

Un Modello Statistico di Formazione delle Gocce di Pioggia

Luigi Accardi*
Dimitri Koroliuk*

Gaspare Galati†*
Fabrizio Pacini*

Massimo Regoli*

1. INTRODUZIONE

Scopo di questo lavoro è lo sviluppo di un prototipo di modello matematico-statistico per la descrizione e simulazione di fenomeni piovosi nella loro struttura ed evoluzione spazio-temporale.

Il modello intende fornire un quadro concettuale per l'analisi dei dati associati a osservazioni di campi di precipitazioni nonché un'interpretazione microscopica dei parametri che intervengono in tale analisi. Il processo iniziale nella formazione di nuvole in fase liquida è la condensazione di vapore acqueo in aria in seguito a raffreddamento.

La crescita delle microgocce (diametro $< 0.2mm$) formatesi per condensazione ed il conseguente incremento delle loro velocità relative, genera fenomeni di collisione e agglomerazione e quindi la formazione delle prime gocce di pioggia (raindrops). Con l'aumentare della grandezza delle gocce, queste diventano idrodinamicamente instabili nella caduta libera e soggette di conseguenza a disintegrazione spontanea, la disintegrazione può anche essere indotta da urti tra le gocce stesse.

I fenomeni appena menzionati, insieme ad altri più complessi, rendono possibile, a partire dalle particelle acquee della nuvola, la formazione di gocce di pioggia i cui diametri sono distribuiti secondo una certa legge (drop size distribution *d.s.d.*).

Sarà proposto un modello statistico di formazione delle gocce di pioggia nella nuvola. La simulazione del modello partirà dallo studio del moto delle idrometeore e della loro distribuzione solo dal momento in cui queste abbandonano la nube, prefissando cioè, in accordo con il modello, una forma per la *d.s.d.* sullo strato di formazione delle gocce (*ceiling*).

La schematizzazione è quindi quella di considerare la base inferiore del corpo nuvoloso come un piano S_0 parallelo al terreno, posto ad una certa quota h_0 , dal quale un numero N_{tot} di gocce, eventualmente variabile nel tempo, con una determinata distribuzione dei diametri, iniziano il loro moto di caduta.

Nel corso di tutta l'analisi è necessario distinguere fra due distribuzioni fondamentali:

la drop size distribution (*d.s.d.*) $N_h(D, t)$ e il flusso di gocce $\Phi_h(D, t)$.

La distribuzione $N_h(D, t)$ è tale che $N_h(D, t)dD$ rappresenta il numero di gocce con diametro compreso tra D e $D + dD$ contenute nell'unità di volume a quota h al tempo t . Il flusso $\Phi_h(D, t)dD$ rappresenta invece il numero di gocce con diametro tra D e $D + dD$ che attraversano la superficie unitaria nell'unità di tempo al tempo t , nel piano S_h parallelo ad S_0 alla quota h .

La distribuzione $N_h(D, t)$ non è mai misurata nella realtà; quello che gli studiosi osservano è

$$N(D) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} N_0(D, t) dt \quad (1.1)$$

cioè il numero cumulativo di gocce con diametro tra D e $D + dD$ che arrivano nel volume unitario a terra nell'intervallo di tempo di ampiezza Δt (τ è di solito il tempo ritenuto necessario alla precipitazione per portarsi a regime).

Le dimensioni fisiche di $N_h(D, t)$ sono $[m^{-4}]$ ma spesso si usano i *mm* per i diametri per cui le dimensioni sono $[m^{-3}][mm^{-1}]$, mentre quelle di $\Phi_h(D, t)$ sono $[m^{-2}][mm^{-1}][s^{-1}]$, il che giustifica il nome di flusso.

Il legame tra flusso e *d.s.d.* è

$$\Phi_h(D, t) = N_h(D, t)v_h(D, t) \quad (1.2)$$

essendo $v_h(D, t)$ la velocità, alla quota h e al tempo t , delle particelle di diametro D , [3],[9].

Un importante problema tuttora aperto e di difficile soluzione, vista la vastità e la complessità dei processi che intervengono a determinare le precipitazioni piovose, è quello dello studio del comportamento del flusso $\Phi_h(D, t)$ e della *d.s.d.* $N_h(D, t)$ al variare della quota h e del tempo t .

Una serie di simulazioni di fenomeni convettivi da noi effettuate, relative a diverse forme per la *d.s.d.* sul ceiling ed in assenza dei fenomeni di collisione, agglomerazione e divisione delle gocce, hanno mostrato che, in regime dinamico, si riscontrano differenze a volte molto significative tra le distribuzioni delle gocce rilevate a quote differenti. In tutti i casi analizzati si riscontra, contrariamente a quanto riportato usualmente nella letteratura, che il flusso $\Phi_h(D, t)$ e conseguentemente la *d.s.d.* $N_h(D, t)$ dipendono dalla quota h , salvo che a regime.

Il raggiungimento del regime stazionario in tal senso richiede infatti tempi che sono, in generale, prossimi o addirittura superiori alla durata complessiva di molti tipi di precipitazione (si vedano le fig. 3.1, 3.2, 3.3). Partendo da questo presupposto, nelle sezioni a seguire cercheremo di studiare l'andamento e le variazioni della *d.s.d.* dovuti ai più importanti fenomeni che hanno luogo durante la precipitazione.

Lista dei principali simboli

- D : diametro delle gocce
- $E\{\xi\}$: valore atteso di ξ
- $f_{\xi}(x)$: densità di probabilità della variabile aleatoria ξ
- h : altezza sul livello del mare
- m : massa della goccia ($= \frac{\pi}{6} \rho D^3$)
- s : variabile di Laplace
- x : variabile corrente
- α : parametro di forma
- λ : parametro di scala
- $\chi_{[a,b]}(x)$: funzione unitaria in $[a, b]$ e nulla altrove
- $\Phi_{\xi}(s)$: funzione generatrice dei momenti della variabile aleatoria ξ .

*Centro Vito Volterra, Università di Roma Tor Vergata

†Dip. Ing. Elettronica, Università di Roma Tor Vergata

2. MODELLISTICA

2.1 Collisione ed Agglomerazione tra gocce

In questo paragrafo si descrivono, in maniera molto schematica, i fenomeni che influenzano la distribuzione dei diametri delle gocce di pioggia.

Le particelle d'acqua presenti nella nuvola si formano principalmente mediante condensazione e deposito di vapore acqueo su nuclei di condensazione, con diametri dell'ordine dei $10\mu m$.

