Delta\gamma p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\breve{k}}\right)\exp\left[-\frac{1}{\breve{k}}\Delta\gamma\,(2\breve{p} - \breve{p}_c)\right]\right\}^{-1} \tag{5.33}$$

Infine si sostituisce la (5.28) nella legge di incrudimento (4.61):

$$\breve{p}_c = \breve{p}_{c0}\exp\left(\frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}}\theta_n^p\right)\exp\left[\frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}}\Delta\gamma\,(2\breve{p} - \breve{p}_c)\right] \tag{5.34}$$

Inoltre, sempre dalla (4.61), risulta:

$$\breve{p}_{c,n} = \breve{p}_{c0}\exp\left(\frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}}\theta_n^p\right) \tag{5.35}$$

si ha quindi:

$$\breve{p}_c = \breve{p}_{c,n} \exp\left[\frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}} \Delta\gamma \left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right)\right] \tag{5.36}$$

A causa della particolare forma delle relazioni (5.31) e (5.36), non è possibile pervenire ad un'espressione della condizione di snervamento (4.50) in termini del solo parametro di consistenza (cioè ad un'equazione scalare del tipo $f(\Delta\gamma) = 0$). Pertanto la soluzione dell'algoritmo è ricavata per via numerica, utilizzando la procedura di tipo Newton-Raphson descritta nel seguente paragrafo.

5.3.2 Soluzione dell'algoritmo

Per la soluzione del sistema di equazioni algoritmiche (4.50, 5.31, 5.36) si utilizza la procedura di Newton qui di seguito descritta.

Si pone:

$$g = p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\breve{k}}\right) \tag{5.37}$$

$$h = \exp\left[-\frac{1}{\breve{k}} \Delta\gamma \left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right)\right] \tag{5.38}$$

$$l = 1 + \frac{\alpha}{\breve{k}} \left\|\mathbf{e}^{e,tr}\right\|^2 + \frac{9\alpha}{\breve{k} M^4} \Delta\gamma^2 \left\|\mathbf{t}\right\|^2 - \frac{6\alpha}{\breve{k} M^2} \Delta\gamma \, \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \tag{5.39}$$

La (5.31) può essere quindi riscritta:

$$\breve{p} = ghl \tag{5.40}$$

Inoltre si pone:

$$m = \left(1 + \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma \, gh\right)^{-1} \tag{5.41}$$

le (5.37, 5.41) permettono di riscrivere la (5.32) nella forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{tr} mh \tag{5.42}$$

Si consideri il vettore delle *incognite*:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \breve{p} \\ \breve{p}_c \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

ed il vettore dei *residui* $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi})$, di componenti:

$$R_1 = \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}, \breve{p}_c\right) = \frac{3}{2} \frac{\left\|\mathbf{t}\right\|^2}{M^2} + \breve{p}\left(\breve{p} - \breve{p}_c\right) \tag{5.44}$$

$$R_2 = ghl - \breve{p} \tag{5.45}$$

$$R_3 = \breve{p}_{c,n} \exp\left[\frac{1}{\breve{\lambda} - \breve{k}} \Delta\gamma \left(2\breve{p} - \breve{p}_c\right)\right] - \breve{p}_c \tag{5.46}$$

Il sistema costituito dalle (4.50, 5.31, 5.36) è equivalente al sistema $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{0}$, per la cui soluzione è stato utilizzato l'algoritmo di Newton qui sintetizzato:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \text{inizializzazione: } k=0, \quad \boldsymbol{\chi}^k = \boldsymbol{\chi}^0 = [0 \quad \breve{p}^{tr} \quad \breve{p}_{c,n}] \\ 2. & \text{calcolo dei residui: } \mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}^k) \\ 3. & \text{if } \left\|\mathbf{R}^k\right\| < RTOL \text{ exit; else} \\ 4. & \text{aggiornamento soluzione: } \boldsymbol{\chi}^{k+1} = \boldsymbol{\chi}^k - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\chi}}\right)_k^{-1} \mathbf{R}^k \\ 5. & k+1 \longrightarrow k \text{ and goto 2} \end{array}} \tag{5.47}$$

L'impiego di questo algoritmo richiede pertanto la determinazione dei coefficienti della matrice:

$$\mathbf{R}' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tag{5.48}$$

Il procedimento seguito per il calcolo di $\mathbf{R}'$ è riportato in Appendice A.

