Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Sous-facteurs de $\mathscr{L}(F_\infty)$ d'indice $4\cos^2 \pi/n$, $n \geqq 3$

Florin RĂDULESCU

Résumé — Nous introduisons un modèle des probabilités non commutatives (au sens de Voiculescu) pour le produit libre amalgamé (réduit) $[\mathscr{L}(F_N)\otimes A] \underset{A}{*} B$, où $A \subseteq B$ est une inclusion d'algèbre de dimension finie (avec une trace). Ce modèle permettra de montrer que $\mathscr{A}_\lambda^n = (\mathscr{L}(F_\infty)\otimes A_n) \underset{A_n}{*} A_{n+1}$ est isomorphe à $\mathscr{L}(F_\infty)$, où $A_n = \{e_2 \ldots e_{n+1}\}''$, $A_{n+1} = \{e_1 \ldots e_{n+1}\}''$; $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont les projections de Jones associées à une valeur d'indice. Pour λ^{-1} dans la partie discrète de la série de Jones $\{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\}$, et n suffisamment grand, $\mathscr{L}(F_\infty) \cong \mathscr{A}_\lambda^n$ est un sous-facteur irréductible d'indice λ^{-1} dans $\mathscr{A}_\lambda^{n+1} \cong \mathscr{L}(F_\infty)$.

Subfactors of $\mathscr{L}(F_\infty)$ with index $4\cos^2 \pi/n$, $n \geqq 3$

Abstract — *We introduce a noncommutative probability model (in the sense of Voiculescu) for the (reduced) amalgamated free product* $(\mathscr{L}(F_N)\otimes A) \underset{A}{*} B$, *where* $A \subseteq B$ *is an inclusion of finite dimensional algebras (with trace). Using this model we prove that* $\mathscr{A}_\lambda^n = (\mathscr{L}(F_\infty)\otimes A_n) \underset{A_n}{*} A_{n+1}$ *is isomorphic to* $\mathscr{L}(F_\infty)$ *where* $A_n = \{e_2, \ldots, e_n\}''$, $A_{n+1} = \{e_1, \ldots, e_n\}''$, $(e_i)_i$ *being the Jones projections associated to an index value* λ^{-1}. *For* λ^{-1} *in Jones' discrete series* $\{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\}$ *and n big enough,* $\mathscr{A}_\lambda^n \cong \mathscr{L}(F_\infty)$ *is an irreducible subfactor of index* λ^{-1} *in* $\mathscr{A}_\lambda^{n+1} \cong \mathscr{L}(F_\infty)$ *of index* λ^{-1}.

Abridged English Version — We introduce in this paper a noncommutative probability approach (in the sense of Voiculescu) to the reduced, amalgamated free product algebras $(\mathscr{L}(F_N)\otimes A) \underset{A}{*} B$, and thus (by [15]) obtaining in this way a random matrix model for such algebras. Here $A \subseteq B$ is an inclusion of finite dimensional algebras with traces, $\mathscr{L}(F_N)$ is the type II_1 factor of the free group F_N, while the reduced, amalgamated free product is obtained by the Gelfand-Neimark-Segal construction ([3], [6], [13]), via a canonical trace [10] defined on a dense subset of the algebra.

Such algebras were first considered in [10], where it was proved that inside $(Q\otimes R_\lambda) \underset{R_\lambda}{*} R$ (Q a type II_1 factor) one can find a series of (irreducible) inclusions $N^S \subseteq M^S$ of type II_1 factors, of index $[M^S : N^S] = S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid n \geqq 3\} \cup [4, \infty)$. M^S are nonhyperfinite and non-Γ, but not necessarily isomorphic. Here $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ are the Jones projections [5] associated to $\lambda = S^{-1}$, while $R = A_\infty^1$; $R_\lambda = A_\infty^2$ where $A_n^1 = \{1, e_1, \ldots, e_n\}''$; $A_n^2 = \{1, e_2, \ldots, e_n\}''$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, are algebras with trace.

