

# Il principio di Huygens-Fresnel e la diffrazione

In questo articolo viene discusso il fenomeno della diffrazione della luce sulla base del principio di Huygens-Fresnel, che ne consente una analisi quantitativa mediante la determinazione dell'intensità di diffrazione. Sotto il profilo della didattica l'argomento è particolarmente interessante in quanto è suscettibile, con poco sforzo, di misurazioni di forte impatto visivo. Inoltre le funzioni matematiche (trigonometriche) che descrivono ciò che viene osservato, sono facilmente riproducibili mediante un computer e offrono, pertanto, un'occasione per un suo uso intelligente e proficuo. In ultimo, lo studio del fenomeno della diffrazione permette di giustificare in maniera convincente l'impiego delle funzioni trigonometriche in notazione complessa<sup>1</sup>.

**MASSIMO FANFONI, ANNA SGARLATA, MASSIMO TOMELLINI**

**A**l fine di dare una descrizione rigorosa e puntuale, è indispensabile l'impiego del calcolo integrale. La proposta descritta nell'articolo, dedicato ovviamente ai docenti, potrebbe pertanto risultare troppo avanzata per lo studente medio. Pensiamo tuttavia che il materiale potrà essere certamente presentato anche allo studente medio, rielaborandone alcuni suoi aspetti matematici.

## Introduzione

I fenomeni di diffrazione ed interferenza nella loro varietà offrono una convincente dimostrazione della natura ondulatoria dei fenomeni luminosi. La diffrazione si verifica ogniqualvolta il fronte dell'onda intercetta ostacoli quali, per esempio, fori, bordi di diaframmi e fenditure [1, 2]. Ad esempio, quando un fascio di luce sottile incide su uno schermo dove è stata incisa una sottile fenditura, l'immagine luminosa che si forma al di là dello schermo è sostanzialmente diversa da quella prevedibile sulla base dell'ottica geometrica. In altri termini, il fascio di radiazione sembra «sparpagliarsi» al di là dello schermo opaco e i raggi luminosi risultano deviati dalla loro traiettoria rettilinea.

Al fine di giustificare e interpretare con lo strumento matematico i processi di diffrazione bisogna uscire dal dominio dell'ottica geometrica per entrare in quello dell'ottica fisica. Va sottolineato che i fenomeni di interferenza e di diffrazione non sono caratteristiche peculiari della luce, bensì di tutti i fenomeni ondulatori del mondo della fisica. Per esempio, si ha la diffrazione delle on-

de sonore e degli elettroni, questi ultimi essendo descritti, sulla base della meccanica quantistica, mediante onde di probabilità.

In questo articolo, utilizzando il principio di Huygens-Fresnel (HF), dimostriamo le equazioni di base che descrivono il fenomeno della diffrazione. In particolare verrà trattato in dettaglio il caso della singola e della doppia fenditura, nonché alcuni aspetti inerenti l'impiego delle funzioni complesse, congiuntamente al calcolo vettoriale, per la determinazione dell'intensità di diffrazione.

A nostro avviso questo argomento ha un elevato valore aggiunto sotto il profilo didattico. Come si evince dalla trattazione che segue, la diffrazione offre un interessante esempio di applicazione del metodo scientifico. Da un lato abbiamo l'opportunità di osservare sperimentalmente il fenomeno, ovvero le frange di diffrazione dalle fenditure o dai reticoli, dall'altra la possibilità, grazie ad alcuni principi fisici e all'impiego della matematica, di determinare le funzioni che descrivono l'intensità della luce.

In tale contesto è importante sottolineare che questo argomento di fisica necessita, quale strumento matematico, prevalentemente della trigonometria che è materia di insegnamento nella scuola secondaria superiore. Inoltre le funzioni trigonometriche che descrivono la diffrazione offrono agli studenti l'occasione per un uso intelligente e formativo del computer mediante lo studio degli andamenti di queste funzioni in termini delle grandezze fisiche che regolano il fenomeno stesso.

Il principio fondamentale su cui si basa l'ottica ondulatoria è quello formulato da Huygens e Fresnel, secondo

il quale: ogni punto, raggiunto dal fronte d'onda, diviene sorgente di onde secondarie. Le onde secondarie danno origine a processi d'interferenza. Questo principio consente di descrivere quantitativamente il processo di diffrazione e, cosa di non poco conto, consente altresì di giustificare le leggi dell'ottica geometrica: riflessione, rifrazione e propagazione rettilinea della luce.

## Aspetti teorici della diffrazione

### Diffrazione da singola fenditura

La figura 1 rappresenta uno schermo che è opaco alla luce ad eccezione di una sottile fenditura. La fenditura è di forma rettangolare di larghezza  $b$  e, nella direzione perpendicolare al piano del disegno, di lunghezza molto maggiore di  $b$ . La determinazione dell'intensità di diffrazione è particolarmente semplice nel caso in cui i raggi incidenti alla fenditura e diffratti dalla fenditura possono essere considerati paralleli. Si parla, in questo caso, di *diffrazione dei fasci paralleli* ovvero secondo *Fraunhofer*. Tale configurazione è verificata quando le distanze sorgente-fenditura e fenditura-schermo sono molto maggiori della larghezza della fenditura (al limite, infinite). In queste condizioni il fronte dell'onda è un piano. Nel seguito tratteremo il caso di onde monocromatiche piane, vale a dire onde caratterizzate da un singolo valore della lunghezza d'onda.

Come noto, per il calcolo dell'intensità di diffrazione  $I$ , è necessario determinare il campo nel punto di osservazione e, successivamente, valutare il valore medio, sul periodo dell'onda sinusoidale, del quadrato del campo:

$$I \propto \langle \psi^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)^2 dt, \quad (1)$$

dove  $\psi$  denota il campo e  $T$  è il periodo dell'onda.

