Probabilità

Luigi Accardi

Indice

1 Introduzione: il ritardo del caso

Le discipline fondamentali della matematica esprimono il tentativo dell'umanità di chiarire, analizzandole, applicandole e esplicitandone i presupposti, alcune intuizioni primordiali riguardanti entità che l'uomo percepisce come *esterne a se*: la geometria studia lo *spazio*, l'analisi il *continuo*, la meccanica il *movimento* e le *forze* (o, nella loro più astratta versione contemporanea, i *campi*), la logica le *leggi del ragionamento*, la probabilità il *caso, l'induzione e le decisioni.*

Con il passare del tempo quelle categorie mentali create dall'uomo per poter trattare queste *realtà esterne* , diventano esse stesse, attraverso il pensiero e il linguaggio, *realtà esterne* che ispirano ulteriori riflessioni e sviluppi matematici. Cosı per esempio la combinatoria studia il *finito*, la teoria degli insiemi formalizza le idee di *classificazione* e di *infinito*, l'aritmetica nasce dall'idea del *contare* e l'algebra studia le stesse *strutture* simboliche astratte che emergono nei vari rami della matematica.

Rispetto alle discipline matematiche che esplicitano e quantificano intuizioni primordiali la probabilità emerge come teoria con grande ritardo storico.

Ciò non è stupefacente se si tiene conto del fatto che la descrizione quantitativa della realtà è basata su modelli matematici che sono stati costruiti lentamente nel corso di millenni di storia: è naturale che questo processo prenda avvio da quelle realtà che sono più semplici da modellizzare e più vicine a percezioni e intuizioni immediate (misurare, contare, ...) e solo in un secondo momento prenda in considerazioni realtà più complesse e legate a nozioni più sofisticate (caso, probabilità, informazione, ...).

Le regolarità del moto degli astri e l'universalità di certe proprietà geometriche (per es. il fatto che la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo è 180 gradi) sono stati i modelli sui quali si è costruita la scienza occidentale per oltre due millenni.

Il solo concepire la possibilità di analoghe regolarità nei fenomeni che chiamiaamo *casuali*, cioè le *regolarità statistiche*, richiede un livello di astrazione maggiore. L'osservazione sperimentale di tali regolarità in natura richiede strumenti di misura più sofisticati. Ciò spiega perché le prime osservazioni delle regolarità statistiche riguardino una realtà artificiale e semplificata come quella dei giochi d'azzardo e non fenomeni naturali come quelli che avevano ispirato l'astronomia e la geometria.

Ma occorre attendere circa 4.000 anni per passare dai primi *talus* (antenati dei dadi, ritrovati in Egitto) ai primi problemi e al primo libro sull'argomento, il *De Ludo Aleae*, scritto da Gerolamo Cardano nel 1563 ma stampato quasi un secolo dopo.

Deve ancora passare quasi un secolo per arrivare a quello che oggi viene considerato l'atto di nascita della della teoria delle probabilità come disciplina scientifica, cioè la corrispondenza intercorsa tra Blaise Pascal e il cavalier De Mere tra Luglio e Ottobre 1654. In particolare Pascal, con una di quelle intuizioni anticipatrici che caratterizzano i grandi scienziati, definisce la nuova teoria in termini che ancora oggi, dopo oltre 350 anni, conservano la loro lapidaria efficacia: *Unendo il rigore delle dimostrazioni della scienza all'incertezza della sorte, e conciliando queste due cose in apparenza contraddittorie, essa [cioè la teoria delle probabilità (NdT)] può, traendo il suo nome dalle due, arrogarsi a buon diritto questo titolo stupefacente: La Geometria del caso.*

Il titolo del trattatello, pubblicato nel 1657 da Christian Huyghens, *De Ratiociniis in Aleae Ludo*, da una parte riecheggia quello del già menzionato libro di Cardano, dall'altra, con il richiamo al raziocinio, si collega implicitamente al programma scientifico implicitamente enunciato da Pascal.

2 La legge dei grandi numeri e il teorema centrale del limite

La prima fase di sviluppo di ogni disciplina scientifica consiste sempre nell'analisi di problemi specifici e molto particolari. Nel caso della probabilità si è trattato di problemi combinatori ed enumerativi interessanti, ma ancora privi di quello spessore concettuale che distingue un teorema profondo da una costruzione ingegnosa.

Solo agli albori del XVIII–o secolo appaiono le prime formulazioni di due teoremi, la *legge dei grandi numeri (LDGN)* e il *teorema centrale del limite (TCL)*, il cui carattere fondamentale è testimoniato dalle successive generalizzazioni e applicazioni ai più diversi settori della scienza, della tecnologia, della statistica, dell'economia, ... che ancora oggi, dopo 4 secoli, continuano a crescere a ritmo sostenuto.

La legge dei grandi numeri (LDGN) è contenuta nella quarta parte del trattato *Ars Conjectandi*, pubblicato da Jacques Bernoulli a Basilea nel 1713.

Il suo significato consiste nello stabilire un legame tra teoria, cioè le probabilità, ed esperimento, cioè le frequenze empiriche. L'idea intuitiva è che, in un insieme di misure abbastanza numeroso, se certe condizioni di indipendenza e omogeneità temporale sono soddisfatte, allora la media aritmetica di queste misure è una buona approssimazione del valor medio teorico (o valore d'attesa) previsto dalla teoria delle probabilità.

Il *teorema di De Moivre–Laplace*, cioè la forma locale del teorema centrale del limite è contenuto nel libro di Abraham De Moivre *Doctrine of Chances*, pubblicato nel 1718. Questo è il primo germe di una lunga serie di TCL, destinata a divenire un altro dei pilastri fondamentali della teoria.

Come la legge dei grandi numeri contiene informazioni asintotiche sui valori medi, così il teorema centrale del limite contiene informazioni asintotiche sulle fluttuazioni, cioè quanto i singoli risultati si discostano dalla media, ed afferma che, sotto condizioni molto generali, la distribuzione di tali fluttuazioni ha la caratteristica forma a campana che caratterizza la distribuzione Gaussiana.

Le prime, e ancora oggi tra le più importanti applicazioni di questi teoremi riguardavano la teoria degli errori. L'idea è che la media empirica di N misure indipendenti $X_1, \ldots, X_N$, della stessa grandezza X, cioè

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n =: \overline{X}_N \tag{1}$$

fornisca una buona approssimazione del *valore vero* della grandezza X e che le fluttuazioni, misurate dallo scarto quadratico medio, cioè

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (X_n - \overline{X}_N)^2 =: \gamma_N \tag{2}$$

rappresentino una stima quantitativa di quanto buona è questa approssimazione. Nel caso di misure ideali, in cui cioè tutti i valori X_n coincidono con il *valore vero* della grandezza X, le medie empiriche sono costanti e indipendenti da N e lo scarto quadratico medio è identicamente nullo.

Nelle misure reali queste condizioni ideali non sono mai soddisfatte e sia la media empirica $\overline{X}_N$ che le fluttuazioni γ_N dipendono dalla successione di misure e dal numero di prove effettuate, in altre parole esse non sono quantità costanti ma funzioni (variabili casuali nella terminologia usata oggi).

La legge dei grandi numeri e il teorema centrale del limite non riguardano, come tutti i teoremi, queste realtà ma alcuni dei loro possibili modelli matematici. In particolare non ci dicono se questi *valori veri* di cui parliamo nel linguaggio quotidiano esistono effettivamente. Esse condividono l'importante ipotesi che i modelli matematici delle misure indipendenti siano variabili casuali che soddisfano certe condizioni di indipendenza stocastica. In termini di tali variabili casuali si definiscono i modelli matematici della media empirica ($\overline{X}_N$) e delle fluttuazioni (γ_N), e si dimostra che, al crescere di N, $\overline{X}_N$ converge a una costante (legge dei grandi numeri) e γ_N ad una variablile casuale Gaussiana (teorema centrale del limite).

La formulazione precisa di questi risultati esula dagli scopi del presente saggio. Ciò che vogliamo sottolineare è che, una volta accettata la condizione di indipendenza stocastica e un minimo di omogeneità temporale, sia la legge dei grandi numeri che il teorema centrale del limite seguono necessariamente. Le condizioni di validità di questi teoremi sono non solo molto generali ma anche molto robuste (cioè la tesi continua a valere anche se indeboliamo alcune delle ipotesi fondamentali).

In questo senso si può dire che sia la legge dei grandi numeri che il teorema centrale del limite rapresentano dei risultati universali della teoria.

Il fatto che la stabilizzazione delle medie aritmetiche e la struttura Gaussiana delle fluttuazioni siano riscontrate con ottima approssimazione in molti fenomeni naturali mostra che questa universalità matematica fornisce un modello adeguato alla interpretazione di una universalità riscontrata in natura.

Per una di quelle convergenze sotterranee che rendono tanto affascinante l'avventura del pensiero matematico questi due risultati, sviluppati per fini completamente indipendenti, erano proprio ciò di cui c'era bisogno nelle seconda metà del 1.700 per lo sviluppo delle scienze sperimentali, dalla chimica all'astronomia alla geodesia che, proprio in quell'epoca, cominciavano a confrontarsi con la necessità di trovare un fondamento concettuale alla teoria della misura, della stima dell'errore e delle previsioni statistiche.

Occorrerà quasi un secolo perché questa circostanza emerga esplicitamente nella coscienza della comunità scientifica e ciò avverrà grazie a due grandi protagonisti della scienza di ogni tempo: Pierre Simon, poi diventato marchese di Laplace e Carl Friedrich Gauss i quali, entrambi motivati da problemi astronomici, apportarono importanti contributi alla toria della misura e degli errori.

Già nel 1805 A.M. Legendre aveva pubblicato il suo *metodo dei minimi quadrati* che consiste nel determinare la retta che meglio approssima un insieme di punti (dati sperimentali) nel senso di realizzare il valore minimo della somma dei quadrati delle distanze di questi punti dalla retta.

Nel 1809 Gauss pubblicò *Theoria Motus* in cui, studiando il problema delle orbite degli asteroidi, arrivava a conclusioni simili e derivava la curva di distribuzione oggi detta *normale* o *Gaussiana*.

Pochi anni dopo, nel 1812, Laplace pubblica l'imponente trattato *Théorie Analytique des Probabilités* (più di 800 pagine) la cui lunga introduzione, (più di 150 pagine), stampata separatamente nel 1814, divenne il, tuttora citatissimo, *Essai philosophique des probabilites*.

2.1 Le probabilità condizionate

Tra il trattato di De Moivre e quello di Laplace passa quasi un secolo e in questo periodo viene alla luce un risultato poco apprezzato sul momento, tant'è vero che fu pubblicato postumo nel 1763 dalla Royal Society di Londra, ma destinato ad avere una notevole influenza sullo sviluppo della teoria delle probabilità dopo essere stato rivalutato, oltre 50 anni dopo, da Laplace nella sua *Theorie analitique des probabilites*.

Si tratta della definizione di probabilità condizionata, contenuta nel saggio *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, del reverendo Thomas Bayes, alla quale egli arrivò studiando il problema di risalire alla probabilità delle cause partendo da osservazioni sui loro effetti. In notazioni contemporanee la *formula di Bayes* si scrive

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3}$$

Il membro sinistro si interpreta come la probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B (cioè una volta noto che l'evento B accade). Al membro destro figurano la probabilità congiunta dei due eventi A e B e la probabilità di B (detta, a seconda delle interpretrazioni, a priori o marginale).

Il membro destro si riferisce ad una situazione in cui entrambi gli eventi A e B sono possibili ma aleatori; il membro sinistro ad una situazione in cui B è certo ed A è possibile. Queste due situazioni possono riferirsi ad ambienti diversi o ad uno stesso ambiente in tempi diversi. L'evento condizionante rappresenta l'informazione disponibile e, in quanto tale può variare nel tempo: si può pensare ad esempio alla probabilità di un politico di essere eletto quando gli elettori hanno appena cominciato a votare e quando i 3/5 delle schede elettorali sono state aperte.

Perché questa formula, cosı elementare matematicamente e cosı apparentemente tautologica dal punto di vista del contenuto (almeno se si pensa al modello delle frequenze relative) è stata per vari secoli e continua ad esserlo, al centro di un dibattito sui fondamenti della probabilità che ha finito col fondersi con un altrettanto profondo dibattito sui fondamenti della fisica?

Naturalmente se, come viene fatto comunemente nelle trattazioni matematiche della probabilità classica, si interpreta la formula (3) come una definizione di una nozione all'interno di un modello matematico, poi si può procedere per via puramente deduttiva

Ma con l'approfondimento degli studi sulla probabilità, il problema originariamente posto da Bayes è stato generalizzato ed oggi è comunemente accettata l'idea che la nozione di *probabilità condizionata* nasce dal tentativo di rispondere alla domanda: *come varia la probabilità di un evento se si acquistano informazioni su altri eventi?*.

Formulando il problema in questo modo non è possibile relegare la risposta all'arbitrio di una definizione e non è stupefacente che situazioni diverse possano dar luogo a risposte diverse che si traducono in diverse strutture matematiche.

L'importanza della suddetta domanda va molto al di là della sola matematica. Essa trascende anche il dominio delle scienze naturali, economiche e sociali, per arrivare al cuore di una delle capacità più caratteristiche della specie umana, quella di fare congetture e aggiornarle sulla base dell'apprendimento.

