УДК 62-50:519.2

К ОПИСАНИЮ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЭВОЛЮЦИИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПРОШЛОГО

Л. АККАРДИ

(Неаполь — Москва)

В связи с проблемой вероятностного описания динамических систем, эволюция которых зависит от прошлого, изучается класс стохастических процессов, обобщающих марковские процессы. Показывается, что совместные распределения вероятностей, задающие такие процессы, обладают всеми основными свойствами, характерными для марковских процессов.

1. Постановка задачи

Исследование систем, эволюция которых описывается вероятностными законами, сводится с математической точки зрения к изучению вероятностных мер на «пространстве траекторий» системы. Марковский случайный процесс можно рассматривать как наиболее прямое вероятностное обобщение детерминированной эволюции, описываемой обыкновенными дифференциальными (или разностными) уравнениями [1]. В детерминированном случае состояние системы в любой момент времени полностью определяется начальным состоянием, в то время как в случайном марковском процессе распределение вероятностей в любой момент определяется начальным вероятностным распределением.

Однако существует много примеров детерминированных систем с «памятью». Их эволюция не определяется полностью «начальным состоянием», а требует задания целого сегмента (возможно, бесконечного) прошлой истории системы.

В настоящей работе рассматриваются некоторые вероятностные аналоги систем с «памятью». В таких системах распределение вероятностей определяется целым «сегментом прошлой истории». Задачи такого типа естественным образом возникают в самых различных областях науки. Так, например, в теории случайных нейронных сетей [2] нельзя учесть переменность «периода рефракторности», если оставаться в рамках чисто марковского описания.

Существует большая литература, связанная с описанными выше вопросами (см. [3, 4], где приведена библиография). Марковские свойства стохастического процесса обычно выражают с помощью условных математических ожиданий. Рассматриваемый же здесь подход отличается в основном тем, что рассматривается алгебраическая структура совместных распределений, из которой выводятся свойства условных математических ожиданий.

Перед тем как перейти к точной постановке задачи, сделаем ряд предварительных замечаний.

Обычно стохастический процесс задается семейством случайных величин и некоторыми простыми соотношениями между этими величинами [3]. Два семейства случайных величин определяют один и тот же случайный процесс тогда и только тогда, когда все конечномерные распределения (совместные вероятности) в этих семействах соответственно совпадают. Поэто-

му каждое соотношение меж
жено через совместные вероя

Пусть $(\xi_t)_{t\in N}$ — цепь Мар
лением), т. е. семейство слу
случайный процесс в дискрет
ний * $\rho=(s_1, \dots, s_n)$. Тогда о
между случайными перемен

(1) $P\{\xi_{t_n}\in A_{t_n}|\xi_{t_{n-1}}\in A_{t}$

где $t_1\leqslant \dots \leqslant t_n$; $A_{t_i}\subseteq S(1\leqslant i\leqslant$
тия $\xi_{t_n}\in A_{t_n}$ при условии $\xi_{t_i}\in$
отношению для совместных

(2) $\Psi_t(A_1, \dots A_t)=\sum$

где введено обозначение

$p_{ij}^{(t)}=P\{\xi_t=i|\xi_{t-1}=$

а величина $p_i^{(1)}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ —

Вероятности w_i^t $(1\leqslant i\leqslant n$
$i\in S$ определяются из соотно

(3) $w^{(t)}=P_t w^{(t-1)}$,

где по-прежнему $w^{(t)}=(w_1^t,$

Формула (3) задает «за
внимание на то, что совмес
лой (2), если задан «закон
распределение

$w^{(1)}=(p_1^{(1)}, \dots, p$

Таким образом, марков
свойством, что совместные
лены, если:

1°) задано начальное р
2°) задан «закон эволю
3°) задана формула для
ся стандартным ** образо
люции».

Эти три условия полно
са. Цель настоящей статьи
для которых совместные в
типа 2° и 3°, а также следу

1°′. Заданы все вероят
ветствующие моментам вре

Такие стохастические
лого», в том смысле, что з
ностей состояний для «пре

* Везде далее ограничим
временем и конечным множе
ния работы без труда перено
пространства состояний.

** Зависимость совместны
пределения является «станда
кон эволюции и другое нач
p_t' и w', отличными от p_t и
формуле при помощи замены

ое соотношение между случайными величинами может быть выра-
ез совместные вероятности.

$(\xi_t)_{t\in N}$ — цепь Маркова (с фиксированным начальным распреде-
т. е. семейство случайных величин, определяющих марковский
ий процесс в дискретном времени с конечным множеством состоя-
$(s_1, \ldots, s_n)$. Тогда определяющее марковский процесс соотношение
учайными переменными

$$P\{\xi_{t_n}\in A_{t_n} | \xi_{t_{n-1}}\in A_{t_{n-1}}; \ldots ; \xi_{t_1}\in A_{t_1}\} = P\{\xi_{t_n}\in A_{t_n} | \xi_{t_{n-1}}\in A_{t_{n-1}}\},$$

$\ldots \leqslant t_n$; $A_{t_i}\subseteq S (1\leqslant i\leqslant n)$, выражающее условную вероятность собы-
A_{t_n} при условии $\xi_{t_i}\in A_{t_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, эквивалентно следующему со-
ию для совместных вероятностей:

$$\Psi_t(A_1, \ldots A_t) = \sum_{i_t\in A_t} \ldots \sum_{i_1\in A_1} p^{(t)}_{i_t, i_{t-1}} \cdot p^{(t-1)}_{i_{t-1}, i_{t-2}} \cdot \ldots \cdot p^{(1)}_{i_1}$$

но обозначение

$$p_{ij}^{(t)} = P\{\xi_t = i | \xi_{t-1} = j\} \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant n); \qquad i\in N,$$

на $p_i^{(1)}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ — вероятность события $\xi_1 = i\in S$.