Per la fenditura della figura 1a i raggi diffratti sono paralleli e convergono al punto d'osservazione che è situato all'infinito. La determinazione del campo in questo punto si ottiene applicando il principio di HF e scegliendo le sorgenti ausiliare elementari sul piano della fenditura. Il valore del campo, nel punto d'osservazione, è il risultato della sovrapposizione dei campi, generati dalle singole sorgenti elementari. In altri termini dobbiamo determinare la somma  $\psi = \sum_j a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x_j\right)$ , dove l'indice  $j$  numera le sorgenti elementari,  $a_j$  è l'ampiezza dell'onda,  $\lambda$  la lunghezza d'onda e  $x_j$  è il percorso ottico dell'onda, vale a dire la distanza schermo-sorgente. Essendo i raggi paralleli si ottiene  $x_i = w + s_j \sin\theta$ , dove  $w$  è una costante mentre  $s_j$  definisce la posizione della sorgente elementare sulla fenditura (nella fig. 1 l'origine è posta al centro della fenditura). Il calcolo di questa somma è particolarmente semplice nel limite del continuo, vale a dire considerando l'estensione della sorgente infinitesima e trasformando la sommatoria in un integrale.

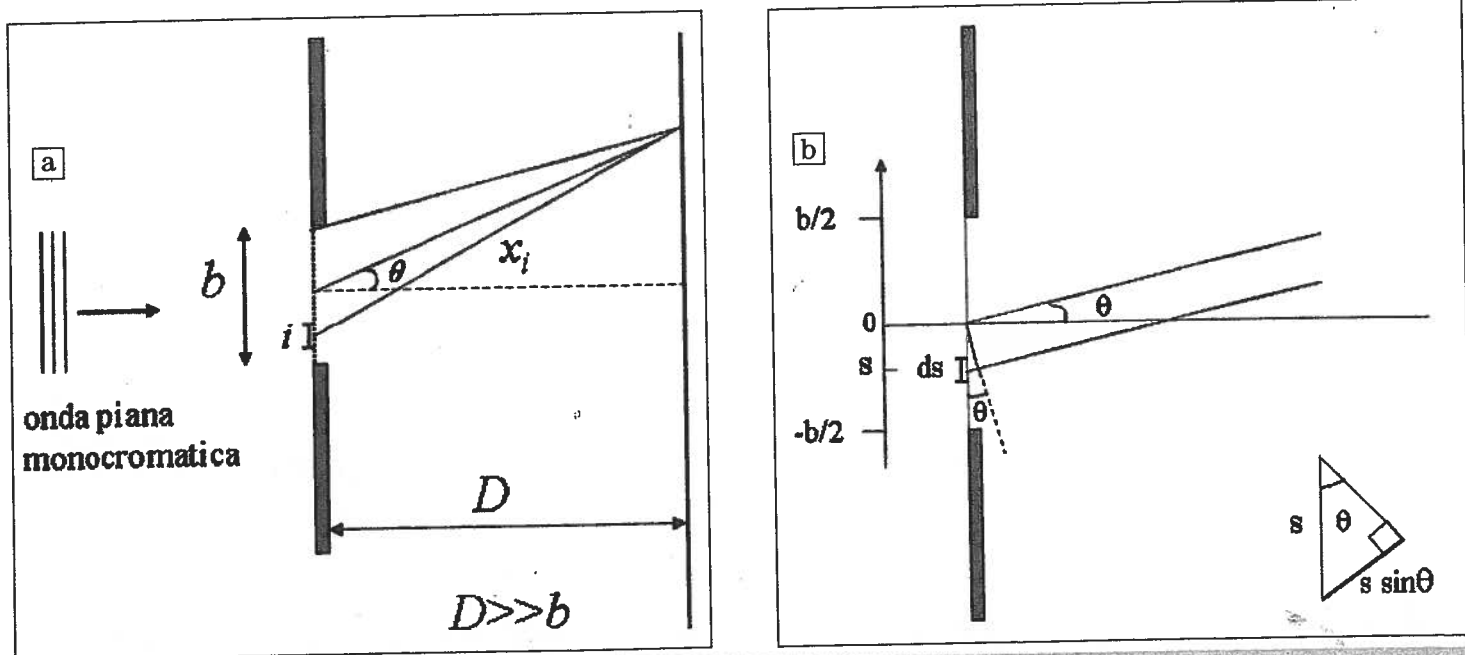


Fig. 1 Diffrazione da singola fenditura secondo Fraunhofer. In questo caso la distanza schermo-fenditura e fenditura-sorgente è supposta essere infinita. Nel riquadro a)  $x_i$  denota il cammino ottico associato alla  $i$ -ma sorgente elementare. Nel riquadro b) sono indicate le variabili utilizzate nell'equazione 2 per il calcolo dell'intensità. In particolare  $\theta$  è l'angolo di diffrazione e  $s$  la coordinata della sorgente elementare. La differenza di cammino ottico, rispetto al raggio emesso dalla sorgente posizionata a  $s = 0$ , è pari a  $s\theta$  (nel limite di piccoli angoli).

Inoltre l'ampiezza del campo dovuto alla singola sorgente elementare sarà proporzionale alla sua estensione lineare,  $ds$ . Il contributo al valore del campo della sorgente di coordinata  $s$  ed estensione  $ds$  è pertanto uguale a

$$d\psi = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}s \sin\theta\right) ds \cong A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}s\theta\right) ds,$$

dove  $A$  è una costante ed è stata utilizzata l'approssimazione  $\sin\theta \cong \theta$ , valida nel limite di piccoli angoli di diffrazione.