Quest'ultima clausola, sull'aggiornamento, è il contributo originale che Bayes aggiunge all'idea di *Ars Conjectandi* di Bernoulli.

La probabilità di un evento *non è una proprietà intrinseca dell'evento stesso, ma dipende sia dall'informazione di chi valuta tale probabilità sia dal contesto nel quale tale evento è inserito*. In questo senso tutte le probabilità sono *condizionate*. Ma l'aspetto più interessante e generale della *teoria del condizionamento* è quello dinamico: se l'informazione o il contesto variano, come varieranno le probabilità? La formulazione di questa domanda presuppone un ordine temporale (evoluzione dell'informazione o del contesto) e quindi introduce una *dinamica* nelle probabilità nella quale il ruolo delle forze (che causano il cambiamento) è giocato dalla informazione.

La formula di Bayes è stata la prima, e per oltre due secoli l'unica, risposta a questa domanda. Occorrerà attendere non solo lo sviluppo della teoria quantistica, ma anche la rielaborazione di questa nella prospettiva probabilistica, per arrivare a comprendere che questa formula ha giocato, per la probabilità, lo stesso ruolo giocato per la geometria dal quinto postulato di Euclide.

Dato che il problema della pluralità dei modelli matematici del condizionamento e del loro corretto uso nelle scienze naturali, in statistica e in teoria delle decisioni, è uno dei fulcri concettuali della probabilità, conviene illustrare la situazione con un esempio puramente classico e molto semplice.

Da un'urna contenente 2 palline bianche (B) e 2 rosse (R) si estrae una pallina senza reimbussolarla e tenendone nascosto il colore.

Dopo questa estrazione l'urna contiene 3 palline, ma non sappiamo se sono 2 bianche e una rossa o 2 rosse e una bianca.

Consideriamo le due seguenti domande:

(I) Quale sarà la frequenza relativa dell'evento R su molte estrazioni con re–imbussolamento?

(II) Quale probabilità attribuire all'evento che il colore della (singola) prossima pallina estratta sia "rosso"?

Domande del primo tipo sono frequenti nelle scienze naturali, del secondo tipo – nelle scienze sociali, per esempio l'economia.

Le due domande non sono equivalenti: la prima si riferisce a una situazione in cui si possono fare molti esperimenti, su molte urne, la seconda a una scommessa sul colore della prossima pallina estratta. Nel primo caso ci si trova di fronte a una probabilità che è essa stessa casuale (in fisica quantistica questa viene chiamata situazione di *mistura*) e alla domanda (I) si può rispondere che la frequenza richiesta sarà $1/3$ con probabilità $1/2$ oppure $2/3$ ancora con probabilità $1/2$.

Questa risposta ci dice qualcosa sulla reale composizione fisica delle urne.

Nel secondo caso ciò che si fa in genere è applicare la formula di Bayes nella forma equivalente del teorema delle probabilità composte. Ciò equivale a prendere il valor medio della probabilità considerata nel primo caso e conduce alla conclusione che tale probabilità è $1/2$. Questa risposta è ragionevole dal punto di vista di una scommessa e si può interpretare il valore $1/2$ in termini di *posta* che sarebbe razionale accettare in una scommessa sull'evento R. Tuttavia la conoscenza della *mistura* contiene molta più informazione del solo numero $1/2$ nello stesso senso in cui la conoscenza dei valori di una variabile casuale e delle loro probabilità contiene più informazione del corrispondente valor medio. In effetti se volessimo utilizzare la probabilità calcolata con la formula di Bayes per fare previsioni su un esperimento, troveremmo sempre un risultato sbagliato poiché, in molte estrazioni con re–imbussolamento, la frequenza relativa dell'evento R sarà $1/3$ oppure $2/3$, mai $1/2$.

La corretta interpretazione frequentistica del valore $1/2$ si riferisce ad una moltiplicità di urne: in questo caso tale valore è naturale poiché, in molte estrazioni, il numero di palline bianche non re–imbussolate sarà approssimativamente uguale al numero di rosse.

Un'altra limitazione della formla di Bayes (3) è che si può dimostrare che essa implica una visione puramente cumulativa dell'informazione, tipica della visione classica della probabilità. Ma esistono esempi di situazioni in cui l'acquisizione di informazioni risulta *sostitutivo e non cumulativo* rispetto a informazioni precedenti. Un esempio tratto dalla fisica quantistica è dato da due misure consecutive dello spin di un particella: la seconda misura *cancella completamente* l'informazione acquisita dalla prima. Questo è un *condizionamento fisico*, ben diverso dal *condizionamento tautologico* che aveva ispirato il ragionamento di Bayes e che consiste nell'aggregare in modo diverso dei conteggi statistici. Per questo tipo di condizionamenti la applicabilità della formula di Bayes è tutt'altro che evidente e la dimostrazione matematica della non applicabilità di tale formula sarà uno dei punti di partenza della probabilità quantistica (v. la sezione (7.7)).

2.2 L'ago di Buffon e la nascita della simulazione stocastica

Alla società dei lumi risalgono i primi tentativi di un approccio quantitativo a scienze sociali quali l'economia, la politica, la sociologia, ..., e in particolare i primi tentativi di utilizzare informazioni di tipo statistico o probabilistico a sostegno di tali discipline.

In quest'atmosfera ebbero origine sia i paradossi di Condorcet relativi alla teoria delle votazioni sia l'*Essai d'Arithmetique Morale* pubblicato nel 1777 da Georges–Louis Leclerc, conte di Buffon, e autore del più famoso trattato sulla *Histoire Naturelle*.

Questo saggio si è conquistato un ruolo nella storia della probabilità per aver prodotto il primo esempio di una idea, originale, sorprendente e destinata ad avere, circa due secoli dopo, sviluppi applicativi di immensa portata: *il calcolo di quantità esatte mediante metodi probabilistici*.

Buffon utilizza, per la prima volta, il calcolo dell'incerto per approssimare una grandezza ben definita come il numero π, che gioca un ruolo fondamentale in tutte le scienze della natura e che apparentemente non ha nulla a che vedere con il caso essendo uguale al rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella di un suo diametro.

Il calcolo approssimato di π aveva costituito una sfida formidabile per i matematici dell'antichità e alla sua soluzione avevano contribuito personaggi del calibro di Archimede. Con Buffon la nascente teoria delle probabilità, abbinando l'analisi matematica e le leggi del caso a considerazioni geometriche, proponeva un nuovo, originalissimo, metodo di calcolo che tra l'altro coinvolgeva anche un esperimento, come il lanciare a caso un ago su un piano.

Da questo risultato nasceva la *geometria stocastica*, ma sopratutto faceva il suo ingresso nella matematica l'idea di *simulazione stocastica*, un campo che, con l'avvento dei calcolatori, era destinato a diventare una delle tecniche più usate nella matematica applicata tanto che ancora oggi molti fisici o ingegneri, pur senza approfondire gli aspetti più teorici della probabilità, riescono a conquistare una maestria nell'uso di questo strumento.

Un altro oggetto fondamentale della probabilità classica compare abbastanza tardivamente, nel 1837 nella monografia *Recherches sur la Probabilité des Jugements*, dove Siméon–Denis Poisson, motivato dal tentativo di estendere la LDGN al caso non stazionario, introduce la distribuzione che oggi porta il suo nome:

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{con} \quad \lambda > 0$$

Ci vorranno oltre cento anni per capire in che senso questa e la distribuzione gaussiana giocano un ruolo particolare, di *blocchi costituenti* di tutti gli altri processi stocastici (v. la sezione (6.1)). Tuttavia occorrerà attendere la probabilità quantistica (più precisamente la *teoria degli spazi di Fock interagenti*) e la deduzione di una estensione non banale delle regole di commutazione di Heisenberg a partire dalla relazione di ricorrenza di Jacobi per polinomi ortogonali per comprendere che queste due distribuzioni apparentemente tanto diverse sono espressioni di una stessa struttura algebrica, che però non può essere espressa con il linguaggio della probabilità classica.

3 Probabilità come estensione della logica: logica dell'incerto

La matematizzazione della logica classica, avviata da George Boole nel suo trattato *An Investigations of the Laws of Thought* (1854) ebbe due importanti conseguenze per il calcolo delle probabilità:

(i) definı quello che (a meno di varianti tecniche) sarebbe diventato il modello matematico standard di *spazio degli eventi*

(ii) parallelamente alla matematizzazione della logica attivò un processo di logicizzazione della probabilità nel quale quest'ultima veniva vista come naturale estensione *induttiva* della logica (ciò diede origine alla scuola *logicista* della probabilità).

3.1 Identificazione tra eventi e affermazioni di un linguaggio

Il modello del calcolo proposizionale classico, oggi chiamato algebra (o reticolo) booleana, consiste nell' identificare le affermazioni di un linguaggio a elementi di un insieme $\mathcal{B}$ e i connettivi logici *o, e, non* a tre operazioni denotate rispettivamente $\vee$, $\wedge$, $\dashv$ e collegate tra loro da alcune relazioni che Boole e altri estrapolarono da quelle dei corrispondenti connettivi logici.

Per esempio gli assiomi di Boole prevedono l'esistenza di due elementi $\Omega \in \mathcal{B}$ (evento certo) e $\emptyset \in \mathcal{B}$ (evento impossibile) con la proprietà che

$$A \vee (\dashv A) = \Omega \ ; \quad A \wedge (\dashv A) = \emptyset \ ; \quad \forall A \in \mathcal{B} \tag{4}$$

corrispondente alla *forma forte del principio del terzo escluso* (cioè indipendente dalla scelta di una funzione verità).

Il primo legame naturale tra logica e calcolo delle probabilità si costruisce associando ad un evento A l'affermazione *l'evento A accade* e ad un'affermazione $\hat{A}$ l'evento *l'affermazione $\hat{A}$ è vera.* In questo modo si stabilisce una identificazione tra affermazioni di un linguaggio ed eventi nella quale la congiunzione o disgiunzione, di A e B, negazione di A corrispondono rispettivamente all'evento congiunto (entrambi accadono), disgiunto (almeno uno dei due accade) o complementare (non accade).

In altre parole l'identificazione tra affermazioni di un linguaggio ed eventi permette di trasportare in modo significativo la struttura di algebra booleana sugli eventi stessi. Oggi sappiamo che l'uso ingenuo di tale identificazione conduce ai paradossi che hanno stimolato il completo rinnovamento della logica classica. In probabilità tali paradossi si superano fissando a priori l'universo degli eventi, che viene identificato a un'algebra Booleana.

Un esempio concreto della struttura astratta di algebra booleana è fornito dai sotto–insiemi di un qualsiasi insieme Ω con le opereazioni di unione insiemistica (corrispondente a $\vee$), intersezione insiemistica (corrispondente a $\wedge$) e complemento insiemistico (corrispondente a $\dashv$).

Un importante teorema di M.H. Stone, dimostrato circa un secolo dopo il trattato di Boole, afferma che, a meno di isomorfismi, ogni algebra booleana si ottiene in questo modo. In altri termini: l'esempio precedente ha un carattere universale.

Conseguentemente l'identificazione tra affermazioni di un linguaggio ed eventi fornisce, attraverso il teorema di Stone, un naturale modello matematico per le famiglie di eventi, cioè: un'algebra booleana di sotto–insiemi di un insieme Ω.

3.2 Misure di probabilità come estensioni delle funzioni–verità

A questo punto è naturale chiedersi: *se nell'analogia tra logica e probabilità, gli eventi corrispondono ad affermazioni, a che cosa corrisponde la probabilità?*

È intuitivamente chiaro che la risposta a questa domanda conduce al secondo legame naturale tra logica e calcolo delle probabilità, cioè l'interpretazione del *probabile come generalizzazione del vero*.

Nella formalizzazione intuitiva del concetto di verità (in una logica Aristotelica) si assegna il valore 0 alle affermazioni false e 1 a quelle vere richiedendo inoltre che:

(I) esistano almeno un'affermazione vera e un'affermazione falsa

(II) se un'affermazione è vera la sua negazione è falsa

(III) la congiunzione di due affermazioni è vera se e solo se entrambe sono vere.

Una funzione
$$v : \mathcal{B} \to \{0, 1\}$$
che gode di queste 3 proprietà sarà detta una *funzione–verità* sull'algebra Booleana $\mathcal{B}$.

Nel seguito useremo il termine *logica* nel senso restrittivo di una coppia $\{\mathcal{B}, v\}$ consistente in un'algebra booleana ($\mathcal{B}$) e una funzione verità (v) su di essa.

Volendo includere la logica dell'incerto in questo contesto, sarebbe naturale generalizzare la nozione di *funzione di verità* estendendo i suoi valori dall'insieme $\{0,1\}$ a tutto l'intervallo $[0,1]$ e interpretando, per ogni affermazione A, il valore $v(A) \in [0,1]$ ad essa associato come *grado di plausibilità* o di *affidabilità* di tale affermazione.

Tuttavia, per ottenere una *buona* generalizzazione delle funzioni verità, occorre anche estendere le proprietà (I), (II), (III) enunciate sopra, in modo da garantire che il sotto–insieme dei gradi di plausibilità v, che assumono solo i valori 0 e 1, coincida esattamente con l'insieme delle funzioni verità della logica classica (altrimenti non staremmo generalizzando la nozione di *funzione verità* ma cambiandola).

