

## FRAZIONI, INGRANAGGI E OROLOGI LUNARI

Francesca Tovena<sup>1</sup> [tovena@axp.mat.uniroma2.it](mailto:tovena@axp.mat.uniroma2.it)

Laura Lamberti<sup>2</sup> [lamberti.laura@gmail.com](mailto:lamberti.laura@gmail.com)

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica, Università di Roma “Tor Vergata”, Roma

<sup>2</sup>Liceo Scientifico Augusto Righi, Roma

### Abstract

Il laboratorio propone alcuni brevi percorsi didattici basati sulla manipolazione e sulla costruzione di ingranaggi. L'obiettivo principale della attività didattica presentata è quello di consolidare la nozione di frazione, sperimentare e illustrare alcune proprietà delle operazioni tra frazioni. Attraverso lo studio di alcuni semplici meccanismi costituiti da treni di ruote dentate il laboratorio permette la visualizzazione e la sperimentazione delle proprietà della moltiplicazione tra frazioni.

La realizzazione pratica di meccanismi di ruote dentate fornisce lo spunto per introdurre i concetti di prodotto e rapporto tra numeri interi, mentre, nel contempo, l'osservazione, l'utilizzo e la manipolazione dei meccanismi offrono la possibilità di visualizzare il confronto tra frazioni, di ragionare sull'ordinamento e sull'approssimazione di numeri razionali.

Il laboratorio prende spunto dall'osservazione delle fasi lunari e della loro periodicità. Viene quindi studiato in modo semplice il meccanismo di un celebre orologio che mostra l'alternarsi delle fasi lunari. Se ne discutono le difficoltà costruttive e le soluzioni implementate.

Nella costruzione degli orologi non sempre è utile realizzare meccanismi che forniscano dei rapporti esatti richiesti: talvolta il meccanismo deve essere costruito con ingranaggi di dimensioni standard, e quindi è obbligatorio ridursi ad utilizzare solo una serie di rapporti disponibili. Altre volte, i rapporti richiesti sono estremamente complessi da ottenere e la loro realizzazione esatta prevede l'uso di ruote dentate con diametri molto diversi tra loro. La soluzione consigliata è quella di avvicinarsi il più possibile al rapporto richiesto tramite una approssimazione che garantisca però l'efficienza e la funzionalità.

Per costruire il meccanismo bisogna quindi saper scegliere il valore approssimato ottimale di un numero razionale: vengono quindi brevemente introdotte le successioni di Farey e una particolare operazione di composizione tra frazioni che, in base alle sue proprietà, risulta particolarmente utile per risolvere problemi di approssimazione.

Infine si presentano alcune proposte di attività didattiche laboratoriali che mirano alla comprensione del funzionamento e alla costruzione artigianale di orologi: in particolare il meccanismo di trasmissione della velocità dall'asse dei minuti a quello dei secondi, un orologio da parete che misuri il tempo che trascorre in un anno e un meccanismo costituito da un treno di ingranaggi Lego che permetta l'utilizzo della velocità angolare della lancetta dei minuti per rappresentare il trascorrere del mese lunare siderale. L'attività è adatta ad essere svolta nelle classi seconda e terza della scuola secondaria di primo grado, oppure, con alcuni approfondimenti, nel primo biennio del secondo grado. Il laboratorio riprende in parte alcune attività proposte dalle stesse autrici per il progetto “Con la mente e con le mani” coordinato dal Polo di Roma dell'Accademia dei Lincei nell'anno 2018-2019.

L'articolo si concentra sulla descrizione delle attività didattiche e sulle conoscenze correlate, omettendo il quadro teorico che chiarisce il valore della metodologia laboratoriale e della condivisione di prasseologie meta-didattiche nell'insegnamento della matematica, per il quale è possibile fare riferimento ad esempio, a [Arzarello, Robutti (2013)].

