# Perché il logaritmo della somma non è uguale alla somma dei logaritmi: gli operatori lineari

Questo articolo vuole offrire uno spunto di riflessione su come alcune «regole» matematiche possano essere comprese ad un livello concettuale più alto e dunque, più generale. Tra le molteplici possibilità abbiamo scelto le funzioni logaritmiche come esempio paradigmatico.

**MASSIMO FANFONI, MASSIMO TOMELLINI**

Purtroppo non è impossibile, sebbene fortunatamente infrequente, scoprire uno studente universitario della facoltà di scienze che non abbia chiaro il concetto di operatore lineare e che si produca in un ardito

$$\ln(x_1+x_2)=\ln(x_1)+\ln(x_2). \qquad (1)$$

In effetti, la non validità della precedente relazione tra logaritmi dovrebbe far parte del bagaglio culturale di un qualsiasi studente che abbia superato l'esame di stato, indipendentemente dalle sue preferenze culturali e dalla sua futura professione. Dire che il logaritmo è un operatore lineare, ovvero che vale la (1), è come attribuire il verso *«Sempre caro mi fu quest'ermo colle»* al Manzoni; chi non griderebbe allo scandalo?
Intendiamo, con questo contributo, fornire uno spunto di riflessione su un possibile approccio all'insegnamento di regole quali la (1) che vada al di là della semplice memorizzazione. Prima di addentrarci nell'aspetto tecnico, però, è utile un brevissimo cenno storico alla nascita del concetto di logaritmo; vedremo che la primitiva definizione non soddisfa la regola (1) sebbene semplifichi notevolmente i calcoli di geografia astronomica. Per chi fosse interessato ad una più dettagliata analisi storica, il testo del Kline [1] sarà certamente di aiuto.

Esiste una semplice corrispondenza tra le due seguenti successioni:

$$r^0, r^1, r^2, r^3, \ldots \qquad (2)$$

$$0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

La moltiplicazione di due termini della (2) fornisce un termine il cui esponente è la somma dei corrispondenti termini della (3).

L'idea è quella di trovare un operatore che metta in corrispondenza biunivoca le successioni (2) e (3): $O_r(r^k)=k$. Più in generale, poiché per un dato $r$, un qualunque numero $n_k > 0$ si può esprimere come $n_k = r^k$, ($r = n_k^{1/k}$), cerchiamo $O_r(n_k)=k$. Una volta tabulati i risultati dell'applicazione di $O_r$ è possibile trasformare i prodotti in semplici somme. Napier (1550-1617), particolarmente interessato a semplificare i calcoli in geografia astronomica (trigonometria sferica) notò la corrispondenza delle due successioni e si mise alla ricerca dell'operatore . Egli introdusse il concetto di logaritmo attraverso la seguente costruzione geometrico-cinetica.
Si consideri un punto $P$ che si muove su un segmento lungo $R$, con velocità proporzionale allo spazio che separa $P$ dall'estremo opposto a quello di partenza. Sebbene la velocità di $P$ vari in modo continuo, si può procedere al calcolo cinematico scegliendo un intervallo di tempo sufficientemente breve entro il quale la velocità di $P$ si possa considerare, con buona approssimazione, costante. Al tempo $t = 0$ la velocità di $P$, per quanto detto, sarà $v_0 = kR$, ove $k$ è la costante di proporzionalità. Nell'intervallo di tempo scelto, $P$ percorre uno spazio pari a $\Delta x_0 = kR\,\Delta t$.
A questo punto la nuova velocità di P sarà data da: $v_1 = k(R - kR\,\Delta t) = kR(1 - k\,\Delta t)$ e conseguentemente $\Delta x_1 = \Delta x_0(1 - k\,\Delta t)$. Nel terzo intervallo, è facile verificare che $v_2 = kR(1 - k\,\Delta t)^2$ e $\Delta x_2 = \Delta x_0(1 - k\,\Delta t)^2$. In generale, all'$i$-esimo intervallo $\Delta x_{i-1} = \Delta x_0(1 - k\,\Delta t)^{i-1}$, e quindi la distanza percorsa, in unità $\Delta x_0$, è