Durante una prima fase di crescita, le velocità terminali di caduta delle particelle sono trascurabili e il loro incremento di massa, dovuto solamente alla condensazione di vapore acqueo è quindi lento. Particelle di dimensioni al di sotto di un diametro limite, dipendente dal grado di soprassaturazione del vapore, evaporano.

Gradualmente le velocità di caduta aumentano fino al punto in cui la crescita risulta dovuta principalmente all'agglomerazione di particelle più piccole con particelle più grosse a causa delle collisioni dovute alla differenza tra le loro velocità terminali.

La soglia tra elementi liquidi della nuvola e particelle della precipitazione (raindrops) è fissato convenzionalmente al valore del diametro di circa $200\mu m$. Questo valore corrisponde ad una velocità di caduta di $0.75m/s$, [3].

Successivamente le gocce di pioggia, che hanno dimensioni più grandi e maggiori velocità relative, sono ancora soggette a collisioni e conseguenti agglomerazioni che portano alla formazione di gocce di nuove dimensioni determinando una variazione della *d.s.d.* $N_h(D, t)$.

Lo scopo di questa sezione è quello di calcolare il numero di collisioni tra gocce che hanno luogo nell'unità di volume e di tempo in modo di poter tenere conto di questo fenomeno nello studio della evoluzione della *d.s.d.*

La schematizzazione per il processo di collisione scaturisce da semplici considerazioni fisiche [1].

Nella modellizzazione conviene riferirsi alle masse delle gocce, anziché ai diametri, poiché queste sono additive a differenza dei diametri. Postulando (in prima approssimazione, cfr. §(2.2)) una forma sferica delle gocce e una densità costante all'interno di esse, ciascuno dei due parametri determina l'altro univocamente (cfr. Appendice B). Supponiamo di avere due gocce di masse m e m' con $m > m'$ rispettivamente, diametri corrispondenti D_m e $D_{m'}$ e velocità $v(m) > v(m')$.

Diremo che avrà luogo un urto tra le due gocce nell'intervallo di tempo di ampiezza Δt se il centro della goccia con massa più piccola si trova nel cilindro con asse verticale ed altezza pari a $[v(m) - v(m')]\Delta t$; la base superiore del cilindro è alla quota della goccia con massa maggiore e il diametro è pari alla somma dei diametri delle due gocce. In altre parole se chiamiamo $V_{m,m'}$ il volume di questo cilindro, allora risulta

$$V_{m,m'} = \frac{\pi}{4}(D_m + D_{m'})^2(v(m) - v(m'))\Delta t \quad (2.1)$$

dove $v(m)$ e $v(m')$ sono le velocità delle gocce.

Quindi se $N_h(m, t)dm$ è la concentrazione di gocce di massa compresa tra m e $m + dm$ nell'unità di volume a quota h e al tempo t , abbiamo che nell'unità di volume, nel periodo Δt avrà luogo un numero di urti tra gocce con masse negli intervalli $m, m + dm$ e $m', m' + dm'$ pari a

$$\frac{\pi}{4}(D_m + D_{m'})^2(v(m) - v(m'))N_h(m, t)N_h(m', t)dmdm'\Delta t \quad m > m'$$

Dato poi che le gocce con massa m sono urtate da gocce di massa $m' > m$ dando luogo a collisioni con tasso

$$\frac{\pi}{4}(D_m + D_{m'})^2(v(m') - v(m))N_h(m, t)N_h(m', t)dmdm'\Delta t \quad m' > m$$

il tasso totale di urti nell'unità di tempo e di volume a quota h tra gocce di massa compresa tra m e $m + dm$ e m' e $m' + dm'$ è rappresentato dalla seguente formula

$$N_{coll}(m, m') = \frac{\pi}{4}(D_m + D_{m'})^2 |v(m) - v(m')| N_h(m, t)N_h(m', t)dmdm' \quad (2.2)$$

Introducendo la notazione

$$K(m, m') = \frac{\pi}{4}(D_m + D_{m'})^2 |v(m) - v(m')| \quad (2.3)$$

possiamo riscrivere l'espressione (2.2) come segue

$$N_{coll}(m, m') = K(m, m')N_h(m, t)N_h(m', t)dmdm'$$

Il nucleo $K(m, m')$ è una funzione positiva e simmetrica dei suoi argomenti, esso eguaglia la probabilità di collisione nell'unità di tempo e di volume tra una goccia di massa m' e una di massa m .

Il processo di collisione tra gocce risulta così trattabile; è importante ora studiare in dettaglio ciò che avviene alle due gocce che vengono a scontrarsi. Una volta modellati i fenomeni di aggregazione e divisione potremo scrivere le equazioni che governano l'evoluzione della *d.s.d.* $N_h(m, t)$.

Non sempre una collisione comporta una unione delle gocce: ci può essere, viceversa, un urto elastico. Nel seguito supporremo che per effetto elettrostatico, le gocce che urtano si uniscano, almeno per un istante.

2.2 Divisione delle gocce per cause aerodinamiche

Nella nuvola e nella precipitazione, solo le gocce piccole sono sferiche; le altre possono allontanarsi dalla sfericità, talvolta in modo importante.

La forma delle gocce è determinata dalla gravità, dalla tensione superficiale e dalle forze aerodinamiche. Con la crescita delle loro dimensioni e quindi delle loro velocità, le gocce, di raggio r , perdono la loro forma sferica (valida all'incirca per $r < 0.2mm$) e assumono dapprima la forma di un ellissoide oblatto, poi per $500 < r \leq 2000\mu m$ sono deformate in uno sferoide asimmetrico schiacciato ai poli con base piatta sempre più pronunciata al crescere della dimensioni e per $r \geq 2000\mu m$ presentano una depressione concava nella base [5].

La rottura delle idrometeore ha luogo quando le forze superficiali di tensione non sono più sufficienti a mantenere la coesione.

Si rende necessario quindi associare la nozione di tempo di vita a quella di dimensione della goccia. Le gocce grandi hanno ovviamente una vita breve. La grandezza limite sembra essere intorno ad un equivalente sferico di diametro compreso tra $6mm$ e $10mm$.

Per la descrizione del processo di divisione delle gocce dobbiamo introdurre due funzioni:

- la probabilità di disintegrazione $P(m, \Delta t)$
- la distribuzione delle masse dei frammenti risultanti $Q(m | m_0)$

$P(m, \Delta t)$ rappresenta la probabilità che una goccia di massa m si disintegri nell'intervallo di tempo Δt . Ovviamente, viste le considerazioni sulla deformazione delle gocce al crescere del diametro e conseguentemente della massa, la funzione $P(m, \Delta t)$ risulta essere una funzione crescente di m e di Δt .