Using the random matrix model, we prove that $\mathscr{A}_\lambda^n = [\mathscr{L}(F_\infty)\otimes A_n^2] \underset{A_n^2}{*} A_n^1$ is isomorphic to $\mathscr{L}(F_\infty)$ for $\lambda = S^{-1} \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\} \cup [4, \infty)$. For $\lambda^{-1} = S$ in Jones'discrete series, the finite depth condition [5] on the inclusion $R \subseteq R_\lambda$ shows that for n big enough

$$(Q\otimes A_n^2) \underset{A_n^2}{*} A_n^1 \subseteq (Q\otimes A_{n+1}^2) \underset{A_{n+1}^2}{*} A_{n+1}^1 \tag{1}$$

is a type II_1 factors' inclusion of index $\lambda^{-1} = S$ (and invariant [5] A_n). Hence:

THEOREM. — $\mathscr{L}(F_\infty)$ (*the type* II_1 *factor of a free group with infinitely many generators*) *has* (*irreducible*) *subfactors of index* λ, *for each* λ *in Jones' discrete series.*

In particular we obtain that the factors in Popa's series, are such that $N^S \cong M^S \cong \mathscr{L}(F_\infty)$ for $Q = \mathscr{L}(F_\infty)$, $S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\}$. In fact it might be proved that

---

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/92/03150037 $ 2.00

$N^S(Q) \subseteq M^S(Q)$ is a consecutive inclusion in a (sufficiently big) suitable downward tunnel ([5], [8]) of (1).

This result gives us a first example of a type II_1 factor ($\mathscr{L}(F_\infty)$) which is nonisomorphic to the hyperfinite II_1 factor R, non-Γ, and such that the Jones invariant [5] is computable:

$$\mathscr{I}(\mathscr{L}(F_\infty)) = \mathscr{I}(R) = \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\} \cup [4, \infty)$$

(the only other II_1-factors M for which one has information about the invariants $\mathscr{I}(M)$ and $\mathscr{F}(M)$, are the ones associated to discrete groups with property T or more generally for T factors ([2], [1]); in this case by Connes' theorem [1] and by the results of Pimsner and Popa [9], these invariants are countable).

We recall here, that for a type II_1 factor M, with trace τ, $\mathscr{I}(M)$ is the set of all possible values of indices of subfactors of M, while $\mathscr{F}(M) = \{t > 0 \mid (\exists) e = e^* \in M$ idempotent, s.t. $\tau(e) = t,\ eMe \cong M\}$.

The line $[4, \infty)$ is contained in $\mathscr{I}(\mathscr{L}(F_\infty))$ because of Jones' observation [5], that each value $t/1-t$ in $\mathscr{F}(M)$ gives a (nonirreducible) subfactor of M of index $t^{-1} + (1-t)^{-1}$, and because of the fact ([12], *see* also [15]) that $\mathscr{F}(\mathscr{L}(F_\infty)) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

We hope that our methods could be also used to find an answer to the intriguing question regarding the possible values ($\geqq 4$) of indices of irreducible subfactors of $\mathscr{L}(F_\infty)$, since, by its properties $\mathscr{L}(F_\infty)$ is close to R, while the series $N^S \subseteq M^S$, introduced by Sorin Popa in [10], is a series of irreducible inclusions of non-Γ factors, close (by construction) to $\mathscr{L}(F_\infty)$ also for $S \geqq 4\ (Q = \mathscr{L}(F_\infty))$.

In a further paper we will analyse results that are similar to these in this announcement, for other type II_1-factors (associated to the free groups F_N, $N \in \mathbb{N}$) or for other inclusions $A \subseteq B$.

We are indebted to D. Voiculescu, S. Popa and G. Skandalis for several discussions on this subject.

On introduit dans cette Note une approche par la probabilité non commutative (de Voiculescu, [14], [15]) du produit libre amalgamé (réduit), $[\mathscr{L}(F_N) \otimes A] \underset{A}{*} B$. On obtient de cette manière un modèle de matrices aléatoires pour de telles algèbres.