Il campo totale si ottiene semplicemente integrando questa espressione sulla variabile  $s$  (vedi fig.1b):

$$\psi_s(t) = A \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos(\omega t - ks\theta) ds, \quad (2)$$

dove  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Considerando che  $\text{Re } e^{i(\omega t - ks\theta)} = \cos(\omega t - ks\theta)$  (dove  $\text{Re}$  denota la parte reale), l'integrazione è immediata e fornisce  $\psi_s(t) = Ab \frac{\sin\beta}{\beta} \cos(\omega t)$ , dove  $\beta = \frac{kb\theta}{2}$ . Infine, mediante l'equazione 1, determiniamo l'intensità di diffrazione che, essendo il valor medio del quadrato della funzione coseno, periodica pari, uguale ad  $\frac{1}{2}$ , fornisce il risultato:

$$I(\beta) = (Ab)^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}. \quad (3)$$

Poiché per  $\theta = 0$  ( $\beta = 0$ ) l'intensità è uguale ad  $(Ab)^2$ , l'equazione 3 si può riscrivere come segue:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{\sin^2 \frac{\pi b\theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b\theta}{\lambda}\right)^2}, \quad (4)$$

dove è stata utilizzata l'espressione del vettore d'onda in termini della lunghezza d'onda della radiazione. L'equazione 4 permette di esprimere l'intensità in funzione del-

le grandezze fisiche relative alla fenditura e alla radiazione, che di fatto caratterizzano completamente il fenomeno della diffrazione. Come si evince da questa equazione, l'intensità presenta un massimo assoluto per  $\theta = 0$  e si annulla per  $\theta = n \frac{\lambda}{b}$ , dove  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ .

I massimi secondari soddisfano la condizione  $\beta = \tan \beta$ ; il massimo principale e i primi due massimi secondari stanno nel rapporto  $1 : 0.045 : 0.016$ . La fig. 2a mostra l'andamento dell'intensità di diffrazione per diversi valori del rapporto  $b/\lambda$ . Nel limite  $b/\lambda \ll 1$ , l'intensità non varia con l'angolo di diffrazione, vale a dire è uniformemente distribuita oltre lo schermo. Bisogna notare, tuttavia, che una simile condizione presuppone che la fenditura sia molto sottile, il che implica bassi flussi di energia trasmessi oltre la fenditura stessa.

Poiché per un data fenditura (valore di  $b$  assegnato) i minimi dell'intensità si ottengono per angoli di diffrazione proporzionali alla lunghezza d'onda, si potrebbe pensare di utilizzare la singola fenditura quale mezzo disperdente (fig. 2b). Una tale scelta non è appropriata in quanto il massimo principale è posizionato a  $\theta = 0$  per tutte le lunghezze d'onda; con ciò confinando l'efficacia della scomposizione della luce ai massimi secondari che, come riportato sopra, hanno intensità inferiori al 5% del massimo centrale.

### Diffrazione da due fenditure

La descrizione del processo di diffrazione da singola fenditura sopra esposto può essere utilizzato per derivare l'andamento dell'intensità di diffrazione da doppia fenditura. A tal fine si applica nuovamente il principio di HF, nel limite di sorgenti elementari infinitesime (limite del continuo), sulla base dello schema riportato nella fig. 3 dove  $d$  indica la distanza tra le due fenditure di lar-

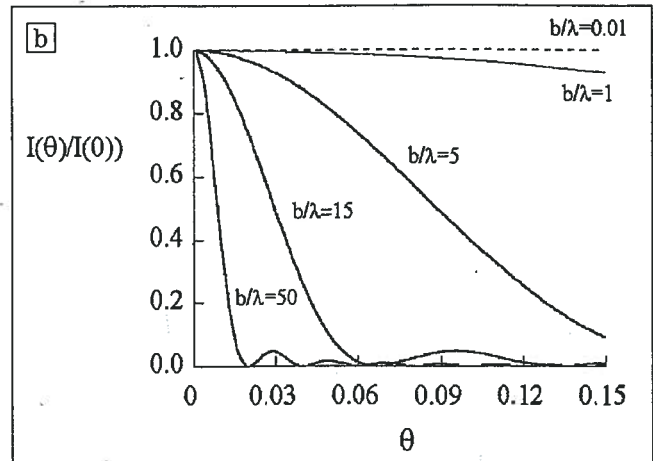
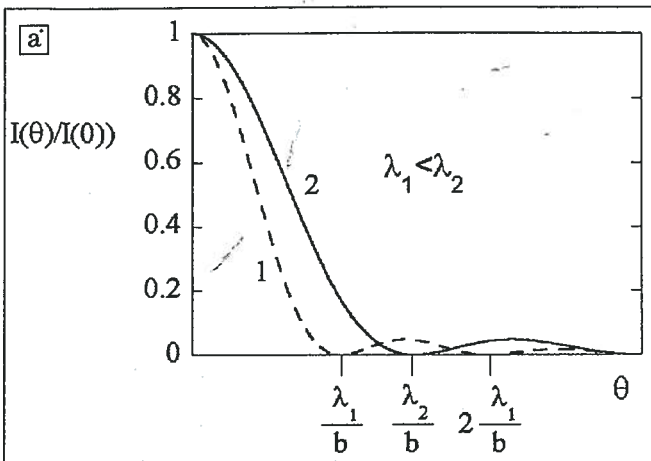


Fig. 2 Intensità di diffrazione da singola fenditura: a) per due valori della lunghezza d'onda; b) al variare del rapporto  $\frac{b}{\lambda}$ . Si noti che nel limite  $b \rightarrow 0$  l'intensità è uniforme con  $\theta$ .