La distribuzione delle masse dei frammenti risultanti $Q(m | m_0)$, dove m_0 indica la massa della goccia che si disintegra, è invece tale che $Q(m | m_0)dm$ è il numero di gocce di massa compresa tra m e $m + dm$ formati in seguito alla rottura di una goccia di massa m_0 .

Per ovvie ragioni la $Q(m | m_0)$ deve soddisfare la condizione

$$Q(m | m_0) = 0 \quad , \quad m > m_0 \quad (2.4)$$

ed inoltre deve fornire, per ogni valore di m_0 , un numero finito di frammenti; in altri termini

$$\int_0^{m_0} Q(m | m_0) dm < \infty, \quad \forall m_0 \in [0, M_{max}]$$

dove M_{max} è il massimo valore assumibile dalla massa delle gocce che possiamo fissare intorno ai 520mg corrispondenti ad un diametro di circa 10mm.

Un'altra condizione su $Q(m | m_0)$ è quella della conservazione della massa e cioè la somma delle masse dei frammenti risultanti da una disintegrazione, deve uguagliare la massa della goccia iniziale:

$$m_0 = \int_0^{m_0} m Q(m | m_0) dm \quad (2.5)$$

La distribuzione $Q(m | m_0)$, normalizzata a 1 viene interpretata come la densità di probabilità delle masse dei frammenti condizionata al valore m_0 della massa della goccia iniziale:

$$q(m | m_0) = \frac{Q(m | m_0)}{\int_0^{m_0} Q(m | m_0) dm}$$

Per le funzioni P e Q utilizzeremo nel modello simulativo sia le forme suggerite da Srivastava [1] e Komabayasi [8] che quelle dedotte dal nostro modello teorico.

2.3 Divisione delle gocce indotta da collisione

Un importante fenomeno che interviene a modificare nel tempo la *d.s.d.* è la divisione indotta da collisione.

Il risultato degli urti tra le gocce durante il loro moto di caduta, non è infatti sempre la agglomerazione di queste, ma può essere la frammentazione delle due idrometeore venute a contatto. Si rende necessaria quindi l'introduzione nel seguito dei concetti di *efficienza di agglomerazione* ed *efficienza di collisione* che rappresentano il primo la probabilità di unione delle gocce una volta verificatosi una collisione ed il secondo la probabilità che abbia luogo un urto una volta che le due gocce si trovano nel cilindro di volume $V_{m,m'}$ descritto nella sezione (2.2).

Esperimenti di McTaggart-Cowan-List(1975) [15] portano alla conclusione che per le gocce gli effetti inerziali sono grandi abbastanza da prevenire il fatto che la goccia più piccola sia deviata notevolmente dal flusso intorno alla goccia più grande. Le traiettorie sono essenzialmente linee rette per queste gocce, così il valore per l'efficienza di collisione $F(m_1, m_2) = 1$ è appropriato. Pertanto da qui in avanti l'efficienza di collisione sarà ritenuta unitaria.

Il riconoscimento del fatto che il meccanismo di frammentazione delle gocce non è prettamente dovuto alla instabilità aerodinamica di alcune classi di gocce è da attribuire agli studi sperimentali di Pruppacher-Pitter (1971)[10] e teorici di Klett(1971) [11] che mostrarono che gocce con diametro sferico equivalente di 10mm non sempre sono disintegrate aerodinamicamente contrariamente a quanto affermavano numerosi ricercatori nello stesso periodo tra i quali Srivastava [1].

Quindi come proposto in origine da Magarvey-Taylor (1956) [12] e mostrato da McTaggart-Cowan-List(1975) [15] il fenomeno di rottura indotta da collisione di gocce, con altre di dimensioni inferiori, è da considerarsi come un meccanismo chiave nella limitazione delle dimensioni delle gocce. Cowan-List affermano addirittura che in molti casi (ad esempio negli scontri tra gocce di diametro 3 ÷ 5mm e diametro $\geq 1mm$) l'agglomerazione è un fenomeno raro e di conseguenza l'efficienza di agglomerazione deve essere molto inferiore ad 1 a differenza del valore unitario usualmente adottato.

Se chiamiamo $P_{sp}(m_1, m_2)$ la probabilità che la collisione tra una goccia di massa m_1 e una di massa m_2 dia origine alla frammentazione delle due, la efficienza di agglomerazione $E(m_1, m_2)$ è definita dalla relazione

$$E(m_1, m_2) = 1 - P_{sp}(m_1, m_2)$$

Per questo motivo, nel seguito, invece che all'efficienza di agglomerazione, ci riferiremo alla probabilità di divisione in seguito a collisione. Infatti nell'ipotesi che uno scontro possa dar luogo solo a due risultati: l'unione delle gocce o la disintegrazione delle due, le grandezze *efficienza di agglomerazione* e *probabilità di rottura* sono strettamente legate.

Purtroppo anche se la probabilità $P_{sp}(m_1, m_2)$ è stata oggetto di numerosi studi, non si trova tuttora nella letteratura una forma per essa che sia pienamente giustificata da considerazioni fisiche, e se molto spesso i dati provenienti da osservazioni sperimentali sono stati di notevole aiuto nella modellizzazione, risulta invece complicato ottenere dati statisticamente significativi su questo fenomeno proprio per la difficoltà riscontrata nell'osservarlo.

List-Gillespie(1976)[2], ad esempio, propongono una forma empirica per P_{sp} , che però oltre al difetto di mal prestarsi all'utilizzo in un modello di simulazione non è attendibile in quanto dedotta da campioni di dati troppo limitati. L'informazione consisteva infatti della registrazione di fotografie ad alta velocità di numerose centinaia di collisioni di paia di gocce in caduta approssimativamente verticale alla corretta velocità terminale; tali misure sono state però effettuate solo per cinque prefissate coppie di valori di masse delle gocce.

L'altra grandezza necessaria alla descrizione del processo di divisione indotta da collisione è la distribuzione dei frammenti originati dalla rottura delle gocce.

