Théorème 2. – *Supposons que* $\mathcal{Z}$ *satisfait aux conditions suivantes:*

(8) $$\max_{1\leqq i,\, j\leqq m_n} |\,Z_{ij}^{(n)}\,| \xrightarrow{P} 0;$$

(9) $$\frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{1\leqq i<j\leqq n} (Z_{ij}^{(n)})^2 \xrightarrow{P} 1;$$

(10) $$\lim_{n\to\infty} n\,E\,|\,Z_{12}^{(n)}\,Z_{32}^{(n)}\,| = 0;$$

(11) $$\lim_{n\to\infty} EZ_{12}^{(n)}\,Z_{13}^{(n)} = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} n\,EZ_{12}^{(n)}\,Z_{34}^{(n)} = 0.$$

Alors les sommes $\tilde{W}_n$, $n \geqq 1$, *convergent en distribution vers la loi normale* $\mathcal{N}(0,\,1)$.

Preuve. – Il suffit de vérifier que le système de différences de martingales $(\mathcal{Y},\,\mathbb{H})$ satisfait aux hypothèses suivantes:

(12) $$\begin{cases} \displaystyle\max_{1\leqq k\leqq n} \sqrt{\frac{2}{n\,(n-1)}}\,|\,Y_{nk}\,| \xrightarrow{P} 0; \\ \displaystyle\frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} Y_{nk}^2 \xrightarrow{P} 1; \qquad \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} EY_{nk}^2 \to 1. \end{cases}$$

et le théorème 2 se déduit du lemme 2. Pour démontrer (12), nous utilisons les mêmes techniques que Weber [8].

Corollaire 1. – *Supposons que la suite* $\mathcal{Z}$ *satisfait aux hypothèses* (8), (9) *et* (10) *du théorème* 2, *et de plus que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{m_n} = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} n\,EZ_{12}^{(n)}\,Z_{13}^{(n)} = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} n^2\,EZ_{12}^{(n)}\,Z_{34}^{(n)} = 0.$$

Alors la suite $\sqrt{2/n\,(n-1)} \sum_{1\leqq i<j\leqq n} Z_{ij}^{(n)}$, $n \geqq 1$, *converge en distribution vers la loi normale* $\mathcal{N}(0,\,1)$.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. Andrzej Klopotowski pour l'aide qu'il m'a apportée et ses remarques pertinentes.

Note remise le 1er avril 1994, acceptée le 4 mai 1994.

Références bibliographiques

[1] D. J. Aldous, Representation for partially exchangeable arrays of random variables, *J. Mult. Analysis*, 11, n° 4, 1981, p. 581-598.

[2] M. Beška, A. Klopotowski et L. Slopotowski, Limit theorems for sums of dependent d-dimensional random vectors, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 61, 1982, p. 43-57.

[3] T. Brown et B. Silverman, Short distances, flat triangles and Poisson limits, *J. Appl. Prob.*, 15, 1978, p. 815-825.

[4] G. K. Eagleson, Weak limit theorems for exchangeable random variables, *Exchangeability in Probability and Statistics*, G. Koch et F. Spizzichino éd., North-Holland, Amsterdam, 1982, p. 251-268.

[5] G. K. Eagleson, A Poisson limit theorem for weakly exchangeable events, *J. Appl. Prob.*, 3, 1979, p. 794-802.

[6] G. K. Eagleson et N. C. Weber, Limit theorems for weakly exchangeable arrays, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 84, 1978, p. 123-130.

[7] D. J. Scott, Central limit theorems for martingales and for processes with stationary increments using a Skorokhod reprsentation approach, *Adv. Appl. Prob.*, 5, 1973, p. 119-137.

[8] N. C. Weber, A martingale approach to central limit theorems for exchangeable random variables, *J. Appl. Prob.*, 17, 1980, p. 662-673.

Université Paris-Nord, Institut Galilée, Département de Mathématiques, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse Cedex, France.

