L'analogia in fisica come strumento d'indagine: il moto casuale e l'interferenza tra onde incoerenti

In questo articolo viene messo in evidenza, attraverso un esempio concreto, un aspetto della scienza connesso alla descrizione matematica dei fenomeni naturali: l'analogia. L'esempio che è stato scelto esula, volutamente, dagli argomenti trattati nei corsi standard di fisica per le scuole superiori e riguarda due fenomeni fisici di natura completamente diversa, il moto casuale e l'interferenza tra onde incoerenti.

MASSIMO FANFONI - MASSIMO TOMELLINI

Introduzione

Nel vocabolario della lingua italiana «lo Zingarelli 2001» alla voce analogia, nel limite d'uso *fisica*, si legge: *Corrispondenza che esiste tra due fenomeni fisici di natura diversa quando le grandezze relative all'uno e le grandezze relative all'altro sono legate da equazioni identiche; permette di studiare fenomeni complessi su modelli costituiti da fenomeni più semplici.*

Al di là dell'esempio specifico che illustreremo e discuteremo, l'intento didattico di questo breve articolo è quello di stimolare lo studente a ricercare altre analogie all'interno del programma ministeriale di fisica (e oltre, se è particolarmente motivato), evidenziandone l'aspetto matematico generale. Questo esercizio, oltre a favorire una più profonda comprensione della materia, sovente attraverso un vantaggioso rimando intellettivo tra l'uno e l'altro fenomeno, nel contempo fornisce allo studente, magari futuro ricercatore, un mezzo potente di indagine, innovazione e scoperta.

I due fenomeni fisici presi in esame sono il moto casuale sul piano e l'interferenza tra onde. Di primo acchito questi sembrano effettivamente non avere nulla a che fare l'uno con l'altro, viceversa vedremo che esiste un profondo legame tra i due quando si consideri l'interferenza di onde la cui fase varia in modo casuale. Quest'ultimo è anche un punto chiave del presente contributo: il caso. Le leggi che lo regolano fanno parte della teoria della probabilità [1, 2], la quale non solo è una branca della matematica estremamente vitale ma è anche uno strumento fondamentale in molti settori della fisica (e delle scienze in generale), al punto che nessun fisico, oggidì, può esimere se stesso dal conoscerne i fondamenti. È dunque con l'idea di spronare insegnanti e studenti ad affrontare le difficoltà, ma anche le meraviglie di questa disciplina, che abbiamo scelto questo tipo di analogia che, ci rendiamo conto, richiederà allo studente uno sforzo in più.

Il cammino casuale

Per comprendere meglio il moto casuale sul piano è bene affrontare in primo luogo il più semplice caso monodimensionale (1D).

Consideriamo dunque una particella vincolata a muoversi su una linea retta. Il moto avviene per salti, tutti della stessa lunghezza, con eguale probabilità nelle due direzioni. Il sito della particella può pertanto essere individuato da una coordinata discreta, diciamo m. La domanda cui si vuol dare risposta è: a che distanza dall'origine si troverà la particella dopo aver compiuto N salti? Ovvero, quale sarà la sua coordinata dopo N salti?

Chiamiamo il salto verso destra *successo* e quello verso sinistra *insuccesso*. Sia n il numero di successi dopo N salti; la probabilità del verificarsi di un tale evento è evidentemente $(1/2)^n(1/2)^{N-n}$, in altre parole è la probabilità che si verifichino n successi per la probabilità che si verifichino $\bar{n} = N - n$ insuccessi. Esistono inoltre $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ modi diversi in cui questa sequenza può presentarsi e dunque la probabilità di avere n successi su N prove (salti) è:

$$B_{1/2} = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (1)$$

ovvero la probabilità binomiale [3,4]. Naturalmente il numero totale dei salti è la somma dei successi e degli insuccessi, $N = n + \bar{n}$, mentre la coordinata posizione sarà evidentemente data da $m = n - \bar{n}$. È facile verificare che $n = \frac{1}{2}(N + m)$ e $\bar{n} = \frac{1}{2}(N - m)$, in tal modo l'equazione (1) si può riscrivere:

$$B_{1/2}(n, N) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{n!\,\bar{n}!}\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N+m)\right]!\left[\frac{1}{2}(N-m)\right]!}\left(\frac{1}{2}\right)^N = B_{1/2}(m, N) \quad (2)$$