Un modo per realizzare tale fine è basato sull'osservazione che le due seguenti affermazioni (sulla funzione di verità v) si equivalgono:

(i) $v : \mathcal{B} \to \{0,1\}$ soddisfa le condizioni (I), (II), (III)

(ii) $v : \mathcal{B} \to \{0,1\}$ soddisfa le condizioni

$$v(\Omega) = 1 \qquad \text{(normalizzazione)} \tag{5}$$

$$A \wedge B = \emptyset \Rightarrow v(A \vee B) = v(A) + v(B) \ , \ \forall A, B \in \mathcal{B} \quad \text{(finita additività)} \tag{6}$$

Quindi se definiamo *grado di plausibilità* sull'algebra Booleana $\mathcal{B}$ come una funzione

$$v : \mathcal{B} \to [0,1]$$

che soddisfa le condizioni di normalizzazione (5) e finita additività (6) otteniamo una *buona* generalizzazione delle funzioni verità nel senso spiegato sopra.

Poiché le proprietà che caratterizzano una funzione di plausibilità sono le stesse che definiscono una misura di probabilità finitamente additiva sull'algebra Booleana $\mathcal{B}$, possiamo concludere che le misure di probabilità sono una possibile generalizzazione delle funzioni verità della logica Aristotelica.

D'altra parte accade spesso in matematica che formulazioni equivalenti di una stessa proprietà diano luogo a estensioni inequivalenti.

Pertanto non si può affermare che le misure di probabilità siano l'unica possibile generalizzazione delle funzioni verità della logica Aristotelica. La sezione seguente esamina una possibilità alternativa.

3.3 Probabilità intuizionista

Nella sezione precedente si è visto come (e in che senso) l'estensione della nozione di funzione verità in un contesto di logica Aristotelica conduce naturalmente alla nozione di probabilità. In questa sezione discutiamo una analoga estensione in un contesto di logica intuizionista. Ciò sarà utile tra l'altro a mostrare come modelli non classici di probabilità avrebbero potuto emergere naturalmente nel corso del progresso interno della matematica e indipendentemente da ogni connessione con le scienze della natura.

Infatti, come l'estensione discussa nella sezione precedente conduce dalla logica classica alla probabilità classica, così quella discussa in questo § conduce da un modello non classico di logica a un modello non classico di probabilità che non ha nulla a che vedere con la teoria quantistica e che mal si presta a modellizzare le proprietà delle frequenze relative.

Tuttavia non è chiaro a priori per quale motivo un modello matematico plausibile di logica induttiva dovrebbe necessariamente includere le proprietà delle frequenze relative.

È possibile invece, come testimoniato dalla probabilità quantistica, che esista una pluralità di modelli probabilistici con campi di applicazioni diversi e che l'atteggiamento pragmatico, oggi diffuso relativamente alla pluralità dei modelli geometrici, si estenda nel futuro ai modelli probabilistici.

Come sottolineato nell'esposizione precedente, tra gli assiomi di algebra Booleana figura anche la versione forte del principio del terzo escluso (4).

Ciò significa che, adottando il modello Booleano per la famiglia degli eventi, o equivalentemente per l'universo delle proposizioni, ci si restringe a priori al contesto della logica classica. Nel caso di Boole ciò era naturale poiché per Boole il termine *logica* era sinonimo di *logica classica* (o *Aristotelica*). Oggi sappiamo che per la logica, come per ogni disciplina scientifica, le possibilità assiomatiche sono molte e che gli sforzi di dimostrare teoricamente (cioè prescindendo dal ricorso agli esperimenti) che un sistema assiomatico è, in qualche senso, migliore di altri conducono a dispute ideologiche lontane dallo spirito della scienza, il cui ruolo è invece quello di individuare, tra gli infiniti sistemi possibili, quelli che aprono le possibilità più ricche in termini sia di sviluppi interni che di interazioni con altre discipline.

In quest'ottica è naturale porsi la seguente domanda: *se l'estensione della logica aristotelica conduce naturalmente al modello matematico della probabilità classica, non è possibile che estensioni di logiche non aristoteliche conducano a modelli non classici di probabilità?*

Per chiarire il senso di questa domanda consideriamo una logica di tipo intuizionista, in cui valgano tutte le consuete proprietà Booleane dei connettivi logici tranne la forma forte del principio del terzo escluso (4) e quindi delle sue conseguenze. La risultante struttura può essere chiamata un'*algebra pseudo–Booleana*.

Si può dimostrare che l'intervallo $[0, 1]$, con le operazioni $\dashv$, $\vee$, $\wedge$, definite rispettivamente da

$$a \wedge b := \min\{a, b\} \tag{7}$$

$$a \vee b := \max\{a, b\} \tag{8}$$

$$\dashv a := 1 - a \tag{9}$$

è un modello algebra pseudo–Booleana. Il sotto–insieme $\{0, 1\}$, di $[0, 1]$, è un'algebra Booleana, quindi a maggior ragione una algebra pseudo–Booleana. Un'algebra pseudo–Booleana soddisfa tutti gli assiomi di algebra Booleana eccetto il principio del terzo escluso (4) e la sua forma duale che vengono sostituiti rispettivamente da:

$$A \vee (\dashv A) = \max\{A, 1 - A\} \qquad ; \qquad A \wedge (\dashv A) = \min\{A, 1 - A\}$$

Pertanto la nozione di funzione di verità si può estendere a un'algebra pseudo–Booleana $\mathcal{B}$, semplicemente considerando un omomorfismo di algebre pseudo–Booleane $v : \mathcal{B} \to \{0, 1\}$ con la proprietà (5). Analogamente la nozione di grado di plausibilità sull'algebra pseudo–Booleana $\mathcal{B}$ può essere definita come un omomorfismo di algebre pseudo–Booleane $v : \mathcal{B} \to [0, 1]$ che soddisfa (5).

Partendo da un insieme T qualsiasi si possono poi costruire esempi più interessanti di algebre pseudo–Booleane estendendo puntualmente le operazioni (7), (8), (9) alle funzioni da T a valori in $[0, 1]$ (cioè definendo, per due siffatte funzioni x, y e per ogni $t \in [0, 1]$, $(x \wedge y)(t) := x(t) \wedge y(t)$, etc. ...).

Inoltre non è difficile dimostrare che il più generale omomorfismo di algebre pseudo–Booleane che soddisfa (5) si può ottenere fissando arbitrariamente una funzione monotona crescente $v_0 : [0, 1/2] \to [0, 1/2]$ soddisfacente le condizioni

$$v_0(0) = 0 \ ; \qquad v_0(1/2) = 1/2$$

e estendendola a tutto l'intervallo $[0, 1]$ mediante la prescrizione

$$v(x) := 1 - v_0(x - 1/2) \ ; \quad \forall\, x \in (1/2, 1]$$

Combinando queste due osservazioni si possono ottenere esempi interessanti di *modelli probabilistici–intuizionisti*.

Questa estensione della nozione di grado di plausibilità è lontana da quelle che siamo abituati a considerare *le leggi della probabilità*, ma non è escluso a priori che possa trovare applicazioni in modelli non standard di logica induttiva o di intelligenza artificiale.

4 L'800

Nel secolo XIX–o il baricentro degli studi probabilistici in Europa occidentale si sposta dalla matematica agli aspetti statistici, sopratutto in connessione con la biologia e con problemi socio–economici.

La tradizione fondata da Francis Galton (1822–1911) e sviluppata da Karl Pearson (1857–1936), allievo di Galton e fondatore della rivista *Biometrika* che collega le scienze statistiche e quelle biologiche, continua fino al tardo XX–o secolo con R.A. Fisher (1890–1962), che diede una sistemazione formale ai lavori di Pearson, e con J. Neyman (1890–1981), a cui si deve il test del χ^2. Questi sono certamente sviluppi applicativi di grande importanza per la società moderna, ma il principale contributo, in Europa occidentale in questo periodo, allo sviluppo della probabilità come scienza matematica, viene dalla fisica.

4.1 Caso e probabilità in fisica nell'800

Si è già visto come il primo ingresso della probabilità nella fisica avvenga attraverso l'astronomia e la teoria degli errori.

Tuttavia l'ingresso della probabilità nella fisica, non al livello di pura tecnica, ma come linguaggio essenziale per la formulazione delle leggi della natura, si può far risalire ai lavori di Ludwig Boltzmann (1844–1906) il cui punto di partenza fu il calcolo della distribuzione delle velocità delle molecole in un gas rarefatto, effettuato da J.C. Maxwell nel 1860.

Questo calcolo ispira a Boltzmann il programma della interpretazione molecolare–cinetica della termodinamica dal quale nasce una nuova disciplina della fisica, la *meccanica statistica*, che ancora oggi, con l'arricchimento dovuto agli sviluppi quantistici, costituisce un dei più stimolanti e fruttuosi settori di interazione tra probabilità e fisica..

Boltzmann riesce a conciliare l'irreversibilità termodinamica con la reversibilità della meccanica introducendo la distinzione tra *micro–stati* (meccanici) e *macro–stati* (termodinamici).

Un macro–stato è definito da molti micro–stati (per es. se in un gas, composto da miliardi di molecole, cambiamo di poco la velocità di una di esse, abbiamo cambiato il micro–stato, ma non il macro–stato). Postulando, come fa Boltzmann, che tutti i micro–stati siano equiprobabili, ne segue che un macro–stato è tanto più probabile quanto più numerosi sono i micro–stati ad esso associati.

Per completare il quadro Boltzmann introduce un altro postulato, questa volta dinamico, secondo il quale, in assenza di forze, un sistema muove da macro–stati meno probabili a macro–stati più probabili. In questo modo esso finisce col raggiungere un macro–stato di massima probabilità, identificato da Boltzmann con uno stato di equilibrio termodinamico, nel quale il sistema effettua solo fluttuazioni (cioè transizioni tra micro–stati che sono tutti associati allo stesso macro–stato).

Ma Boltzmann sapeva dalla termodinamica che anche l'entropia tende a un valore massimo. Ciò gli suggerı un legame tra probabilità (P) e entropia (S). Il fatto che, per sistemi indipendenti, l'entropia è additiva e la probabilità è moltiplicativa, suggerisce un legame logaritmico del tipo $S = k \lg P$ Boltzmann dimostra che la costante k, necessaria per compensare il fatto che le due quantità hanno unità di misura diverse, non dipende dal sistema, cioè è universale e quindi, basterà calcolarla in un caso particolare. Boltzmann effettua il calcolo per i gas perfetti (1877) e trova il valore di quella che giustamente oggi viene chiamata *costante di Boltzmann*: $k = 1.38 \times 10^{-16}\ erg/deg$.

Si può dire che tutta la vita di Boltzmann sia stata dedicata a dimostrare la coerenza di questa visione o equivalentemente la deducibilità dei due postulati introdotti sopra dalle leggi fondamentali della meccanica Newtoniana.

Pochi programmi nella storia della scienza sono stati tanto fruttuosi quanto questo.

Per quanto riguarda la teoria della probabilità, l'implicazione concettuale forse più rilevante, sta nella nascita della *teoria del caos, che studia le proprietà statistiche dei sistemi deterministici*, un ossimoro che si riferisce alla seguente situazione: si può dimostrare che, a una vasta classe di sistemi dinamici deterministici, inclusi i sistemi Hamiltoniani con spazio delle fasi limitato, è possibile associare un processo stocastico stazionario (in effetti uno per ogni livello energetico). L'*ipotesi ergodica* di Boltzmann, che equivale al suo postulato sull'equiprobabilità dei micro–stati, consiste nell'affermare che, per i sistemi generici considerati in termodinamica, tale processo soddisfa la legge di grandi numeri (LDGN).

Discutendo la LDGN di Bernoulli si è visto che la dimostrazione di tale legge poggia su ipotesi di omogeneità temporale (stazionarietà) e indipendenza. Mentre le prime sono soddisfatte per tutti i sistemi deterministici in questione, l'indipendenza stocastica sembra in contraddizione con il fatto che una traiettoria di un sistema deterministico è univocamente determinata dal suo stato iniziale, cioè il futuro, lungi dall'essere indipendente dal passato, è univocamente determinato da esso.

Boltzmann intuı che l'evoluzione di alcuni sistemi deterministici può sviluppare una indipendenza debole del futuro dal passato, sufficiente per stabilire la validità della LDGN. I sistemi con questa proprietà sono detti *caotici*. Oggi sappiamo che la validità della LDGN (equivalente al teorema ergodico) è solo il gradino più basso di una gerarchia infinita di proprietà: *la gerarchia del caos* o *gerarchia ergodica*.

Circa 100 anni dopo Boltzmann una felice intuizione di Koopman (forse il primo esempio di come una idea ispirata dalla teoria quantistica abbia condotto alla soluzione di un importante problema aperto della probabilità classica) permise a J. von Neumann (1931) di dimostrare un primo teorema ergodico aprendo il campo ad una sterminata letteratura che, a partire da G.D. Birkhoff (1931) continua fino ai giorni nostri.

La situazione dopo questi teoremi è la seguente: la convergenza delle *medie temporali* (1), e dei loro analoghi continui, è un fenomeno universale, valido per tutti i processi stazionari. Tuttavia non sempre il limite è una costante (in generale è una variabile casuale). Quando tale limite è una costante, cioè quando vale la LDGN, si dice che il processo è *ergodico*. Dimostrare l'ergodicità del processo stazionario associato a un pre–assegnato sistema deterministico è un problema molto difficile, ancora aperto nella maggioranza dei casi interessanti.