**Parole chiave:** frazioni, ingranaggi di ruote dentate, luna, approssimazione, orologi

## LE FASI LUNARI E GLI OROLOGI.

La Luna compie una rivoluzione intorno alla Terra in un periodo lievemente variabile intorno ai 29 giorni (mese sinodico). Il mese sinodico non ha una durata costante, poiché dipende anche dal moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole. La durata massima del mese sinodico si ha durante il solstizio d'inverno ( $29d\ 20h\ 9m\ 36s$ , ove  $d$  indica i giorni,  $h$  le ore,  $m$  i minuti,  $s$  i secondi) mentre la durata minima avviene durante il solstizio d'estate ( $29d\ 6h\ 28m\ 48s$ ). Si stima una durata media del mese sinodico di 29,5306 giorni. La composizione dei due moti di rivoluzione, quello della Luna intorno alla Terra e quello della Terra intorno al Sole, entrambi ellittici ma con eccentricità diverse, determina la traiettoria del nostro satellite. Due particolarità del moto della Luna sono facilmente osservabili dal nostro pianeta: la variabilità della durata del mese sinodico (cioè del periodo di rivoluzione intorno alla Terra) e la variabilità della porzione di superficie lunare illuminata dalla luce solare e appunto visibile dal nostro pianeta. Durante il mese sinodico, quale che sia la sua durata, la Luna si trova allineata con la Terra e il Sole per due volte. Se invece si riferisce la posizione della Luna rispetto alle stelle fisse, si può misurare il periodo con cui la Luna si trova allineata con la Terra e un'altra stella (che non sia il Sole) scelta come riferimento. In questo caso, il periodo viene definito mese siderale e ha durata pressoché costante di circa 27 giorni; la misura del tempo riferito al mese siderale non permette di prevedere l'alternarsi delle fasi lunari.



**Figura 1:** Le fasi lunari

Le fasi lunari (Figura 1), cioè le porzioni di Luna illuminate dal Sole e visibili dal nostro pianeta, sono determinate dalla diversa posizione tra Terra, Luna e Sole. Nel caso in cui la Terra, il Sole e la Luna siano allineati tra loro si può avere la condizione di Luna nuova (la Luna si trova interposta tra la Terra e il Sole; la faccia della Luna che si mostra alla Terra non è illuminata dalla luce del Sole, la Luna non è praticamente osservabile dal nostro pianeta). Successivamente, si perviene in modo graduale alla fase identificata come primo quarto: in questo tempo si parla di Luna crescente e la porzione di Luna visibile ha un'area sempre più grande fino a raggiungere la fase di Luna piena in cui l'area illuminata dal Sole è la massima area visibile dal nostro pianeta. Il ciclo si conclude con l'ultimo quarto, o meglio con la luna calante. La Luna passa in modo continuo da una fase all'altra, per cui è possibile riconoscere anche altre fasi intermedie: per semplicità spesso negli orologi si fa riferimento solo a quattro situazioni tipiche: fase di luna nuova, crescente, luna piena e calante. Il termine "quarto" nasce dal fatto che in queste due posizioni orbitali è visibile mezzo emisfero della Luna.

Gli orologi che mostrano le fasi lunari devono rappresentare la periodicità con cui le fasi lunari si susseguono, cioè la durata del mese sinodico. Il loro unico motore elettrico o meccanico che rende possibile la misura del trascorrere delle ore e dei minuti deve pertanto trasmettere il movimento anche ai meccanismi che fanno ruotare il quadrante lunare. La velocità angolare fornita dal motore deve essere quindi trasmessa e convertita all'asse del quadrante lunare. La precisione richiesta è estremamente alta poiché gli orologi devono essere in grado di rappresentare le fasi lunari per molti anni. Se così non fosse,

l'errore di una stima imprecisa quindi andrebbe a sommarsi di mese in mese, poiché non si prevede la regolazione degli orologi in funzione delle fasi lunari, ma soltanto in funzione dell'ora esatta. La velocità di rotazione  $w_{luna}$  del quadrante con le fasi lunari, la velocità  $w_h$  di rotazione della lancetta e il loro rapporto sono riportate in Tabella 1.

**Tabella 1.** Valori delle velocità di rotazione  $w_{luna}$  del quadrante con le fasi lunari e  $w_h$  di rotazione della lancetta

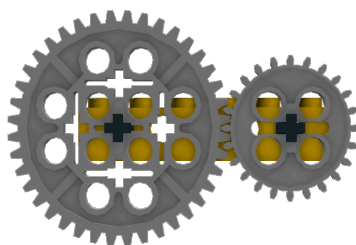
durata media del mese sinodico	$w_{luna}$	$w_h$	$w_{luna}/w_h$
29,5306 giorni	$\frac{1}{29,5306 \times 24}$ giri/h	$\frac{1}{12}$ giri/h	$\frac{\frac{1}{29,5306 \times 24}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{29,5306}$

La scelta delle ruote dentate usate per convertire le velocità di rotazione dipende dalle dimensioni dell'orologio che si vuole realizzare e soprattutto dalla precisione che tale orologio deve garantire. Occorre quindi approssimare in maniera ottimale il rapporto di conversione scegliendo una frazione che possa essere espressa come prodotto di più frazioni aventi denominatori piuttosto piccoli. Tale scelta combina semplicità costruttiva e efficienza e si riflette nell'utilizzo di ingranaggi di ruote dentate con diametri piccoli e confrontabili tra loro.