La (2) è la risposta alla nostra domanda, è la probabilità che dopo N salti la particella si trovi nell'm-simo sito. Va da sé che in questo caso l'equazione 2 è definita se N ed m sono ambedue pari o dispari. Possiamo calcolare il valor medio e la varianza di questa distribuzione (vedi appendice) ottenendo rispettivamente: $\langle m\rangle = 0$ e $Var(m) = \langle (m - \langle m\rangle)^2\rangle = N$. Il fatto che la coordinata media sia nulla è del tutto evidente, visto che la particella può saltare con eguale probabilità verso destra e verso sinistra. Si può dimostrare, si veda ad esempio il testo di Young [4] ovvero l'articolo di Chandrasekhar [5], che per N molto grande ed $m<<N$:

$$B(m, N) \rightarrow W(m, N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\, e^{-\frac{m^2}{2N}} \quad (3)$$

ed introducendo lo spostamento $x = ma$, con a lunghezza del salto, che la (3) si riduce alla densità di probabilità:

$$W(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N a^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2Na^2}} \quad (4)$$

Quest'ultima è nota come funzione gaussiana, ed è difficile trovare una funzione di probabilità di comparabile importanza.

La (4) si può generalizzare al caso bidimensionale (2D) sempre nell'ipotesi di salti completamente casuali; si ha per N molto grande:

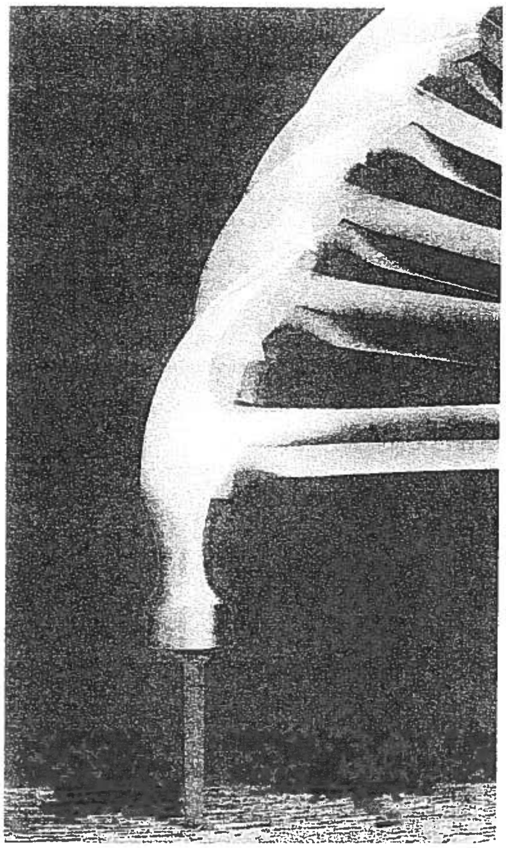
$$W(\mathbf{R}, N) = \frac{1}{2\pi N\lambda 2}\, e^{-\frac{R^2}{2N\lambda^2}} \quad (5)$$

dove $\mathbf{R}$ è il vettore posizione 2D della particella dopo N salti; inoltre:

$$\langle \mathbf{R}\rangle = 0 \quad (6a)$$

e

$$Var(\mathbf{R}) = \langle(\mathbf{R} - \langle\mathbf{R}\rangle)^2\rangle = \langle\mathbf{R}^2\rangle = N\lambda^2 \quad (6b)$$



La formula (5), come d'altro canto la (4), presuppone che tra un salto e l'altro non ci sia nessun «legame»; tecnicamente si dice che i salti non sono tra loro correlati. Inoltre, poiché $\mathbf{R} = \sum_{\mu=1}^{N} \mathbf{r}_\mu$ si ha:

$$\langle\mathbf{R}^2\rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{N}\mathbf{r}_\mu \cdot \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu \right\rangle = \lambda^2\left(N + 2\sum_{\mu>\nu}^{N}\langle\cos\vartheta_{\mu\nu}\rangle\right) \quad (7)$$

dove $\vartheta_{\mu\nu}$ è l'angolo tra il vettore spostamento del μ-mesimo e del ν-esimo salto. Nel caso in cui i salti della particella sono indipendenti il valor medio del coseno nella equazione 7 è uguale a zero. Infatti, nel calcolo di questa media è possibile associare ad ogni termine $\mathbf{r}_\mu \cdot \mathbf{r}_\nu$ un termine $\mathbf{r}_\mu \cdot (-\mathbf{r}_\nu)$ che cancella identicamente il primo. La radice quadrata della varianza si chiama scarto quadratico medio e permette di definire la distanza media dall'origine dopo N salti; si vede che nel caso non correlato la distanza è proporzionale alla radice quadrata del numero di salti.