5.3.3 Tangente algoritmica

L'espressione in forma chiusa del tensore elasto-plastico algoritmico viene determinata linearizzando l'algoritmo finora descritto. Dalla combinazione della decomposizione spettrale di $\boldsymbol{\tau}$ (4.21_2) con la (5.21_1) si ottiene la seguente espressione del tensore di Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^{3} \beta_A \, \mathbf{m}_A^{tr} \qquad \text{dove } \mathbf{m}_A^{tr} = \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr} \tag{5.49}$$

Il tensore di rigidezza spaziale $\mathbf{c} \in \mathbb{L}in$ ha componenti (cfr. par. 2.5.1):

$$c_{abcd} := 2F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\left(\frac{\partial S_{AB}}{\partial C_{CD}}\right) \tag{5.50}$$

dove con S_{AB} e con C_{CD} si sono indicate, rispettivamente, le componenti del secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ e del tensore di Cauchy-Green destro totale $\mathbf{C}$. Nell'implementazione dell'algoritmo, il calcolo esplicito del tensore $\mathbf{c}$ si basa sulle seguenti considerazioni [75]:

- L'algoritmo fornisce il vettore delle tensioni principali $\boldsymbol{\beta}$ come una funzione implicita del vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche di tentativo $\boldsymbol{\rho}^{e,tr}$(5.31, 5.32). La linearizzazione di questa relazione fornisce il tensore algoritmico:
$$\mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \tag{5.51}$$
- poiché la configurazione intermedia è mantenuta fissa nello stato di tentativo, le deformazioni logaritmiche $\boldsymbol{\rho}^{e,tr}$ sono funzioni della deformazione totale e sono indipendenti dal flusso plastico relativo all'intervallo $[t_n, t]$. Sotto tali ipotesi, si dimostra la validità della seguente relazione [75]:
$$\mathbf{m}_A^{tr} = 2\mathbf{F}\frac{\partial \rho_A^{e,tr}}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T \qquad A = 1,2,3 \tag{5.52}$$

- Il tensore $\mathbf{m}_A^{tr} = \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr}$ è anch'esso funzione della deformazione totale ed è indipendente dal flusso plastico relativo all'intervallo $[t_n, t]$. La linearizzazione di $\mathbf{m}_A^{tr}$ viene quindi effettuata una volta per tutte e fornisce il tensore del quarto ordine, indicato come $\mathbf{c}_A^{tr}$, la cui espressione è riportata in [57, 76].

Combinando i risultati sopra elencati, si ricava la seguente espressione della tangente algoritmica spaziale fornita dalla (5.50):

$$\mathbf{c} = \sum_{A=1}^{3} \sum_{B=1}^{3} a_{AB}^{ep}\, \mathbf{m}_A^{tr} \otimes \mathbf{m}_A^{tr} + 2 \sum_{A=1}^{3} \beta_A \mathbf{c}_A^{tr} \tag{5.53}$$

I moduli $\mathbf{c}_A^{tr}$ ed i prodotti tensoriali $\mathbf{m}_A^{tr}$ che compaiono nella (5.53) sono indipendenti dal particolare modello considerato; pertanto, il tensore algoritmico $\mathbf{c}$ è completamente determinato a meno dei coefficienti a_{AB}^{ep}. Questi ultimi coefficienti dipendono dal legame elasto-plastico impiegato e dalla struttura dell'algoritmo di *return mapping* formulato nello spazio delle direzioni principali. Il calcolo di $\mathbf{a}^{ep}$, con riferimento al modello Cam-clay qui considerato, è svolto nel seguente paragrafo.

Calcolo del tensore algoritmico elasto-plastico $\mathbf{a}^{ep}$

Il calcolo del tensore elasto-plastico algoritmico $\mathbf{a}^{ep}$ implica la differenziazione delle formule algoritmiche (5.31, 5.32, 5.36); infatti è:

$$\mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \tag{5.54}$$

in particolare si ha:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \right)^T \frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \otimes \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \tag{5.56}$$

La procedura necessaria per la determinazione dell'espressione in forma chiusa di $\mathbf{a}^{ep}$ è estremamente laboriosa, a causa, soprattutto, dell'accoppiamento volumetrico-deviatorico presente anche nel legame elastico. Questo calcolo è quindi riportato in maggior dettaglio in Appendice B, mentre qui ci si limita a riepilogarne i passaggi fondamentali.