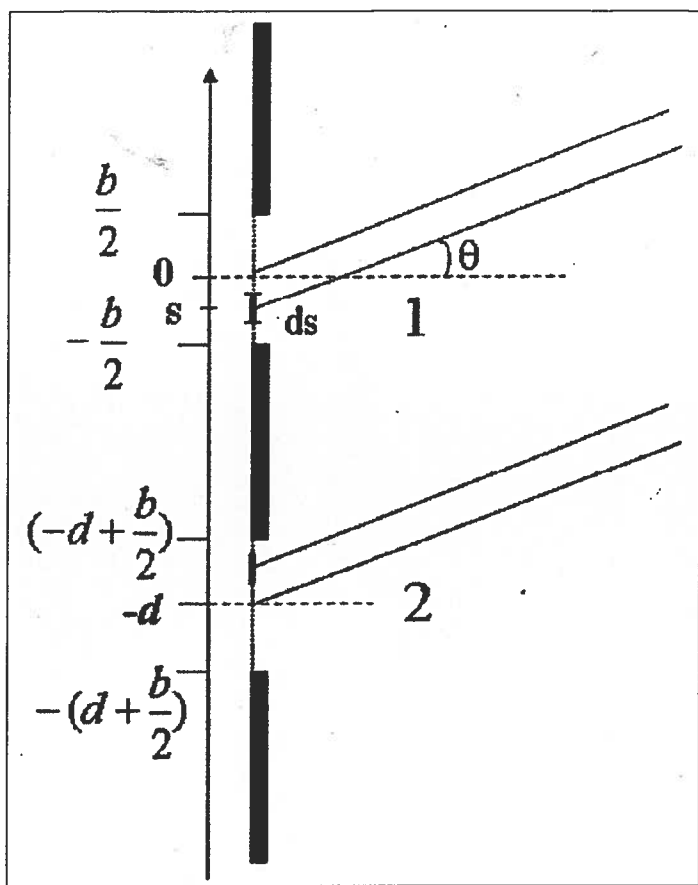


Fig. 3 Diffrazione da due fenditure di larghezza  $b$  e distanza  $d$ . L'origine del sistema di coordinate è posizionato al centro della prima fenditura dove  $s$  indica la coordinata della sorgente,  $ds$ .

ghezza  $b < d$ . Il valore del campo generato dalle due fenditure si scrive come:

$$\begin{aligned} \psi_r(\theta) &= A \left[ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos(\omega t - ks\theta) ds + \int_{-(d+\frac{b}{2})}^{-d+\frac{b}{2}} \cos(\omega t - ks\theta) ds \right] = \\ &= A \operatorname{Re} \left[ \psi_1\left(\frac{b}{2}\right) + e^{ik\theta d} \psi_1\left(\frac{b}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

dove i due termini in parentesi quadre sono, rispettivamente, i contributi associati alla prima e alla seconda fenditura e l'origine del sistema di coordinate è posizionato al centro della prima fenditura (si veda la fig. 3). La funzione  $\psi_1$  è definita dal seguente integrale<sup>2</sup> (vedi anche l'Appendice)

$$\psi_1(u) = e^{i\omega t} \int_{-u}^u e^{iks'\theta} ds' = \frac{e^{i\omega t}}{ik\theta} (e^{ik\theta u} - e^{-ik\theta u}). \quad (6)$$

In definitiva, definendo  $\beta = \frac{k\theta b}{2}$ , il campo risultante è dato da (eq. 5):

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= A \operatorname{Re} \left\{ \frac{b}{\beta} e^{i\omega t} \left[ \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} \right] (1 + e^{ik\theta d}) \right\} = \\ &= Ab \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re} [ e^{i\omega t} (1 + e^{ik\theta d}) ]. \end{aligned} \quad (7)$$

Esprimendo l'equazione 7 in termini delle funzioni sinusoidali reali e utilizzando le formule di bisezione per sommare le funzioni coseno, il calcolo dell'intensità fornisce:

$$I(\beta) \propto \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \alpha, \quad (8)$$

dove  $\alpha = \frac{kd\theta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \theta d$ . Anche in questo caso la funzione intensità esibisce il massimo assoluto per  $\theta = 0$ ; conseguentemente l'intensità, normalizzata al massimo, è pari a

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{\sin^2 \frac{\pi b \theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \theta}{\lambda}\right)^2} \cos^2 \frac{\pi \theta d}{\lambda}. \quad (9)$$

Questa equazione mostra che l'intensità di diffrazione della doppia fenditura è uguale ad una funzione sinusoidale – la funzione coseno elevata al quadrato – «modulata» dalla funzione che è rappresentativa dell'intensità della singola fenditura (equazione 4). I due termini dell'equazione 9 sono detti, rispettivamente, *diffrazione* e *interferenza*. La funzione 9 si annulla per  $\theta = m \frac{\lambda}{b}$  e  $\theta = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d}$ , dove  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$

Una sua rappresentazione grafica è riportata nella fig. 4 per  $\frac{d}{\lambda} = 70$  per diversi valori del rapporto  $\frac{b}{\lambda}$ . È interes-