### I MECCANISMI E UN LORO USO DIDATTICO.

La trasmissione del moto rotatorio può essere realizzata tramite l'accoppiamento di ruote dentate. I denti permettono la trasmissione del moto sostanzialmente senza strisciamento. I ragazzi costruiscono vari meccanismi, variando le ruote utilizzate e ricavando la formula che descrive la relazione tra le velocità angolari di due ruote accoppiate in funzione del numero di denti. Alcune tavole di lavoro indirizzano le attività, anche tramite la compilazione e l'osservazione di tabelle e grafici.

Su ciascuna delle ruote utilizzate, ogni dente occupa un arco della medesima lunghezza  $d$ . I ragazzi riconoscono il legame tra il numero  $n$  di denti, la lunghezza della circonferenza esterna  $c$  della ruota, il raggio  $r$  della ruota; infatti, alla nota relazione  $c = 2\pi r$  si aggiunge la possibilità di esprimere la lunghezza della circonferenza contando il numero di denti  $c = n d$  e ricavare la relazione  $n d = 2\pi r$ .



**Figura 2.** Ruote dentate della collezione Lego

In Figura 2, si vede l'accoppiamento tra due ruote dentate della collezione Lego. La ruota dentata solidale con l'asse motore è chiamata *pignone*; in generale, il pignone è di piccole dimensioni e ha un numero di denti basso; la sua velocità di rotazione è quella dell'asse motore e tale velocità viene trasmessa a un'altra ruota dentata i cui denti siano accoppiati con i denti del pignone: la distanza tra i centri delle due ruote è pari alla somma delle lunghezze dei raggi.

Nel punto di contatto, la velocità tangenziale è la stessa nelle due ruote, ma il verso di rotazione della seconda ruota avverrà in senso opposto. Se le due ruote hanno lo stesso numero di denti, la seconda ruota gira in senso opposto alla prima, ma con la stessa velocità angolare. Aggiungendo una terza ruota uguale, otteniamo una ruota che gira come la prima, ma in una posizione differente: siamo quindi in grado di creare nuovi centri di rotazione, con ruote che hanno la stessa velocità.

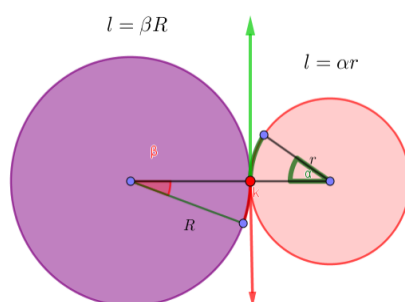
Per fare in modo che la seconda ruota abbia velocità di rotazione differente, occorre quindi che essa abbia un numero di denti diverso dal pignone. In tal caso, la ruota a cui viene trasmesso il moto avrà velocità di rotazione dipendente dal rapporto tra i denti delle due ruote, come è rappresentato in Figura 3. Chiamiamo  $R$  il raggio della ruota a sinistra e  $N$  il numero dei suoi denti, mentre con  $r$  e  $n$  il raggio e il numero dei denti della ruota piccola a destra, che rappresenta il pignone. Se la ruota a sinistra compie una rotazione di angolo  $\beta$ , la ruota a destra gira di un angolo  $\alpha$ . Il rapporto tra gli angoli di rotazione si ottiene considerando l'uguaglianza tra le lunghezze dei due archi che vengono a contatto: l'arco di contatto avrà lunghezza  $l = \beta R$  nella ruota a sinistra e  $l = \alpha r$  nella ruota a destra; i ragazzi scoprono quindi che la relazione tra gli angoli di rotazione è l'inverso del rapporto tra i raggi:

$$\alpha/\beta = R/r.$$

Ma il rapporto tra i raggi è uguale al rapporto delle lunghezze delle circonferenze, che era stato calcolato anche tramite il numero dei denti. Si ricava che

$$\alpha/\beta = R/r = 2\pi R / 2\pi r = N d / n d = N/n$$

mettendo in evidenza che il rapporto tra gli angoli di rotazione può essere calcolato tramite una frazione come l'inverso tra i rapporti del numero di denti. Come ci si aspetta, la ruota più grande ruota più lentamente di quella piccola.