Probabilités/*Probability Theory*

Sur les temps moyens de séjour quantiques

Luigi Accardi, Claudio Fernandez, Humberto Prado et Rolando Rebolledo

Résumé – Cette Note étudie une notion de temps de séjour en moyenne pour une dynamique générale sur une C*-algèbre. Le temps moyen de séjour permet notamment de décomposer chaque état en une somme de trois composantes dont l'une est dispersive, la deuxième est un état lié et la troisième un état singulier.

On quantum sojourn times

Abstract – *We introduce the concept of mean sojourn time for a quantum dynamics on a* C*-*algebra. This notion allows any state to be decomposed as a sum of a scattered component, a bound-state and a singular component.*

Cette Note étudie la classification d'une dynamique quantique au moyen du *temps de séjour*, tout en généralisant des notions préalablement introduites par Pearson [4] et Perry [5]. Les temps de séjour quantiques ont été utilisés dans le cadre hilbertien par Fernández et Rebolledo ([2], [3]) et reliés aux notions d'entropie (*voir* également [6]) dans le but de caractériser la résonance quantique.

1. Résultats sur une C*-algèbre. – Un espace de probabilité quantique est un système $(\mathcal{A},\,E)$ où $\mathcal{A}$ est une algèbre munie d'une involution $\star$ et d'une unité 1; E est un état, à savoir, une forme linéaire définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $E\,(a^*\,a) \geqq 0$ pour tout élément $a \in \mathcal{A}$ et $E\,(1) = 1$. Nous notons $\mathcal{S}$ l'espace de tous les états, qui est un convexe compact pour la topologie faible définie comme la moins fine rendant continues toutes les applications $E \mapsto E\,(a)$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$.

Désormais nous nous plaçons dans le cadre suivant. $\mathcal{A}$ est une C*-algèbre, E est alors une forme linéaire continue de norme unité (*voir* [1]). Nous considérons une dynamique quantique caractérisée par un groupe d'automorphismes $(u_t;\ t \in \mathbb{R})$ de $\mathcal{A}$ satisfaisant

$$\begin{aligned} u_t\,(u_s\,(a)) &= u_{t+s}\,(a) \qquad (s,\,t \in \mathbb{R};\ a \in \mathcal{A}) \\ u_0\,(a) &= a; \quad u_t\,(1) = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ u_t^*\,(a) &= u_t\,(a^*) \qquad (t \in \mathbb{R},\ a \in \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Cette dynamique (u_t) sur l'algèbre induit une dynamique image sur les états au moyen de la formule:

(1) $$u_t\,(E)\,(a) = E\,(u_t\,(a^*)) \qquad (t \in \mathbb{R},\ a \in \mathcal{A}).$$

Nous adoptons la notation $\mathcal{A}^+$ pour le cône des éléments positifs de l'algèbre $\mathcal{A}$. Ce cône introduit un ordre sur $\mathcal{A}$ que nous notons simplement par $\leqq$: $a \leqq b$ si et seulement si $b - a \in \mathcal{A}^+$. Soit ensuite $\mathcal{F}$ une famille croissante d'événements ou projections, à savoir, un filtre $(\pi_\alpha;\ \alpha \geqq 0)$ d'éléments de $\mathcal{A}^+$ tel que

(2) $$\pi_\alpha \leqq \pi_\beta \quad \text{si} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \beta$$

(3) $$\pi_\alpha \pi_\beta = \pi_{\alpha\wedge\beta} \qquad (\alpha,\,\beta \geqq 0),$$

Note présentée par Paul-André Meyer.

0764-4442/94/03190723 $ 2.00

et en outre, par convention, nous posons $\pi_0 = 0$. L'élément $1 \in \mathcal{A}$ devient alors un élément maximal du filtre $\mathcal{F}$.

DÉFINITION. – Soient $a \in \mathcal{A}^+$ et E un état. Nous définissons les fonctionnelles

$$s_{\mathrm{T}}(E, a) = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{E}(u_t(a))\, dt = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} u_t(\mathrm{E})(a^*)\, dt \tag{4}$$

$$\overline{\tau}(\mathrm{E}, a) = \limsup_{\mathrm{T}\to\infty} s_{\mathrm{T}}(\mathrm{E}, a), \tag{5}$$

$$\underline{\tau}(\mathrm{E}, a) = \liminf_{\mathrm{T}\to\infty} s_{\mathrm{T}}(\mathrm{E}, a), \tag{6}$$

qui seront appelées **les temps moyen de séjour, supérieur et inférieur** respectivement.