тности w_i^t $(1\leqslant i\leqslant n)$ пребывания в момент времени t в состояниях
деляются из соотношений

$$w^{(t)} = P_t w^{(t-1)},$$

режнему $w^{(t)} = (w_1^t, \ldots, w_n^t)$; $P_t = \{p_{ij}^{(t)}\}_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}$.

ула (3) задает «закон эволюции» для марковской цепи. Обратим
е на то, что совместные вероятности полностью определены форму-
если задан «закон эволюции», т. е. величины P_t, $t\in N$, и начальное
ление

$$w^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}).$$

м образом, марковские случайные процессы характеризуются тем
м, что совместные распределения вероятностей полностью опреде-
ли:

адано начальное распределение вероятностей $w(0)$;
адан «закон эволюции» для вероятностных распределений;
адана формула для совместных вероятностей, которые определяют-
артным ** образом через начальное распределение и «закон эво-

ри условия полностью определяют структуру марковского процес-
настоящей статьи — изучение такого класса случайных процессов,
рых совместные вероятности полностью определены условиями
3°, а также следующим условием, заменяющим условие 1°.
аданы все вероятностные распределения $w(0)$, $w(-1), \ldots$, соот-
ющие моментам времени $t=0, -1, -2, \ldots$.
е стохастические процессы имеют «эволюцию, зависящую от прош-
том смысле, что знание прошлой истории (распределений вероят-
остояний для «предыстории» системы при $t=0, -1, \ldots$) необходимо

де далее ограничимся рассмотрением случайных процессов с дискретным
и конечным множеством состояний. Все основные результаты и определе-
ты без труда переносятся на случай непрерывного времени и произвольного
ства состояний.

исимость совместных вероятностей от закона эволюции и начального рас-
ия является «стандартной» в том смысле, что если рассмотреть другой за-
юции и другое начальное распределение с другими значениями величин
отличными от p_t и w, то совместные вероятности вычисляются по той же
при помощи замены соответствующих символов.

му каждое соотношение между случайными величинами может быть выражено через совместные вероятности.

Пусть $(\xi_t)_{t\in N}$ — цепь Маркова (с фиксированным начальным распределением), т. е. семейство случайных величин, определяющих марковский случайный процесс в дискретном времени с конечным множеством состояний * $\rho=(s_1,\ldots,s_n)$. Тогда определяющее марковский процесс соотношение между случайными переменными

(1) $$P\{\xi_{t_n}\in A_{t_n}\mid\xi_{t_{n-1}}\in A_{t_{n-1}};\ldots;\ \xi_{t_1}\in A_{t_1}\}=P\{\xi_{t_n}\in A_{t_n}\mid\xi_{t_{n-1}}\in A_{t_{n-1}}\},$$

где $t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$; $A_{t_i}\in S(1\leqslant i\leqslant n)$, выражающее условную вероятность события $\xi_{t_n}\in A_{t_n}$ при условии $\xi_{t_i}\in A_{t_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, эквивалентно следующему соотношению для совместных вероятностей:

(2) $$\Psi_t(A_1,\ldots A_t)=\sum_{i_t\in A_t}\cdots\sum_{i_1\in A_1}p^{(t)}_{i_t i_{t-1}}\cdot p^{(t-1)}_{i_{t-1}i_{t-2}}\cdot\ldots\cdot p^{(1)}_{i_1}$$

где введено обозначение

$$p^{(t)}_{ij}=P\{\xi_t=i\mid\xi_{t-1}=j\}\qquad(1\leqslant i,\ j\leqslant n);\qquad i\in N,$$

а величина $p^{(1)}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ — вероятность события $\xi_1=i\in S$.

Вероятности w_i^t $(1\leqslant i\leqslant n)$ пребывания в момент времени t в состояниях $i\in S$ определяются из соотношений

(3) $$w^{(t)}=P_t w^{(t-1)},$$

где по-прежнему $w^{(t)}=(w_1^t,\ldots,w_n^t)$; $P_t=\{p^{(t)}_{ij}\}_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}$.

Формула (3) задает «закон эволюции» для марковской цепи. Обратим внимание на то, что совместные вероятности полностью определены формулой (2), если задан «закон эволюции», т. е. величины P_t, $t\in N$, и начальное распределение

$$w^{(1)}=(p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(1)}).$$

Таким образом, марковские случайные процессы характеризуются тем свойством, что совместные распределения вероятностей полностью определены, если:

1°) задано начальное распределение вероятностей $w(0)$;

2°) задан «закон эволюции» для вероятностных распределений;

3°) задана формула для совместных вероятностей, которые определяются стандартным ** образом через начальное распределение и «закон эволюции».

Эти три условия полностью определяют структуру марковского процесса. Цель настоящей статьи — изучение такого класса случайных процессов, для которых совместные вероятности полностью определены условиями типа 2° и 3°, а также следующим условием, заменяющим условие 1°.

1°′. Заданы все вероятностные распределения $w(0)$, $w(-1),\ldots$, соответствующие моментам времени $t=0,-1,-2,\ldots$.

Такие стохастические процессы имеют «эволюцию, зависящую от прошлого», в том смысле, что знание прошлой истории (распределений вероятностей состояний для «предыстории» системы при $t=0,-1,\ldots$) необходимо

---

* Везде далее ограничимся рассмотрением случайных процессов с дискретным временем и конечным множеством состояний. Все основные результаты и определения работы без труда переносятся на случай непрерывного времени и произвольного пространства состояний.

** Зависимость совместных вероятностей от закона эволюции и начального распределения является «стандартной» в том смысле, что если рассмотреть другой закон эволюции и другое начальное распределение с другими значениями величин p_t' и w', отличными от p_t и w, то совместные вероятности вычисляются по той же формуле при помощи замены соответствующих символов.

для определения при помощи условий 1°, 2° и 3° совместных вероятностей процесса.