Interferenza tra onde

Il problema è il seguente: vogliamo sapere, date N onde del tipo [6,7]:

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}_0 e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\mu - \omega t - \varphi_\mu)} = \mathbf{A}_0 e^{-i\phi_\mu} \quad (8)$$

come l'intensità totale dipende dal numero delle onde stesse. Nella (8) $\mathbf{r}_\mu$ è il vettore posizione, $\mathbf{k}$ è il vettore d'onda, il cui modulo è $2\pi/\lambda$, e λ è la lunghezza d'onda, ω la pulsazione, ϕ_μ è la costante di fase dell'onda μ-esima e ψ_μ l'intera fase. $|\mathbf{A}_0|$, uguale per tutte le onde, è l'ampiezza della singola onda e l'ampiezza totale è

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sum_{\mu=1}^{N} e^{-i\psi_\mu}.$$

Nel prosieguo discuteremo due casi interessanti:

a) tra un'onda e l'altra c'è una relazione di fase semplice $\psi_{\mu+1} = \psi_\mu + \vartheta$;

b) le fasi ψ_μ variano in maniera casuale.

Cominciamo col valutare l'ampiezza e l'intensità totale dell'onda nel caso *a*). L'ampiezza vale:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\sum_{\mu=1}^{N} e^{-i\psi_\mu}=\mathbf{A}_0 e^{-i\psi_1}\sum_{\mu=0}^{N-1} e^{-i\mu\vartheta}=\mathbf{A}_0 e^{-i\left(\psi_1+\frac{\vartheta(N-1)}{2}\right)}\frac{\sin\frac{N\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \qquad (9a)$$

e poiché l'intensità dell'onda è proporzionale al modulo quadrato dell'ampiezza si ottiene:

$$\mathbf{I} \propto \frac{sin^2 N\vartheta/2}{sin^2\vartheta/2} \qquad (9b)$$

Si riconosce la funzione di interferenza e, come noto, ogniqualvolta si verifica la condizione $\vartheta = 2\pi\frac{m}{N}$ con $m = 0, 1, 2, ...N-1$, risulta $\mathbf{I} \propto N^2$ [8].

Mostreremo tra un momento che l'intensità è invece proporzionale ad N nel caso in cui le onde siano emesse in maniera incoerente tra loro (caso *b*).

In generale, l'intensità può essere scritta nel modo seguente [9]:

$$\mathbf{I} \propto \sum_{\mu=1}^{N} e^{i\psi_\mu}\sum_{\nu=1}^{N} e^{-i\psi_\nu} = \sum_{\mu,\nu}^{N} e^{i(\psi_\mu-\psi_\nu)} = N + \sum_{\mu\neq\nu}^{N} e^{i(\psi_\mu-\psi_\nu)} =$$
$$= N + 2\sum_{\mu>\nu}^{N} \cos(\psi_\mu-\psi_\nu) = N + 2\sum_{\mu>\nu}^{N} \cos\psi_{\mu\nu}. \qquad (10)$$

Nel caso in cui il tempo di acquisizione del rivelatore (circa 0.1 sec, nel caso dell'occhio umano) sia molto maggiore del tempo tipico di emissione della singola onda (circa $10^{-9} - 10^{-8}$ sec), l'intensità misurata dal rivelatore sarà descritta dalla media temporale della (10), ovvero:

$$\langle\mathbf{I}\rangle = \langle\mathbf{A}^2\rangle \propto \left\langle N + 2\sum_{\mu>\nu}^{N}\cos\psi_{\mu\nu}\right\rangle = N + 2\sum_{\mu>\nu}^{N}\langle\cos\psi_{\mu\nu}\rangle. \quad (11)$$

Come si vede la (7) e la (11) sono formalmente identiche. Anche in questo caso, se le N sorgenti sono non correlate, la differenza di fase tra le onde emesse da due sorgenti qualunque entro l'intervallo di tempo di acquisizione, assume praticamente tutti i valori compresi nell'intervallo $[0, 2\pi]$[10]. Tale circostanza rende nullo il valor medio del coseno nella (11) e, come anticipato, l'intensità risulta proporzionale al numero N delle sorgenti.