Ces fonctionnelles mesurent le temps passé dans l'état E par le système dynamique partant de a.

PROPOSITION 1. – *Les fonctionnelles $\overline{\tau}$ et $\underline{\tau}$ sont invariantes par l'action de $u = (u_t; t \geqq 0)$ à la fois sur $\mathcal{A}$ et sur $\mathcal{S}$. Par ailleurs, les applications $a \mapsto \overline{\tau}(\mathrm{E}, a)$ et $a \mapsto \underline{\tau}(\mathrm{E}, a)$ sont croissantes pour l'ordre défini par le cône $\mathcal{A}^+$ pour tout état* E.

Par la suite nous étudions $\overline{\tau}$ et $\underline{\tau}$ sur l'espace $\mathcal{S} \times \mathcal{A}^+$ muni du produit de la topologie faible et de la topologie affaiblie, à savoir, la plus fine rendant continues toutes les applications $a \mapsto \mathrm{E}(a)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{S}$.

PROPOSITION 2. – *$\overline{\tau}$ est semi-continue inférieurement et $\underline{\tau}$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{S} \times \mathcal{A}^+$.*

La preuve de la proposition résulte du fait que $(s_{\mathrm{T}}; \mathrm{T} > 0)$ est une famille de fonctions continues sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^+$.

DÉFINITION 2. – Un état E est **$\mathcal{F}$-lié** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\pi_\alpha \in \mathcal{F}$ tel que

$$\overline{\tau}(\mathrm{E}, \pi_\alpha) \geqq 1 - \varepsilon. \tag{7}$$

Un état E est **$\mathcal{F}$-dispersif** si pour tout élément $\pi_\alpha \in \mathcal{F}$ l'on a

$$\overline{\tau}(\mathrm{E}, \pi_\alpha) = 0. \tag{8}$$

Un état E est **$\mathcal{F}$-singulier** *si l'on a*

$$0 < \inf\{\overline{\tau}(\mathrm{E}, \pi_\alpha) : \pi_\alpha \in \mathcal{F}\} < \sup\{\overline{\tau}(\mathrm{E}, \pi_\alpha) : \pi_\alpha \in \mathcal{F}\} < 1. \tag{9}$$

Nous notons $\mathcal{S}_\ell = \mathcal{S}_\ell(\mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_d(\mathcal{F})$, resp. $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s(\mathcal{F})$) l'ensemble des états liés (resp. dispersifs, resp. singuliers), par rapport au filtre $\mathcal{F}$. La décomposition suivante se déduit directement de la définition ci-dessus.

PROPOSITION 3. – *L'espace des états se décompose en la réunion disjointe des états liés, des états dispersifs et des états singuliers relatifs à un filtre $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_l \cup \mathcal{S}_d \cup \mathcal{S}_s.$$

2. LE CADRE HILBERTIEN. – Désormais nous considérons un espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$ dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot, \cdot\rangle$ et l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés définis sur $\mathcal{H}$. La donnée d'un état équivaut à celle d'un opérateur nucléaire ρ, positif et de trace $\mathrm{tr}\,\rho = 1$, de sorte que $\mathrm{E}(a) = \mathrm{tr}\,\rho a$. $\mathcal{S}$ désigne alors l'espace des opérateurs nucléaires positifs de trace unité. Sur cet espace nous considérons à la fois la topologie forte des opérateurs ainsi que la topologie faible rendant continues les applications $a \mapsto \mathrm{tr}\,\rho a$, de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, $(\rho \in \mathcal{S})$. Un état est *pur*, s'il est réduit à une projection $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ dans la direction du vecteur $\varphi \in \mathcal{H}$.