L'idea di Koopman consiste nell'associare un operatore unitario (risp. un gruppo a un parametro di tali operatori), a un sistema dinamico a tempo discreto (risp. continuo). Il passo successivo, dovuto a P. Halmos e J. von Neumann, consiste nell'osservazione che lo spettro di tale operatore (risp. del generatore del gruppo) è un invariante rispetto alla naturale relazione di isomorfismo tra sistemi dinamici. Trovare tali invarianti non è cosa semplice tant'è vero che, dal lavoro di Halmos e von Neumann, occorrerà attendere circa 30 anni prima che A. N. Kolmogorov, inspirato dalle ricerche di Shannon sulla teoria dell'informazione, producesse il primo esempio di invariante non spettrale della categoria dei sistemi dinamici: *l'entropia dinamica di Kolmogorov*.

La teoria del caos comincia a dare un contenuto matematico alla relazione intuitiva tra le nozioni di *casualità* e di *complessità*. L'analisi di questa connessione dal punto di vista della logica e della teoria dell'informazione sarà alla base degli studi di Kolmogorov e Solomonov, che tentano di rendere matematicamente precisa l'idea di *casualità* come *complessità infinita*.

4.2 La scuola Russa e la nascita della probabilità come disciplina matematica

Mentre nei paesi dell'Europa occidentale, dopo la monografia di Laplace, la teoria della probabilità si sviluppa nella direzione della statistica e delle applicazioni, in Russia, con Pafnutii Lvovich Chebichev (1821–1894) prende avvio un processo storico che porterà la teoria della probabilità a diventare in qualche modo preminente rispetto alle altre discipline matematiche, anch'esse coltivate ad altissimo livello in Russia.

L'approccio di Chebichev alla teoria della probabilità è rigoroso e utilizza i più potenti strumenti matematici (sopratutto analitici) disponibili all'epoca.

Mentre questa caratteristica si può riscontrare anche in altri matematici contemporanei di Chebichev o a lui precedenti, come Laplace, la caratteristica distintiva dell'approccio di Chebichev sta nel gusto scientifico con cui egli individua il nucleo matematico profondo della nuova teoria nella legge dei grandi numeri e nel teorema centrale del limite e comincia a studiare varie generalizzazioni di questi teoremi da un punto di vista puramente matematico, indipendentemente da ogni applicazione.

Il merito di Chebichev sta nell'aver formulato questo programma e nell'averne dimostrato, con l'esempio della sua opera, la realizzabilità. La sua fortuna sta nell'aver trovato un ambiente culturale ricettivo alle sue idee.

Egli stesso e i suoi allievi, tra i quali ricordiamo A.A. Markov e A.M. Lyapunov, avviano una linea di ricerca che parte dallo studio sistematico delle successioni di variabili casuali indipendenti e che si sviluppa gradualmente fino a includere le prime forme di dipendenza statistica.

In quest'ultima direzione tocca ad A.A. Markov (1856–1922) il ruolo di dare origine a un'altra delle linee di ricerca che diventeranno trainanti per tutta la teoria della probabilità: quella che oggi si chiama *la teoria dei processi di Markov.*

Come con la legge dei grandi numeri e il teorema centrale del limite comincia a sorgere il problema di individuare una appropriata schematizzazione matematica della nozione di indipendenza stocastica, cosı con le catene di Markov comincia ad emergere il problema di distinguere, tra le infinite forme di dipendenza stocastica, quelle che risultano più semplici matematicamente ma, nello stesso tempo, sufficientemente ricche da includere una vasta classe di importanti fenomeni fisici o sociali.

L'indipendenza gioca in probabilità un ruolo analogo a quello giocato dalla linearità nello studio delle equazioni algebriche o differenziali. Si tratta in entrambi i casi di proprietà molto forti, che permettono di risolvere esplicitamente molti problemi e che semplificano notevolmente la struttura delle soluzioni. La dipendenza statistica, come la nonlinearità è una connotazione puramente negativa: *non indipendente.*

A differenza dell'indipendenza e della linearità, i termini *dipendenza* e *nonlinearità* includono in se infinite sotto–classi di strutture che hanno poco o nulla in comune e il cui studio và affrontato con metodi ad hoc, specifici di ciascuna classe. In tale situazione diventa molto importante individuare, all'interno di queste infinite possibilità, delle sottoclassi di strutture che, pur esibendo caratteristiche specifiche della dipendenza o della nonlinerità, consentano tuttavia una trattazione esplicita e l'emergere di strutture abbastanza ricche. La probabilità quantistica darà una formulazione matematica precisa di tale programma con l'introduzione di una varietà infinita di nozioni di *indipendenza stocastica* che, interpretrate in termini classici, corrispondono ad una gerarchia infinita di varie forme di dipendenza stocastica.

I risultati della scuola di Chebichev vengono sintetizzati nel libro *Teoria della probabilità*, pubblicato da S. Bernstein lo stesso anno della rivoluzione russa (1917), in cui tenta di fondare rigorosamente la TDP e la statistica e di dimostrare la loro applicabilità ai più importanti fenomeni della natura.

Dopo la rivoluzione russa il progetto di Chebichev di matematizzazione della probabilità prosegue in Russia con la fondazione della scuola moscovita di teoria delle probabilità, che si può far risalire alla dimostrazione, di Alexandr Jacovlevich Khinchin nel 1923, di una generalizzazione molto originale e forte della legge dei grandi numeri, oggi conosciuta sotto il nome di *legge del logaritmo iterato*. Questo teorema si inquadra in una linea di ricerca sulle condizioni necessarie e sufficienti per la validità della LDGN. Dopo una serie di risultati parziali dovuti a Khinchin e a Kolmogorov il problema fu definitivamente chiuso da Kolmogorov nel 1926.

5 I processi stocastici

Fino agli anni intorno al 1920 la TDP aveva trattato solo successioni di variabili casuali, ma la fisica e la tecnica ponevano il problema di trattare famiglie di variabili casuali dipendenti da parametri continui 1–dimensionali (processi) o multi–dimensionali (campi).

Prima dello sviluppo di una teoria generale molti risultati particolari in questa direzione erano stati ottenuti in connessione con speciali problemi fisici (Planck, Smoluchowski, Einstein, Fokker,...), *biologici* (Fisher), tecnici (Fray), economici (Bachelier), ... , ma questi primi tentativi non erano stati molto considerati dai matematici che non ritenevano sufficiente il livello di rigore in essi raggiunto.

Nel 1923 Norbert Wiener [Wien23] introduce quello che ancora oggi è certamente il più studiato di tutti i processi stocastici, il *processo di Wiener*, modello del *moto Browniano* (le fluttuazioni di particelle sospese in una soluzione liquida dovute agli urti delle molecole), e il suo articolo *Differential space* segna la nascita del settore più avanzato della probabilità classica *l'analisi stocastica* (v. sezione (6)).

Importanti contributi alla teoria dei processi stocastici sono dovuti a Bruno De Finetti, che apre il problema della classificazione dei processi infinitamente divisibili, e a Paul Levy che combiina la probabilità con l'analisi funzionale di Volterra e inaugura lo studio delle proprietà fine delle traiettorie dei processi stocastici a tempo continuo.

La prima trattazione rigorosa dei processi di Markov a tempo continuo è il saggio di Kolmogorov *Sui metodi analitici in teoria delle probabilità* [Kolmo31], che stabilisce il collegamento tra processi di diffusione (sotto–classe dei processi di Markov), e la teoria delle equazioni paraboliche. Tale collegamento è stato poi esteso, mediante la teoria dei *tempi d'arresto* alle equazioni ellittiche stabilendo un legame profondo tra probabilità e la teoria delle equazioni differenziali a dervate parziali.

Circa nello stesso tempo Khinchin elabora la teoria dei processi stazionari, che conduce, attraverso l'analisi spettrale di tali processi, ad analogo legame tra probabilità e analisi complessa. Durante la seconda guerra mondiale questi studi compiranno decisivi progressi attraverso i lavori di Wiener e

Kolmogorov, indipendenti e sviluppati lungo linee di pensiero e tecniche completamente diverse, ma entrambi motivati da problemi relativi al puntamento automatico delle armi anti–aeree.

In questo periodo, nell'arco di meno di 10 anni, vengono sviluppate tre nuove tecniche strettamente collegate tra loro:

– l'uso in probabilità dell'integrazione sugli spazi astratti

– la teoria generale del condizionamento

– la teoria dei processi stocastici (a indice continuo)

Queste tre nuove tecniche, la prima importata dagli sviluppi dell'analisi funzionale, le altre due sviluppate da A. N. Kolmogorov, saranno alla base della monografia Kolmogorov *Concetti fondamentali di teoria delle probabilità* (1933) che, circa tre secoli dopo la corrispondenza tra Pascal e Fermat, definisce il modello matematico per la probabilità classica oggi generalmente accettato e svincola la teoria matematica della probabilità dalle applicazioni e dagli esempi particolari che avevano caratterizzato il suo sviluppo.

6 L'analisi stocastica

Alla scuola russa si deve la stabilizzazione e la sistematizzazione della teoria delle probabilità e dei processi stocastici come disciplina matematica indipendente, ma è con la scuola giapponese che la teoria, sviluppando in modo originale i già citati risultati N. Wiener, giunge a piena maturità, arricchendosi di una nuova e fondamentale linea di ricerca, oggi nota sotto il nome di *analisi stocastica*, le cui applicazioni sono tanto numerose e abbracciano tanti campi diversi, dalla fisica alla biologia, dalla ricerca operativa e la logistica all'ingegneria, dalla meteorologia alla finanza matematica, . . ., che una lista esauriente è impossibile.

L'Abel Symposium dell'anno 2005 [BenDiNLinOksZha05], dedicato alla celebrazione del novantesimo compleanno di Kiyosi Itô e del 63–esimo compleanno del calcolo stocastico, ha offerto un'importante occasione di sintesi su quanto conseguito e di meditazione sugli sviluppi futuri.

È interessante osservare che il calcolo stocastico, con l'innovazione radicale delle due operazioni basiche dell'analisi classica – differenziazione ed integrazione – è stato, insieme con l'analisi infinito–dimensionale, l'unica vera innovazione concettuale nello sviluppo dell'analisi classica dopo Newton e non è un caso che queste due linee stiano ora convergendo verso una unificazione. In effetti gli sviluppi dell'analisi infinito–dimensionale da Volterra ai nostri giorni portano alla conclusione che, mentre nel caso finito–dimensionale le funzioni sufficientemente regolari da possedere una o più derivate sono un insieme sufficientemente ricco da coprire una immensa varietà di applicazioni, la stessa cosa non accade a dimensioni infinite e ciò implica la necessità di sviluppare un *calcolo su funzioni molto irregolari* (esempio tipico: le traiettorie generiche del moto Browniano). Questo è l'oggetto dell'analisi stocastica.

L'integrale stocastico di funzioni scalari fu introdotto da Wiener negli anni 1920 e, più o meno nella stessa epoca, il fisico Paul Langevin introduce, il rumore bianco e le equazioni differenziali da esso guidate. Ancora una volta, come era accaduto ai tempi di Newton per l'analisi finito–dimensionale e poi a tempi di Volterra per quella infinito–dimensionale, le operazioni di integrazione e differenziazione nascono in contesti e relativamente a problemi completamente indipendenti. Le due linee di ricerca restano sostanzialmente separate fino alla tesi di Itô del 1942 dove vengono delineati i fondamenti del calcolo stocastico, poi sistematizzati circa 25 anni dopo nella monografia di [ItôMcKn65].

6.1 La struttura dei processi stocastici classici

Uno dei principali successi del calcolo stocastico è stato la conferma matematica di un'immagine dinamica ed intuitiva della struttura di un processo stocastico classico indicizzato dalla retta reale (interpretata come tempo) e a valori in uno spazio d–dimensionale (tipicamente $\mathbb{R}^d$ o una varietà differenziabile) interpretato come spazio degli stati del processo.

Se (X_t) è un *generico* (in un senso tecnico che non specificheremo) processo di questo tipo, il suo spazio degli eventi Ω può essere identificato ad uno spazio di funzioni da $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^d$, interpretate come traiettorie di un sistema dinamico. In questa identificazione la generica funzione X_t del processo diventa la funzione di *valutazione* X_t, che a un generico punto ω in Ω associa il vettore $X_t(\omega) = \omega(t)$ (in $\mathbb{R}^d$): *lo stato del sistema al tempo t lungo la traiettoria ω.*

La traiettoria che il sistema seguirà è nota solo probabilisticamente, nel senso che sullo spazio Ω è definita una misura di probabilità . In questo senso si dice che lo stato X_t, del sistema al tempo t, è una variabile casuale.

Un modo intuitivo di costruire tali traiettorie casuali è quello di partire da una traiettoria deterministica e di addizionare ad essa (nel senso dei vettori in $\mathbb{R}^d$) una perturbazione *completamente casuale*.

La teoria della struttura dei processi stocastici classici dà un senso preciso a questa intuizione (e a questa terminologia) e dimostra che sostanzialmente tutti i processi stocastici *generici* sono ottenuti in questo modo.

In altre parole, ogni traiettoria è decomposta univocamente in una somma di due parti: la parte *regolare* (a variazione limitata), corrispondente al termine di *drift* nell'equazione stocastica, e il termine di *fluttuazione pura*, corrispondente alla parte di martingala nell'equazione stocastica. Se quest'ultimo termine è assente, si ritrova il dominio dell'analisi classica: l'analisi stocastica generalizza la classica assegnando prescrizioni per il calcolo basato sulle martingale.