**Figura 3.** Trasferimento della velocità angolare tra due ruote che si muovono senza strisciamento.

La velocità angolare è definita come il rapporto tra l'angolo di rotazione e il tempo espresso nell'unità di tempo. Denotiamo la velocità angolare con  $w_\alpha$  per la ruota a destra e con  $w_\beta$  per la ruota a sinistra. Il rapporto tra gli angoli di rotazione è dunque uguale al rapporto tra le velocità di rotazione  $w_\alpha / w_\beta = \alpha / \beta = N/n$  e il rapporto di conversione tra le velocità di rotazione è  $w_\beta = (n/N) w_\alpha$ . Il meccanismo delle due ruote a contatto corrisponde quindi a una divisione tra numeri interi, e permette di modificare la velocità angolare moltiplicandola per una frazione. Per fare in modo che un giro completo della ruota grande corrisponda ad un numero intero di giri della ruota piccola, occorre che il numero di denti della ruota grande sia un multiplo del numero di denti della ruota piccola.

I ragazzi utilizzano quanto appreso cercando di costruire un orologio che segni i secondi e i minuti. Ad esempio, se il pignone ha 8 denti e fa un giro completo ogni minuto, può essere utilizzato per la lancetta dei secondi. La lancetta dei minuti, invece, deve fare un giro ogni ora. Poiché il pignone fa 60 giri ogni ora, il rapporto tra la velocità angolare della ruota dei minuti e quella del pignone è  $1/60$ ; ma allora la ruota dei minuti deve avere  $60 \times 8$  denti: troppi!

Ai ragazzi viene quindi proposto un differente meccanismo, come in Figura 4, nel quale sono previste due ruote dentate solidali all'asse del motore. Con tale meccanismo si cerca di sfruttare il fatto che lo stesso rapporto può essere espresso tramite differenti frazioni.

Nella figura, le due ruote solidali sono colorate in grigio: esse hanno la stessa velocità ma un differente numero di denti: quella grigia più grande ha 16 denti e quella più piccola 8. La ruota verde piccola solidale alla ruota grande grigia ha 8 denti, mentre la ruota grande rossa solidale alla ruota grigia piccola ha 8 denti. I ragazzi osservano che il rapporto tra le velocità  $w_{\text{verde}}$  della ruota verde e della ruota grande grigia è di  $16/8 = 2$ , cioè la ruota verde ha velocità doppia della ruota grande grigia. Poiché le due ruote grigie hanno la stessa velocità angolare, il rapporto tra la velocità  $w_{\text{verde}}$  della ruota verde e  $w_{\text{rossa}}$  della ruota rossa è il prodotto dei due rapporti appena calcolati, cioè  $w_{\text{verde}}/w_{\text{rossa}} = 2 \times 3 = 6$ .

Si conclude che questo meccanismo permette di ottenere rapporti interi grandi senza la necessità di utilizzare ruote con molti denti: è sufficiente fattorizzare il rapporto voluto e costruire una serie di coppie di ruote appaiate corrispondenti ai singoli fattori. In particolare, il rapporto 60 può essere fattorizzato come  $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$  e realizzato con le ruote a disposizione.

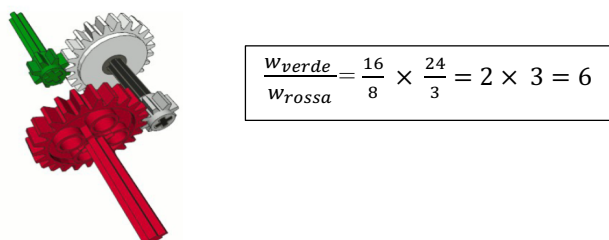


Figura 4. Ruote dentate degli ingranaggi Lego

### LE FRAZIONI DI FAREY.

L'osservazione dei meccanismi di ruote pone il problema di approssimare velocità note con frazioni con denominatore piccolo o fattorizzabile con fattori piccoli. Iniziamo quindi lo studio delle frazioni con denominatori piccoli. La successione di Farey di ordine  $n$  è l'insieme  $F_n$  delle frazioni ridotte ai minimi termini comprese tra 0 e 1, estremi inclusi, che hanno denominatore minore o uguale a  $n$ . Ordineremo in senso crescente gli elementi delle successioni di Farey. L'esempio di  $F_5$  è riportato in Figura 5.