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^{i-1}(1-k\Delta t)^i = \frac{1-(1-k\Delta t)^i}{k\Delta t}. \qquad (4)$$

La lunghezza del segmento in unità $\Delta x_0$ è: $\frac{R}{\Delta x_0}=\frac{1}{k\Delta t}$ ; allora all'$i$-esimo passo la distanza che rimane da percorrere al punto $P$ è

$$\frac{1}{k\Delta t}-\frac{1-(1-k\Delta t)^i}{k\Delta t}=\frac{(1-k\Delta t)^i}{k\Delta t}.$$

Un punto $C$ che si muove su una retta a velocità costante pari a $v_0 = kR$, dopo un tempo $i\Delta t$, ha percorso la distanza $kRi\Delta t$, ovvero $i$ in unità $\Delta x_0$. Napier definisce logaritmo della distanza che rimane da percorrere al punto $P$ per attraversare $R$,

$$L=Lg^{(N)}\left[\frac{(1-k\Delta t)^i}{k\Delta t}\right]=i,$$

dove l'indice $N$ sta per Napier. Si noti che la definizione di logaritmo dovuta a Napier è diversa dalla definizione attuale. Infatti, se $M_1=\frac{(1-k\Delta t)^{L_1}}{k\Delta t}$ e $M_2=\frac{(1-k\Delta t)^{L_2}}{k\Delta t}$

allora $Lg^{(N)}M_1M_2=Lg^{(N)}\frac{(1-k\Delta t)^{L_1+L_2}}{(k\Delta t)^2}\neq L_1+L_2=$

$$=Lg^{(N)}\frac{(1-k\Delta t)^{L_1+L_2}}{k\Delta t}.$$

In altre parole, il logaritmo del prodotto *non* è uguale alla somma dei logaritmi. Fu H. Briggs (1561-1631) che suggerì a Napier di usare 10 come base e di prendere come logaritmo di un numero l'esponente della potenza di 10 che è uguale a quel numero: $n=10^l \Rightarrow l=Log_{10}n$.

L'idea è di scegliere prima la base; una volta scelto 10, Briggs calcolò con successive estrazioni di radice

$$a=10^{(1/2)^{54}};$$

e, siccome in questo caso $Log_{10}(n_1n_2)=Log_{10}(n_1)+$ $+Log_{10}(n_2)$ partendo da $Log_{10}a=\frac{1}{2^{54}}$, Briggs fu in grado di fornire una tabulazione sufficientemente fitta di logaritmi. Sostanzialmente la stessa dei nostri giorni.

Ma veniamo al nostro problema e cerchiamo di chiarire con un paio di esempi, assolutamente proponibili agli studenti della scuola secondaria superiore, cosa sia un operatore lineare, al fine di capire in modo più profondo perché la (1) è falsa.

Sia $\hat{O}_a$ un operatore tale che

$$\hat{O}_a(x)=ax, \qquad (5)$$

dove $a$ è una costante. L'applicazione dell'operatore $\hat{O}_a$ ad $x$ fornisce una funzione di primo grado. Le relazioni che seguono si basano sull'applicazione della (5) e non hanno bisogno di spiegazione

$$\hat{O}_a(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)$$

$$\hat{O}_a(x_1)+\hat{O}_a(x_2)=ax_1+ax_2=a(x_1+x_2).$$

Pertanto si giunge alla relazione fondamentale

$$\hat{O}_a(x_1+x_2)=\hat{O}_a(x_1)+\hat{O}_a(x_2), \qquad (6)$$

che definisce l'operatore lineare.
Si noti che, ad esempio, l'operatore $\tilde{O}_a(x)=ax^2$ non è lineare, infatti $\tilde{O}(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)^2$ e $\tilde{O}(x_1)+$ $+\tilde{O}(x_2)=ax_1^2+ax_2^2$; dunque $\tilde{O}_a(x_1+x_2)\neq\tilde{O}_a(x_1)+$ $+\tilde{O}_a(x_2)$. In generale, della famiglia di operatori $\bar{O}_{a,k}(x)=ax^k$, solo per $k = 1$ si ottiene un operatore lineare.
Consideriamo l'operatore seno. È risultato noto che $\sin(x_1+x_2)\neq\sin(x_1)+\sin(x_2)$; tuttavia se il valore di $x$ è sufficientemente piccolo $\sin(x)\cong x$ e allora $\sin\equiv O_1$ (se si accetta un'approssimazione dell'ordine del percento, il seno è un operatore lineare per $x\leq 0.244\ rad$), e dunque