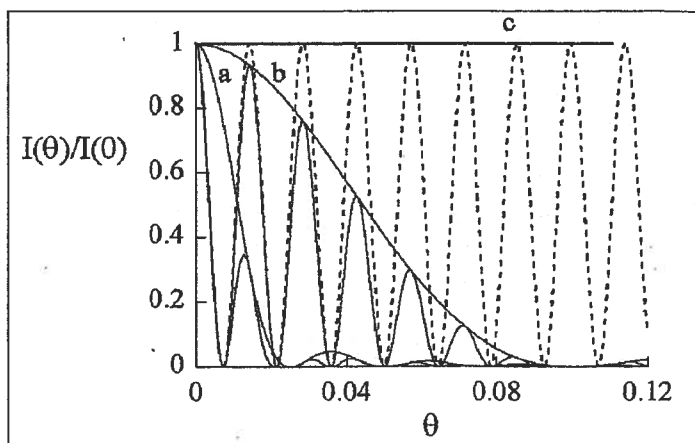


Fig. 4 Profilo dell'intensità di diffrazione da due fenditure per diversi valori del rapporto  $\frac{b}{\lambda}$ . Curva a):  $\frac{b}{\lambda} = 40$ ; curva b)  $\frac{b}{\lambda} = 10$ . Nella figura sono state anche rappresentate le curve dell'intensità relativa della singola fenditura (equazione 4). Si noti come al diminuire dell'ampiezza della fenditura ( $b$ ) aumenti il numero dei massimi di interferenza, posizionati entro primo minimo di diffrazione. Nel limite  $\frac{b}{\lambda} \rightarrow 0$  l'intensità relativa da singola fenditura diviene costante (e il suo valore assoluto diventa infinitamente piccolo) come rappresentato dalla curva c.

sante notare che, quanto minore è la larghezza della fenditura, tanto maggiore è il numero di massimi secondari che «cadono» entro il primo valore dell'angolo di diffrazione per il quale si annulla l'intensità di singola fenditura  $\left(\frac{b}{\lambda}\right)$ . Questo risultato è di carattere generale, nel senso che è valido per un numero arbitrario di fenditure, vale a dire per un reticolo di diffrazione. Tuttavia in questo caso i minimi (dovuti all'interferenza) si verificano per  $\theta = \pm \left(n + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{d}$ , dove  $N$  è il numero di fenditure [3]. Quindi il numero dei massimi di interferenza «visibili» entro la larghezza del picco di diffrazione è dell'ordine di  $(d/b)$ . Anche in questo caso valgono le considerazioni esposte nel paragrafo precedente sul valore della larghezza della fenditura in relazione alla larghezza del picco di diffrazione.

Concludiamo questo paragrafo con una breve presentazione del metodo vettoriale per la determinazione dell'intensità di diffrazione da singola fenditura. Il metodo si basa sulla rappresentazione dei campi delle onde monocromatiche in forma complessa. In particolare, l'onda  $a_j e^{i\phi} = a_j (\cos \phi + i \sin \phi)$  può essere rappresentata sul piano cartesiano mediante un vettore di componenti  $\vec{a}_j \equiv (a_j \cos \phi, a_j \sin \phi)$ . Questo vettore viene denominato «fasore» e il quadrato del suo modulo altro non è che l'intensità del campo. Nel caso della sovrapposizione di più onde il calcolo dell'intensità, ovvero dell'ampiezza dell'onda risultante, può essere effettuato sommando i contributi dei singoli fasori, vale a dire mediante una semplice somma di vettori.

A titolo di esempio utilizziamo il metodo vettoriale per determinare i valori dell'angolo di diffrazione per i quali si annulla l'intensità di diffrazione da singola fenditura. Con riferimento alla fig. 5a, consideriamo gli  $n$  fasori associati alle sorgenti elementari nelle quali abbiamo scomposto il fronte dell'onda. Essendo le sorgenti elementari uguali, tutti i fasori avranno la stessa ampiezza e il calcolo dell'ampiezza risultante si riduce ad una somma di vettori con lo stesso modulo:  $a_j = a$ . Sulla base dell'equazione 4 sappiamo che il massimo dell'intensità si ottiene per  $\theta = 0$ . In termini di fasori questo implica che essi hanno tutti la medesima fase,  $\phi_j = 0$ ; pertanto, l'ampiezza del vettore risultante e l'intensità sono uguali, rispettivamente, ad  $A = na$  e  $I = (na)^2$ . L'intensità di diffrazione si annulla quando la somma degli  $n$  fasori è zero. Questo implica, in accordo con la fig. 5b, che lo sfasamento tra il 1 e l' $n$ -mo fasore sia uguale a  $\phi_n - \phi_1 = 2\pi$ . Questa differenza di fase è anche uguale a  $b \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ , il che implica  $\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$  ovvero, nel limite di piccoli angoli,  $\theta \approx \frac{\lambda}{b}$ .