Можно поставить более общую проблему задания случайного процесса, в котором закон эволюции выражает распределение вероятностей состояний в момент времени $t+1$ через распределения вероятностей в предыдущие моменты времени:

$$w^{(t+1)}=f_t(w^{(t)}, w^{(t-1)}, \ldots). \tag{4}$$

При этом возникает вопрос: что является для такого процесса начальным состоянием? В случае марковских процессов начальное состояние — это распределение вероятностей $w^{(t_0)}$ в некоторый момент t_0. Предположим, что в общем случае начальным состоянием является совокупность всех распределений * $w^{(t_0)}, w^{(t_0-1)}, \ldots$. Но тогда при помощи последовательных подстановок из формулы (4) можно получить формулу

$$w^{(t+1)}=F_t(w^0, w^{-1}, \ldots), \tag{5}$$

выражающую распределение вероятностей в момент времени $t+1$ через начальное состояние $W=(w^{(0)}, w^{(-1)}, \ldots)$.

В дальнейшем предполагается, что закон эволюции имеет форму (5) **, что полностью согласуется с условием 1°. При этом выражение для совместных распределений вероятностей процесса имеет ту же самую алгебраическую структуру, что и соответствующие выражения для марковских процессов. В частности, оказывается возможным, как и в марковском случае, различение понятий «однородности» и «стационарности» процесса (что невозможно для общего класса стохастических процессов). Более того, большинство аналитических методов, развитых для марковских процессов, пригодно и для предложенного обобщения. По этим причинам такие процессы называются в дальнейшем «M-процессами». В разделе 2 изучается существование решений исходной задачи в терминах M-процессов и даются условия существования таких процессов, а также условия их однородности и стационарности, которые совершенно аналогичны соответствующим известным условиям для марковских процессов. В разделе 3 даны условия существования, однородности и стационарности для M-процессов, аналогичные соответствующим условиям для марковских процессов.

2. М-процессы

Проанализируем сначала структуру формулы (3) для совместных вероятностей марковского процесса. Ограничимся для простоты записи однородными марковскими процессами (т. е. случаем, когда $p_{ij}^{(t)}$ — константы, не зависящие от t).

Пусть $Q^+=Q^+(S)$ — множество всех вероятностных распределений на пространстве $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, т. е. множество всех n-мерных векторов $w=(w_1, \ldots, w_n)$, таких, что $w_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i=1$. Пусть $P=\{p_{ij}\}$ — стохастическая $(n\times n)$-матрица, т. е. $p_{ij}\geqslant 0$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}=1$.

* Если интервал времени, на котором заданы распределения, конечен (а иногда и в случае, когда он бесконечен), то можно при помощи хорошо известной процедуры задать новый марковский процесс с большим пространством состояний. Процессы, которые рассматриваются далее, имеют совершенно иную структуру, чем так определенные марковские процессы.

** Для однородного марковского процесса уравнение эволюции в форме (5) имеет вид $w^{(t+1)}=P^{t+1}w^{(0)}$.

Совместные вероятности однородной цепи Маркова с начальным состоянием w^0 и матрицей переходных вероятностей $P=\{p_{ij}\}$ определяются в соответствии с (2) формулой

$$(6)\qquad \text{Вер}\{\xi_1\in B_1,\ldots,\xi_t\in B_t\}=\sum_{i_1\in B_1}\cdots\sum_{i_t\in B_t} w^0_{i_1}p_{i_2i_1}\ldots p_{i_ti_{t-1}}.$$

В частности, для вероятностей $w_i{}^t=P\{\xi_t=i\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ можно получить уравнение эволюции в векторной форме $w^{(t+1)}=Pw^{(t)}$, которое эквивалентно выражению

$$(7)\qquad \sum_{i\in B} w_i{}^{t+1}=\sum_{i\in B}\sum_{j\in S} w_j{}^t p_{ij},$$

где p_{ij} — элементы матрицы P.

Постараемся найти более простую форму записи выражений (6) и (7). С этой целью рассмотрим матрицы χ_B, $B\subseteq S$, определенные следующим образом: χ_B — диагональная матрица с элементами, равными 1, на тех местах главной диагонали, которые соответствуют индексам, принадлежащим множеству B, причем все остальные элементы матрицы χ_B равны 0. Обозначая через $\langle\cdot;\ \cdot\rangle$ скалярное произведение n-мерных векторов, легко прийти к следующей форме записи выражения (6):

$$(8)\qquad \text{Вер}\ \{\xi_1\in B_1,\ldots,\xi_t\in B_t\}=\langle 1;\ \chi_{B_t}P\chi_{B_{t-1}}P\cdot\ldots\cdot\chi_{B_1}w^0\rangle,$$

где 1 означает n-мерный вектор со всеми компонентами, равными 1. Аналогично формула (7) примет вид

$$(9)\qquad \text{Вер}\ \{\xi_{t+1}\in B\}=\langle 1;\ \chi_B Pw^{(t)}\rangle.$$

Рассмотрим теперь функцию $\omega_t(A)$, которая ставит в соответствие каждой вещественной $(n\times n)$ матрице A вещественное число

$$(10)\qquad \omega_t(A)=\langle 1;\ Aw^{(t)}\rangle.$$

Функция ω_t имеет следующие свойства: 1) является вещественной линейной формой *; 2) если $A\geqslant 0$ (т. е. все $a_{ij}\geqslant 0$), то $\omega_t(A)\geqslant 0$; 3) $\omega_t(E)=1$ (здесь E означает единичную $(n\times n)$-матрицу).