Conclusioni

In ordine al formalismo matematico, è necessario mettere in evidenza una sottile differenza tra i due casi. Nel primo l'«interferenza» origina dalla sovrapposizione di vettori dello spazio reale 2D, mentre nel secondo dalla sovrapposizione di vettori dello spazio complesso, noti come *fasori* (vedi figura 1). Di questi se ne fa un ampio uso, ad esempio, nella teoria dei circuiti in corrente alternata.

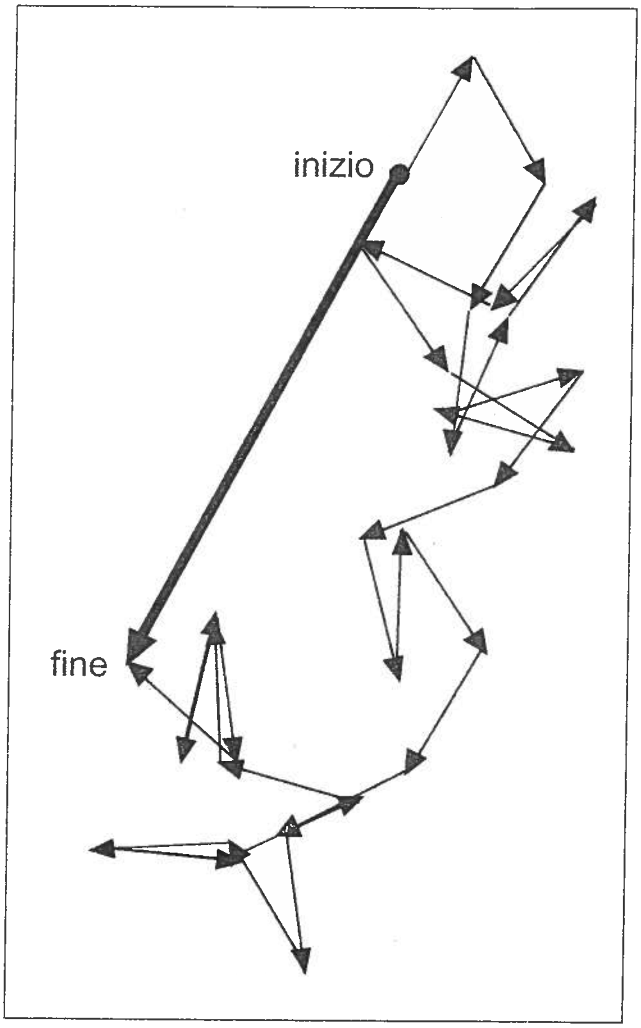
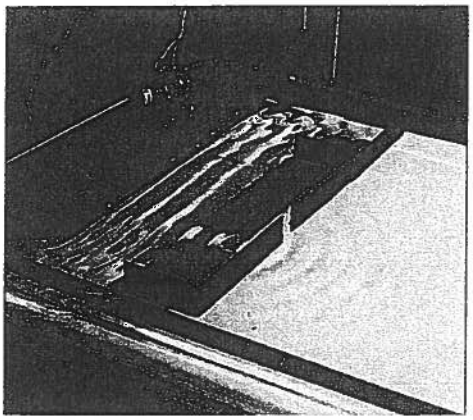
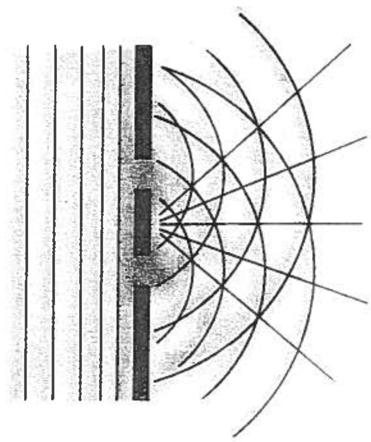


Fig. 1 La figura rappresenta trenta frecce di uguale lunghezza dirette casualmente nello spazio bidimensionale. Si tratta di una semplice simulazione al calcolatore in cui l'angolo è stato scelto attraverso un generatore di numeri «pseudo» casuali. Il modulo quadrato della risultante rappresenta la varianza della distribuzione ovvero l'intensità dell'onda «totale» a seconda che le frecce rappresentino i salti di una particella nello spazio reale (vettori) o le ampiezze di onde nello spazio complesso (fasori).





