Analyse fonctionelle

Sous-facteurs de $\mathcal{L}(\mathbf{F}_\infty)$ d'indice $4\cos^2\pi/n, n\geq 3$

Florin RADULESCU, U.C.L.A./I.H.E.S.

Résumé. Nous introduisons un modèle des probabilités non-commutatives (au sens de Voiculescu) pour le produit libre amalgamé (réduit) $[\mathcal{L}(F_N)\otimes A] \underset{A}{*} B$, où $A\subseteq B$ est une inclusion d'algèbres de dimension finie (avec une trace). Ce modèle permettra de montrer que $\mathcal{A}_\lambda^n = \left(\mathcal{L}(F_\infty) \otimes A_n\right) \underset{A_n}{*} A_{n+1}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(F_\infty)$, où $A_n=\{e_2\dots e_{n+1}\}''$, $A_{n+1}=\{e_1\dots e_{n+1}\}''$; $(e_i)_{i\in}$ sont les projections de Jones associées à une valeur d'indice. Pour λ^{-1} dans la partie discrète de la série de Jones $\{4\cos^2\pi/m \mid m\geq 3\}$, et n suffisamment grand, $\mathcal{L}(F_\infty)\cong\mathcal{A}_\lambda^n$ est un sous-facteur irréductible d'indice λ^{-1} dans $\mathcal{A}_\lambda^{n+1}\cong\mathcal{L}(F_\infty)$.

Subfactors of $\mathcal{L}(\mathbf{F}_\infty)$ with index $4\cos^2\pi/n, n\geq 3$

Abstract. We introduce a noncommutative probability model (in the sense of Voiculescu) for the (reduced) amalgamated free product $\left(\mathcal{L}(F_N)\otimes A\right) \underset{A}{*} B$, where $A\subseteq B$ is an inclusion of finite dimensional algebras (with trace). Using this model we prove that $A_\lambda^n = \left(\mathcal{L}(F_\infty)\otimes A_n\right) \underset{A_n}{*} A_{n+1}$ is isomorphic to $\mathcal{L}(F_\infty)$ where $A_n=\{e_2,\dots e_n\}''$, $A_{n+1}=\{e_1,\dots e_n\}''$, $(e_i)_i$ being the Jones projections associated to an index value λ^{-1}. For λ^{-1} in Jones' discrete series $\{4\cos^2\pi/m \mid m\geq 3\}$ and n big enough, $\mathcal{A}_\lambda^n\cong\mathcal{L}(F_\infty)$ is an irreducible subfactor of index λ^{-1} in $\mathcal{A}_\lambda^{n+1}\cong\mathcal{L}(F_\infty)$ of index λ^{-1}.

Abridged English version.

We introduce in this paper a noncommutative probability approach (in the sense of Voiculescu) to the reduced, amalgamated free product algebras $\left(\mathcal{L}(F_N)\otimes A\right) \underset{A}{*} B$, and thus (by [15]) obtaining in this way a random matrix model for such algebras. Here $A\subseteq B$ is an inclusion of finite dimensional algebras with traces, $\mathcal{L}(F_N)$ is the type II_1 factor of the free group F_N, while the reduced, amalgamated free product is obtained by the Gelfand-Neimark-Segal construction ([3], [6], [13]), via a canonical trace ([10]) defined on a dense subset of the algebra.

Such algebras were first considered in [10], where it was proved that inside $(Q\otimes R_\lambda) \underset{R_\lambda}{*} R$ (Q a type II_1 factor) one can find a series of (irreducible) inclusions $N^S\subseteq$

M^S of type II_1 factors, of index $[M^S : N^S] = S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid n \geq 3\} \cup [4,\infty)$. M^S are nonhyperfinite and non-Γ, but not necessarily isomorphic. Here $\{e_i\}_{i\in}$ are the Jones projections ([5]) associated to $\lambda = S^{-1}$, while $R = A^1_\infty; R_\lambda = A^2_\infty$ where $A^1_n = \{1, e_1, \dots e_n\}''$; $A^2_n = \{1, e_2, \dots e_n\}''$, $n \in \cup\{\infty\}$, are algebras with trace.

Using the random matrix model, we prove that $\mathcal{A}^n_\lambda = \left[\mathcal{L}(F_\infty) \otimes A^2_n\right] \underset{A^2_n}{*} A^1_n$ is isomorphic to $\mathcal{L}(F_\infty)$ for $\lambda = S^{-1} \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\} \cup [4,\infty)$. For $\lambda^{-1} = S$ in Jones' discrete series, the finite depth condition ([5]) on the inclusion $R \subseteq R_\lambda$ shows that for n big enough

$$(Q \otimes A^2_n) \underset{A^2_n}{*} A^1_n \subseteq \left(Q \otimes A^2_{n+1}\right) \underset{A^2_{n+1}}{*} A^1_{n+1} \tag{1}$$

is a type II_1 factors' inclusion of index $\lambda^{-1} = S$ (and invariant ([5]) A_n).