La forma differenziale della suddetta decomposizione di un generico processo (X_t) esprime bene la relazione tra calcolo classico e calcolo stocastico:

$$dX_t = b(X_t, t)dt + dM_t$$

La prima parte (il drift) è un differenziale nel senso consueto dell'analisi classica e si tratta con il calcolo classico, *newtoniano*; la seconda (il termine di di martingala) con il calcolo di Itô. Il significato matematico di questa rappresentazione simbolica si ottiene passando, dalla forma differenziale, alla forma integrale corrispondente.

Il termine *martingala* è nato per indicare un gioco d'azzardo *leale* nel quale il valore atteso, a un tempo $T > t$, della vincita di un giocatore, che possieda il capitale M_t al tempo t e che conosca esattamente l'andamento del gioco fino al tempo t, è pari ad M_t. In altre parole: la conoscenza esatta di tutta la storia passata, non incrementa in alcun modo la possibilità di vincere nel futuro. Questa è una proprietà di forte causalità. È interessante notare che questo tipo di processi gioca oggi un ruolo essenziale in una delle applicazioni di massimo successo del calcolo stocastico – l'uso della modellistica matematica nella gestione dei titoli finanziari.

La chiarificazione della portata dell'estensione stocastica dell'analisi classica è completata da due importanti ulteriori risultati:
(i) il *teorema di rappresentazione delle martingale* dovuto a Kunita e Watanabe [KunWat67] il quale, completando un lungo processo iniziato da Paul Lévy (che aveva risolto il problema nel caso di traiettorie continue) caratterizza le *martingale generiche* come integrali stocastici rispetto a un processo

a incrementi (additivi) stazionari e indipendenti

(ii) la traduzione in termini di traiettorie, dovuta a P. Lévy e K. Itô, del teorema di De Finetti–Kolmogorov–Lévy–Hinchin sulla decomposizione di un processo stazionario e a incrementi indipendenti (Z_t) come somma di tre parti:

$$Z_t = mt + \sigma B_t + X_t$$

dove m è una costante, B_t è un moto browniano e X_t è un processo di Poisson composto, i.e. un integrale

$$X_T = \int_0^T dt \int P_{u,t} d\beta(u)$$

di processi di Poisson indipendenti $P_{u,t}$ con intensità dei salti uguale a u, rispetto ad una misura $d\beta(u)$, denominata misura di Lévy e con supporto in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.2 Generalizzazioni del calcolo stocastico

Le generalizzazioni iniziali del calcolo stocastico erano andate nel senso della sua estensione a spazi degli stati più generali, passando cosı da $\mathbb{R}^d$ a varietà differenziabili o a dimensioni infinite o entrambe le cose. Tuttavia queste estensioni non cambiavano la struttura concettuale di base della teoria.

La situazione è cambiata durante gli ultimi 30 anni del XX–o secolo nei quali sono comparse *tre innovazioni qualitative.*

Queste innovazioni sono cominciate con due linee di ricerca, inizialmente separate ed indipendenti: la *analisi del rumore bianco*, (1975) e il *calcolo stocastico quantistico* (1982) ed hanno trovato la loro unificazione, a partire da 1993, nel *calcolo del rumore bianco quantistico* .

Il tasso di progressione di questi eventi, cosı come la fusione di generalizzazioni differenti in una singola immagine unificata, è stato cosı rapido che, anche per coloro che hanno partecipato attivamente alla costruzione di questi sviluppi, è abbastanza difficile seguire tutte le nuove idee ed abbracciare l'intero paesaggio in una visione unificata.

Takeyuki Hida è stato il primo a tentare di andare oltre lo schema del calcolo stocastico tradizionale per includere dei processi che, anche se molto più singolari, erano stati utilizzati frequentemente nella letteratura di ingegneria e di fisica. La sua *analisi (o calcolo) del rumore bianco* , è stata proposta per la prima volta nelle sue conferenze di Carleton del 1975 [Hida92].

A partire dagli anni 1970 la teoria della probabilità si arricchisce di risultati molto belli, riguardanti una molteplicità di temi specifici. Dal punto di vista delle prospettive future la sfida più interessante viene dalla teoria dei campi stocastici (cioè in cui l'indice temporale viene sostituito da un indice multi–dimensionale). Esempi di tali processi erano stati considerati in lavori pionieristici di P. Levy e N. Wiener, come estensioni multi–dimensionali del moto Browniano; di von Neumann, come modelli di reti neurali; e sopratutto di Kolmogorov nei suoi profondi studi sulla turbolenza. Tuttavia negli anni 1970 tali studi ricevono un forte impulso da problemi di meccanica statistica e di teoria dei campi.

In questa direzione i risultati di R.L. Dobrushin, nel caso di parametro discreto, conducono alla prima estensione non banale dei processi di Markov e quelli di E. Nelson, nel caso di parametro continuo, collegano tale estensione ai problemi al contorno per equazioni ellittiche – un collegamento qualitativamente diverso da quello, menzionato sopra, tra processi di Markov ed equazioni ellittiche e paraboliche. È probabile che i più profondi sviluppi della probabilità classica riguarderanno questa linea di ricerca.

In direzioni più tradizionali una intuizione felice di probabilità Malliavin permette di estendere l'uso di metodi probabilistici nella teoria delle equazioni ellittiche per dimostrare non solo risultati di esistenza, come era avvenuto finora, ma anche di regolarità e quindi di estendere tale uso al campo degli operatori ipo–ellittici.

Le stime iper–contrattive di E. Nelson danno luogo a una serie di generalizzazioni che culminano nella dimostrazione, dovuta a L. Gross, della loro equivalenza con le *disuguaglianze di Sobolev logaritmiche*.

La teoria delle grandi deviazioni viene estesa, da Donsker e Varadhan, prima ai processi di Markov a tempo continuo, e poi da Olla, Varhadan e Yau ai campi stocastici e stabilisce un collegamento tra questa teoria e i principi variazionali della meccanica statistica.

La lista potrebbe continuare ma gli esempi citati sopra sono sufficienti a sottolineare la tendenza, tipica della fase di maturità delle ricerche matematiche, a concentrare la propria attenzione su problemi sempre più tecnici, la cui rilevanza concettuale non è facile da spiegare ai non specialisti.

7 La rivoluzione della probabilità quantistica

7.1 Caratteristiche delle rivoluzioni matematiche

Secondo T. Kuhn il termine *rivoluzione scientifica* và inteso come cambiamento radicale di prospettiva realizzato in un periodo di tempo relativamente breve. Nel caso della matematica è giustificato applicare tale termine quando il seuente complesso di condizioni è simultaneamente verificato:

(I) I nuovi sviluppi non riguardano un risultato isolato, sia pure importante, ma abbracciano una intera disciplina, dai suoi fondamenti fino ai più sofisticati sviluppi tecnici.

(II) I nuovi sviluppi mettono in luce collegamenti inattesi tra oggetti importanti, emersi in tempi diversi in settori diversi della matematica o rivelano strutture insospettate di oggetti semplici e ubiqui oppure suggeriscono nuovi esperimenti o permettono l'introduzione di nuove tecnologie.

(III) I nuovi sviluppi risolvono problemi aperti al di fuori della matematica, con una lunga storia indipendente e una vasta letteratura pubblicata in riviste e libri di riconosciuto livello scientifico.

(IV) I nuovi sviluppi nascono dalla combinazione di problemi tecnici con problemi filosofici e hanno profonde implicazioni concettuali comprensibili anche ai non addetti ai lavori.

La verifica della realizzazione di questi criteri è un impegno che va affrontato con i canoni etici e razionalistici della storiografia seria, che usa l'analisi obiettiva dei documenti per superare gli inevitabili pregiudizi legati all'ambiente sociologico, alla formazione culturale e a interessi particolari. Essa differisce dalle interessate fanfare accademiche quanto le opere di Shakespeare dai romanzi di Harry Potter.

7.2 Problemi posti dal successo del modello probabilistico quantistico

Si è visto che, verso la metà degli anni 1970 il processo di stabilizzazione della teoria della probabilità come disciplina matematica indipendente può dirsi concluso e lo stesso si può dire del processo di sistematizzazione dei grandi temi tradizionali di questa disciplina.

Tuttavia questo sereno orizzonte era turbato da una nuvola nera rappresentata dalla situazione paradossale per cui la formalizzazione matematica della disciplina che ha per oggetto le leggi della probabilità, non era abbastanza potente da includere la più avanzata teoria fisica contemporanea, la meccanica quantistica, nella quale il caso entra in un senso molto più intrinseco che in qualunque altra teoria fisica.

Insomma, mentre la probabilità classica sviluppava potenti tecniche per risolvere problemi, molti dei quali erano nati nella fisica classica, la più avanzata teoria fisica contemporanea sviluppava un formalismo probabilistico disgiunto da quello classico e risolveva problemi neanche formulabili in un contesto classico. Per esempio il probabilista classico ragiona in termini di probabilità, che sono numeri reali positivi, mentre il fisico quantistico ragiona in termini di ampiezze, che sono numeri complessi.

Dato che, in entrambi i casi, i dati empirici consistono (almeno nelle applicazioni alla fisica) principalmente in rilevamenti statistici, cioè frequenze relative previste o misurate, l'esistenza di due formalismi matematici disgiunti per la descrizione di dati statistici fa sorgere i seguenti problemi:

(1) Descrivere precisamente il nuovo modello matematico.

(2) Svilupparlo creando una teoria matematica che permetta di trattare in modo unificato il nuovo modello e quello tradizionale.

(3) Giustificare il nuovo formalismo, cioè spiegare i motivi concettuali che richiedono l'introduzione di una modellizzazione matematica differente dal consueto calcolo delle probabilità. In particolare rispondere alla domanda: *Questo nuovo, complesso formalismo probabilistico, è proprio necessario? Non si potrebbe riformulare la teoria quantistica in termini puramente classici?*

(4) Applicare il nuovo formalismo a una molteplicità di problemi della matematica, della fisica, della teoria dell'informazione, ... nello spirito dei quattro criteri elencati nella sezione (7.1).

Negli oltre 80 anni trascorsi dai primi lavori di Heisenberg, questi problemi sono stati affrontati da una molteplicità di ricercatori di provenienza diversa (fisici, filosofi, matematici, ...) e con motivazioni diverse ma accomunati dalla convinzione che la comunità scientifica contemporanea non poteva lasciare senza risposta domande di tale portata concettuale.

La probabilità quantistica costituisce la sintesi di questi contributi.

Molte nozioni, tecniche e singoli risultati, ora entrati stabilmente nel dominio della probabilità quantistica, compaiono in forma embrionale simultaneamente con la nascita della meccanica quantistica e in campi differenti quali l'analisi funzionale, i fondamenti della teoria quantistica, l'elaborazione dei segnali, l'ottica quantistica, le algebre di operatori, la teoria dei campi quantistici, la meccanica statistica, la teoria del trasporto, del rumore e della dissipazione quantistica, ... Si tratta tuttavia di risultati scollegati tra loro e il disegno di costruire la probabilità quantistica come disciplina unificata era assente in questi primi lavori. Tale disegno comincia ad emergere coscientemente a partire dalla seconda metà degli anni 1970.

Nel seguito saranno brevemente illustrati i punti salienti nello sviluppo dei 4 problemi elencati sopra.

7.3 Descrizione del nuovo formalismo

A prima vista descrivere il formalismo matematico di una teoria fisica può sembrare un compito non particolarmente arduo. Tuttavia proprio il caso che stiamo considerando mostra che la realtà è più complessa. Infatti, a oltre 80 anni dai primi lavori di Heisenberg i matematici descrivono il formalismo quantistico mediante strutture (algebre di operatori, spazi di Hilbert, operatori auto–aggiunti,...) che sono relativamente poco conosciute e usate dai fisici i quali invece, nel loro lavoro quotidiano, si servono di strutture e nozioni diverse (le funzioni d'onda o ampiezze di probabilità, le distribuzioni, l'integrale di Feynmann,...).

La radice di questa divergenza si può ritrovare già nei primi tentativi di descrivere il formalismo quantistico. L'articolo di Hilbert, Nordheim, Von Neumann [HilbNordvNeu27] adotta il punto di vista dei fisici e individua nei concetti di *ampiezza di probabilità* e di *interferenza delle probabilità* il punto centrale del nuovo formalismo.

Pochi anni dopo von Neumann pubblica una serie di articoli nei quali abbandona questa impostazione e introduce il nuovo approccio che si affermerà poi nella letteratura matematica.

Tale discrepanza si accentua nelle monografie di Dirac e di von Neumann: nella prima gli spazi di Hilbert vengono appena menzionati e nella seconda le ampiezze di probabilità giocano un ruolo marginale.

Non sono mancati i tentativi di introdurre versioni matematiche dell'approccio di Dirac o utilizzazioni fisiche delle algebre di operatori, ma è facilmente verificabile che, nonostante questi sforzi, il divario tra i due approcci non sia diminuito e le speranze di un linguaggio che unisca la potenza intuitiva e la fecondità dell'approccio fisico con la precisione e la generalità di quello matematico, sono ancora inesaudite.