Dovremo pertanto introdurre la distribuzione dei frammenti $Q_{sp}(m | m_1, m_2)$ dove $Q_{sp}(m | m_1, m_2) dm$ rappresenta il numero di gocce con massa nel range $m, m + dm$ che hanno origine dall'urto e successiva rottura di due gocce con masse iniziali comprese tra m_1 e $m_1 + dm_1$ e m_2 e $m_2 + dm_2$ rispettivamente. È importante sottolineare che Q_{sp} è una probabilità condizionata al fatto che sia avvenuta una collisione. Ovviamente questa funzione (che, normalizzata a 1, si interpreta come la densità di probabilità delle masse dei frammenti) deve:

- (i) risultare troncata ad $m_{max} = \max(m_1, m_2)$ (si vedrà più avanti che sotto opportune ipotesi è lecito troncarsi a $m_1 + m_2$);
 - (ii) soddisfare la condizione di dare in ogni caso un numero finito di particelle risultanti da una divisione in seguito ad urto;
 - (iii) rispettare il principio di conservazione della massa.
- Abbiamo quindi rispettivamente le relazioni

$$Q_{sp}(m | m_1, m_2) = 0, \quad m > m_{max}$$

$$\int_0^{m_{max}} Q_{sp}(m | m_1, m_2) dm < \infty, \quad \forall m_1, m_2$$

$$\int_0^{m_{max}} m Q_{sp}(m | m_1, m_2) dm = m_1 + m_2 \quad (2.6)$$

Essendo per i motivi già citati anche per questa funzione tuttora molto scarse le informazioni disponibili, nella costruzione del modello di simulazione utilizzeremo diverse forme per questa distribuzione, alcune tratte dagli articoli di Srivastava [1] e List-Gillespie [2] opportunamente modificate, altre da noi proposte, allo scopo di confrontarne i risultati e verificarne successivamente la coerenza con i dati ottenuti da misurazioni reali.

2.4 Evoluzione della *d.s.d.* in condizioni di Collisione, Divisione e Agglomerazione delle gocce

Siamo a questo punto in possesso di tutto il materiale teorico per poter scrivere l'equazione che governa l'evoluzione nel tempo della *d.s.d.* $N_h(m, t)$ sotto l'azione dei processi di agglomerazione, divisione indotta da collisione e divisione per cause aerodinamiche, partendo dai risultati di [1].

Supponendo l'assenza dei fenomeni di evaporazione e condensazione ed efficienza di collisione unitaria, la suddetta equazione assume la seguente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_h(m, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^m N_h(m', t) N_h(m - m', t) K(m', m - m') (1 - P_{sp}(m', m - m')) dm' + \\ & - N_h(m, t) \int_0^\infty N_h(m', t) K(m, m') (1 - P_{sp}(m, m')) dm' + \\ & - N_h(m, t) P(m, dt) + \int_m^\infty N_h(m', t) Q(m | m') P(m', dt) dm' + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\{m_1 + m_2 \geq m\}} N_h(m_1, t) N_h(m_2, t) K(m_1, m_2) P_{sp}(m_1, m_2) Q_{sp}(m | m_1, m_2) dm_1 dm_2 + \\ & - N_h(m, t) \int_0^\infty N_h(m', t) K(m, m') P_{sp}(m, m') dm' \quad (2.7) \end{aligned}$$

Analizziamo ora ogni termine del membro destro di (2.7) in modo da spiegare il significato dei vari addendi e dare quindi una giustificazione alla equazione di evoluzione.

Il primo termine rappresenta il guadagno in concentrazione di gocce per unità di volume dovuta al fenomeno di collisione e agglomerazione, infatti

$N_h(m', t) N_h(m - m', t) K(m', m - m')$ fornisce il numero di urti che avvengono nell'unità di volume tra gocce con masse nei range $m - m', m - m' + d(m - m')$ e $m', m' + dm'$ che moltiplicati per l'efficienza di agglomerazione $1 - P_{sp}(m', m - m')$ danno proprio il numero di gocce con massa compresa tra m e $m + dm$ formatesi in seguito ad unioni di gocce più piccole.

Il secondo addendo in (2.7) tiene conto invece, per le stesse argomentazioni del precedente, della perdita di gocce di massa tra m e $m + dm$ dovuta all'unione di queste ultime con altre gocce.

La quantità $N_h(m, t) P(m, dt)$ dà il numero di gocce di massa tra m e $m + dm$ che si disintegrano a causa della loro instabilità aerodinamica e quindi la diminuzione di questa classe di gocce, mentre il successivo integrale rappresenta, visto il significato delle funzioni P e Q , l'aumento del numero di gocce con massa nel range $m, m + dm$ dovuto alla formazione di queste ultime in seguito alla disintegrazione di gocce più grandi.

Gli ultimi due termini del membro destro dell'equazione (2.7) sono associati al fenomeno di divisione indotta da collisione. I frammenti con massa nella classe $m, m + dm$ che si formano in seguito alla collisione e susseguente rottura di gocce la cui somma delle masse supera m sono infatti tenuti in conto dal primo dei due integrali, mentre il numero di particelle di massa $m, m + dm$ che si frammentano per urti è rappresentato dalla seconda espressione.

Una volta specificata la condizione iniziale $N_h(m, t = 0) = N_{h,0}(m)$ la (2.7) può essere usata per calcolare la evoluzione della *d.s.d.*; $N_{h,0}(m)$ è ovviamente una funzione assegnata rappresentante la distribuzione delle gocce all'istante iniziale.

Per le condizioni necessarie ad assicurare l'esistenza ed unicità della soluzione di questa equazione ci si può riferire al lavoro di Melzak(1957)[6] che studiò equazioni di questo tipo (equazioni del trasporto scalari). Brevemente, le condizioni su $N_{h,0}, K, P, Q, P_{sp}, Q_{sp}$ sono soddisfatte se queste sono funzioni non negative e continue, come dovrebbero essere per ragioni fisiche.

2.5 Modello Simulativo

Non risulta esistere una soluzione in forma chiusa della (2.7), pertanto occorre procedere ad una simulazione vera e propria. A tal fine occorre cercare di dare una forma esplicita a tutte le distribuzioni

e funzioni finora introdotte ma trattate solo dal punto di vista qualitativo, ed inoltre occorre porle in una forma che ben si presti alla implementazione su elaboratore.

Vista la grande difficoltà riscontrata nel reperire in letteratura modelli che siano affidabili, completi e che forniscano dati e comportamenti significativi provenienti da osservazioni, non ci riferiremo ad un lavoro in particolare ma proporremo diverse alternative per la modellizzazione della pioggia con il fine di confrontarne poi i risultati.