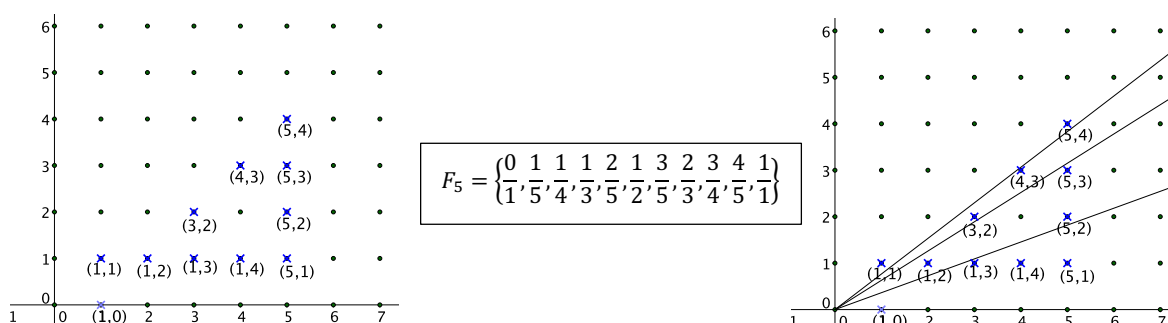
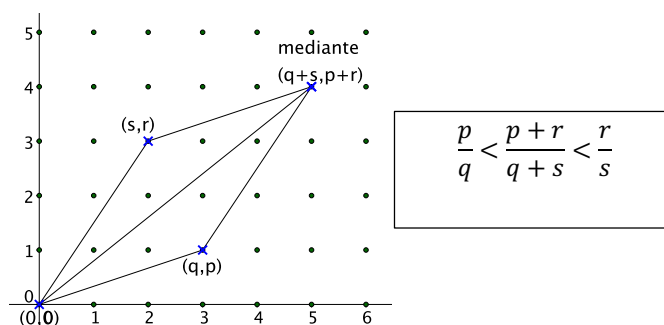


Figura 5. La successione di Farey di ordine 5: le semirette ordinano le frazioni in senso crescente

Come in Figura 5, ad ogni frazione  $p/q$  possiamo associare il punto  $(q,p)$  nel piano cartesiano. Le frazioni con lo stesso denominatore appartengono alla stessa colonna; le frazioni che assumono lo stesso valore (cioè che descrivono lo stesso numero razionale) appartengono ad una stessa retta per l'origine e, in tale retta, la frazione ridotta ai minimi termini è quella più vicina all'origine  $O$ ; negli anni successivi, i ragazzi impararono che  $p/q$  è la pendenza della retta. Osserviamo che muovendo una semiretta di vertice l'origine  $O$  in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle ascisse, le frazioni si incontrano rispettando l'ordine crescente.

Considerate due frazioni qualsiasi  $p/q < r/s$ , il loro mediant è la frazione  $(p+r)/(q+s)$ . Tale frazione ha il seguente significato geometrico: disegnando come in Figura 6 i segmenti tra l'origine  $O$  e i punti  $(q,p)$  e  $(s,r)$  che rappresentano le due frazioni, c'è un unico modo di completare la figura in modo da ottenere un parallelogramma di cui i segmenti disegnati sono lati. Si osserva che il mediant corrisponde al vertice opposto all'origine  $O$ , cioè alla pendenza della diagonale. L'interpretazione geometrica permette di visualizzare che il mediant fornisce sempre un valore intermedio alle due frazioni.



**Figura 6.** Rappresentazione geometrica del mediante di due frazioni  $p/q$  e  $r/s$ , con  $p/q < r/s$ .

Tale proprietà vale anche nel caso in cui si operi il mediante “pesato” di  $p/q$  e  $r/s$ , definito come il quoziente  $(p+kr)/(q+kr)$  e costruito analogamente a prima, utilizzando al posto della frazione  $r/s$  la frazione equivalente  $kr/ks$  con  $k$  intero non nullo.