7.4 Primi passi verso l'unificazione: gli albori della teoria della teoria algebrica della probabilità

Dato che la teoria quantistica è una teoria intrinsecamente probabilistica, importanti idee probabilistiche sono presenti nel lavoro di praticamente tutti i principali protagonisti della costruzione della teoria quantistica, in particolare Heisenberg, Born, Jordan, Dirac e più tardi Feynman tra i fisici; Hilbert, Weyl, von Neumann tra i matematici. Tuttavia dal punto di vista della formalizzazione matematica, le prime avvisaglie dell'approccio algebrico alla teoria delle probabilità si trovano nella monografia classica di John von Neumann [voN32].

von Neumann combina il problema della descrizione della struttura matematica della teoria quantistica con quello dello sviluppo di un formalismo unificato per la probabilità classica e quella quantistica.

Egli osserva che entrambe le teorie possono essere riformulate unicamente in termini di *osservabili* e di *valori d'attesa*. Nella probabilità classica le osservabili sono le variabili casuali a valori reali e i valori di attesa sono gli integrali (intesi come funzionali lineari) associati alle varie misure di probabilità.

Nella teoria quantistica, il modello matematico delle osservabili è dato da speciali operatori, detti auto–aggiunti, e i valori di attesa sono indotti da vettori di uno spazio infinito–dimensionale (spazio di Hilbert) tali vettori sono la versione astratta dalle *funzioni d'onda* della teoria quantistica.

Un importante teorema (il *teorema spettrale*, alla cui dimostrazione von Neumann aveva dato un sostanziale contributo) permette di identificare, a meno di isomorfismi naturali, operatori auto–aggiunti e variabili casuali e, in tale identificazione, i *valori d'attesa quantistici*, oggi chiamati semplicemente *stati*, corrispondono a misure di probabilità sui numeri reali.

Se si mantiene fisso lo stato (o valore d'attesa) quantico e si cambia l'osservabile (cioè l'operatore auto–aggiunto) in generale si ottengono due diverse distribuzioni di probabilità. Lo stesso accade se, su uno stesso spazio di probabilità classico, si considerano due variabili casuali diverse.

Purtroppo, a questo punto l'analogia si arresta ed emerge la prima, sostanziale, differenza tra la probabilità classica e quella quantistica: date due funzioni A e B, definite su uno stesso spazio Ω, comunque assegnata una misura di probabilità P su Ω, le due funzioni diventano variabili casuali classiche che ammettono **sempre** una distribuzione congiunta (cioè corrispondente all'evento congiunto che A assuma valori in un intervallo I e B in un intervallo J).

Abbiamo visto che l'analogo delle funzioni sono gli operatori auto–aggiunti (o *osservabili*) e l'analogo delle misure di probabilità sono gli stati. Ma non è affatto vero che dati due operatori auto–aggiunti A e B, definiti su uno stesso spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, l'assegnazione di un qualunque stato quantistico determini una distribuzione congiunta sui valori delle due osservabili: si dimostra facilmente che questo è il caso se e solo se gli operatori A e B commutano.

La commutatività è l'espressione matematica di una importante proprietà fisica — la compatibilità: due osservabili fisiche si dicono *compatibili* se possono essere misurate simultaneamente con precisione arbitraria. Il principio fondamentale che distingue la fisica quantistica da quella classica (*principio d'indeterminazione di Heisenberg*) afferma l'esistenza di osservabili incompatibili (posizione e momento sono l'esempio tipico).

Possiamo riassumere l'unificazione, realizzata da von Neumann, tra spazi di probabilità classici e quantistici nelle seguenti tre affermazioni:

(i) uno spazio di probabilità classico è univocamente determinato (a meno di isomorfismi) da una coppia $(\mathcal{A}, \varphi)$ dove $\mathcal{A}$ è un'algebra di funzioni su tale spazio (che può essere scelta in vari modi) e φ è la restrizione su $\mathcal{A}$ dell'integrale associato alla misura di probabilità su tale spazio. (Definendo opportunamente i morfismi, si può affermare che l'insieme di tali coppie $(\mathcal{A}, \varphi)$ costituisce una categoria isomorfa a quella degli spazi diprobabilità).

(ii) Tutte le affermazioni statistiche della teoria quantistica possono essere descritte da coppie del tipo $(\mathcal{A}, \varphi)$ dove $\mathcal{A}$ è un'algebra non commutativa e φ è uno stato quantistico.

(iii) Se, in un modello quantistico $(\mathcal{A}, \varphi)$ si restringe lo stato φ ad una sotto–algebra commutativa di $\mathcal{A}$, si ottiene (a meno d'isomorfismi) uno spazio di probabilità classico.

Oggi per *spazio di probabilità algebrico*, si intende una coppia $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ dove $\mathcal{A}$ è una algebra (di tipo speciale: *–algebra, C^*–algebra, algebra di von Neumann, $\ldots$) e φ uno stato su $\mathcal{A}$. Un tale spazio è detto *classico* se l'algebra $\mathcal{A}$ è commutativa, *quantistico* se non lo è.

Dall'affermazione (iii) segue che uno spazio di probabilità quantistico $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ determina, per restrizione alle sotto–algebre commutative di $\mathcal{A}$, infiniti spazi di probabilità classici.

Circa 25 anni dopo la monografia di von Neumann, A.M. Gleason dimostrò che assegnare uno spazio di probabilità quantistico $\{\mathcal{A}, \varphi\}$ equivale (nel senso delle categorie menzionato sopra) ad assegnare uno spazio di probabilità classico $\{\mathcal{A}_0, \varphi_0\}$ per ogni sotto–algebra commutativa $\mathcal{A}_0$ di $\mathcal{A}$ (in una formulazione precisa del suddetto teorema occorre escludere il caso in cui $\mathcal{A}$ sia l'algebra delle matrici complesse 2×2. Inoltre Gleason considerò una classe particolare di spazi di probabilità algebrici: sono stati necessari 30 anni di lavoro ulteriore da parte di molti matematici per estendere il risultato ad arbitrarie algebre di von Neumann).

Questo profondo teorema fornisce una prima intuizione del senso in cui la probabilità quantistica generalizza qualla classica: *uno spazio di probabilità algebrico equivale ad infiniti spazi di probabilità classici.* Inoltre, dato che la commutatività matematica esprime la compatibilità fisica (cioè la simultanea misurabilità) una prima conseguenza del suddetto teorema è che, a differenza di quanto accade nella meccanica classica, non è possibile misurare sperimentalmente lo stato quantico di un singolo sistema in un determinato istante di tempo: infatti qualunque insieme di misure effettuate sul sistema in quell'istante deve necessariamente, per il principio di Heisenerg, restringersi ad osservabili compatibili e queste, per il teorema di Gleason non sono sufficienti a determinare uno stato quantistico. Va aggiunto, per completezza, che invece è possibile **preparare** un sistema in una vasta classe di stati quantistici pre–assegnati. La determinazione precisa di tale classe è un fatto empirico e, almeno finora, non assoggettabile ad una analisi teorica.

Da quanto detto sopra segue che determinare gli insiemi minimali di sottospazi classici con la proprietà sopra–enunciata (che si potrebbe chiamare *proprietà di Gleason*), significa determinare le famiglie minimali di osservabili fisiche le cui misure sono sufficienti a determinare uno stato quantistico. Se l'algebra $\mathcal{A}$ ha dimensione finita si trova sempre una famiglia finita con questa proprietà. A dimensione infinita le famiglie di sotto–algebre di una data algebra (e.g. di von Neumann) minimali rispetto alla proprietà di Gleason non sono classificate. L'interesse per lo studio di questi problemi è stato ravvivato recentemente da alcuni problemi di informatica quantistica e la corrispondente linea di ricerca viene chiamata *tomografia quantistica*.

Molti dei lavori successivi di von Neumann sono dedicati alla generalizzazione matematica e assiomatizzazione del formalismo quantistico. Tra i risultati di questi lavori possiamo citare, da una parte la nascita della teoria delle algebre di operatori, dall'altra la nascita della logica quantistica e delle geometrie continue, entrambe generalizzazioni della geometria proiettiva classica.

7.5 Dubbi sulla necessità del nuovo modello probabilistico: variabili nascoste

Com'è accaduto per la teoria della relatività, che introduce in fisica l'uso di geometrie non Euclidee, cosı l'introduzione del nuovo modello probabilistico in fisica ha suscitato diffidenze e tentativi di ricondurre l'intero modello probabilistico all'interno di schemi classici.

In entrambi i casi ciò che è stato posto in discussione non sono i risultati fisici della teoria, ma il modello matematico, più precisamente, l'asserita necessità di abbandonare, in un caso il modello classico (Euclideo) dello spazio, nell'altro il modello classico (Kolmogoroviano) delle leggi del caso. Coloro che erano scettici su queste affermazioni hanno tentato di costruire modelli classici che riproducessero le previsioni delle nuove teorie. Nel caso della teoria quantistica tali modelli sono chiamati *un modelli di variabili nascoste* ed essi sono stati proposti fin dai primi anni di sviluppo della teoria.

Molti autori (tra i quali Einstein e Popper) pur non proponendo un modello alternativo hanno insistito sul fatto che la probabilità gioca in teoria quantistica lo stesso ruolo giocato dalle teorie statistiche della fisica classica. D'altra parte una tale tesi include implicitamente il rifiuto del nuovo modello probabilistico infatti, se davvero non ci fosse differenza tra la probabilità classica e quella quantistica, allora non si comprenderebbe perché mai i fisici di tutto il mondo dovrebbero usare un modello matematico diverso da quello classico. Viceversa, il fatto che la quasi totalità dei fisici continui a servirsi di tale modello è una chiara indicazione che essi sono convinti della sua necessità.

In effetti la critica ai tentativi di fare a meno del nuovo modello, implicita in molti lavori di autori come Born, Heisenberg, Feynmann, ... è basata su quello che, da Galilei in poi, è il più forte argomento contro una teoria fisica: la contraddizione con i dati sperimentali. Essa può essere formulata in questo modo: *Alcuni fenomeni, importanti e tipici della nuova teoria, mostrano che l'uso delle leggi della probabilità classica per effettuare previsioni sui fenomeni quantistici conduce a previsioni in contrasto con gli esperimenti*. Dato che i risultati degli stessi esperimenti risultano in accordo con le previsioni della teoria quantistica, questi autori concludono che:

(i) il nuovo modello probabilistico è giustificato

(ii) la casualità che interviene nel mondo dei fenomeni quantistici è di tipo diverso da quella che interviene nel mondo classico.

Questo tipo di argomenti, ai quali nè Einstein nè Popper hanno mai dato una risposta soddisfacente, ha determinato l'accettazione da parte della maggior parte dei fisici del nuovo modello probabilistico. Di conseguenza è dall'analisi di questi che doveva partire ogni tentativo di chiarire le relazioni tra i due modelli.

7.6 Radici sperimentali della differenza tra probabilità classica e quantistica

Per circa 40 anni dalla nascita della teoria quantistica, gli esperimenti fondamentali invocati a sostegno dall'argomentazione esposta sopra sono stati quelli detti *del tipo delle 2 fenditure* (v. [Feynm66]). A partire dal 1964, data di pubblicazione di un celebre lavoro di J.S. Bell [Bell64], a questi si sono affiancati quelli detti *del tipo Einstein–Padolsky–Rosen (EPR)*.

Non è importante per i nostri fini entrare nel dettaglio di tali esperimenti, che peraltro sono stati confermati da molti gruppi di ricercatori in tempi e in paesi diversi. Ciò che è importante è che tali esperimenti, che si riferiscono a situazioni fisiche diverse e a sistemi qualitativamente diversi, in molte decine di anni sono stati filtrati come simboli della diversità tra la fisica classica e quella quantistica.

Poiché la dimostrazione di tale diversità era, in entrambi i casi, basata su argomentazioni di tipo probabilistico, era intuitivamente chiaro che un'analisi approfondita delle ipotesi matematiche soggiacenti a tali argomentazioni avrebbe gettato luce sulla radice delle differenze tra il modello probabilistico classico e quello quantistico. Una tale analisi si può effettuare in tre passi principali:

(I) separare quelle quantità che possono essere paragonate con dati sperimentali da quelle che sono pure costruzioni teoriche;

(II) individuare i corrispondenti matematici di tali quantità nei modelli probabilistici classico e quantistico;

(III) analizzare i passaggi matematici che conducono alla contraddizione tra probabilità classica e risultati sperimentali e individuare le ipotesi che rendono possibili tali passaggi.

Il risultato di quest'ultima analisi conduce alla conclusione che *nelle due classici di esperimenti (doppia fenditura ad EPR), la radice delle contraddizioni con gli esperimenti sta in un'unica ipotesi, che è la stessa nei due casi: la possibilità di realizzare in uno stesso spazio di probabilità, tutte le variabili casuali coinvolte in tre esperimenti mutuamente incompatibili* (cioè tali che nessuna coppia di essi possa essere realizzata simultaneamente sullo stesso sistema).

Dato che, come si è già detto, i due tipi di esperimenti si riferiscono a sistemi completamente diversi e la loro rilevanza ai fini del problema dei fondamenti è emersa con circa 40 anni di separazione tra l'uno e l'altro, questa coincidenza, che era sfuggita alla immensa letteratura fisica sull'argoomento e che è stata per la prima volta messa in evidenza nell'ambito della probabilità quantistica, non poteva essere accidentale. Da essa si possono trarre due naturali conclusioni:

(i) la contraddizione con i dati sperimentali significa che l'ipotesi di *Kolmogorovianità* non è giustificata.