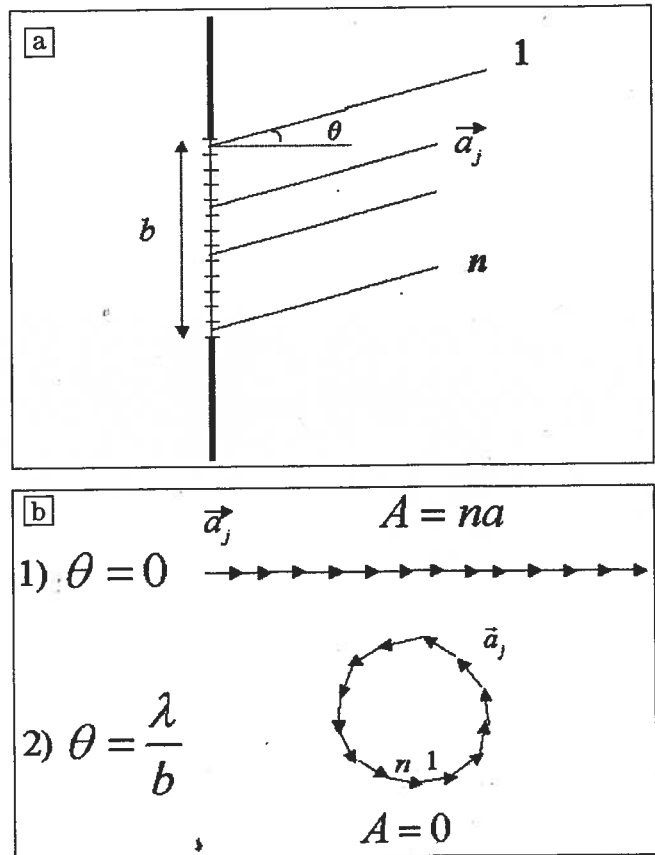


Fig. 5 Illustrazione grafica del metodo vettoriale per la determinazione dell'intensità di diffrazione da singola fenditura. Il riquadro a) mostra il piano della fenditura con le  $n$  sorgenti elementari (numerate da 1 a  $n$ ). Le sorgenti sono rappresentate mediante vettori complessi (fasori)  $\vec{a}_j$  con  $j = 1, 2, \dots, n$ . Riquadro b): determinazione dell'ampiezza dell'onda risultante per due valori dell'angolo di diffrazione: per  $\theta = 0$  (massimo dell'intensità) e per  $\theta = \frac{\lambda}{b}$ , dove l'intensità si annulla.

Alcuni esperimenti di diffrazione della luce

Diffrazione da fenditura singola e doppia

Quando della luce laser passa attraverso una fenditura rettangolare stretta la cui dimensione è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda della luce stessa, sulla parete si forma proprio l'immagine prevista dalla formula dell'intensità diffratta (equazione 4), caratterizzata da una struttura luminosa centrale e da una serie di massimi secondari di intensità decrescente separati da minimi (fig. 6). Nel caso della fenditura singola, se si modifica la larghezza della fenditura, ad esempio utilizzando una fenditura più larga, il massimo centrale si stringe e viceversa. È inoltre possibile studiare il passaggio della luce laser attraverso una coppia di fenditure di larghezza fissata

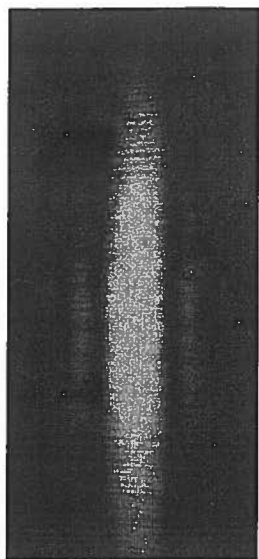


Fig. 6 Immagine di diffrazione da singola fenditura. Il profilo d'intensità è caratterizzato da una zona centrale molto luminosa e da una serie di massimi secondari di intensità decrescente in accordo con l'equazione 4.

(pari a 0.2 mm) e di distanza relativa crescente (0.25, 0.50, 0.75, 1.0 mm). In questo caso la figura di diffrazione sarà data dalla forma funzionale ricavata nell'equazione 9 in cui l'intensità diffratta è modulata dall'interferenza tra le onde emesse dalle due fenditure (termine proporzionale a  $\cos^2\alpha$ ). Nel caso particolare si formerà una serie di frange di intensità il cui numero e larghezza dipendono dalla distanza relativa tra le fenditure (vedi figura 7).

### Diffrazione da reticolo

A questo punto è possibile prevedere che cosa succede quando, fissata la distanza tra due fenditure adiacenti di uguale larghezza, si aumenta il numero delle fenditure generando un reticolo di fenditure (reticolo di diffrazione). Nel caso del reticolo la relazione che traduce la condizione di interferenza costruttiva tra tutte le onde diffratte è [2, 3]:

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad (10)$$

dove  $d$  è il passo del reticolo, cioè la distanza tra due fenditure adiacenti. I massimi di intensità saranno perciò molto più distanti nel caso di un reticolo di 1200 righe/mm rispetto a uno di 80 righe/cm. Inoltre dalla equazione 10 è evidente che esiste una relazione che collega ogni valore di  $\theta$  ad un valore di  $\lambda$ . L'idea che sorge spontanea è quella di usare il reticolo come mezzo disperdente, ovvero come un dispositivo atto a separare la luce bianca nelle sue componenti corrispondenti a diverse lunghezze d'onda. Se facciamo incidere la luce bianca emessa da una comune lampada, accuratamente schermata, su un reticolo, ad esempio di 1200 righe/mm,

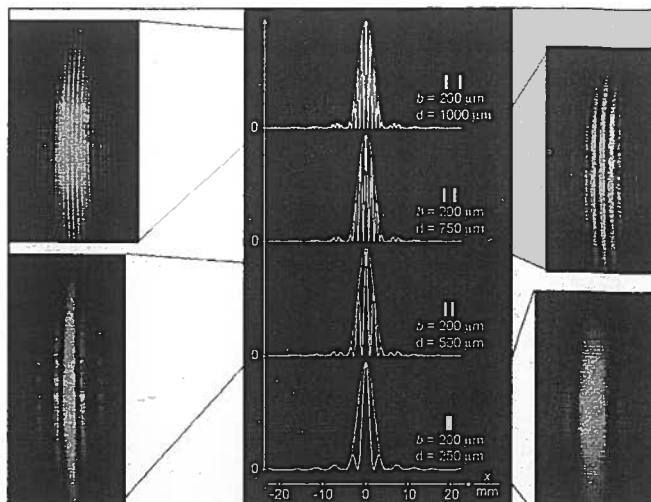


Fig. 7 Immagine di diffrazione da doppia fenditura per diversi valori della loro distanza: 0.25, 0.5, 0.75 e 1 mm. La larghezza delle fenditure è  $b = 0.2$  mm. Si noti come al diminuire del rapporto  $d/b$  diminuisca l'intensità del massimo secondario.