При помощи функции $\omega_t(A)$ выражение (8) для совместных вероятностей приобретает вид

$$(11)\qquad \text{Вер}\ \{\xi_1\in B_1,\ldots,\xi_t\in B_0\}=\omega_0(\chi_{E_t}P\cdot\ldots\cdot\chi_{E_1}P).$$

Уравнение эволюции (9) можно записать в обобщенной форме

$$(12)\qquad \omega_{t+1}(A)=\omega_t(AP)=\omega_0(AP^t),$$

где A — произвольная $(n\times n)$-матрица, а условие согласованности (условие стохастичности матрицы P) имеет вид

$$(13)\qquad \omega_t(PA)=\omega_t(A).$$

Обозначая через χ_i матрицы, все элементы которых равны нулю, за исключением i-го элемента главной диагонали, равного 1, можно записать следующее выражение для компонентов вектора вероятности $w^{(t)}$

$$(14)\qquad w_1{}^t=\omega_0(\chi_1P^t),\ \ldots,\ w_n{}^t=\omega_0(\chi_nP^t).$$

Диагональные матрицы χ_B обладают следующими свойствами **:

$$(15)\qquad \chi_B{}^2=\chi_B,\ \chi_S=E;\ \chi_{B\cup C}=\chi_B+\chi_C \text{ при } B\cap C=\emptyset.$$

* Т. е. удовлетворяет условию $\omega_t(\lambda A+\mu B)=\lambda\omega_t(A)+\mu\omega_t(B)$ для любых матриц A, B и любых вещественных чисел λ, μ.

** Эти свойства и условие положительности формы ω_t важны для того, чтобы можно было интерпретировать (11) как выражение для совместных вероятностей случайного процесса.

Отметим, наконец, что распределение w^0 есть инвариантное распределение для марковской цепи (т. е. $Pw^0=w^0$) тогда и только тогда, когда

$$(16)\qquad \omega_0(AP)=\omega_0(A).$$

Если рассматриваемая марковская цепь не является однородной, то формула (11) имеет вид

$$(17)\qquad \text{Вер}\,\{\xi_1\in B_1,\dots,\xi_t\in B_t\}=\omega_0(\chi_{B_t}P_t\cdot\ \dots\ \cdot\chi_{B_1}P_1),$$

а в выражениях (12) и (14) под P^t следует иметь в виду произведение $P_t\cdot\cdot P_{t-1}\cdot\ \dots\ \cdot P_1$.

Перейдем теперь непосредственно к определению M-процесса, взяв за основу формулу (17). Рассмотрим множество S, имеющее смысл множества значений случайного процесса, и всевозможные * подмножества $B\subset S$. Рассмотрим также линейное пространство H, множество линейных операторов, действующих на H, и некоторую линейную форму $\omega_0(A)$, отображающую линейный оператор A на множество вещественных чисел. Пусть при этом $\omega_0(E)=1$, где E — тождественный оператор. Поставим в соответствие каждому подмножеству $B\subset S$ линейный оператор χ_B, действующий на H так, чтобы удовлетворялись условия (15).

Определение 1. Стохастический процесс называется M-процессом, если его совместные вероятности могут быть выражены формулой (17), где $P_1=P(1),\dots,P_t=P(t),\dots$ — линейные операторы, действующие в пространстве H.

Подчеркнем, что в этом общем определении уже не предполагается, что линейная форма $\omega_0(A)$ имеет вид (10) и что H — n-мерное пространство, а A — матрица. Операторы χ_B также не обязательно соответствуют специальным диагональным $(n\times n)$-матрицам, как это подразумевалось в марковском случае,— важно лишь, чтобы выполнялись условия (15).

Для задания M-процесса при помощи линейной формы $\omega_0(A)$ и операторов $P(t)$, χ_B все эти величины не могут быть выбраны произвольно. Во-первых, должны быть выполнены условия согласованности

$$\text{Вер}\,\{\xi_1\in B_1,\dots,\ \xi_{t-1}\in B_{t-1};\ \xi_t\in S\}=\text{Вер}\,\{\xi_1\in B_1,\dots,\ \xi_{t-1}\in B_{t-1}\}.$$

Легко видеть, что эти условия выполнены, если

$$(18)\qquad \omega_0(P(t)A)=\omega_0(A),\ \forall t\in N.$$

Во-вторых, должно быть выполнено условие неотрицательности совместных вероятностей **.

Для M-процессов же можно ввести ряд естественных понятий, прямо обобщающих соответствующие понятия для марковских процессов.

Определение 2. M-процесс называется однородным, если операторы $P(1),\dots P(t)$ не зависят от t, т. е. если $Q=P(t)$, $\forall t\in N$.

Определение 3. M-процесс обладает инвариантным распределением w_0, если выполнено условие

$$(19)\qquad \omega_0(AP(t))=\omega_0(A),\ \forall t\in N.$$

Для M-процессов, обладающих инвариантным распределением w_0, как это легко получить из (17) и (19), имеет место формула Вер $\{\xi_t\in B\}=$ $=$Вер $\{\xi_0\in B\}=\omega_0(\chi_B)$, в соответствии с которой вероятность пребывания процесса в момент времени t в множестве B не зависит от t.

Легко доказывается следующее утверждение, полностью аналогичное соответствующему утверждению для марковских процессов.

---

* Эти подмножества должны составлять σ-алгебру. Если S — конечное множество $S=\{s_1,\dots,s_n\}$, то рассматриваются все подмножества множества S.

** В общем случае условие неотрицательности формулируется как требование, согласно которому все операторы $P(t)$ и χ_B отображают определенный выпуклый конус пространства H в себя.

Утверждение 1. M-процесс стационарен тогда и только тогда, когда он однороден и w_0 есть его инвариантное распределение.

Для M-процессов устанавливается аналог уравнения Чэпмена — Колмогорова [5]. Для этого достаточно определить полугруппу операторов P_r^s в соответствии с формулами

$$(20) \qquad P_r^t = P_s^t P_r^s \ (r \leqslant s \leqslant t), \ P_t^{t+1} = P(t), \ P_t^t = E.$$

Тогда, полагая по определению

$$(21) \qquad \omega_t(A) = \omega_0(AP_0^t),$$

получаем следующее «уравнение эволюции» для M-процессов:

$$(22) \qquad \omega_{t+\tau}(A) = \omega_t(AP_t^{t+\tau}).$$

Все понятия и результаты, касающиеся марковских процессов и имеющие чисто операторно-теоретическую природу, немедленно обобщаются на M-процессы. Например, проблема существования финального распределения для M-процессов эквивалентна вопросу о существовании предела $\lim\limits_{t\to\infty} P_0^t$; в случае однородного M-процесса предел, если он существует, обладает свойствами проекционного оператора. Если этот проекционный оператор реализует проекцию на одномерное подпространство пространства H, то соответствующий M-процесс является эргодическим (и даже сильно перемешивающим).