Ici $A \subseteq B$ désigne une inclusion d'algèbres de dimension finie (B est donné avec une trace), $\mathscr{L}(F_N)$ est le facteur de type II_1 associé à un groupe libre et le produit libre amalgamé (réduit) est obtenu par la construction G.N.S. ([3], [6], [13]) en partant d'une trace [10] sur une partie dense de l'algèbre. De telles algèbres (comme $[\mathscr{L}(F_N) \otimes A] \underset{A}{*} B$) ont été introduites en premier lieu dans [10]; on avait alors prouvé l'existence d'inclusions irréductibles $N^S(Q) = N^S \subseteq M^S = M^S(Q)$ dans $(Q \otimes R_\lambda) \underset{R_\lambda}{*} R$, d'indice $[M^S : N^S] = S$, $S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\} \cup [4, \infty)$. M^S et N^S sont non-Γ et non nécessairement isomorphes. Ici les $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont les projecteurs de Jones associés à $\lambda = S^{-1}$ et $R = A^1_\infty$, $R_\lambda = A^2_\infty$, où $A^1_n = \{1, e_1, \ldots, e_n\}''$; $A^2_n = \{1, e_2, \ldots, e_n\}''$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (avec leurs traces) [10].

En utilisant le modèle à matrices aléatoires on prouve que $\mathscr{A}^n_\lambda = [\mathscr{L}(F_\infty) \otimes A^2_n] \underset{A^2_n}{*} A^1_n$ est isomorphe à $\mathscr{L}(F_\infty)$, pour tous $\lambda = S^{-1} \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geqq 3\} \cup [4, \infty)$.

Pour $\lambda = S^{-1}$ dans la partie discrète de la série de Jones, la condition de profondeur finie ([5], [1]) de l'inclusion $R \subseteq R_\lambda$ montre que pour n suffisamment grand, l'inclusion $(Q\otimes A_n^2) \underset{A_n^2}{*} A_n^1 \subseteq (Q\otimes A_{n+1}^2) \underset{A_{n+1}^2}{*} A_{n+1}^1$, de facteurs de type II_1, a pour indice $\lambda^{-1}=S\in\{4\cos^2\pi/m \mid m\geqq 3\}$. En conséquence on a :

THÉORÈME. — $\mathscr{L}(F_\infty)$ *(le facteur de type II_1 d'un groupe libre avec une infinité de générateurs) a des sous-facteurs irréductibles d'indice* λ *(et invariant* A_{m+2}*) pour tout* λ *dans la partie discrète de la série de Jones :*$\{4\cos^2\pi/m \mid m\geqq 3\}$.

En effet, il est possible de prouver qu'on peut retrouver l'inclusion $N^S\subseteq M^S$ dans un tunnel descendant [8] associé à l'inclusion $\mathscr{A}_\lambda^n\subseteq\mathscr{A}_{\lambda+1}^n$ pour n suffisamment grand.

Il s'ensuit en particulier ([8] et [10]) que les facteurs de la série de Popa sont tels que $N^S\cong M^S\cong\mathscr{L}(F_\infty)$ (pour $S\in\{4\cos^2\pi/m \mid m\geqq 3\}$).

On obtient ainsi un premier exemple d'un facteur de type II_1, non isomorphe au facteur hyperfini R et non-Γ, et dont l'invariant de Jones [5], $\mathscr{J}(\mathscr{L}(F_\infty))$ peut être calculé de manière explicite :

$$\mathscr{J}(\mathscr{L}(F_\infty))=\{4\cos^2\pi/m \mid m\geqq 3\}\cup[4,\infty) \quad (=\mathscr{J}(R)),$$

(les seuls autres facteurs M de type II_1 pour lesquels on a des informations sur l'invariant $\mathscr{J}(M)$ [et $\mathscr{F}(M)$] sont les facteurs associés à des groupes ayant la propriété T; dans ce cas, par le théorème de Connes [1] et par les résultats de Pimsner et Popa [9], ces derniers invariants sont dénombrables.

Rappelons ici que pour tout facteur M de type II_1 avec trace τ, $\mathscr{J}(M)$ est l'ensemble des valeurs possibles des valeurs d'indice des sous-facteurs (qui par [5] est toujours contenu dans $\mathscr{J}(R)$) et $\mathscr{F}(M)$, le groupe fondamental de M, est l'ensemble

$$\{t>0 \mid \text{il existe } e\in M,\ e \text{ idempotent},\ e=e^*,\ \text{t. q. } \tau(e)=t,\ eMe\cong M\}.$$

Le fait que la série continue $[4,\infty)$ est contenue dans $\mathscr{J}(\mathscr{L}(F_\infty))$ est conséquence de l'observation suivante de Jones : tout nombre $t/1-t$ dans $\mathscr{F}(M)$ permet la construction d'un sous-facteur (non irréductible) de M, d'indice $t^{-1}+(1-t)^{-1}$ et du fait que $\mathscr{F}(\mathscr{L}(F_\infty))=\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ ([12], *voir* aussi [14]).