$$\sin(x_1+x_2)\cong\sin(x_1)+\sin(x_2)$$

$$x_1+x_2\leq 0.244\ rad.$$

Consideriamo ora un altro operatore definito dalla seguente relazione

$$\hat{\Omega}_{a,b}(x)=ax+b. \qquad (7)$$

Sebbene anche l'applicazione dell'operatore $\hat{\Omega}_{a,b}$ fornisca una funzione di primo grado, non è lineare. È facile mostrare, infatti, che

$$\hat{\Omega}_{a,b}(x_1+x_2)=\hat{\Omega}_{a,b}(x_1)+\hat{\Omega}_{a,b}(x_2)-b. \qquad (8)$$

Poiché per $x$ sufficientemente piccoli $\lg(1+x)\cong x$ ad esempio, se lg è il logaritmo naturale $\lg(1.1) = 0.095$, circa uguale a 0.1), posto $y = 1+x$, si ha $\lg(y)\cong y-1$; da cui $\lg = \Omega_{1,-1}$. Consegue che l'operatore logaritmo non è mai lineare.

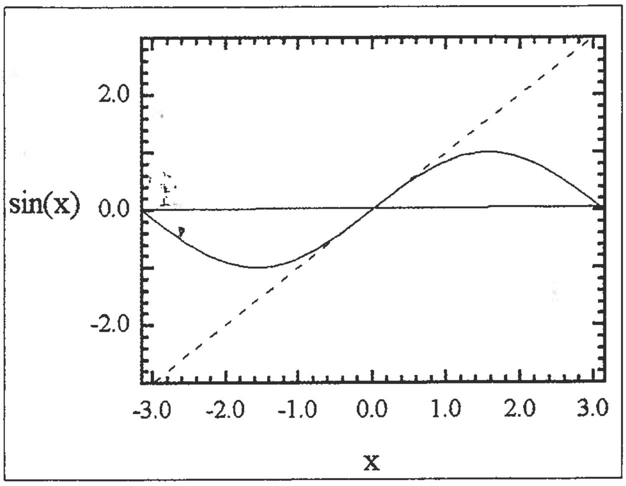


**Fig. 1 Grafico della funzione $y = \sin(x)$ e della retta $y = x$. Intorno ad $x = 0$ la funzione seno è ben approssimata dalla retta e quindi il seno della somma è uguale alla somma dei seni: l'operatore è lineare.**

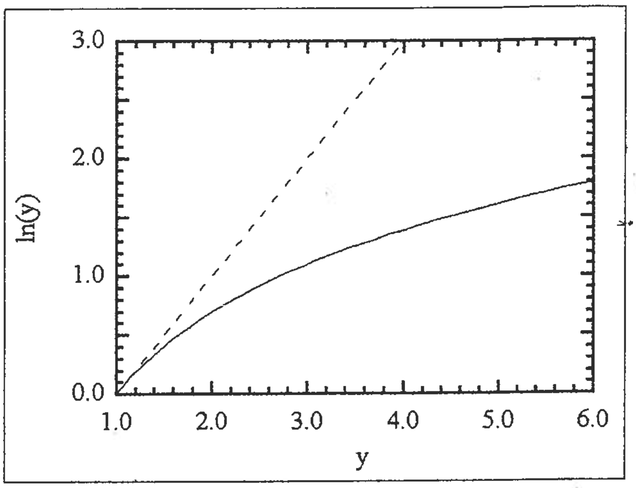


**Fig. 2 Grafico della funzione $z = \lg(y)$ e della retta $z = y - 1$. Intorno ad $x = 1$ la funzione logaritmo è approssimabile da una retta non passante per l'origine; e quindi (vedi testo) il logaritmo non è, in nessun caso, un operatore lineare.**