Soit $(e_n; n \geqq 1)$ une base orthonormale de l'espace $\mathcal{H}$. Prenons comme filtre d'événements $\mathcal{F}$ la famille $(\pi_n; n \geqq 1)$, où chaque π_n représente la projection sur l'espace $\mathcal{H}_n$ engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$. C'est-à-dire,

$$\pi_n = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|. \tag{10}$$

Ces projections sont liées à la caractérisation de la convergence faible, comme il a été prouvé dans [2]. En effet, étant donné un ensemble $\mathcal{K}$ d'états, il est faiblement compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément $\pi_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{tr}\,\rho\pi_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, pour tout $\rho \in \mathcal{K}$. Il s'ensuit

COROLLAIRE 1. – *Un état ρ est $\mathcal{F}$-lié si l'ensemble d'orbites $(u_t(\rho); t \in \mathbb{R})$ est faiblement compact.*

Nous notons $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ l'ensemble des états obtenus comme combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{F}$. Une suite $(\rho_n; n \in \mathbb{N})$ est faiblement monotone si $\mathrm{tr}\,\rho\rho_n \leqq \mathrm{tr}\,\rho\rho_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout état ρ. Comme l'espace $\mathcal{H}$ est séparable il s'ensuit :

LEMME 1. – *$\mathcal{S}(\mathcal{F})$ est fortement dense dans l'espace des états $\mathcal{S}$. En outre, si $\rho \in \mathcal{S}$ est limite d'une suite faiblement monotone $(\rho_n; n \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{S}(\mathcal{F})$, alors*

$$\overline{\tau}(\rho, \rho) = \lim_n \overline{\tau}(\rho, \rho_n), \tag{11}$$

De ce lemme découlent les conditions nécessaires suivantes liées à notre classification des états.

PROPOSITION 4. – *Si ρ est un état $\mathcal{F}$-lié, alors $\overline{\tau}(\rho, \rho) = 1$; s'il est $\mathcal{F}$-dispersif, alors $\overline{\tau}(\rho, \rho) = 0$ et finalement, $0 < \overline{\tau}(\rho, \rho) < 1$ si ρ est $\mathcal{F}$-singulier.*

Ce sont les fonctionnelles $\overline{\tau}(\rho, \rho)$, $\underline{\tau}(\rho, \rho)$ qui sont le plus fréquemment utilisées dans l'étude asymptotique de la dynamique quantique. La proposition précédente montre que $\overline{\tau}(\rho, \rho)$ ne fournit pas une caractérisation complète de la décomposition de $\mathcal{S}$ associée à $\mathcal{F}$ (on n'a que des conditions nécessaires pour appartenir aux classes $\mathcal{S}_\ell(\mathcal{F})$, $\mathcal{S}_d(\mathcal{F})$, $\mathcal{S}_s(\mathcal{F})$). Or cette fonctionnelle a le mérite de ne pas dépendre explicitement d'un filtre $\mathcal{F}$. C'est pourquoi nous introduisons la classification plus générale suivante.

DÉFINITION 3. – Un état ρ est **faiblement dispersif** (resp. **faiblement lié, faiblement singulier**) si $\overline{\tau}(\rho, \rho) = 0$ (resp. $\overline{\tau}(\rho, \rho) = 1$, resp. $0 < \overline{\tau}(\rho, \rho) < 1$).

Et l'on obtient le résultat fondamental de cette Note.

THÉORÈME 1. – *Un état ρ est faiblement dispersif (resp. faiblement lié), dès qu'il existe un filtre d'événement $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ soit faiblement dense dans $\mathcal{S}$ et que ρ soit $\mathcal{F}$-dispersif (resp. $\mathcal{F}$-lié).*

Par ailleurs, l'espace des états $\mathcal{S}$ se décompose en la réunion de trois sous-ensembles disjoints : $\mathcal{S}_{\mathrm{fd}}$, l'espace des états faiblements dispersifs ; $\mathcal{S}_{\mathrm{fl}}$ celui des états faiblement liés et $\mathcal{S}_{\mathrm{fs}}$ l'espace des états singuliers.

En effet, le lemme 1 peut être modifié en changeant la densité forte par la densité faible. Le théorème s'ensuit par une application directe du lemme modifié.