Dalla differenziazione di $\breve{p}$ rispetto alle componenti di deformazione elastica di tentativo $\theta^{e,tr}$ ed $\mathbf{e}^{e,tr}$ si ottiene:

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \theta^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + c_2 \tag{5.57}$$

$$\frac{\partial \breve{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + c_3 \mathbf{e}^{e,tr} + c_4 \mathbf{t} \tag{5.58}$$

e da quella di $\mathbf{t}$:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \left(u_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + u_2 \right) \mathbf{e}^{e,tr} \tag{5.59}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \tag{5.60}$$

Le espressioni dei coefficienti a_{10}, c_i ed u_i sono riportate in App. B. Tutte le posizioni assunte durante i calcoli sono inoltre riepilogate in App. C.

La sostituzione delle derivate (5.57-5.60) nelle (5.55-5.56) e di queste, a loro volta, nella (5.54) fornisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \left(c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left(c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + \\ + \left(c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \mathbf{t} + \left(d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \otimes \mathbf{1} + a_{10} \mathbf{I} \end{aligned} \tag{5.61}$$

dove d_6 è un coefficiente noto (cfr. App. C). Nella precedente espressione l'unica incognita è costituita dalla derivata del parametro $\Delta\gamma$ rispetto al vettore delle deformazioni logaritmiche di tentativo $\boldsymbol{\rho}^{e,tr}$. La determinazione di tale incognita può essere effettuata come descritto nel seguito.

Se vi è sviluppo di deformazioni plastiche risulta $\Delta\gamma > 0$; quindi, le condizioni di Kuhn-Tucker (5.23_3) implicano l'annullamento dell'equazione di snervamento:

$$\hat{f}\left(\boldsymbol{\beta},\, \breve{p}_c\right) = 0 \tag{5.62}$$

differenziando questa relazione si ottiene la *condizione di consistenza*:

$$d\hat{f}\left(\boldsymbol{\beta},\, \breve{p}_c\right) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot d\boldsymbol{\beta} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \breve{p}_c} d\breve{p}_c = 0 \tag{5.63}$$

i differenziali di $\boldsymbol{\beta}$ e di $\breve{p}_c$ sono calcolati come:

$$d\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{5.64}$$

$$d\breve{p}_c = \frac{\partial \breve{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{5.65}$$

Dalla sostituzione dell'espressione (5.61) nel differenziale di $\boldsymbol{\beta}$ (5.64) si ottiene:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta} = \left(c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \right) d\left(\Delta\gamma\right) + \left(c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \left(\mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \right) + \\ + \left(c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \left(\mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \right) + \left(d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr} \right) \left(\mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \right) + a_{10} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \end{aligned} \tag{5.66}$$

Il calcolo del differenziale della pressione di preconsolidazione fornisce:

$$d\breve{p}_c = d_1\, d\left(\Delta\gamma\right) + d_2 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{5.67}$$

dove i coefficienti d_i sono noti (cfr. App. C). In queste due ultime relazioni compare il differenziale di $\Delta\gamma$:

$$d\left(\Delta\gamma\right) = \frac{\partial\left(\Delta\gamma\right)}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \tag{5.68}$$

I differenziali (5.66, 5.67), unitamente alle derivate della funzione di snervamento, vengono sostituiti nell'equazione scalare di consistenza (5.63), la cui soluzione fornisce il differenziale $d(\Delta\gamma)$. Si ottiene, infine, la seguente espressione del tensore algoritmico elasto-plastico tangente:

$$\mathbf{a}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \left(\delta_1 \mathbf{1} + \delta_2 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \mathbf{1} + \left(\delta_3 \mathbf{1} + \delta_4 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + \left(\delta_5 \mathbf{1} + \delta_6 \mathbf{e}^{e,tr}\right) \otimes \mathbf{t} + a_{10}\mathbf{I} \tag{5.69}$$

dove i coefficienti δ_i hanno le espressioni riportate in App. C.

Si noti che il tensore $\mathbf{a}^{ep}$ non è simmetrico; ciò è dovuto alla legge di incrudimento "non-associata" assunta nel Cam-clay (cfr. par. 4.4.4).