Охарактеризуем место марковских процессов среди M-процессов общего вида.

Утверждение 2. Пусть в определении 1 пространство H — n-мерное пространство, а χ_B — диагональные $(n\times n)$-матрицы, удовлетворяющие условиям (15). Тогда:

1) если $P(t)$ — стохастические матрицы, то выражение $\omega_0(\chi_{B_t}P(t)\cdot\ldots$ $\ldots\cdot\chi_{B_1}P(1))$ определяет совместные вероятности тогда и только тогда, когда $\omega_0(A)$ имеет вид (10), где w^0 — некоторый стохастический n-мерный вектор, так что M-процесс является марковской цепью;

2) если выражение для совместных вероятностей имеет вид (17), линейная форма $\omega_0(A)$ имеет вид (10), а операторы χ_B — диагональные матрицы, удовлетворяющие (15), то матрицы $P(t)$ являются стохастическими, так что M-процесс также есть марковская цепь.

Таким образом, в марковском случае линейной форме $w_0(A)$ взаимнооднозначно соответствует стохастический вектор w^0, принадлежащий множеству $Q^+ = \left\{w\colon\ w_i \geqslant 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n), \ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1\right\}$ n-мерного пространства. Это множество и есть множество всех начальных данных процесса. В этом смысле начальное состояние марковского процесса полностью определяется линейной формой $\omega_0(A)$ вида (10). В общем случае M-процессов линейная форма $\omega_0(A)$ может быть определена не формулой (10), а каким-либо иным способом, учитывающим характер начальных данных процесса (например, требованием типа 1°′, приведенным в разделе 1). Поэтому в следующем параграфе решение задачи, поставленной в разделе 1, будет искаться в классе M-процессов.

3. Эволюция, зависящая от прошлого

В связи с определением M-процесса, введенным в разделе 2, естественно возникают два вопроса: существуют ли в действительности M-процессы, отличные от марковских, т. е. можно ли в немарковском случае удовлетворить одновременно указанным выше условиям 1°′, 2° и 3°?; не является ли любой процесс, зависящий от прошлого, M-процессом? В этом разделе даются ответы на эти вопросы: указывается процедура эффективного построения M-процесса и приводится пример процесса с эволюцией, зависящей от прошлого, который не является M-процессом.

Построим процесс, удовлетворяющий перечисленным в разделе 1 условиям $1^{\circ\prime}$, 2° и 3°, т. е. стохастический процесс, вероятностные распределения которого удовлетворяют соотношениям (5), а совместные вероятности могут быть выражены формулой (17). В этом случае множество «начальных данных» — это множество I бесконечных последовательностей стохастических векторов вида $W=(w^0, w^{-1}, \ldots)$. Множество I — выпуклое множество в пространстве H всех ограниченных последовательностей $X=(x^0, x^{-1}, \ldots)$ n-мерных векторов $x^t \in R^n$, $t=0, -1, \ldots$ Определим линейные операторы $\hat{\chi}_B$, действующие на последовательности $X \in H$, следующим образом: $\chi_B(X)$ — последовательность вида $(\chi_B x^0, \chi_B x^{-1}, \ldots)$, где χ_B — диагональные матрицы, обладающие свойствами (15). Сочетая уравнение (5) с требованием, чтобы случайный процесс был M-процессом, можно, принимая во внимание (14), написать

$$w_i^{t+1} = \omega_{W^0}(\hat{\chi}_i \hat{P}^t), \tag{23}$$

где ω_{W^0} — линейная форма, определяемая начальными данными $W^0=\{w^0, w^{-1}, \ldots\}$, а $\hat{P}^t$ — линейный оператор на пространстве H, задающий «закон эволюции». Чтобы определить искомый случайный процесс, необходимо (в соответствии с определением M-процесса) задать в явном виде: 1) линейную форму ω_{W^0}; 2) «закон эволюции» $\{\hat{P}(t)\}$; 3) условия положительности для совместных вероятностей.

Обобщая известные свойства марковских процессов на случай, рассматриваемый в настоящем разделе, запишем линейную форму ω_{W^0} в виде

$$\omega_{W^0}(A) = \bar{\omega}(AW^0) \tag{24}$$

и закон эволюции в виде

$$\text{Вер}\,\{\xi_t \in B\} = \bar{\omega}(\chi_b \hat{P}(t) W^0). \tag{25}$$

Линейная форма $\bar{\omega}$ задана теперь на множестве I^0 последовательностей $(u^0, u^{-1}, \ldots)$ векторов $u^\tau=(u_1^\tau, \ldots, u_n^\tau)$ таких, что $u_i^\tau \geqslant 0$; $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^\tau \leqslant 1$ (очевидно, что $I^0 \supset I$).

Линейная форма $\bar{\omega}(u)$ должна обладать следующими свойствами: $\bar{\omega}(u) \geqslant 0$, $u \in I^0$; $\bar{\omega}(u)=1$, $u \in I$.

Оператор эволюции $\hat{P}(t)$ переводит множество I в себя, а операторы $\hat{\chi}_B$ отображают I в I^0.

Задача свелась теперь к определению линейной формы $\bar{\omega}$, заданной на множестве I^0 и обладающей указанными свойствами, и оператора эволюции $\hat{P}(t)$, переводящего множество I в себя.