(ii) viceversa l'accordo di tali dati con le previsioni del modello quantistico significa che la realizzazione, in uno stesso modello quantistico, delle osservabili coinvolte in tali esperimenti è possibile.

L'implicazione di queste conclusioni sui cosidetti *paradossi della teoria quantistica* è che queste apparenti contraddizioni non nascono da una contraddizione (la non–località) tra le due principali teorie fisiche contemporanee (relatività e teoria quantistica) o da implausibili comportamenti degli oggetti *non guardati*, ma dalla applicazione (spesso implicita) di alcune regole della probabilità Kolmogoroviana ad alcuni dati non-Kolmogoroviani (quantistici).

7.7 Analogie tra geometrie non euclidee e probabilità non kolmogoroviane: gli invarianti statistici

Un astronomo, che riuscisse a trovare un triangolo stellare i cui angoli interni non si sommano a 180 gradi, potrebbe giustamente affermare di aver discriminato sperimentalmente tra il modello euclideo di spazio e quello non euclideo: tre siffatte misure angolari non possono essere descritte all'interno di uno stesso modello euclideo, ma possono esserlo all'interno di uno stesso modello non euclideo.

Analogamente i tre dati statistici provenienti dagli esperimenti di tipo 2–fenditure o EPR non possono essere descritti all'interno di uno stesso modello Kolmogoroviano, ma possono esserlo all'interno di uno stesso modello quantistico.

Si può dire che l'insieme costituito da tutte le terne di angoli, la cui somma è diversa da 180 gradi, costituisce un *invariante fisico* della proprietà di essere un triangolo non euclideo, nel senso che variando arbitrariamente una terna di angoli all'interno di questa regione, tale proprietà resta invariante.

È possibile introdurre un *invariante fisico* che giochi, per le terne di dati statistici che intervengono negli esperimenti di tipo 2–fenditure o EPR, un ruolo analogo a quello giocato dalle terne di angoli nella distinzione tra modelli euclidei e non euclidei?

La risposta affermativa a questa domanda è stato il primo importante risultato della probabilità quantistica Combinata con i risultati sperimentali discussi sopra, essa implica *la ncessità sperimentale dell'uso di modelli probabilistici non–Kolmogoroviani*.

Ciò implica che l'investigazione di una pluralità di modelli matematici inequivalenti di leggi del caso è qualcosa di più di un programma puramente matematico: *si tratta di qualcosa che ci è imposto dalle leggi della natura.*

Nell'intervallo di tempo tra i lavori di Gauss e quelli di Einstein, l'umanità acquista coscienza del fatto che esiste una pluralità di modelli di spazio e che le differenze tra questi possono manifestarsi attraverso quantità empiricamente misurabili. Nel periodo tra la scoperta della MQ e l'ultimo ventennio del 20–o secolo la stessa cosa accade per le leggi del caso. È ragionevole attendersi che le implicazioni di tale consapevolezza per la teoria della probabilità siano analoghe a quelle che si sono già realizzate in geometria.

La geometria euclidea continua ad avere un ruolo dominante nelle applicazioni della geometria, soprattutto quelle che riguardano la vita quotidiana e non c'è dubbio che la stessa cosa avverrà per la probabilità classica. Tuttavia non è azzardato prevedere che, come la rivoluzione non euclidea ha radicalmente mutato l'indirizzo delle ricerche in geometria, cosı la rivoluzione quantistica muterà radicalmente l'indirizzo delle ricerche in teoria della probabilità: questa tendenza è oggi in avanzata fase di realizzazione.

Dato che la dimostrazione della necessità empirica di modelli probabilistici non Kolomogoroviani è basata sugli invarianti statistici, è naturale porsi il problema di estendere il calcolo di tali invarianti dal modello di probabilità classico al quello quantistico. Si dimostra che, mentre il primo caso si riduce essenzialmente a un problema di programmazione lineare (equazioni lineari con vincoli dati da disequazioni), il secondo equivale a un problema nonlineare, quindi decisamente più difficile.

Una soluzione generale non esiste (come in geometria il calcolo esplicito degli invarianti è possibile per una classe ristretta di varietà), tuttavia in alcuni casi particolari è stato possibile risolvere il problema e ciò ha condotto a due conseguenze concettualmente rilevanti:

(i) sono matematicamente possibili insiemi di dati non descrivibili né dal modello probabilistico classico né da quello quantistico

(ii) gli invarianti statistici sono abbastanza sottili da distinguere i modelli quantistici basati sui numeri reali da quelli basati sui numeri complessi.

Il primo risultato pone il problema: *questa possibilità matematica è concretamente realizzata in natura?* Non è necessario cercare la risposta in dati statistici provenienti da esperimenti di fisica quantistica: la risposta potrebbe venire da dati medici, o economici, sociologici,... Per il momento questo è un problema aperto.

Il secondo risultato è di natura più tecnica ma risponde, combinando elegantemente dati sperimentali a considerazioni matematiche non banali, ad un problema che era stato affrontato senza conclusioni convincenti da vari autori: *perché le funzioni d'onda quantistiche devono essere numeri complessi e non reali?* La risposta è: *alcune probabilità di transizione, sperimentalmente misurate, possono essere descritte da un modello quantistico complesso, ma non da uno reale*.

In conclusione, combinando gli invarianti statistici con i risultati sperimentali della fisica quantistica, possiamo oggi dimostrare che, ci piaccia o no, è madre natura che ci obbliga a andare oltre lo schema di Kolmogorov per le leggi della probabilità nello stesso senso in cui si è ritenuto andare oltre lo schema euclideo. Questa combinazione di fondamenti teorici e sperimentali è la motivazione dell'uso del termine *probabilità quantistica* invece che *probabilità non commutativa.* Tale termine sottolinea una distinzione tra la probabilità quantistica e le varie generalizzazioni non commutative di altri rami di matematica che sono state sviluppate dopo di essa e che, a differenza di probabilità e geometria, non possono lanciare una sfida sperimentale a sostegno della propria necessità intrinseca.

7.8 Il 6–o problema di Hilbert e la funzione euristica delle teorie assiomatiche

Sebbene concettualmente rilevanti le implicazioni degli invarianti statistici sono di carattere negativo: dimostrano la necessità di superare il modello Kolmogoroviano, ma non *spiegano* le peculiari caratteristiche del formalismo quantistico.

Ma cosa precisamente significa *spiegare le caratteristiche di un formalismo matematico*? Non è sufficiente *descrivere* un tale formalismo? Non è più produttivo, soprattutto se ci si riferisce a discipline ricche di un immenso potenziale applicativo come la fisica e la probabilità, concentrare la propria attenzione sui risultati, che sono l'unico vero banco di prova di una teoria?

Per rispondere a queste domande può giovare una breve discussione sulla differenza tra approccio pragmatico e approccio teorico alla conoscenza e, in relazione a quest'ultimo, sul ruolo euristico che il metodo assiomatico ha giocato nella chiarificazione dei rapporti tra probabilità e teoria quantistica.

Il fine della conoscenza, e quindi di ogni teoria, è quello di limitare il dominio che il mondo esterno esercita sugli esseri umani. L'impresa teorica si inquadra in tale fine creando *divagazioni*, apparentemente indipendenti da questo fine ma che, come la storia del pensiero ha abbondantemente dimostrato, finiscono per riconfluire in esso attraverso percorsi spesso tortuosi e imprevedibili. L'atteggiamento pragmatico rivolge la sua attenzione agli aspetti di breve scadenza di tale fine, quello teorico punta su aspetti più a lunga scadenza.

Da una parte la teoria quantistica ha realizzato, e continua a farlo tuttora, successi esaltanti nella nostra comprensione del mondo e capacità di agire su di esso. Dall'altra questi risultati hanno la loro base in un formalismo matematico diverso da quello utilizzato in qualunque altra teoria prima di essa, un formalismo che lo stesso Heisenberg, in uno dei suoi lavori più citati [Heis27] (quello in cui formula per la prima volta il principio di indeterminazione), ha affermato essere *lontano dall'intuizione*.

Una limpida formulazione della sfida teorica, posta da questa circostanza storica alla comunità matematica, è contenuta nel già citato articolo di Hilbert, Nordheim e von Neumann , secondo i quali: *"...occorre formulare così chiaramente le ipotesi fisiche, che il formalismo matematico ne risulti univocamente determinato..."*. Questa frase chiarisce il programma formulato dallo stesso Hilbert, 27 anni prima dell'articolo in questione, nel suo famoso intervento, che tanto ha influenzato lo sviluppo della matematica nel 20–o secolo, al Convegno Internazionale dei Matematici tenutosi a Parigi nel 1900. Infatti il sesto, tra i 23 problemi di Hilbert, suggeriva di:...

... trattare assiomaticamente quelle discipline fisiche in cui già oggi la matematica contemporanea gioca un ruolo predominante ... queste sono in primo luogo il calcolo della probabilità e la meccanica ...

A 27 anni di distanza dall'enunciato di questo programma Hilbert, che aveva il dono di saper distinguere le sfide fondamentali dai problemi tecnici, coglie la sfida rappresentata dal nuovo formalismo probabilistico e suggerisce che l'unico modo per capire profondamente la relazione tra un modello matematico e la realtà che esso vuole descrivere è quello di isolare un complesso di affermazioni indipendenti da ogni modello (le *ipotesi fisiche*) e poi procedere per via puramente deduttiva fino alla completa determinazione del modello matematico o almeno fino alla esplicitazione delle ulteriori condizioni necessarie per tale completa determinazione.

Ciò è precisamente quello che Hilbert aveva realizzato nei suoi *Fondamenti della Geometria*[Hilb1930] per una classe di modelli geometrici. Questa monografia è ancora oggi la migliore introduzione per chi voglia comprendere la differenza tra una teoria assiomatica e una sterile esercitazione formale.

Nel caso della teoria quantistica il già citato carattere *lontano dall'intuizione* del formalismo matematico usato rendeva più drammatico il ruolo della assiomatizzazione. Per la prima volta nella storia della scienza l'assiomatizzazione non gioca un ruolo di sistematizzazione, ma di spiegazione, di creazione di un intuito: per molti decenni la gente si è chiesta: perché abbiamo bisogno di funzioni d'onda complesse per descrivere probabilità? quali richieste fisiche giustificano l'introduzione degli spazi di Hilbert, del principio di sovrapposizione, della stessa legge dinamica della teoria quantistica (cioè l'equazione di Schrödinger)?

La scienza contemporanea non poteva lasciare queste domande senza una risposta matematicamente soddisfacente. Occorrerà però attendere circa 70 anni e il contributo di una moltitudine di filosofi, fisici e matematici, prima di poter tirare le fila di uno dei più profondi, stimolanti e provocanti dibattiti di ogni epoca sui fondamenti delle scienze della natura.

7.9 Eventi e misure: nuova assiomatica della probabilità

von Neumann, pur essendo co–autore, con Nordheim e Hilbert, dell'articolo citato nella sezione precedente, non attacca direttamente il problema in esso posto. Infatti l'obiettivo della sua monografia è di *descrivere* il formalismo matematico utilizzato nella teoria quantistica non di *dedurlo*.

Il primo tentativo *dedurre matematicamente il formalismo quantistico* da un insieme di assiomi fisicamente plausibili è dovuto a George W. Mackey [Ma76] ed è esplicitamente ispirato ad un precedente lavoro di Birkhoff e von Neumann sulle logiche quantistiche.

Mackey parte da alcuni assiomi che dovrebbero essere soddisfatti da una qualsiasi teoria statistica e da questi deduce che l'insieme degli eventi, in una tale teoria può essere rappresentato matematicamente mediante un reticolo ortocomplementato. In questo schema la teoria quantistica è caratterizzata, fra tutte le teorie statistiche, dalla proprietà che il corrispondente reticolo degli eventi è isomorfo al reticolo del sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert.

I tentativi di giustificare questa proprietà in termini di presupposti fisici plausibili, ha dato origine a una vasta letteratura sulle logiche quantistiche che, anche se non è riuscita a realizzare tale obiettivo, cioè spiegare le origini concettuali e fisiche del formalismo quantistico, ha prodotto due risultati matematici interessanti cioè il già citato teorema di Gleason ed un'estensione infinito dimensionale del teorema di coordinatizazione della geometria proiettiva [Pir76].

La scelta di Mackey, di porre la nozione di *evento* alla base della sua assiomatica delle teorie statistiche, ricalcava la tradizione degli approcci assiomatici alla probabilità classica. Tuttavia una analisi delle caratteristiche specifiche del ruolo della probabilità in teoria quantistica suggerisce un approccio più generale. In efetti due delle più importanti novità concettuali introdotte dalla fisica quantistica sono:

(i) il ruolo *attivo* delle operazioni di misura

(ii) l'esistenza di coppie di misure non eseguibili simultaneamente sullo stesso sistema (principio di Heisenberg in forma forte)

La condizione (i) significa che le *proprietà degli oggetti* vanno pensate come *responsi* a determinate interazioni (cioè le misure).

Uno schema ideale della misura di una proprietà A è dato da *una scatola nera, un filtro* che separa, o fisicamente o nella percezione dello sperimentatore, i sistemi che godono della proprietà A dagli altri. Si può supporre che la proprietà A sia *stabile* cioè: se un sistema che ha superato il filtro che verifica A viene sottoposto di nuovo allo stesso filtro allora, se nel frattempo il sistema non ha subito altre interazioni, il secondo filtro viene deterministicamente superato.