Le dernier théorème contient une description complète de la dynamique quantique. En particulier, les classifications des états obtenues dans les travaux de Pearson et Perry correspondent à des cas particuliers obtenus en utilisant deux filtres $\mathcal{F}$ différents. Si bien que les deux visions précédentes sont synthétisées dans le dernier résultat de cette Note.

Cette recherche a reçu l'appui des Programmes de Recherche FONDE-CYT# 1930528, 1930023 ainsi que celui de la *Fundación Andes*.

Note remise le 15 janvier 1994, acceptée le 25 janvier 1994.

Références bibliographiques

[1] J. Dixmier, *Les C* algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[2] C. Fernández et R. Rebolledo, On quantum resonance, Technical Report 92/4, *P. Univ. Católica de Chile, Fac. Math.*, 1992; in *Quantum Prob. and Appl.*, VIII, 1993 (à paraître).

[3] C. Fernández et R. Rebolledo, Sur l'entropie spectrale et la résonance quantique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316, série I, 1993, p. 569-572.

[4] D. B. Pearson, *Quantum Scattering and Spectral theory*, Academic Press, Techniques of Physics, NY, 1988.

[5] P. A. Perry, *Scattering Theory by the Enss method.*, Mathematical Reports, Harwood Academic Publishers, London, 1983.

[6] R. Rebolledo, Entropy Functionals in Quantum Probability, *Aportaciones Mat., Soc. Mat. Mex.*, 1992, 7, 13-36.

L. A. : *Centro Vito Volterra;*

C. F. et R. R. : *Universidad Católica de Chile, Facultad de Matemática, Casilla 306, Santiago 22, Chile;*

H. P. : *Universidad Católica del Norte, Chile.*

Probabilités/*Probability Theory*

On large deviations for diffusion processes under minimal smoothness conditions

Alexandre Veretennikov

Abstract – The large deviation principle is established for a solution of Ito stochastic differential equation with measurable coefficients.

Sur les grandes déviations pour les processus de diffusion sous les conditions minimales de régularité

Résumé – *Le principe de grandes déviations est établi pour des solutions de l'équation stochastique d'Ito à coefficients mesurables.*

Version française abrégée – Cette Note donne des résultats de grandes déviations pour des solutions d'équations différentielles stochastiques sous des hypothèses assez faibles de régularité sur les coefficients. On généralise, en un sens faible, un résultat de Donsker et Varadhan où le coefficient de diffusion est supposé continu.

Considérons l'équation différentielle stochastique au sens d'Ito

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dw_t + b(X_t)\,dt$$

avec une valeur initiale déterministe $X_0 \in E^d$; σ et b sont des fonctions boréliennes, à valeurs dans $\mathbf{R}^{d_1\times d}$ $(d_1 \geqq d)$ et $\mathbf{R}^d$ et $(w_t,\, t \geqq 0)$ est un mouvement brownien d_1-dimensionnel.

On suppose que σ est bornée et localement non dégénérée, c'est-à-dire que pour tout $R > 0$

$$\inf_{|x|\leq R}\ \inf_{|\lambda|=1}\ \lambda^*\,\sigma\sigma^*(x)\,\lambda > 0$$

$\lambda \in E^d$; b est localement bornée et satisfait la condition de stabilité :

$$\lim_{x\to\infty}\sup\,(b(x),\, x/|x|)\,\|\sigma\sigma^*(x)\|^{-1} < 0.$$

Le résultat suivant est une combinaison de résultats de Krylov sur l'existence de solutions faibles et sur la sélection markovienne pour ces équations (*voir* [11] et [12]).

Proposition 1. – *Sous les hypothèses précédentes l'équation différentielle stochastique a une solution sur un certain espace de probabilité, qui est un processus de Markov fort homogène pour la filtration* $(F_t^X,\, t \geqq 0)$.

Soit φ une fonction borélienne de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^l$; on s'intéresse au comportement asymptotique du processus

$$\zeta_t := t^{-1}\int_0^t \varphi(X_s)\,ds, \qquad t \to \infty.$$

Le résultat suivant est une reformulation d'un théorème de [15] ou [17].

Note présentée par Paul-André Meyer.

0764-4442/94/03190727 \$ 2.00 © Académie des Sciences