Un'onda che incontra un ostacolo con due aperture subisce il fenomeno dell'interferenza.

Esiste dunque una stretta analogia tra una «passeggiata» casuale e l'interferenza tra onde che possiedono una relazione di fase casuale, quando si confronti il modulo quadrato della distanza media percorsa con l'intensità media dell'onda risultante. Il processo di media in un caso è eseguito su una distribuzione di probabilità mentre nell'altro in un intervallo temporale. Su quest'ultimo punto c'è abbastanza materiale e soprattutto aspetti concettuali così profondi da richiedere più di un altro articolo.

Appendice

La probabilità binomiale

La probabilità di avere n successi su N prove, essendo p la probabilità di successo è data da:

$$B_p\,(n, N) = \binom{N}{n} p^n\,(1-p)^{N-n}.$$

Il valor medio dei successi è:

$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{N} nB_p\,(n, N) = pN \qquad \text{(A1)}$$

mentre la varianza è:

$$Var\,(n) = \left\langle (n-\langle n\rangle)^2\right\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \sum_{n=0}^{N} nB_p(n, N) - (pN)^2 = Np\,(1-\mathrm{p}). \qquad \text{(A2)}$$

Per la dimostrazione delle (A1) ed (A2) si veda ad esempio [4]. Nel caso discusso nell'articolo:

$$B_{1/2}\,(m, N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)!\left(N-\frac{N+m}{2}\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

dove p = 1/2. Allora per la (A1) si ha

$$\left\langle\frac{N+m}{2}\right\rangle = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\langle m\rangle = \frac{N}{2} \text{ ovvero } \langle m\rangle = 0.$$

Per quello che concerne la varianza è necessario un passo intermedio. In generale:

$$\begin{aligned} Var(an+b) &= \langle (an+b)^2\rangle - \langle an+b\rangle^2 = \langle (an+b)^2\rangle - (a\langle n\rangle + b)^2 = \\ &= \langle a^2n^2+b^2+2anb\rangle - a^2\langle n\rangle^2 - b^2 - 2ab\langle n\rangle = a^2(\langle n\rangle^2 - \langle n\rangle^2) = \\ &= a^2\,Var(n) \end{aligned} \qquad \text{(A3)}$$

Allora grazie alla (A3)

$$Var\left(\frac{N+m}{2}\right) = \frac{1}{4}\,Var\,(m) = \frac{1}{4}\,(\langle m^2\rangle - \langle m^2\rangle) = \frac{\langle m^2\rangle}{4}$$

essendo nullo il valor medio di m; ma per la (A2)

$$Var\left(\frac{N+m}{2}\right) = \frac{N}{4}, \text{ sicché } \langle m^2\rangle = N.$$

Massimo Fanfoni
Dipartimento di Fisica
Università «Tor Vergata» - Roma

Massimo Tomellini
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Chimiche - Università «Tor Vergata» - Roma

Bibliografia

[1] G. Spirito, *Matematica dell'incertezza*, Tascabili Economici Newton, Roma.
[2] B.Gnedenko, *Teoria della Probabilità*, Editori Riuniti, Roma.
[3] J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli, Bologna.
[4] H.D. Young, *Elaborazione statistica dei dati sperimentali*, Veschi Editore, Roma.
[5] S. Chandrasekhar, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Reviews in Modern Physics 15 (1943) 1.
[6] B. Rossi, *Ottica*, Tamburini Editore, Milano.
[7] G.S. Lansberg, *Ottica*, Ed MIR Mosca.
[8] M. Fanfoni, M. Tomellini, in *Didattica delle Scienze e informatica nella scuola*, n. 196, maggio 1998, p. 30.
[9] Lo studente dovrebbe provare a dimostrare l'equivalenza tra la (9b) e la (10) per alcuni valori di N.
[10] Nel caso dell'occhio umano vengono rivelati per ogni coppia di sorgenti $10^7 - 10^8$ valori di differenza di fase.