In particular, these results altogether show that:

Theorem. $\mathcal{L}(F_\infty)$ (the type II_1 factor of a free group) with infinitely many generators has (irreducible) subfactors of index λ, for each λ in Jones' discrete series.

In particular we obtain that the factors in Popa's series, are such that $N^S \cong M^S \cong \mathcal{L}(F_\infty)$ for $Q = \mathcal{L}(F_\infty)$, for $S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\}$. In fact it might be proved that $N^S(Q) \subseteq M^S(Q)$ is a consecutive inclusion in a (sufficiently big) suitable downward tunnel ([5], [8]) of (1).

This result gives us a first example of a type II_1 factor $\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big)$ which is nonisomorphic to the hyperfinite II_1 factor R , non-Γ , and such that the Jones invariant ([5]) is computable:

$$\mathcal{J}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big) = \mathcal{J}(R) = \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\} \cup [4,\infty)$$

(the only other II_1-factors M for which one has information about the invariants $\mathcal{J}(M)$ and $\mathcal{F}(M)$, are the ones associated to discrete groups with property T or more generally for T factors ([2], [1]); in this case by Connes' theorem [1] and by the results of Pimsner and Popa [9], these invariants are countable).

We recall here, that for a type II_1 factor M, with trace τ, $\mathcal{J}(M)$ is the set of all possible values of indices of subfactors of M, while $\mathcal{F}(M) = \{t > 0 \mid (\exists) e = e^* \in M$ idempotent, s. t $\tau(e) = t,\ eMe \cong M\}$.

The line $[4,\infty)$ is contained in $\mathcal{J}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big)$ because of Jones' observation ([5]), that each value $t/1-t$ in $\mathcal{F}(M)$ gives a (nonirreducible) subfactor of M of index $t^{-1} + (1-t)^{-1}$, and because of the fact ([12], see also [15]) that $\mathcal{F}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big) = {}_+\setminus\{0\}$. This last result will also be an essential step in our proof.

We hope that our methods could be also used to find an answer to the intriguing question regarding the possible values (≥ 4) of indices of irreducible subfactors of $\mathcal{L}(F_\infty)$, since , by its properties $\mathcal{L}(F_\infty)$ is close to R, which has gaps ([11]) in this set, while the series $N^S \subseteq M^S$, introduced by Sorin Popa in [10], is a series of irreducible inclusions of non-Γ factors, close (by construction) to $\mathcal{L}(F_\infty)$ also for $S \geq 4$ $\big(Q = \mathcal{L}(F_\infty)\big)$.

In a further paper we will analyse results that are similar to these in this announcement, for other type II_1-factors (associated to the free groups F_N, $N \in$) or for other inclusions $A \subseteq B$.

We are indebted to D. Voiculescu, S. Popa and G. Skandalis for several discussions on this subject.

On introduit dans cette note une approche par la probabilité non-commutative (de Voiculescu, [14], [15]) du produit libre amalgamé (réduit), $[\mathcal{L}(F_N) \otimes A] \underset{A}{*} B$. On obtient de cette manière un modèle de matrices aléatoires pour de telles algèbres.

Ici $A \subseteq B$ désigne une inclusion d'algèbres de dimension finie (B est donné avec une trace), $\mathcal{L}(F_N)$ est le facteur II_1 associé à un groupe libre et le produit libre amalgamé (réduit) est obtenu par la construction G.N.S. ([3], [6], [13]) en partant d'une trace ([10]) sur une partie dense de l'algèbre. De telles algèbres (comme $[\mathcal{L}(F_N) \otimes A] \underset{A}{*} B$) ont été introduites en premier lieu dans [10]; on avait alors prouvé l'existence d'inclusions irréductibles $N^S(Q) = N^S \subseteq M^S = M^S(Q)$ dans $(Q \otimes R_\lambda) \underset{R_\lambda}{*} R$, d'indice $[M^S : N^S] = S$, $S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\} \cup [4, \infty)$. M^S et N^S sont non-Γ et non nécessairement isomorphes. Ici les $\{e_i\}_{i\in}$ sont les projecteurs de Jones associés à $\lambda = S^{-1}$ et $R = A^1_\infty$, $R_\lambda = A^2_\infty$, ou $A^1_n = \{1, e_1, \ldots e_n\}''$; $A^2_n = \{1, e_2, \ldots e_n\}''$, $n \in \cup\{\infty\}$ (avec leur traces) [10].