I medianti pesati offrono l'opportunità di scrivere buone frazioni approssimanti scegliendo denominatori che, per esempio, si possono scomporre in fattori primi. Nella Tabella 2 è possibile osservare il procedimento e i calcoli che portano all'approssimazione del numero 29,5306 (valore medio del mese sinodico) con una frazione calcolata come mediante pesato tra i due numeri interi 29 e 30.

**Tabella 2.** Valori dei medianti pesati per l'approssimazione di 29,5306

$p/q$	$r/s$	peso $k$	mediante	distanza da 29,5306
29	30	1	59/2	0,0306
59/2	30	1	88/3	0,1973
59/2	30	2	147/5	0,1306
59/2	30	3	207/7	-0,0408
59/2	30	4	266/9	0,0862
59/2	30	5	325/11	-0,0149
59/2	30	6	384/13	-0,0079

Come è stato già fatto notare, la scelta dell'approssimazione è dettata dalla necessità di avere ingranaggi di misure standard o di lavorare con ingranaggi di dimensioni non troppo differenti tra loro. L'ultimo valore in tabella è quello utilizzato per costruire il treno di ingranaggi negli orologi da polso Patek-Philippe 1526 in modo da ridurre la velocità della lancetta delle ore a quella relativa alla velocità di rotazione della Luna intorno alla Terra:  $w_{luna}/w_h = 13/(2^8 \times 3)$ . Le ruote dentate che compongono il treno di ingranaggi devono raddoppiare o triplicare il rapporto di conversione, oltre naturalmente quella che lo deve aumentare di tredici volte. In ogni caso i diametri di queste ruote sono di dimensioni tali da poter essere facilmente disposti sotto il quadrante dell'orologio.

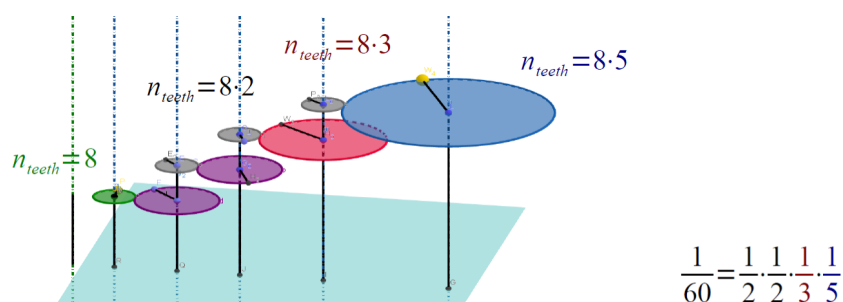


**Figura 7.** Il meccanismo degli ingranaggi del Patek-Philippe 1526

**Attività didattiche proposte in classe.**

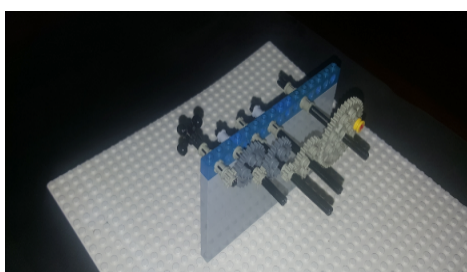
1. *Progetto del treno di ingranaggi per la trasmissione della velocità angolare tra l'asse della lancetta dei secondi e l'asse della lancetta dei minuti.* Si osserva che  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ . Il treno di ingranaggi di ruote dentate è quello rappresentato nello schema di Figura 8: oltre ai pignoni che trasmettono la rotazione tra le ruote e gli assi ci sono cinque ruote dentate: due dimezzano la velocità di rotazione, una la riduce di un terzo e una di un quinto. Oltre a costruire il meccanismo è possibile sperimentare anche la moltiplicazione tra frazioni  $(1/60) = (1/2) \times (1/2) \times (1/3) \times (1/5)$  osservandone la proprietà commutativa (invertendo l'ordine delle ruote) e la proprietà associativa. Si può sperimentare anche che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione invertendo l'ordine con cui vengono accoppiate le ruote dentate e i pignoni.