si formano a destra e a sinistra due fasci di luce dispersa costituita da tutti i colori dell'arcobaleno dal rosso al viola. Lo stesso fenomeno si può ottenere utilizzando un prisma, una porzione di un comune DVD oppure un insieme di lamette serrate. Va da sé che negli ultimi due casi si tratta di reticoli in riflessione. Un DVD è infatti formato da una serie di tracciati che giocano lo stesso ruolo delle righe del reticolo analogamente a quanto si verifica per un insieme di lamette. La luce sarà così dispersa in modo efficace usando un mezzo facilmente reperibile e poco costoso.

**Massimo Fanfoni, Anna Sgarlata,**

*Dipartimento di Fisica, Univers. «Tor Vergata» - Roma*

**Massimo Tomellini**

*Dipartimento di Scienze e Tecnologie Chimiche,  
Università «Tor Vergata» - Roma*

### Ringraziamenti

Gli autori ringraziano il Dr. Giovanni Casini del Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma «Tor Vergata» ed il Dr. Francesco Aloisi della Società Metys Scientific per la realizzazione degli esperimenti di diffrazione e delle relative figure.



1. Questo elaborato è parte di una serie di lezioni inerenti «La luce», svolte presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma «Tor Vergata» nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche 2008.

2. Si ricorda, che, per ogni reale  $\alpha$ ,  $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ , dove  $i$  è l'unità immaginaria  $i = \sqrt{-1}$ .

Conseguentemente  $\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha$  e  $\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} = i \sin\alpha$ .

**Appendice: una nota di carattere didattico sull'impiego delle funzioni reali e complesse nella determinazione dell'intensità di diffrazione**

Nei paragrafi precedenti abbiamo descritto il campo associato a un'onda piana monocromatica mediante funzioni sinusoidali semplici reali. In questo paragrafo faremo vedere come è possibile ottenere i risultati fondamentali delle equazioni 4 e 9 utilizzando una diversa rappresentazione matematica del campo, che è basata sull'impiego delle funzioni complesse. A titolo di esempio determiniamo l'intensità della luce dovuta alla sovrapposizione di due onde piane monocromatiche aventi la stessa ampiezza. Utilizzando la notazione reale il campo risultante è pari a:

$$\psi_2 = \cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2) \tag{A1}$$

che può essere semplificata mediante le formule di prostaferesi come segue:

$$\psi_2 = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \tag{A2}$$

Per l'intensità si ottiene:

$$I = 4 \langle \cos^2\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \rangle_T = 2 \cos^2\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \tag{A3}$$

dove la media sul periodo è stata indicata con  $\langle f \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ .

Si noti che, poiché  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono indipendenti dal tempo, la media sul periodo del  $\cos^2\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$  è uguale a  $\frac{1}{2}$ .

Rappresentiamo ora le due onde utilizzando l'esponenziale complesso  $e^{i(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)$ . Al posto dell'equazione A1 avremo

$$\psi_2^{(c)} = e^{i(\omega t + \phi_1)} + e^{i(\omega t + \phi_2)} \tag{A4}$$

dove il sovrascritto indica che stiamo considerando la rappresentazione «complessa».

Determiniamo ora il modulo del quadrato del campo  $\psi_2^{(c)}$ ; uguale a  $\psi_2^{(c)} \psi_2^{(c)*}$ , dove il simbolo \* denota il complesso coniugato. Il calcolo è immediato e fornisce [3]:

$$|\psi_2^{(c)}|^2 = \psi_2^{(c)} \psi_1^{(c)*} = 2 + e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} = 2 \left[ 1 + \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] = 4 \cos^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \tag{A5}$$

Dal confronto dell'equazione A5 con l'equazione A3 si deduce che le due rappresentazioni del campo conducono allo stesso risultato (a parte un inessenziale fattore moltiplicativo pari a 2).

L'impiego della notazione complessa risulta particolarmente vantaggioso nel calcolo dell'intensità di diffrazio-

ne da reticolo, semplificandone notevolmente la derivazione. In questo caso, infatti, con riferimento alla rappresentazione in campo reale bisogna valutare la somma

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi) = \\ &= \cos(\omega t) \sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\phi) - \sin(\omega t) \sum_{n=0}^{N-1} \sin(n\phi), \end{aligned} \tag{A6}$$

che implica la determinazione delle due serie con le funzioni seno e coseno. Queste possono essere calcolate in forma chiusa benché il procedimento di calcolo sia piuttosto laborioso.

A titolo d'esempio riportiamo la determinazione della prima serie che, per inciso, richiede nozioni di trigonometria interamente compatibili con i *curricula* della scuola secondaria superiore. Di per sé il calcolo di questa serie offre un valido esempio di applicazione della formula di prostaferesi  $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ .

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Applicando ripetutamente questa relazione per  $N$  volte e sommando la catena di equazioni così ottenute, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\phi &= \frac{1}{2} 2 \sin \frac{\phi}{2} + \\ \sin \frac{3}{2}\phi - \sin \frac{1}{2}\phi &= 2 \cos \phi \sin \frac{\phi}{2} + \\ \sin \frac{5}{2}\phi - \sin \frac{3}{2}\phi &= 2 \cos 2\phi \sin \frac{\phi}{2} + \\ \sin \frac{7}{2}\phi - \sin \frac{5}{2}\phi &= 2 \cos 3\phi \sin \frac{\phi}{2} + \end{aligned} \tag{A7}$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots \\ &+ \sin\left(\frac{2N+1}{2}\phi\right) - \sin\left(\frac{2N-1}{2}\phi\right) = 2 \cos N\phi \sin \frac{\phi}{2} \\ &\sin\left(\frac{2N+1}{2}\phi\right) = \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n\phi) \right] 2 \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

Risolviendo l'equazione per la serie,

$$\sum_{n=1}^N \cos(n\phi) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\phi\right) - \sin \frac{\phi}{2}}{2 \sin \frac{\phi}{2}} \tag{A8}$$

Pertanto, la somma della prima serie nell'equazione A6 è uguale a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\phi) = \frac{\sin\left(\frac{2N-1}{2}\phi\right) - \sin \frac{\phi}{2}}{2 \sin \frac{\phi}{2}} + 1 = \frac{\sin\left(\frac{2N-1}{2}\phi\right) - \sin \frac{\phi}{2}}{2 \sin \frac{\phi}{2}}$$

In maniera analoga è possibile calcolare la somma della seconda serie nell'equazione A6:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin n\phi = \frac{\cos \frac{\phi}{2} - \cos \left( \frac{2N-1}{2} \phi \right)}{2 \sin \frac{\phi}{2}} \quad (\text{A9})$$

Infine, per il calcolo dell'intensità sostituiamo le equazioni A8 e A9 nella A6 e determiniamo il valor medio del suo quadrato:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi) \right)^2 \right\rangle_T = \\ & = \frac{\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T}{4 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \\ & \left[ \sin^2 \left( \frac{2N-1}{2} \phi \right) + \sin^2 \frac{\phi}{2} + 2 \sin \left( \frac{2N-1}{2} \phi \right) \sin \frac{\phi}{2} + \right. \\ & \left. + \cos^2 \left( \frac{2N-1}{2} \phi \right) + \cos^2 \frac{\phi}{2} - 2 \cos \left( \frac{2N-1}{2} \phi \right) \cos \frac{\phi}{2} \right] = \\ & = \frac{\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T}{4 \sin^2 \frac{\phi}{2}} 2 [1 - \cos N\phi] = \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (\text{A10}) \end{aligned}$$

dove sono state utilizzate le formule di bisezione degli angoli ed è stata sfruttata l'identità

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}.$$

Vediamo ora come è possibile ottenere la A10 utilizzando la notazione complessa. L'equazione A6 diviene:

$$\psi_N^{(c)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t + n\phi)} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i\phi})^n = e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}, \quad (\text{A11})$$

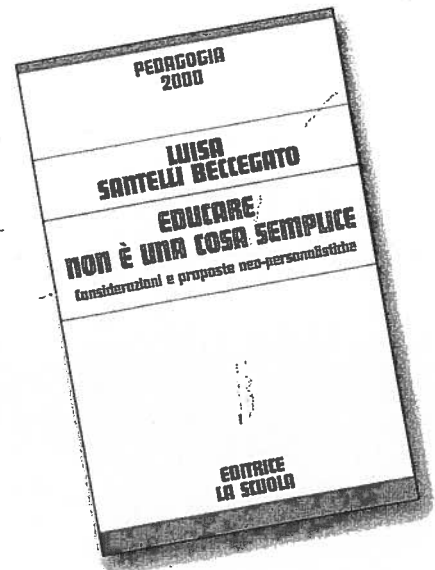
e il modulo del quadrato del campo fornisce

$$\psi_N^{(c)} \psi_N^{(c)*} = \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}} = \frac{2(1 - \cos N\phi)}{2(1 - \cos \phi)} = \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (\text{A12})$$

che coincide con l'equazione A10 a meno del fattore  $\frac{1}{2}$ .  
Da quanto esposto, si evince che la notazione complessa rende effettivamente più semplice ed immediato il calcolo dell'intensità di diffrazione.

#### Bibliografia

- [1] G.S. Lansberg, *Ottica*, Ed.MIR, Firenze 1979.
- [2] B. Rossi, *Ottica*, Masson, Milano 1984.
- [3] M. Fanfoni, M. Tomellini, *Didattica delle Scienze*, 196, 30 (1998).



Luisa Santelli Beccegato  
**EDUCARE NON È  
UNA COSA SEMPLICE**  
Considerazioni e proposte  
neo-personalistiche

2453 - pp. 240, € 20,00

Le questioni educative sono sempre più al centro del dibattito pubblico e delle esperienze private, ma troppo spesso scivolano nella retorica o nelle semplificazioni nostalgiche. Dalla necessità di ritrovare fondate ed equilibrate proposte pedagogiche, applicabili da chiunque abbia a che fare con le problematiche educative (insegnanti o genitori), nasce questo volume che analizza le diverse difficoltà passando in rassegna le influenze della cultura massmediatica, della globalizzazione, delle problematiche multi e interculturali nell'ambito formativo.

*Educare in tempi di incertezze e precarietà - Pedagogia neo-personalistica: riflessioni in corso - Percorsi formativi nel contesto della globalizzazione - Educazione al rispetto e alla solidarietà - La prevenzione: un aspetto qualificante l'agire educativo - Essere famiglia oggi - La scuola necessaria. Precisazione di impegni e riconoscimento di professionalità - Educazione massmediatica e percorsi educativi - Interculturalità: tutt'altro che semplice "buonismo" - Considerazioni sull'identità e identità di genere - Lavorare per la pace: la grande missione educativa*

 **EDITTRICE  
LA SCUOLA**