En utilisant le modèle à matrices aléatoires on prouve que $\mathcal{A}^n_\lambda = [\mathcal{L}(F_\infty) \otimes A^2_n] \underset{A^2_n}{*} A^1_n$ est isomorphe à $\mathcal{L}(F_\infty)$, pour tous $\lambda = S^{-1} \in \{4\cos^2 \pi/m \mid n \geq 3\} \cup [4, \infty)$.

Pour $\lambda = S^{-1}$ dans la partie discrète de la série de Jones, la condition de profondeur finie ([5], [1]) de l'inclusion $R \subseteq R_\lambda$ montre que pour n suffisamment grand, l'inclusion $(Q \otimes A^2_n) \underset{A^2_n}{*} A^1_n \subseteq (Q \otimes A^2_{n+1}) \underset{A^2_{n+1}}{*} A^1_{n+1}$, de facteurs de type II_1, a pour indice $\lambda^{-1} = S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\}$. En conséquence on a :

Théorème. $\mathcal{L}(F_\infty)$ (le facteur II_1 d'un groupe libre avec une infinité de générateurs) a des sous-facteurs irréductibles d'indice λ (et invariant A_{m+2}) pour tout λ dans la partie discrète de la série de Jones: $\{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\}$.

En effet, il est possible de prouver qu'on peut retrouver l'inclusion $N^S \subseteq M^S$ dans un tunnel descendant ([8]) associé à l'inclusion $\mathcal{A}^n_\lambda \subseteq \mathcal{A}^n_{\lambda+1}$ pour n suffisamment grand.

Il s'ensuit en particulier ([8] et [10]) que les facteurs de la série de Popa sont tels que $N^S \cong M^S \cong \mathcal{L}(F_\infty)$ (pour $S \in \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\}$).

On obtient ainsi un premier exemple d'un facteur de type II_1, non-isomorphe au facteur hyperfini R et non-Γ , et dont l'invariant de Jones ([5]), $\mathcal{J}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big)$ peut être calculé de manière explicite:

$$\mathcal{J}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big) = \{4\cos^2 \pi/m \mid m \geq 3\} \cup [4,\infty) \ \big(= \mathcal{J}(R)\big) \ ,$$

(les seuls autres facteurs M de type II_1 pour lesquels on a des informations sur l'invariant $\mathcal{J}(M)$ (et $\mathcal{F}(M)$) sont les facteurs associés à des groupes ayant la propriété T; dans ce cas, par le théorème de Connes ([1]) et par les résultats de Pimsner et Popa ([9]), ces derniers invariants sont dénombrables.

Rappelons ici que pour tout facteur M de type II_1 avec trace τ, $\mathcal{J}(M)$ est l'ensemble des valeurs possibles des valeurs d'indice des sous-facteurs de Jones (qui par [5] est toujours contenu dans $\mathcal{J}(R)$) et $\mathcal{F}(M)$, le groupe fondamental de M, est l'ensemble

$$\{t > 0 \mid \text{il existe } e \in M,\ e \text{ idempotent},\ e = e^*,\ \text{t.q. } \tau(e) = t,\ eMe \cong M\} \ .$$

Le fait que la série continue $[4,\infty)$ est contenue dans $\mathcal{J}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big)$ est conséquence de l'observation siuvante de Jones :tout nombre $t/1-t$ dans $\mathcal{F}(M)$ permet la construction d'un sous-facteur (non-irréductible) de M, d'indice $t^{-1} + (1-t)^{-1}$ et du fait que $\mathcal{F}\big(\mathcal{L}(F_\infty)\big) = {}_+\backslash\{0\}$ ([12], voir aussi [14]). Ce dernier résultat, va aussi jouer un rôle important dans notre preuve.

Nous espérons que les méthodes introduites dans ce papier pourront servir à identifier les valeurs possibles (plus grandes que 4) des indices des sous-facteurs irréductibles de $\mathcal{L}(F_\infty)$. Cette question est très intrigante : En effet, d'un côté le facteur $\mathcal{L}(F_\infty)$ est le plus proche (par ses propriétés) du facteur hyperfini, qui par [11], ne peut contenir des sous-facteurs irréductibles d'indice λ, pour tout λ dans $[4,\infty)$;Mais d'un autre côté, les inclusions (des facteurs non-Γ) $N^S \subseteq M^S,\ S \geq 4$, de la série de [10], sont irréductibles et $[M^S : N^S] = S$.