Утверждение 3. Пусть $\hat{Q}_t$ — линейный оператор, который отображает в себя как множество I, так и множество I^0. Тогда, если обозначить $Q_t W^0 = (u^0, u^{-1}, \ldots)$ для некоторого $W^0=(w^0, w^{-1}, \ldots)$, то

$$u^\sigma = \sum_{\tau=-\infty}^{0} K_t(\sigma, \tau) P_t(\sigma, \tau) w^\tau, \tag{26}$$

где $P_t(\sigma, \tau)$ — стохастические $(n \times n)$-матрицы, а скалярная функция $K_t(\sigma, t)$ неотрицательна и удовлетворяет соотношению $\sum\limits_{\tau=-\infty}^{0} K_t(\sigma, \tau) = 1$.

Доказательство этого утверждения приведено в приложении 1, где содержится также пример, показывающий, что требование $\hat{Q}_t(I^0) \subset I^0$ существенно для справедливости утверждения.

Таким образом, утверждение 3 определяет вид оператора эволюции. Следующее утверждение определяет вид линейной формы $\bar{\omega}$.

Утверждение 4. Если некоторая линейная форма $\bar{\omega}(W)$, заданная на $W \in I^0$, удовлетворяет условиям

$$\bar{\omega}(W)=1,\ W \in I,\ \bar{\omega}(V) \geqslant 0,\ V \in I^0,$$

то $\bar{\omega}(W) = \sum\limits_{\tau=-\infty}^{0} \psi(\tau)\langle 1; w^\tau \rangle$, где 1 — n-мерный вектор с единичными компонентами, а функция $\psi(\tau)$ неотрицательна и удовлетворяет условию

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{0} \psi(\sigma)=1.$$

Доказательство этого утверждения приведено в приложении 2. Следующее утверждение устанавливает условие, при котором линейный оператор $\hat{Q}_t$ и линейная форма $\bar{\omega}$ определяют M-процесс.

Утверждение 5. Операторы Q_t и линейная форма $\omega_0(A) = \bar{\omega}(AW^0)$, удовлетворяющие условиям утверждений 3 и 4, определяют M-процесс, задаваемый совместными вероятностями $\omega_0(\hat{\chi}_{B_t}\hat{Q}_t \cdot \ldots \cdot \hat{\chi}_{B_1}\hat{Q}_1)$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{0} \psi(\sigma) K_t(\sigma,\tau) = \psi(\tau). \tag{27}$$

Доказательство утверждения 5 приведено в приложении 3.

Утверждение 5 содержит ответ на вопрос, поставленный в начале этого раздела о существовании M-процесса.

В соответствии с определением 2 построенный в настоящем параграфе M-процесс будет однородным, если $\hat{Q}_t$ не зависит от t, и в соответствии с утверждением 1 он будет стационарным тогда и только тогда, когда * $\hat{Q}W^0 = W^0$.

В заключение приведем пример закона эволюции, который не является M-процессом. Рассмотрим закон эволюции для распределения вероятностей типа Вольтерра [5], т. е.

$$w^{t+1} = \sum_{\sigma=-\infty}^{t} P(t-\sigma)\, w^\sigma, \tag{28}$$

где $W^0 = (w^0, w^{-1}, \ldots)$ — последовательность стохастических векторов, $P(\tau) = Q(\tau)\varphi(\tau)$, причем $Q(t)$ — стохастическая матрица, $\varphi(\tau)$ — неотрицательная скалярная функция такая, что $\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{0} \varphi(\tau) = 1$.

Легко убедиться, что соотношение (28) может быть представлено в виде

$$W^{t+1} = \hat{P}W^t;\ w^{t+1} = \gamma(W^{t+1}), \tag{29}$$

* Свойства эргодичности, существования финального распределения и т. д. могут быть установлены, если наложить на оператор ряд обычных условий (например, условия Деблина в формулировке, принадлежащей Крылову и Боголюбову [6]).

где оператор $\hat{P}$ отображает последовательность стохастических векторов W в последовательность V такую, что $v^t = \sum_{\sigma=-\infty}^{0} P(t-\sigma)\, w^\sigma$, а оператор γ отображает последовательность стохастических векторов W в стохастический вектор $\gamma(W) = \sum_{\sigma=-\infty}^{0} P(-\sigma)\, w(\sigma)$.

Отсюда следует, что вероятностное распределение в каждый момент времени может быть записано в виде

(30) $\quad$ $\text{Вер}\, \{\xi^t \in B\} = \langle \mathbf{1};\ \gamma(\hat{\chi}_B W^t) \rangle$.

Чтобы рассматриваемый процесс принадлежал классу M-процессов, совместные вероятности должны иметь вид $\omega(\hat{\chi}_{B_t}\hat{P} \cdot \ldots \cdot \chi_{B_t}\hat{P})$, где в соответствии с (30) линейная форма ω задается формулой $\langle \mathbf{1};\ \gamma(AW^0) \rangle = \omega(A)$.

Рассмотрим, однако, условия согласованности $\omega(\hat{P}A) = \omega(A)$. После несложных вычислений легко видеть, что условия согласованности приводят к уравнению

$$\sum_{\tau=-\infty}^{0} \varphi(\tau)\, w(\sigma-\tau) = w(\sigma). \qquad (31)$$

Это уравнение может быть удовлетворено лишь в случае, когда* $\varphi(0) = 1$; $\varphi(\tau) = 0$; $\tau \neq 0$. Вероятностная эволюция (31) при таком виде функции φ представляет собой обычную однородную цепь Маркова (процесс без «памяти»). Таким образом, закон эволюции для распределения вероятностей типа Вольтерра определяет M-процесс лишь в тривиальном случае — когда он определяет марковскую цепь.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство утверждения 3. Предположим, что $\hat{Q} = \{A(\sigma;\ \tau)\}$; тогда

$$v(\tau) = \sum_{\sigma=-\infty}^{0} A(\tau, \sigma)\, w(\sigma) \in Q^+ \qquad (\text{П.1})$$