5.4 Implementazione della procedura numerica

L'algoritmo è implementato nel codice agli elementi finiti *Finite Element Analysis Program* (FEAP) [95]. La procedura di integrazione seguita è qui brevemente riassunta:

Le seguenti fasi hanno luogo in ogni punto di integrazione dell'elemento, nell'ambito dell'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$:

1. Stato di tentativo

Dato $\{\mathbf{b}^e_n, \theta^p_n\}$ nel punto di integrazione $\mathbf{x}_n \in \varphi_n(\mathcal{B})$, si calcolano il gradiente di deformazione relativa $\mathbf{f}_{n+1}$ ed il tensore di Cauchy-Green sinistro elastico $\mathbf{b}^e_{n+1}$ corrispondenti all'assegnato campo di incrementi di spostamento $\mathbf{u}_{n+1} : \varphi_n(\mathcal{B}) \to \mathcal{V}$:

$$\mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{x}_n) := \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}_n) \qquad \mathbf{b}^{e,tr}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}\mathbf{b}^e_n\mathbf{f}^T_{n+1} \tag{5.70}$$

2. Decomposizione spettrale di $\mathbf{b}^{e,tr}_{n+1}$

Si calcolano gli allungamenti principali $\left\{\lambda^{e,tr}_{A,n+1}\right\}$, risolvendo l'equazione caratteristica. Le direzioni principali $\left\{\mathbf{n}^{tr}_{A,n+1}\right\}$ vengono determinate in forma chiusa utilizzando la seguente espressione:

$$\mathbf{n}^{tr}_{A,n+1} \otimes \mathbf{n}^{tr}_{A,n+1} = \left[\frac{\mathbf{b}^{e,tr}_{n+1} - \left(\lambda^{e,tr}_{B,n+1}\right)^2 \mathbf{I}}{\left(\lambda^{e,tr}_{B,n+1}\right)^2 - \left(\lambda^{e,tr}_{A,n+1}\right)^2}\right]\left[\frac{\mathbf{b}^{e,tr}_{n+1} - \left(\lambda^{e,tr}_{C,n+1}\right)^2 \mathbf{I}}{\left(\lambda^{e,tr}_{C,n+1}\right)^2 - \left(\lambda^{e,tr}_{A,n+1}\right)^2}\right] \tag{5.71}$$

per $A = 1, 2, 3$, con $B = 1 + \mathrm{mod}(3, A)$ e $C = 1 + \mathrm{mod}(3, B)$.

3. Return mapping nello spazio delle direzioni principali

Si calcolano le deformazioni logaritmiche e le tensioni principali di tentativo:

$$\boldsymbol{\rho}^{e,tr}_{n+1} = \begin{bmatrix} \ln \lambda^{e,tr}_{1,n+1} \\ \ln \lambda^{e,tr}_{2,n+1} \\ \ln \lambda^{e,tr}_{3,n+1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}^{tr}_{n+1} = \breve{p}^{tr}_{n+1}\mathbf{1} + \mathbf{t}^{tr}_{n+1} \tag{5.72}$$

dove $\breve{p}^{tr}_{n+1}$ e $\mathbf{t}^{tr}_{n+1}$ sono dati dalle (5.29-5.30). Si valuta quindi $f^{tr}_{n+1} = \hat{f}\left(\boldsymbol{\beta}^{tr}_{n+1}, \breve{p}_{c,n}\right)$; se $f^{tr}_{n+1} > 0$ si ricorre all'algoritmo (5.47) per il calcolo di $\left\{\boldsymbol{\rho}^{e}_{n+1}, \theta^{p}_{n+1}\right\}$. Il tensore degli sforzi di Kirchhoff viene determinato tramite la formula:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \sum_{A=1}^{3} \left(\boldsymbol{\beta}_{n+1}\right)_A \ \mathbf{n}^{tr}_{A,n+1} \otimes \mathbf{n}^{tr}_{A,n+1} \tag{5.73}$$

dove $\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \breve{p}_{n+1}\mathbf{1} + \mathbf{t}_{n+1}$ e $\breve{p}_{n+1}$, $\mathbf{t}_{n+1}$ sono ottenuti sostituendo $\boldsymbol{\rho}^{e}_{n+1}$ nelle equazioni costitutive (4.39-4.40).

4. Aggiornamento della configurazione intermedia

Si calcola il tensore di Cauchy-Green sinistro aggiornato mediante la decomposizione spettrale:

$$\mathbf{b}^{e}_{n+1} = \sum_{A=1}^{3} \exp\left(2\rho^{e}_{A,n+1}\right) \ \mathbf{n}^{tr}_{A,n+1} \otimes \mathbf{n}^{tr}_{A,n+1} \tag{5.74}$$

dove le direzioni principali $\mathbf{n}^{tr}_{A,n+1}$ $(A = 1, 2, 3)$ sono quelle determinate nella fase 2.