Dans un article ultérieur nous démontrerons le résultat suivant :

THÉORÈME A [17]. — *Soit* $\mathscr{C}$ *un carré commutatif (au sens de* [11])

$$\mathscr{C}=(A\supseteq B\supseteq D;\ A\supseteq C\supseteq D)$$

d'algèbres de dimension finie (où A *est donné avec une trace). On suppose de plus que* $\mathscr{C}$ *est irréducible et que* $\mathscr{C}$ *a des propriétés similaires à celles des carrés commutatifs qui apparaissent dans des inclusions de profondeur finie* ([16], [11]). *Soit* Q *un facteur de type* II_1. *Alors* $M^{\mathscr{C}}(Q)=(Q\otimes B)\underset{B}{*}A\supseteq(Q\otimes D)\underset{D}{*}C=N^{\mathscr{C}}(Q)$ *est une inclusion (irréductible) de facteurs de type* II_1 *d'indice (de Jones) égal à* $\|\Gamma^t\Gamma\|$ *où* Γ *est la matrice de l'inclusion* $B\subseteq A$.

Concernant les commutants relatifs supérieurs de ces sous-facteurs le résultat suivant nous a été communiqué par S. Popa.

THÉORÈME B (S. Popa). — *Dans les conditions du théorème précédent, soit* $Q_\infty\subseteq P_\infty$ *l'inclusion des facteurs hyperfinis obtenue en itérant la construction de base du carré commutatif* $\mathscr{C}$. *Alors les commutants relatifs supérieurs de* $N^{\mathscr{C}}(Q)\subseteq M^{\mathscr{C}}(Q)$ *coïncident avec ceux de* $Q_\infty\subseteq P_\infty$, i.e. *les paragroupes de* $Q_\infty\subseteq P_\infty$ *et* $N^{\mathscr{C}}(Q)\subseteq M^{\mathscr{C}}(Q)$ *sont isomorphes. En particulier les deux inclusions ont les mêmes graphes standards.*

En utilisant les méthodes de cet article nous démontrons :

THÉORÈME C. — *Pour toute inclusion* $A \supseteqq B$ *d'algèbres de dimension finie* (A *a une trace*) *et pour tout* $N \geqq 2$ *on a*

$$(\mathscr{L}(F_N) \otimes B) \underset{B}{*} A \cong \mathscr{L}(F_{1+N\langle \Gamma\Gamma^t s, s\rangle - \langle s, s\rangle}).$$

Ici Γ *est la matrice de l'inclusion* $A \supseteqq B$, s *est le vecteur des traces de projecteurs minimaux de* B.

THÉORÈME D. — *Soit* $\mathscr{C}$ *comme dans le théorème A,* Γ *comme dans le théorème C. Pour tout* $N \geqq 2$ (*ou* $N = \infty$) *il existe un sous-facteur irréductible* $\mathscr{A} \subseteqq \mathscr{L}(F_N)$ *tel que* $[\mathscr{L}(F_N) : \mathscr{A}] = \|\Gamma\Gamma^t\|$ *et* $\mathscr{A} \cong \mathscr{L}(F_{(N-1)\|\Gamma^t\Gamma\|+1}) \cong (\mathscr{L}(F_N))_{\|\Gamma\|^{-1}}$. *De plus les invariants supérieurs de* $\mathscr{A} \subseteqq \mathscr{L}(F_N)$ *coïncident avec ceux de* $P_\infty \subseteqq Q_\infty$ (*comme dans le théorème B*).