2. *Costruzione con il Lego di un treno di ingranaggi che permetta la trasmissione della velocità angolare dell'asse della lancetta delle ore ad una eventuale lancetta che segua il trascorrere del mese siderale.*



**Figura 8:** Treno di ingranaggi per il trasferimento della velocità da secondi a minuti

Il mese siderale ha durata 27 giorni e quindi il rapporto tra le velocità angolari delle due lancette sarà fornito dalla frazione  $1/(27 \times 2)$ . In Figura 9 vediamo la realizzazione pratica del treno di ruote dentate che permette la conversione della velocità angolare della lancetta delle ore con la velocità angolare della lancetta del mese siderale. Il treno è costituito da tre ruote dentate che permettono il rapporto di conversione  $1/3$ . Su ciascun asse è fissato un pignone da 8 denti che trasferisce il suo moto rotatorio a ruote dentate da 24 denti ottenendo quindi la riduzione ad un terzo della velocità angolare. L'ultima ruota dimezza ulteriormente la velocità angolare.



**Figura 9.** Treno di ingranaggi per riprodurre il mese siderale

3. *Costruzione dell'orologio che segna il trascorrere del tempo durante un anno solare.* Si propone di progettare la costruzione di un orologio che misuri il trascorrere dei giorni durante l'anno solare. L'attività proposta prevede il disegno del quadrante circolare dell'orologio su una parete dell'aula e l'utilizzo dell'asse motore solidale alla lancetta delle ore di un orologio da parete per muovere la lancetta che indicherà il trascorrere dei giorni durante l'anno. Per la realizzazione dell'orologio occorre risolvere due problemi: la segnatura delle tacche che scandiscono i giorni (e quindi la suddivisione in 365 parti della lunghezza della circonferenza) e poi la stima della velocità angolare della lancetta dei giorni. Il primo problema si risolve facilmente se si richiede una bassa approssimazione  $1/365 \approx 1/360$ .

DI.FI.MA. 2019: Matematica e Fisica nella cultura e nella società.

Il rapporto tra le velocità di rotazione  $w_h = (1/12)$  giri/h e la velocità  $w_y = 1/(5 \times 1753)$  giri/h della lancetta che segna il trascorrere dei giorni è  $R = (2^2 \times 3)/(5 \times 1753)$ . Se si approssima 1753 con 1755 si ottiene un rapporto di conversione  $R = 2^2/(3^2 \times 5 \times 13)$  che ha bisogno di un treno di 7 ruote dentate più i rispettivi pignoni.

## RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano il Piano Nazionale Lauree Scientifiche e il MIUR Excellence Department Project attribuito al Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", CUP E83C18000100006.

## BIBLIOGRAFIA

1. Ainsworth, J., Dawson, M., Pianta, J. and Warwick, J. (2012). The Farey sequence. In *Year 4 Project School of Mathematics, University of Edinburgh, March 15, 2012*.
2. Arzarello F., Robutti O., Sabena C., Cusi A., Garuti R., Malara N. and Martignoni F. (2013) Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programmes In Clark-Wilson A., Robutti O. & Sinclair N. (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era*, 347-372. Dordrecht: Springer.
3. Bagni, G.T. (1995). Frazioni continue discendenti e ascendenti. *Bollettino dei Docenti di Matematica* **30**, 85-90.
4. S. J. Beslin, D.J. Baney and V. De Angelis (1998). Small denominators: no small problems *Mathematics Magazine*, Vol. **71**, No. 20., 132-138.
5. Coxeter, H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry*. New York: Wiley.
6. Davenport, H., *The Higher Arithmetic, an Introduction to the theory of numbers* (1982). Cambridge University Press, 5<sup>th</sup> ed.
7. Devlin, K. (1999). *Dove va la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.
8. Glasby, S.P. (2017). *Enumerating the rationals from left to right*, *The American Mathematical Monthly* **118**, 830-835.
9. Hardy, G.H. and Wright, E.M. (1959). *An introduction to the theory of numbers*. Oxford: Clarendon Press.
10. Hawkins, I. (1837). *A treatise on the teeth of wheels*. London Scientific Library.
11. Popkonstantinović, B., Obradović, R., Jeli, Z. and Mišić, S. (2014). Synthesis, solid modeling and working simulation of Moon phase clock Mechanism, *Proceedings of the Fourth International Scientific Conference on Geometry and Graphics*, 141-156.
12. Scheinerman, E.R. (2000). When close enough is close enough, *The American Mathematical Monthly* **107**, 489-499.