Ci sono due modi di schematizzare il processo fisico che avviene nella scatola nera. Per semplificare il discorso supponiamo che il sistema sia una pallina e che la proprietà A sia la verifica del fatto che il colore della pallina sia rosso.

(I) **registrazione passiva**. La scatola nera *legge* il colore della particella e quest'operazione non altera in modo significativo nessuna delle proprietà della particella stessa (questo è il punto di vista della probabilità classica)

(II) **interazione e responso**. La scatola nera *chiede alla pallina* (mediante una interazione nella cui invenzione si estrinseca l'arte dello sperimentatore): *"Sei di colore rosso?"* (in seguito scriveremo solo: *Rosso?*) e la pallina risponde: *Si* oppure *No*, poi registra in memoria la risposta e, se è *Si* si predispone a dare la stessa risposta se la prossima domanda sarà la stessa (questo illustra il punto di vista della probabilità quantistica).

I bravi sperimentali raggiungono vette affascinanti nell'arte di *far domande* alla natura – nel seguito useremo i termini *chiedere* e *rispondere* in questo senso.

È chiaro che il caso (I) può essere visto come caso particolare del (II): una pallina, alla domanda (*Rosso?*) risponde o sempre *No* o sempre *Si* e nel secondo caso risponde *No* per ogni altro colore.

È anche chiaro che il caso (II) lascia molta più libertà di scelta alla pallina: le regole da noi enunciate non escludono che, dopo aver risposto *Si* alla domanda *Rosso?*, la pallina possa rispondere *Si* qualora la prossima domanda sia: *Blu?*

Con la tecnologia attuale è facile costruire una pallina che, irradiata con luce di un certo colore reagisca illuminandosi con una luce che corrisponde ad uno qualsiasi dei colori dell'arcobaleno con una pre–assegnata probabilità. Ancora più semplice è simulare quest'esperimento su un computer.

Se introduciamo la regola (corrispondente al principio di Heisenberg) secondo la quale due domande su colori diversi non possono mai essere fatte alla stessa pallina, allora nessuna pallina potrà mai essere colta in contraddizione.

Meno evidente è il fatto che il comportamento statistico delle palline di tipo (II) può discostarsi di molto da quelle di tipo (I), cioè dalla probabilità classica. Per illustrare questo fatto consideriamo il caso estremo in cui le palline siano state programmate in modo da rispondere *Si* qualunque sia il primo colore che viene chiesto loro. In tal caso, con le nostre regole del gioco esse dovranno poi confermare sempre lo stesso colore. Immaginiamo uno sperimentale che ragioni con l'ottica della probabilità e della fisica classica (registrazione passiva di proprietà pre–esistenti) e che cerchi di farsi un'idea della composizione dell'urna attraverso misure (con reimbussolamento).

Se lo sperimentale volesse stimare la frazione di palline rosse, porrebbe a tutte le palline la domanda *Rosso?* e, dato che riceverebbe sempre la risposta *Si*, dopo un certo numero di misure concluderebbe che tutte le palline nella scatola sono rosse. D'altra parte un altro sperimentale, che ponesse la domanda *Blu?*, concluderebbe con la stessa legittimità che tutte le palline sono blu.

In questo caso estremo, l'unica casualità sta nella scelta delle domande, ma già questo caso è sufficiente per intuire il nucleo dell'argomento: *la stati-*

stica dei responsi può dar luogo a conteggi di frequenze relative incompatibili con ogni modello classico. Infatti nessuna urna classica (cioè con i colori delle palline fissati indipendentemente dalla domanda) potrebbe dar luogo a un risultato come quello descritto sopra.

Lo stesso esempio estremo può illustrare l'emergere di un'altra importante differenza tra i responsi e le registrazioni passive: la non commutatività. Se pensiamo alle domande come a *scatole nere* che la pallina attraversa, uscendone in uno stato definito, e se denotiamo (*Rosso?* , *Blu?*) la scatola composta che sottopone una pallina **prima** alla domanda *Rosso?* e **poi** alla domanda *Blu?*, allora dalla scatola composta (*Rosso?* , *Blu?*) la pallina uscirà nello stato *Rosso*, mentre dalla scatola composta (*Blu?*,*Rosso?*) la pallina uscirà nello stato *Blu*.

Dato che le proprietà delle misure

(i) includono come casi particolari le proprietà degli eventi

(ii) possono dare luogo a statistiche non classiche

(iii) forniscono una naturale e intuitiva spiegazione dell'emergere di *operazioni non commutative* nella descrizione del mondo fisico

esse sono naturali candidati per l'estensione della nozione di *evento*. Gli assiomi, che descrivono queste proprietà, permettono di risolvere il problema posto da Hilbert, cioè una formulazione assiomatica unificata della probabilità classica e quantistica unitamente alla deduzione del modello matematico della fisica quantistica, inclusa una generalizzazione della struttura di spazio di Hilbert, del principio di sovrapposizione e dell'equazione di Schrödinger, a partire da richieste semplici, plausibili e fisicamente significative [Ac82].

L'interesse di questo risultato non sta tanto nella non banalità della costruzione matematica nè nel fatto che esso realizza per la prima volta un obiettivo perseguito per vari decenni da una moltitudine di ricercatori, quanto nelle sue implicazioni concettuali. La traduzione matematica della distinzione tra *statistica degli eventi* (passiva) e *statistica dei responsi* (adattiva) entra nel vivo del dibattito sul *realismo* della interpretazione della fisica quantistica, che è stato al centro della filosofia della scienza negli ultimi 70 anni e che ha visto scienziati del calibro di Einstein e Schrödinger accusare l'interpretazione standard della teoria quantistica di non rispettare i canoni elementari del realismo e scienziati del calibro di Bohr e Heisenberg argomentare sull'impossibilità di rendere tali canoni compatibili con i risultati degli esperimenti.

La probabilità quantistica mostra che entrambi gli schieramenti coglievano una parte di verità: gli uni con l'accento sul carattere *attivo* del processo di misura, gli altri con l'insistenza sulla pre–determinazione dei risultati e sulla necessità che l'interpretazione della più importante teoria fisica contemporanea fosse basata su enunciati chiari e precisamente formulati.

Certamente Bohr si riconoscerebbe nell'affermazione che la statistica dei sistemi adattivi può non essere Kolmogoroviana ed Einstein accetterebbe l'idea che il colore di un camaleonte è altrettanto *pre–determinato* quanto quello di una pallina, anche se in un senso profondamente diverso e che quindi richiede modelli matematici diversi per la sua descrizione dinamica e statistica. La teoria quantistica ha rivoluzionato la nostra descrizione della *realtà fisica*, ma non il significato di questo termine: la grande, e per vari decenni non sufficientemente compresa, innovazione concettuale introdotta da questa teoria riguarda la nostra idea di *leggi del caso*.

8 Conclusioni

Nell'intervallo di tempo dalla prima guerra mondiale a oggi la teoria della probabilità non solo si è realizzata come disciplina matematica autonoma, ma si è affiancata all'aritmetica, geometria, algebra, analisi come uno dei pilastri portanti dell'edificio matematico.

Il suo ruolo nelle altre scienze si è accresciuto enormemente sia come strumento tecnico, sia come linguaggio, sia come contesto concettuale alla luce del quale coordinare diverse esperienze.

Il suo ruolo nella visione del mondo legata alla cultura scientifica è cambiato radicalmente dai primi del '900: con l'avvento della fisica quantistica la descrizione probabilistica dei fenomeni naturali non è più una necessità pratica legata alla nostra imperfetta conoscenza ma in linea di principio eliminabile, bensì una necessità teorica, legata se non alla natura stessa, almeno al rapporto uomo–natura e in linea di principio ineliminabile. In altri termini, la probabilità è diventata una componente costitutiva della nostra cultura con una mole di applicazioni paragonabile soltanto all'analisi matematica.

La discussione precedente tratteggia, per motivi di spazio solo a grandi linee, le tappe fondamentali dello sviluppo storico della teoria della probabilità in quanto disciplina matematica.

A partire dalla sezione (7) abbiamo cercato di spiegare per quali motivi, concettuali e sopratutto sperimentali, lo sviluppo della teoria quantistica abbia imposto un ri–esame dei fondamenti della probabilità classica e come quest'analisi abbia condotto alla conclusione della esistenza di una molteplicità di modelli inequivalenti delle leggi del caso, analogamente a quanto era accaduto circa un secolo prima per la geometria.

Per quanto concettualmente rilevante questa conclusione non rende conto dell'impetuoso sviluppo degli ultimi 30 anni, che ha condotto la probabilità quantistica ad emergere come nuovo ramo della matematica, che collega probabilità classica e analisi funzionale, algebra e combinatoria, fisica quantistica e tecnologia dell'informazione e della comunicazione.

In questo sviluppo i tradizionali legami fra probabilità, analisi classica e combinatoria sono evoluti in in una rete complessa che comprende praticamente ogni campo della matematica: dalla teoria degli operatori alla teoria dei grafi, dalle algebre di Hopf alle rappresentazioni dei gruppi, alle algebre di Lie a dimensione infinita, ...

Inoltre le applicazioni tradizionali della probabilità al mondo classico (fisica, informazione, comunicazioni, ingegneria, finanza, . . .) sono ora state estese ai settori corrispondenti nel mondo quantistico.

Alla descrizione di questo sviluppo, necessaria per mettere il lettore nelle condizioni di valutare se effettivamente i criteri esposti nella sezione (7.1) siano applicabili al caso della probabilità quantistica, sarà dedicata un'altro articolo della presente opera.

9 Bibliografia

[Ac82c] Accardi L.: Some trends and problems in quantum probability, In: Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes, L. Accardi, A. Frigerio and V. Gorini (eds.), Proc. 2–d Conference: Quantum Probability and applications to the quantum theory of irreversible processes, 6–11, 9 (1982) Villa Mondragone (Rome), Springer LNM N. 1055 (1984) 1-19 v. l'esposizione più recente in: Luigi Accardi: Axioms for quantum probability, in: Proceedings of the "25th QP Conference "Quantum Probability and related topics", June, 20-26, 2004, Bedlewo, Poland, Banach Center Publications Vol. 73 (2006) 15–33

[Bell64] Bell J.S.: On the Einstein Podolsky Rosen Paradox, Physics 1 no. 3 (1964) 195-200

[BenDiNLinOksZha05] F.E. Benth, G. Di Nunno, T. Lindstrom, B. Oksendal, T. Zhang (eds.): Proceedings of "The 2005 Abel Symbosium, Stochastic Analysis and Applications "A Symposium in Honor of Kiyosi Itô" (on the occasion of his 90th birthday), Organized by the Norwegian Mathematical Society and the Center of Mathematics for Applications (CMA), Oslo, Springer (2007)

[EPR35] Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum mechanical description of reality be considered complete ? Phys. Rev. 47 (1935) 777-780

[FeLeSa66] Feynmann R.P., Leighton R.P., Sands M.: Lectures on Physics, vol. III, Addison–Wesley (1966)

[Gleas57] Gleason A.M.: Measures on closed subspaces of Hilbert space, J. Math. Mech. 6 (1957) 885-893

[Heis27] W. Heisenberg: Über den auschaulichen Inhalt der quantentheoretischen kinematik und Mechanik (Ric. 23/3/1927) Z.S. für Phys. 40 (1927) 172–198

[Hida92] Hida T.: Selected papers, World Scientific (2001)

[Hilb1930] Hilbert David: Grundlagen der Geometrie, Teubner, Leipzig (1930)

[Hilb1900] Hilbert David: Mathematische Probleme, Gesammelte Abhandlungen, III, § 17, Chelsea (1965) also in: Mathematical developments arising from Hilbert problems. AMS, Proceedings Symp. in pure math. 28 (1976)

[HilbNordvNeu27] Hilbert D., Nordheim L., Von Neumann: Hilbert D. Nordheim L. von Neumann J. Über die Grundlagen der Quantenmechanik, Math. Ann. 98 (1927) 1-30 also in: J. von Neumann, Coll. Works, Pergamon Press, I, 104–133

[ItôMcKn65] Itô K., McKean H.P., Jr.: Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer–Verlag (1965); in Classics in Mathematics, Springer–Verlag (1996)

[Kolmo31] Kolmogorov A.N.: Sui metodi analitici in teoria delle probabilità, Usp. Mat. Nauk (1931) N. 5

[Kolmo33] Kolmogorov A.N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsreghnung, Springer, Berlin (1933) reprinted: Foundations of the theory of probability, Chelsea Publishing company, New York (1950), (1956) trad. italiana: Concetti Fondamentali di teoria delle probabilità. Edizioni Teknos (1995) (a cura di L. Accardi)

[KunWat67] Kunita H., Watanabe S.: On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30, 209–245 (1967)

[Mackey76] Mackey G.W.: Mathematical foundations of quantum mechanics, Addison-Wesley (1976)

[Piron76] Piron C.: Foundations of quantum physics, Addison-Wesley 1976

[vonNeu32] J. von Neumann: Mathematical foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press (1955) also: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, Springer (1932), Dover–Usa (1943), Francia (1947), Spagna (1949)

[Wien23] N. Wiener: Differential space, Journ. Math. and Phys., Massachusett's Inst. of Technology 2 (1923) 131–174