Dans les théorèmes C, D on va utiliser une série « $\mathscr{L}(F_r)_{r \in \mathbb{R}, r>1}$ » généralisant la série $\mathscr{L}(F_N)_{N \in \mathbb{N}, N \geqq 2}$. (Une série similaire a été introduite par K. Dykema [18].) Ceci a la propriété (*voir* [14]) $\mathscr{L}(F_r)_t \cong \mathscr{L}(F_{(r-1)t^{-2}+1})$, et $\mathscr{L}(F_{t+s}) \cong \mathscr{L}(F_s) * \mathscr{L}(F_t)$, $s, t \geqq 1$, donc en particulier :

COROLLAIRE. — $\mathscr{L}(F_r)_{r>1}$ *sont isomorphes par tensorisation avec* B(H) (*voir* [19] *et* [14]) *et, pour le groupe fondamental* $\mathscr{F}(\mathscr{L}(F_r))$, *on a* $\mathscr{F}(\mathscr{L}(F_r)) = \{1\}$ *pour tout* $r > 1$, r *fini, ou bien* $\mathscr{F}(\mathscr{L}(F_r)) = \mathbb{R}_+/\{0\}$, *pour tout* $r > 1$ (r *fini*). *Par conséquent, les algèbres* $\mathscr{L}(F_N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $N \geqq 2$ *ou bien sont toutes isomorphes, ou bien non isomorphes.*

Rappelons quelque définitions et résultats de [14]. Si $(\mathscr{A}, \varphi)$ est un facteur de type II_1 avec trace φ, alors une famille de sous-algèbres unitales, $(A_i)_{i \in I} \subseteqq A$ est dite libre si $\varphi(a_1 a_2 \ldots a_n) = 0$ pour tout $a_i \in A_{j_i}$, $\varphi(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j_1 \neq j_2$, $j_{n-1} \neq j_n$. Une famille $(X^s)_{s \in S}$ est dite semi-circulaire si, $X^s = X^{s*}$, si les algèbres engendrées $\{X^s, 1\}''_{s \in S}$ forment une famille libre et si, pour tout s

$$\varphi((X^s)^k) = (2/\pi) \int_{-1}^{1} t^k \sqrt{1-t^2}\, dt, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k \geqq 0.$$

Rappelons aussi que, pour tout sous-ensemble X contenu dans $\mathscr{A}$, X'' est l'algèbre de von Neumann, engendrée par X dans $\mathscr{A}$ (et contenant l'identité de $\mathscr{A}$).

Si P_1, P_2 sont deux algèbres de von Neumann de type fini avec des traces (normalisées) τ_1 et τ_2, et B est une sous-algèbre de von Neumann de P_1 et P_2 (dont la trace coïncide avec la trace induite par celle de P_1 et par celle de P_2) alors $P_1 \underset{B}{*} B_2$ ([14], [10]) est l'algèbre de type fini (le produit libre réduit amalgamé de P_1, P_2 sur B), obtenue par la construction G.N.S. associée à la trace τ, définie initialement sur les produits $x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n$ [où $(x_1 b) y_1 x_2 \ldots y_n$ est identifié avec $x_1 (b y_1) x_2 y_2 \ldots y_n$, $b \in B$], $x_i \in P_1$, $y_i \in P_2$, $i = 1, \ldots, n$, par la relation

$$\tau(x_1 y_1 \ldots x_n y_n) = 0 \quad \text{si } E_B(x_i) = E_B(y_i) = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

Dans la proposition suivante on va donner une inclusion canonique de $\mathscr{L}(F_\infty) \otimes A \underset{A}{*} B$ dans $\mathscr{L}(F_\infty) * B$. Ici $A \subseteqq B$ sont des algèbres de dimension finie.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathscr{B}$ *un facteur de type* II_1 (*avec trace normalisée* τ) *et soit* $(Y^s)_{s \in S}$ *une famille* (*libre*) *semi-circulaire dans* $\mathscr{B}$ *qui est aussi libre* (*par rapport à* τ) *avec la sous-algèbre* B *de* $\mathscr{B}$, *de dimension finie. Soit* $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ *une partition de l'unité* (*par projecteurs*) *dans* $B \subseteqq \mathscr{B}$, *et soit* A *l'algèbre engendrée par* $(p_i)_{i=1}^t$. *On définit une nouvelle famille semi-circulaire, en posant :*

$$X^s = \sum \tau(p_i)^{-1/2} p_i Y^s p_i, \qquad s \in S.$$

Alors l'algèbre $\{(X^s)_{s\in S}, B\}''$ *(avec la trace induïte de* $\mathscr{B}$*) est isomorphe à* $[\{(X^s)_{s\in S}\}''\otimes A] \underset{A}{*} B$.

Preuve. — Il est immédiat que $\tau((X^s)^2 p_i)=\tau(p_i)\tau((Y^s)^2)$ et donc que $\tau(xa)=\tau(x)\tau(a)$ pour x dans $\{(X^s)_{s\in S}\}''$ et a dans A. En particulier, il s'ensuit que $(X^s)_{s\in S}$ est semi-circulaire.