Dando uno sguardo all'andamento funzionale del seno e del logaritmo riportati, rispettivamente, in fig. 1 e fig. 2 risulta evidente che si è ben lontani da una funzione di primo grado. Nella figura abbiamo inoltre riportato le rette che approssimano il seno ed il logaritmo rispettivamente intorno ad $x \cong 0$ ed $x \cong 1$. Solo la retta che approssima il seno passa per lo zero e solo in questo caso (almeno entro un opportuno intervallo) si può parlare di linearità.

Tra i molteplici esempi di operatori che sottintendono lo svolgimento dei fenomeni naturali nonché di quelli sociali, riportiamo nel seguito due semplici esempi presi a prestito dalle scienze fisiche.

Il primo riguarda la caduta di un grave in presenza di attrito; nello specifico consideriamo la discesa di un paracadutista. È ben noto che se sono verificate opportune condizioni la velocità del paracadutista, dopo un certo tempo, raggiunge un valore limite costante. Questo non è in contraddizione con il secondo principio della dinamica, in quanto il raggiungimento della suddetta condizione è connesso all'esistenza della forza d'attrito prodotta dall'interazione tra il paracadute e l'atmosfera, proporzionale alla velocità di caduta del paracadutista. L'equazione del moto diviene

$$F = ma = mg - kv, \tag{9}$$

dove $F$ è la forza, $a$ l'accelerazione del paracadutista, $g$ l'accelerazione di gravità, $m$ la massa del paracadutista (e del paracadute), $v$ la velocità di caduta e $k$ una costante che determina la forza d'attrito. È evidente che la velocità, nulla all'istante iniziale, tenderà ad aumentare a causa dell'accelerazione indotta dal campo gravitazionale e, per opportuni valori di $k$, dopo un certo tempo i due termini del secondo membro dell'equazione (9) saranno uguali. In altri termini, $a = 0$ e di conseguenza la velocità risulterà costante:

$$v_c = mg/k \tag{10}$$

$k$ è indipendente dalla massa; ne consegue che l'operatore velocità di caduta $\hat{v}_c(m) = mg/k$ è lineare con la massa del paracadutista e, dunque, raddoppiando la massa del paracadutista raddoppia la sua velocità limite.

Prendiamo ora in esame, sia pure in maniera grandemente semplificata, il problema del consumo di carburante di un'automobile. Con il termine «consumo» intendiamo la quantità di carburante bruciata dal motore nell'unità di tempo. Indichiamo il consumo con la lettera $C$. Questa definizione è leggermente diversa da quella generalmente riportata nei libretti di «uso e manutenzione» delle automobili, dove il consumo è riferito alla distanza percorsa dal veicolo. Vale a dire per velocità del mezzo differenti da zero.

È ragionevole assumere che $C$ sia una funzione della velocità del veicolo. $C(v)$ è pertanto esprimibile tramite un polinomio e, se consideriamo al massimo il termine di 1 grado, sarà data da

$$C(v) = C_0 + C_1 v, \tag{11}$$

dove il termine $C_0$ tiene conto del fatto che per $v = 0$ e motore in funzione, il consumo è diverso da zero. È evidente che l'operatore $\hat{C}(v)$, sulla base dell'equazione 11, non è lineare; in altri termini raddoppiando la velocità del veicolo non si raddoppia il consumo di carburante. Va da sé che nel limite $C_0 << C_1 v$, ovvero per velocità sufficientemente elevate, l'operatore può essere considerato lineare in $v$.
Ancorché sia banale ribadirlo, in generale è sempre auspicabile che lo studente assimili il concetto e non la regola mnemonica. Lo studente non dovrebbe aver bisogno di memorizzare la (1) come errata, una volta appresa la definizione di operatore lineare e dimostrato che il logaritmo non soddisfa tale definizione.

***Massimo Fanfoni, Massimo Tomellini***
*Università degli Studi «Tor Vergata» - Roma*

**Bibliografia**

S. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1971.