I lavori dai quali prendiamo spunto e che abbiamo analizzato più a fondo sono quelli di Srivastava[1], List-Gillespie[2] e l'approccio descritto nella sezione 2.8 del presente lavoro.

Srivastava[1] tratta in dettaglio i fenomeni di agglomerazione e divisione delle gocce per cause aerodinamiche trascurando completamente la divisione indotta da collisione che pure è un meccanismo chiave nella evoluzione della *d.s.d.*, List-Gillespie[2] fanno esattamente il contrario, cioè non tengono conto del processo di rottura delle gocce dovuto ad instabilità aerodinamica di queste affermando l'improbabile fatto di aver osservato che gocce di diametro di circa 15mm non si disintegrano per cause aerodinamiche durante la loro caduta ponendosi in completo disaccordo con un gran numero di studi precedenti a tal proposito (si veda ad esempio Sauvageout[4]).

Nella costruzione dei modelli di simulazione che seguono, abbiamo cercato di utilizzare le idee che ci sono sembrate più soddisfacenti dei lavori sopra menzionati e, dove ciò non è stato possibile abbiamo proposto delle soluzioni da noi pensate.

2.6 Modello Fisico 1

Come già accennato nelle precedenti sezioni, i processi determinanti nella evoluzione della distribuzione delle masse delle gocce sono la collisione, agglomerazione, divisione per urti e per cause aerodinamiche. A parte il meccanismo di collisione, che segue lo schema esposto nella sezione 2.1, per descrivere i rimanenti fenomeni sarà necessaria la specificazione delle seguenti grandezze:

- la probabilità di divisione per instabilità aerodinamica: $P(m, \Delta t)$
- la probabilità di divisione indotta da collisione: $P_{sp}(m_1, m_2)$
- le distribuzioni dei frammenti risultanti nei due casi di divisione: $Q(m | m_0), Q_{sp}(m | m_1, m_2)$.

In questo primo modello tenteremo di utilizzare il più possibile le soluzioni suggerite da Srivastava nel suo articolo [1].

Le funzioni $P(m, \Delta t)$ e $Q(m | m_0)$ possono essere determinate dagli esperimenti. La disintegrazione di gocce di grosse dimensioni è stata studiata sperimentalmente da Blanchard(1950), Fournier d'Albe e Hidayetulla(1955), e Komabayasi(1964) tra gli altri.

Assumendo per la probabilità P una forma del tipo

$$P(m, \Delta t) = p(D_m) \Delta t$$

dove D_m è il diametro della goccia di massa m , per la funzione $p(D_m)$ associata alla probabilità di divisione *spontanea*, gli autori appena citati suggeriscono l'espressione

$$p(D_m) = 2.94 \cdot 10^{-7} \cdot e^{1.7 D_m} \quad [sec^{-1}] \quad (2.8)$$

Ovviamente p deve avere le dimensioni di sec^{-1} e da qui in avanti i diametri e le masse delle gocce avranno le dimensioni di mm e mg rispettivamente.

Con $p(D_m)$ come in (2.8), denotando con $P(D_m, \Delta t)$ la probabilità di disintegrazione della goccia di diametro D_m nel tempo Δt abbiamo

$$P(D_m, \Delta t) = \begin{cases} 2.94 \cdot 10^{-7} e^{1.7 D_m} \Delta t, & D_m < p^{-1}(1/\Delta t) \\ 1, & D_m \geq p^{-1}(1/\Delta t) \end{cases} \quad (2.9)$$

È immediato verificare che $P(D_m, \Delta t)$ è una funzione positiva e crescente dei suoi argomenti e come ovvio è sempre minore o uguale ad 1.

La funzione $p(D_m)$ riferita esplicitamente alla massa m assume la forma

$$p(m) = 2.94 \cdot 10^{-7} e^{2.1m^{1/3}} \quad [\text{sec}^{-1}] \quad (2.10)$$

È importante notare che in questo schema per le gocce con diametro $D_m \geq 4mm$ si ha la sicurezza della disintegrazione in un tempo pari ad 1 secondo.

Nel modello proposto da Srivastava [1] la distribuzione dei frammenti risultanti dalla divisione per cause aerodinamiche è:

$$Q(D_m | D_0) = \frac{ab}{D_0} e^{-b \frac{D_m}{D_0}} \chi_{[0, D_0]}(D_m) \quad (2.11)$$

dove a e b sono delle costanti da determinare con l'aiuto delle osservazioni e $Q(D_m | D_0)dD_m$ è appunto il numero di gocce con diametro nel range $D_m, D_m + dD_m$ originate dalla rottura di una goccia di diametro D_0 . Si nota immediatamente che $Q(D_m | D_0)$ è una funzione troncata a $D = D_0$. La (2.11), per uniformità con le precedenti sezioni, può essere anche scritta in termini delle masse m_0, m ($m = \frac{\pi}{6} D_m^3$) delle gocce di diametro D_0 e D_m rispettivamente, come segue

$$\begin{aligned} Q(m | m_0) &= Q(D_m | D_0) \frac{dD_m}{dm} = \\ &= \frac{ab}{3m} \frac{D_m}{D_0} e^{-b \frac{D_m}{D_0}} = \frac{ab}{3m} \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-b \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Visto il suo significato, la distribuzione $Q(D_m | D_0)$ se opportunamente normalizzata rappresenta la densità di probabilità $q(D_m | D_0)$ della variabile casuale diametro dei frammenti condizionata al fatto che la goccia di partenza abbia diametro D_0 ; in particolare abbiamo

$$\begin{aligned} q(D_m | D_0) &= \frac{Q(D_m | D_0)}{\int_0^{D_0} Q(D_m | D_0) dD_m} = \\ &= \frac{ab}{D_0} e^{-b \left(\frac{D_m}{D_0}\right)} \chi_{[0, D_0]}(D_m) / a(1 - e^{-b}) = \frac{b}{D_0} e^{-b \left(\frac{D_m}{D_0}\right)} \chi_{[0, D_0]}(D_m) / (1 - e^{-b}) \end{aligned}$$

Il numero di frammenti risultanti dalla divisione della generica goccia di diametro D_0 è invece espresso da

$$\int_0^{D_0} Q(D_m | D_0) dD_m = a(1 - e^{-b})$$

che come si può vedere risulta essere indipendente dal diametro di partenza D_0 .