Pour prouver l'isomorphisme de l'énoncé il est donc suffisant de prouver que

$$\tau(f_1 b_1 f_2 b_2 \dots f_n b_n)=0$$

si $\tau(f_i)=0$, $E_A(b_i)=0$, $f_i\in(X^{s_i})''$, $s_i\in S$, $i=1,2,\dots,n$.

Le théorème 2.3 de [15] nous permet (pour calculer la trace de tels éléments), par un passage à la limite des dimensions des matrices, de supposer que $(X^s)_{s\in S}$ sont des matrices aléatoires diagonales par blocs, $X^s=\bigoplus_{i=1}^{t} A^{s,i}$ dans $\bigoplus_{i=1}^{t} M_{m_i}(\mathbb{C})\subseteq M_m(\mathbb{C})$, $(m=m_1+\dots+m_t)$ où les entrées de $A^{s,i}=(a_{je}^{s,i})_{j,e=1}^{m_i}$, $i=1,2,\dots,t$, $s\in S$ sont une famille gaussienne indépendante sur un espace de probabilité Σ et d'espérance conditionnelle $\mathscr{E}$ nulle, tandis que $\mathscr{E}(|a_{je}^{s,i}|^2)=\tau(p_i)(m/m_i^2)$ [qui est la condition que $\tau((X^s)^2 p_i)=\tau(p_i)$ si à la limite m_i/m est $\tau(p_i)$, $i=1,2,\dots,t$]. Ici, par ([14], [4]), B est représentée par des fonctions (sur l'espace Σ) matricielles constantes, de sorte que $p_i=1_{M_{m_i}}(\mathbb{C})\in\bigoplus_{j=1}^{t} M_{m_j}(\mathbb{C})\subseteq M_m(\mathbb{C})$, et telles que la dimension des projections minimales de B tend vers l'infini [la trace sur B étant approximée par la trace normalisée induite par $M_m(\mathbb{C})$].

Sous cette forme, on peut récupérer la trace sur l'algèbre engendrée par $(X^s)_{s\in S}$ et B, en composant la fonctionnelle traciale (normalisée) à valeur dans les fonctions sur Σ sur les fonctions matricielles, avec l'espérance conditionnelle $\mathscr{E}$.

Avec cette représentation on peut reprendre la preuve du théorème 2.4 de [15] et en conséquence, il est suffisant de vérifier les conditions de liberté (d'ordre 2) similaires à celles des hypothèses du théorème 2.1 [15], dans lesquelles l'algèbre Δ est remplacée par B et la condition $2b$ par

$$\varphi(T^{s_1} D_1 T^{s_2} D_2 T^{s_3} D_3 \dots T^{s_n} D_n)=\varphi(E_A(D_1) D_2 T^{s_3} D_3 \dots T^{s_n} D_n).$$

Ici $\varphi=\tau$, $X^s=T^s$, $s\in S$, et $D_i\in B$, $s_i\in S$, $i=1,2,\dots,n$, $s_1=s_2$, $\operatorname{card}\{i\,|\,s_i=p\}\leqq 2$, pour tout p.

Les autres conditions sont des conséquences directes de ce même théorème (2.4 de [15]) pour les variables $(Y_s)_{s\in S}$; quand à $2b$ c'est une conséquence du fait que l'espérance conditionnelle de la matrice $X^s b X^s$ est (à la limite) $E_A(b)$ pour b dans B.

LEMME 2. — *Soit* $A_{n-1}\subseteq A_n$ *les algèbres de Jones,*

$$A_{n-1}=\{e_2,\dots,e_n\}''\subseteq\{e_1,\dots,e_n\}''=A_n,\qquad n\geqq 2,$$

où $(e_i)_i$ *sont les projecteurs de Jones associés à un nombre* λ^{-1} *dans* $\{4\cos^2\pi/m\,|\,m\geqq 3\}\cup[4,\infty)$. *Alors* $\mathscr{A}=(\mathscr{L}(F_\infty)\otimes A_{n-1}) \underset{A_{n-1}}{*} A_n$ *est isomorphe à* $\mathscr{L}(F_\infty)$.