для каждого $W = (w(\sigma)) \in I$. Тогда

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{0} \langle A(\tau, \sigma)\, w(\sigma);\ \mathbf{1} \rangle = \sum_{\sigma=-\infty}^{0} \langle w(\sigma);\ q_\tau(\sigma) \rangle = 1, \qquad (\text{П.2})$$

где обозначено $q_\tau(\sigma) = {}^tA(\tau, \sigma)$ **. Пусть $q_\tau(\sigma) = q_{1,\tau}(\sigma), \ldots, q_{n,\tau}(\sigma)$; допустим, что существует $\sigma^* \in N$, такое, что $q_{i,\tau}(\sigma^*) \neq q_{j,\tau}(\sigma^*)$ для некоторых i и j $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$. Из положительности $w_k(\sigma)$ следует

$$\langle w(\sigma^*);\ q_\tau(\sigma^*) \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i(\sigma^*)\, q_{i,\tau}(\sigma^*) < \langle e_{j^*},\ q_\tau(\sigma^*) \rangle, \qquad (\text{П.3})$$

где по определению $q_{j^*,\tau}(\sigma^*) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} q_{i,\tau}(\sigma^*)$ и e_{j^*} означает вектор с компонентами $e_{j^*,i} = \delta_{j^*,i}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Поскольку $e_{j^*} \in Q^+$, последовательность $(\bar{w}(\sigma))$ такая, что $\bar{w}(\sigma) = w(\sigma)$ при $\sigma \neq \sigma^*$ и $w(\sigma^*) = e_{j^*}$, лежит в I. Поэтому из (П.2) следует

$$1 = \sum_{\sigma=-\infty}^{0} \langle \bar{w}(\sigma);\ q_\tau(\sigma) \rangle > \sum_{\sigma=-\infty}^{0} \langle w(\sigma);\ q_\tau(\sigma) \rangle, \qquad (\text{П.4})$$

---

* В этом можно убедиться, беря от обеих частей равенства (34) дискретное преобразование Лапласа.

** Через ${}^tA$ обозначена транспозиция матрицы A.

что абсурдно. Следовательно, $q_{i,\tau}(\sigma)=q_{j,\tau}(\sigma)$ для любых σ, $\tau\in N$ и $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, так что можно записать

$$(\text{П.5})\qquad q_\tau(\sigma)=\lambda_\tau(\sigma)\mathbf{1};\qquad \sum_{\sigma=-\infty}^{0}\lambda_\tau(\sigma)=1.$$

До сих пор мы не пользовались предположением $\hat{Q}I^0\subset I^0$. Допустим теперь, что $W=(w(\sigma))\in I^0$. Тогда, в силу указанного предположения, имеем

$$(\text{П.6})\qquad 0\leqslant\sum_{\sigma=-\infty}^{0}\langle w(\sigma);\,q_\tau(\sigma)\rangle\leqslant 1.$$

Если существует σ^*, такое, что $\lambda_\tau(\sigma^*)<0$, то, полагая $w(\sigma)=0$ для $\sigma\neq\sigma^*$ и $w(\sigma^*)\neq 0$, получаем

$$(\text{П.7})\qquad \langle w(\sigma^*),\ q_\tau(\sigma^*)\rangle=\lambda_\tau(\sigma^*)\langle w(\sigma^*);\,\mathbf{1}\rangle<0,$$

что противоречит (П.6).

Таким образом, $\lambda_\tau(\sigma)\geqslant 0$; $\sum\limits_{\sigma=-\infty}^{0}\lambda_\tau(\sigma)=1$. Положим ${}^tA(\tau,\ \sigma)=\lambda_\tau(\sigma){}^tQ(\tau,\ \sigma)$; теперь нам достаточно доказать, что ${}^tQ(\tau,\ \sigma)$ – положительная матрица. Снова допустим противное. Тогда существует $\sigma^*\in N$, такое, что $q_{i,\tau}(\sigma^*)<0$ для некоторого i $(1\leqslant i\leqslant n)$. При этом для некоторого вектора $w_0\in Q_0{}^+$ имеем $\langle w(\sigma^*),\ q_\tau(\sigma^*)\rangle<0$ в противоречии с (П.6). Следовательно, ${}^tQ(\sigma,\ \tau)$ – положительная матрица и ${}^tQ(\sigma,\ \tau)\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}$ для любых σ, $\tau\in N$, т. е. $Q(\sigma,\ \tau)$ является стохастической матрицей. Этим доказательство завершается.

Приведем теперь контрпример, показывающий, что без предположения $\hat{Q}I^0\subset I^0$ утверждение 3 становится неверным. Пусть $\varphi(\sigma)>0$, $\sum\limits_{\sigma=0}^{N}\varphi(\sigma)=1$ (N – фиксированное целое число). Пусть $(A(\sigma))_{0\leqslant\sigma\leqslant N}$ – стохастические матрицы, такие, что $a_{ij}(\sigma)\geqslant\varepsilon>0$: $1\leqslant i$, $j\leqslant n$; $0\leqslant\sigma\leqslant N$ для некоторого $\varepsilon>0$.

Возьмем последовательность чисел $(\varphi(\tau))_{\tau>N}$, такую, что

$$\sum_{\tau=N+1}^{\infty}\varphi(\tau)=0;\quad \sum_{\tau\in G^+}\varphi(\tau)=\varepsilon/2M,$$

где G^+ – множество целых чисел $\tau>N$, для которых $\varphi(\tau)>0$. Пусть $(A(\tau))_{\tau>N}$ – последовательность матриц, удовлетворяющих следующим условиям:

$${}^tA(\tau)\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1};\qquad \|a_i(\tau)\|<M,$$

где $a_i(\tau)$ означает i-ю строку матрицы. Тогда, если $W=(w(\sigma))$, имеем

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\langle\varphi(\sigma)A(\sigma)w(\sigma);\,\mathbf{1}\rangle=\sum_{\sigma=0}^{N}\varphi(\sigma)\langle A(\sigma)w(\sigma);\,\mathbf{1}\rangle+$$

$$+\sum_{\sigma=N+1}^{\infty}\varphi(\sigma)\langle A(\sigma)w(\sigma);\,\mathbf{1}\rangle=1$$