Le costanti a e b possono essere espresse l'una in funzione dell'altra mediante l'imposizione della conservazione della massa (sezione 2.2), infatti da

$$\begin{aligned} D_0^3 &= \frac{ab}{D_0} \int_0^{D_0} D_m^3 e^{-b \left(\frac{D_m}{D_0}\right)} dD_m = \\ &= \frac{ab}{D_0} \left[e^{-b \left(\frac{D_m}{D_0}\right)} \left(-\frac{D_0 D_m^3}{b} - \frac{3D_0^2 D_m^2}{b^2} - \frac{6D_0^3 D_m}{b^3} - \frac{6D_0^4}{b^4} \right) \right]_0^{D_0} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{b^3}{6 - e^{-b}(b^3 + 3b^2 + 6b + 6)} \quad (2.13)$$

Dati raccolti da numerose misurazioni (Komabayasi[8]) sembrano essere ben rappresentati ponendo $b = 7$ che sostituito in (2.13) da $a = 62.3$.

Nel nostro modello utilizziamo una distribuzione dei diametri dei frammenti leggermente diversa. Semplicemente tronchiamo la funzione $Q(D_m | D_0)$ in (2.11) oltre che a $D_m = D_0$ anche inferiormente a $D_m = 0.1 \div 0.2mm$ onde evitare la formazione, nella disintegrazione, di frammenti di dimensioni al di sotto della soglia di distinzione tra elementi delle precipitazione e elementi della nuvola (vedi sezione 2.1) visto che ci stiamo occupando del moto delle gocce solo dal momento in cui queste abbandonano il corpo nuvoloso.

Indicando con δ_0 il punto di troncamento inferiore, qui posto uguale a $0.1mm$, la nuova distribuzione sarà pertanto

$$Q_1(D_m | D_0) = \frac{ab}{D_0} e^{-b \frac{D_m}{D_0}} \chi_{[\delta_0, D_0]}(D_m) \quad (2.14)$$

Imponendo ancora la conservazione della massa

$$D_0^3 = \int_0^{D_0} D_m^3 Q_1(D_m | D_0) dD_m = \int_{\delta_0}^{D_0} D_m^3 Q(D_m | D_0) dD_m$$

si ottiene per le costanti a e b il legame

$$\frac{1}{a} = e^{-b \frac{\delta_0}{D_0}} \left(\frac{\delta_0^3}{D_0^3} + \frac{3\delta_0^2}{D_0^2 b} + \frac{6\delta_0}{D_0 b^2} + \frac{6}{b^3} \right) - e^{-b} \left(1 + \frac{3}{b} + \frac{6}{b^2} + \frac{6}{b^3} \right) \quad (2.15)$$

Come si vede, anche in questo caso, fissando il valore di b (sempre da osservazioni sperimentali) è molto semplice calcolare a , che però a differenza del caso precedente risulta essere dipendente da D_0 così come il numero di frammenti risultanti dalla disintegrazione di una goccia che è pari a

$$\int_{\delta_0}^{D_0} \frac{ab}{D_0} e^{-b \left(\frac{D_m}{D_0}\right)} dD_m = a(e^{-b \left(\frac{\delta_0}{D_0}\right)} - e^{-b}) \quad (2.16)$$

Anche per la descrizione della divisione in seguito ad urti abbiamo bisogno di introdurre le funzioni probabilità di spezzamento e distribuzione dei frammenti e cioè le P_{sp} e Q_{sp} di cui abbiamo parlato nella sezione 2.3.

In mancanza di adeguati modelli attualmente in letteratura, si è proceduto come segue:

Si suppone che sia $P_{sp}(m_1, m_2)$ - probabilità che la collisione tra una goccia di diametro m_1 e una di diametro m_2 dia origine alla frammentazione delle due - sia $Q_{sp}(m | m_1, m_2)$ - numero di frammenti di massa $m, m + dm$ originati dall'urto e rottura di due gocce di masse m_1 e m_2 - dipendano dalle due masse solo attraverso la loro somma $m_1 + m_2$; poi si introducono delle forme esplicite per tali distribuzioni basate su considerazioni fenomenologiche.

Per esempio, per la probabilità di divisione in seguito a collisione, la forma da noi usata è:

$$P_{sp}(m_1, m_2) = \begin{cases} 2.94 \cdot 10^{-7} e^{2.1(m_1+m_2)^{\frac{1}{3}}} \Delta T, & m_1 + m_2 < p^{-1}(1/\Delta T) \\ 1, & m_1 + m_2 \geq p^{-1}(1/\Delta T) \end{cases} \quad (2.17)$$

dove $p(m)$ è data da (2.10). Per fissare il parametro ΔT si è imposta una probabilità di spezzamento di 0.75, nel tempo ΔT , di una goccia di diametro uguale a $3mm$:

$$P(3, \Delta T) = 2.94 \cdot 10^{-7} e^{1.7 \cdot 3} \Delta T = 0.75$$

in cui $P(\cdot, \cdot)$ è la funzione (2.9).

In tal modo la probabilità di agglomerazione è molto bassa (inferiore 0.25) per gocce la cui unione da origine ad una particella di diametro superiore ai 3mm, così come risulta dalle osservazioni dove si riscontra che il fenomeno di divisione indotta da collisione raramente permette alle gocce di raggiungere dimensioni superiori ai 2.5 ÷ 3mm di diametro (vedi List-Gillespie[2]).

La forma (2.17) qui assunta per la probabilità di spezzamento per urti P_{sp} è ricavata direttamente dalla (2.10) che rappresenta la probabilità di divisione per cause aerodinamiche. Ciò è motivato dalle seguenti considerazioni: postuliamo che, in seguito ad ogni collisione tra gocce ci sia un istante infinitesimo durante il quale queste risultino agglomerate in una sola goccia; conseguentemente la eventuale rottura di questa, avviene con una probabilità P_{sp} che deve avere forma simile alla probabilità di divisione per cause aerodinamiche. Nello stesso schema, anche la frammentazione avrà luogo nelle stesse modalità del caso della divisione spontanea e cioè con una distribuzione del tipo $Q(m | m_0)$ data da (2.12). In pratica poniamo

$$Q_{sp}(m | m_1, m_2) = Q(m | m_1 + m_2)$$

oppure ponendo $D_0 = (D_1^3 + D_2^3)^{\frac{1}{3}}$ dove D_1 e D_2 sono i diametri delle gocce di massa m_1 e m_2 rispettivamente

$$Q_{sp}(D_m | D_1, D_2) = Q(D_m | (D_1^3 + D_2^3)^{\frac{1}{3}}) = \frac{ab}{D_0} e^{-b(\frac{D_m}{D_0})} \chi_{[\delta_0, D_0]}(D_m) \quad (2.18)$$

Le variazioni rispetto alla distribuzione dei frammenti utilizzata nel caso della divisione spontanea, sono nel troncamento di questa a $\delta_0 = 0.5mm$ in quanto ad esempio List-Gillespie[2] affermano che in numerose osservazioni sperimentali di divisioni di gocce in seguito ad urti, non si registrano frammenti di dimensioni inferiori a 0.5mm, e nell'aggiornamento del valore della costante b che viene ora presa uguale 5.5 in modo da ottenere un numero di frammenti, dato da (2.16), che si mantiene, qualunque siano le dimensioni delle gocce che si scontrano, inferiore a 25. Ovviamente il valore di a è ottenuto ancora imponendo la legge di conservazione della massa, e cioè utilizzando la (2.15).