LEMME 3. — *Soit* Q *un facteur de type* II_1, λ^{-1} *un nombre dans* $\{4\cos^2\pi/m\,|\,m\geqq 3\}$*; soient* $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *les projecteurs de Jones associés et notons* $A_n^2=\{e_2,\dots,e_n\}''$, $A_n^1=\{e_1,\dots,e_n\}''$ *avec les traces correspondantes* [5]. *Pour* n *suffisamment grand* *l'inclusion*

$$\mathcal{A}_n = (Q \otimes A_n^2) \underset{A_n^2}{*} A_n^1 \subseteq (Q \otimes A_{n+1}^2) \underset{A_{n+1}^2}{*} = \mathcal{A}_{n+1}$$

est d'indice λ^{-1}.

Preuve. — On doit vérifier que e_{n+1} vérifie les axiomes du lemme 1.5.2 de [10], (i) $\mathcal{A}_{n+1} = \overline{S}_p(\mathcal{A}_n e_{n+1} \mathcal{A}_n)$, (ii) $E_{\mathcal{A}_n}(e_{n+1}) = \lambda$, (iii) $e_n \mathcal{A}_n e_n \subseteq \mathcal{A}_n e_n$.

Le plus difficile est l'axiome (i). Le cas générique consiste à prouver que chaque produit $e_n \ldots e_1 X^s e_1 \ldots e_n$ (pour n suffisamment grand), est égal à une combinaison linéaire de monômes en $e_1, \ldots, e_n, X^s$ dans lesquels e_n apparaît une seule fois. Ceci est une conséquence de la condition de profondeur finie qui montre l'existence d'un n dans $\mathbb{N}$ (suffisamment grand) et d'une combinaison linéaire entre les mots ordonnés dans $e_1, \ldots, e_n$ [5].

Ces deux derniers lemmes achèvent la preuve du théorème.

Note remise le 15 mars 1992, acceptée le 15 avril 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. CONNES, A factor of type II_1 with countable fundamental group, *J. Operator Theory*, 4, 1980, p. 151-153.

[2] A. CONNES et V. F. R. JONES, Property T for von Neumann algebras, *Bull. London Math. Soc.*

[3] J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[4] K. DYKEMA, *Free products of free group factors with matrix algebras and the hyperfinite* II_1*-factor*.

[5] V. F. R. JONES, Index for subfactors, *Invent. Math.*, 72, 1983, p. 1-25.

[6] KADISON et RINGROSE, *Operator Algebras*.

[7] A. OCNEANU, Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras, dans *Operator Algebras and Appl.*, 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 136, 1988, p. 119-172.

[8] M. PIMSNER et S. POPA, Entropy and index for subfactors, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 19, 1986, p. 57-106.

[9] M. PIMSNER et S. POPA, Sur les sous-facteurs d'indice fini d'un facteur de type II_1 ayant la prop. T, *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).

[10] S. POPA, *Markov traces on universal Jones algebras and subfactors of finite index*, preprint I.H.E.S., n° 43, 1990.

[11] S. POPA, Maximal injective algebras, *Adv. in Math.*, 50, 1983, p. 27-48.

[12] F. RĂDULESCU, The fundamental group of $\mathcal{L}(F_\infty)$ is $R_+ \setminus \{0\}$, *J. Amer. Math. Soc.* (à paraître).

[13] M. TAKESAKI, *Operator Algebras*, Springer Verlag, 1989.

[14] D. VOICULESCU, Circular and semicircular systems and free product factors in Operator Algebras, *Progr. Math.*, 92, Birkhäuser, 1990, p. 45-60.

[15] D. VOICULESCU, Limit laws for random matrices and free products, *Invent. Math.*, 104, 1991, p. 201-220.

[16] H. WENZL, Hecke algebras of type A_n and subfactors, *Invent. Math.*, 92, 1988, p. 349-383.

[17] F. RĂDULESCU, *Random matrices, amalgamated free products and subfactors of* $\mathcal{L}(F_N)$, preprint, 1991.

[18] K. DYKEMA, Letter to the author.

[19] F. RĂDULESCU, *Stable isomorphism of the group algebras associated to free groups*, preprint I.H.E.S., 1991.

I.H.E.S., 35, *route de Chartres*, 91440 *Bures-sur-Yvette*.