и, далее,

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\varphi(\sigma)[A(\sigma)w(\sigma)]_i=\sum_{\sigma=0}^{N}\varphi(\sigma)\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sigma)w_j\right]+$$

$$+\sum_{\sigma=N+1}^{\infty}\varphi(\sigma)\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sigma)w_j\right]\geqslant\varepsilon-\sum_{\tau=N+1}^{\infty}|\varphi(\tau)|M\geqslant 0.$$

Таким образом, заключаем, что оператор $\hat{Q}W = \left(\sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi(\sigma) A(\sigma) w(\sigma) \right)$ отображает I в себя, но не имеет формы, требуемой в утверждении 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство утверждения 4. Пусть Φ – линейная форма I, удовлетворяющая условиям положительности, приведенным в данном утверждении. Пусть $W \in I$; тогда можно записать

$$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=-\infty} w_i(\tau) E(\tau, i),$$

где $E(\tau, i)$ – последовательность векторов из R^n $(f(0, i), \ldots f(-k, i), \ldots)$, такая, что $f(\sigma; i) = 0$ при $\sigma \neq \tau$ и $f(\tau, i) = e_i$ (n – вектор со всеми нулевыми компонентами, кроме i-й, которая равна единице). Полагая $\Phi(E(\tau, i)) = u_i(\tau)$, получаем

$$\Phi(W) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=-\infty}^{0} w_i(\tau) u_i(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{0} \langle w(\tau); u(\tau) \rangle.$$

В силу сделанного предположения для произвольного заданного τ_0 и для любого $B \subset \Omega$ $(B \neq \Omega)$ существует последовательность $W = (w(\tau))$ стохастических векторов, такая, что $\chi_B w(\tau) = 0$ при $\tau \neq \tau_0$ и $\chi_B w(\tau_0) = w(\tau_0)$, так что $\Phi(\hat{\chi}_B W) = \langle w(\tau_0), u(\tau_0) \rangle \geqslant 0$.

Допустим, что существуют τ_0 и индекс i, такие, что $u_i(\tau_0) < 0$. Возьмем $B = \{i\}$; тогда $\Phi(\hat{\chi} W) < 0$, что противоречит условию положительности. Следовательно, $u_i(\tau) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$; $\tau = 0, \ldots 1, \ldots$. Далее, если бы существовали $i, j = 1, \ldots n$, такие, что при некотором τ_0, $u_i(\tau_0) < u_j(\tau_0)$, то, выбрав последовательность $W = (w(\tau))$, такую, что $w(\tau_0) = e_i$ и $w(\tau)$ произвольно при $\tau \neq \tau_0$, и последовательность $W' = (w'(\tau))$, такую, что $w(\tau) = w'(\tau)$ $(\tau \neq \tau_0)$ и $w(\tau_0) = e_j$, мы имели бы $1 = \Phi(W) < \Phi(W') = 1$, что абсурдно. Итак, заключаем, что $u(\tau) = \varphi(\tau) \cdot 1$ для всех $\gamma = 0, -1, \ldots$,

где $\varphi(\tau) \geqslant 0$ и $\sum_{\tau=-\infty}^{0} \varphi(\tau) = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство утверждения 5. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Операторы $\hat{\chi}_B$ удовлетворяют условиям (15); в силу определения ω_0 условия положительности и нормировки также удовлетворяются, поскольку $\hat{Q}_t$ отображает I и I_0 в себя; поэтому остается только доказать, что из выполнения условия согласования $\omega_0(\hat{Q}_t A) = \omega_0(A)$ для любых t и A, следует (27).

В силу определения ω_0 это условие равносильно равенству

$$\Phi(\hat{Q}_t A W_0) = \Phi(A W_0),$$

а поскольку A — произвольный линейный оператор, это равенство эквивалентно следующему условию: $\Phi(\hat{Q}_t X) = \Phi(X)$ для любой последовательности векторов $X(x(\tau))$.

Но поскольку $\hat{Q}_t$ и Φ имеют форму, определенную утверждениями (3) и (4) соответственно, то условие согласования эквивалентно такому:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{0} \sum_{\sigma=-\infty}^{0} \psi(\sigma) K_t(\sigma, \tau) \langle 1; x(\tau) \rangle = \sum_{\tau=-\infty}^{0} \psi(\tau) \langle 1; x(\tau) \rangle.$$

В силу произвольности последовательности $X = (x(\tau))$ отсюда следует соотношение (27). Утверждение доказано.

Поступила в редакцию
5 октября 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. «Мир», 1967.
2. *Розоноэр Л. И.* О случайных нейронных сетях. Автоматика и телемеханика, № 5, 1969.
3. *Добрушин Р. Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности. Теория вероятности и ее применения, т. XIII, вып. 2, 1968.

4. *Добрушин Р. Л.* Задание
пределений. Теория ве
5. *Дуб Дж. Л.* Вероятностн
6. *Yoshida K., Kakutani S.* O
ergodic theorem. Ann. Math

ON DESCRIPTION

A class of stochastic p
relation to the problem of p
depends on their history. It
for such processes have all

4. *Добрушин Р. Л.* Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. Теория вероятностей и ее применения, т. XV, вып. 3, 1970.
5. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. Изд-во иностр. лит., 1966.
6. *Yoshida K., Kakutani S.* Operator theoretical treatment of Markov's process and mean ergodic theorem. Ann. Math., v. 42, 1941.

ON DESCRIPTION OF STOCHASTIC OF EVOLUTION DEPENDENT ON THE PAST

L. ACCARDI

A class of stochastic processes generalizing the Markov processes is described in relation to the problem of probabilistic description of dynamic systems whose evolution depends on their history. It is shown that simultaneous probabilistic distributions valid for such processes have all basic properties characteristic of Markov processes.