La scelta delle distribuzioni P_{sp} e Q_{sp} appena esposte, è criticabile soprattutto per il fatto che queste dipendono dalle masse delle gocce solo attraverso la loro somma senza tenere conto che la divisione indotta da collisione può dipendere fortemente dal rapporto di grandezza tra le dimensioni delle singole particelle collidenti.

2.7 Modello Fisico 2

In questo secondo modello di tipo fisico apporteremo poche variazioni rispetto a quello appena descritto. In particolare il processo di divisione delle gocce dovuta ad instabilità aerodinamica durante il moto è del tutto identico a quello trattato nella precedente sezione e cioè avviene con probabilità data da

$$P(D_m, \Delta t) = \begin{cases} 2.94 \cdot 10^{-7} e^{1.7 D_m \Delta t}, & D_m < p^{-1}(1/\Delta t) \\ 1 & D_m \geq p^{-1}(1/\Delta t) \end{cases} \quad (2.19)$$

e distribuzione dei frammenti

$$Q(m | m_0) = Q(D_m | D_0) \frac{dD_m}{dm} = \frac{ab}{3m} \frac{D_m}{D_0} e^{-b \frac{D_m}{D_0}} = \frac{ab}{3m} \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-b \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.20)$$

Per la probabilità di divisione indotta da urti utilizziamo invece una forma suggerita da Whelpdale-List[7] che dipende esplicitamente dalle masse delle due gocce collidenti. Più precisamente quello che

abbiamo è una forma per la efficienza di agglomerazione $E(m_1, m_2)$ che però sappiamo essere legata alla probabilità $P_{sp}(m_1, m_2)$ di disintegrazione dalla relazione

$$P_{sp}(m_1, m_2) = 1 - E(m_1, m_2)$$

L'espressione per $E(m_1, m_2)$ proposta dagli autori sopra citati, riferita però ai diametri D_1 e D_2 delle gocce con $D_1 > D_2$, è la seguente

$$E(D_1, D_2) = \begin{cases} (1 + D_2/D_1)^{-2}, & D_2 \leq 1mm \\ 0 & D_2 > 1mm \end{cases} \quad (2.21)$$

dove il troncamento a $D_2 = 1mm$ è effettuato in accordo con la osservata assenza di agglomerazione tra due gocce una volta che la più piccola tra le due coinvolte nello scontro supera tale soglia per il diametro. In questo schema avremo probabilità di agglomerazione nulla e quindi la sicurezza dello spezzamento in tutti gli urti tra gocce con diametri entrambi superiori ad 1mm. Negli altri casi avremo probabilità di agglomerazione sempre più alta, tendente all'unità, al decrescere del diametro della goccia più piccola (tende ad 1 per $D_2 = 0$) e probabilità molto bassa tendente al minimo, pari ad 1/4 in quelle collisioni tra gocce con diametri pressoché uguali.

La distribuzione dei frammenti viene invece lasciata invariata rispetto al modello precedente e cioè presa uguale a

$$Q_{sp}(m | m_1, m_2) = Q(m | m_1 + m_2) = \frac{ab}{D_{1,2}} e^{-b(\frac{D_m}{D_{1,2}})} \chi_{[\delta_0, D_{1,2}]}(D_m)$$

dove $D_{1,2}$ è il diametro corrispondente alla massa $m_1 + m_2$, $\delta_0 = 0.5mm$ e le costanti a e b sono scelte come nella sezione precedente e cioè tali da assicurare la conservazione della massa e un numero di frammenti inferiore a 25 qualunque siano le dimensioni delle due gocce collidenti.

2.8 Modello Statistico basato sulla legge Gamma

Il modello considerato in questo paragrafo prevede un meccanismo di formazione delle gocce il quale implica che la distribuzione statistica delle loro masse è una miscela di funzioni di tipo gamma (vedere l'Appendice A).

Supponiamo che all'interno della nuvola i nuclei di condensazione si accrescano con il vapore circostante, supersaturo, linearmente nel tempo, a partire da un certo istante iniziale; la crescita è supposta a tasso costante.

Assumiamo inoltre che le particelle non possano unirsi tra loro in seguito ad urti se le rispettive masse sono inferiori ad un fissato limite pari ad m_0 . Non appena la massa della generica particella supera tale soglia m_0 , questa è in grado di aggregarsi con altre gocce nelle sue stesse condizioni. Il concetto di massa critica è stato illustrato all'inizio della sezione 2.1.

Le particelle con massa maggiore di m_0 e non ancora aggregate con altre a loro simili sono dette "gocce di prima generazione". Fino al momento della prima agglomerazione le gocce di prima generazione continuano a crescere con tasso costante supposto uguale a quello dei nuclei di condensazione e la loro massa all'istante t è quindi data da

$$m(t) = m_0 + \alpha_0 \Delta t \quad (2.22)$$

dove Δt è il tempo trascorso dall'istante di superamento della massa m_0 (tempo totale di vita $t = t_0 + \Delta t$ dove t_0 è il tempo impiegato a raggiungere la soglia m_0) ed α_0 è il tasso (costante) di crescita delle gocce.

Le particelle di prima generazione possono incontrarne altre di prima generazione seguendo un processo di Poisson con intensità che denotiamo con λ_0 che rappresenta il numero di urti nell'unità di tempo. Di conseguenza se θ è la variabile casuale tempo trascorso, a partire da t_0 , fino al primo urto, abbiamo

$$P\{\theta \leq \tau\} = 1 - e^{-\lambda_0 \tau}$$

e cioè la densità di θ è data da

$$f_\theta(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \chi_{[0, \infty)}(t)$$

Poiché da (2.22) si evince che

$$m - m_0 = \alpha_0 \cdot \theta$$

abbiamo che

$$P\{m - m_0 \leq x\} = P\{\theta \leq \frac{x}{\alpha_0}\} = 1 - e^{-\frac{\lambda_0}{\alpha_0} x}$$

e dunque questa è la funzione di ripartizione della distribuzione di probabilità delle gocce di prima generazione al momento del primo urto.

L'ulteriore collisione tra due gocce di prima generazione da luogo alla formazione di una goccia che sarà detta di "seconda generazione" la cui massa, poiché somma di due esponenziali, (vedere anche l'Appendice A), è distribuita secondo una Gamma con parametro di forma pari a 2 e parametro di scala λ_0/α_0 . Se m_2 è la variabile indicante la massa di tali gocce si ha per la densità l'espressione

$$f_{m_2}(x) = \frac{\lambda_0^2}{\alpha_0^2} x e^{-\frac{\lambda_0}{\alpha_0} x} \chi_{[0, \infty)}(x)$$

Allo stesso modo, se l'agglomerazione avviene tra una goccia di prima ed una di seconda generazione, la massa della goccia risultante avrà distribuzione $\Gamma(3, \lambda_0/\alpha_0)$ e così via, cioè il parametro di scala si mantiene costante mentre quello di forma è pari alla somma degli ordini di generazione delle due gocce. In generale nella collisione tra due particelle, l'ordine di generazione delle due non è una quantità nota ma può essere descritto da una variabile casuale intera positiva che denoteremo con la lettera ν . Di conseguenza se consideriamo le due copie statistiche indipendenti ν_1 e ν_2 di ν rappresentanti gli ordini di generazione delle due gocce collidenti ed indichiamo con m_1 ed m_2 le variabili casuali massa delle gocce, abbiamo

$$\begin{aligned} P\{m_1 + m_2 \leq x\} &= \sum_i \sum_j P\{m_1 + m_2 \leq x, \nu_1 = i, \nu_2 = j\} = \\ &= \sum_i \sum_j P\{m_1 + m_2 \leq x \mid \nu_1 = i, \nu_2 = j\} P\{\nu_1 = i\} P\{\nu_2 = j\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ma la quantità $P\{m_1 + m_2 \leq x \mid \nu_1 = i, \nu_2 = j\}$ è la funzione di ripartizione della somma di una particella di $i - ma$ ed una di $j - ma$ generazione che sappiamo essere una gamma di parametri $i + j$ e λ_0/α_0 . In conclusione se $p_i = P\{\nu = i\}$ la (2.23) può essere scritta come

$$P\{m_1 + m_2 \leq x\} = \sum_i \sum_j p_i p_j \Gamma(i + j, \lambda_0/\alpha_0)(x)$$

che è proprio la funzione di ripartizione di una miscela di gamma con pesi $p_i p_j$.

In accordo con il meccanismo di formazione delle gocce di pioggia appena descritto, supporremo che la distribuzione delle masse di queste sul ceiling sia (piuttosto che una miscela di Gamma della quale allo stato attuale non si riescono a caratterizzare i pesi) di tipo Gamma con parametro di forma α e parametro di scala λ , $\Gamma(\alpha, \lambda)$, ipotesi che nelle simulazioni descritte è stata fatta anche per i due modelli Fisico 1 e Fisico 2.

Lo schema adottato per il meccanismo di collisione resta identico a quello utilizzato nei due modelli precedenti.

Per quanto riguarda l'agglomerazione, in seguito alle collisioni, verrà formata la goccia somma delle due in accordo con la efficienza di agglomerazione di cui parleremo più avanti.

Sfruttando la proprietà di *infinita divisibilità* delle variabili casuali di tipo Gamma (Appendice A), per la distribuzione dei frammenti scaturenti dalla divisione si segue qui il seguente schema:

Se, come assunto $\Gamma(\alpha, \lambda)$ è la distribuzione delle masse delle gocce allo strato di formazione della pioggia o ceiling e se ε è la variabile casuale che esprime il numero di frammenti risultanti dalla divisione, allora le masse dei frammenti sono distribuite secondo una miscela di Gamma con funzione di ripartizione data da

$$P\{\eta < x\} = \sum_{n \geq 1} \Gamma(\alpha/n, \lambda)(x) q_\varepsilon(n)$$

dove η è la variabile casuale massa dei frammenti, $q_\varepsilon(n) = P\{\varepsilon = n\}$ e $\Gamma(\alpha/n, \lambda)(x)$ è la funzione di ripartizione della distribuzione Gamma di parametri α/n e λ .

Infatti, se ξ è la variabile casuale massa della goccia soggetta a divisione, supponendo che questa sia la somma di un numero N di variabili indipendenti e identicamente distribuite e cioè

$$\xi = \sum_{i=1}^N \eta_i \quad (2.24)$$

avremo, per le proprietà delle funzioni generatrici dei momenti

$$\Phi_{\eta_k}(s) = [\Phi_\xi(s)]^{1/N} \quad \forall k$$

che è la funzione generatrice della distribuzione Gamma di parametri α/N e λ .

Nel caso in cui il numero di frammenti è casuale e rappresentato dalla variabile casuale ε e cioè

$$\xi = \sum_{k=1}^{\varepsilon} \eta_k$$

avremo

$$\begin{aligned} P\{\eta < x\} &= \sum_{i \geq 1} P\{\eta < x, \varepsilon = i\} = \sum_{i \geq 1} P\{\eta < x \mid \varepsilon = i\} q_\varepsilon(i) = \\ &= \sum_{i \geq 1} \Gamma(\alpha/i, \lambda)(x) q_\varepsilon(i) \end{aligned} \quad (2.25)$$

dove η è il modello delle η_k . La (2.25) è una miscela di Gamma con pesi $q_\varepsilon(i)$.

Non disponendo di alcuna informazione sulla legge di $q_\varepsilon(i)$, supporremo inizialmente che il numero di frammenti che hanno origine dalla divisione per cause aerodinamiche sia pari ad un numero fissato N (nella simulazione sceglieremo $N = 20$), per cui si avrà

$$P\{\eta < x\} = \Gamma(\alpha/N, \lambda)(x)$$

e quindi la densità di η è

$$f_\eta(y) = \frac{\lambda^{\alpha/N}}{\Gamma(\alpha/N)} y^{\alpha/N-1} e^{-\lambda y} \chi_{[0, \infty)}(y) \quad (2.26)$$

Tale modello statistico dei frammenti rispetta il principio di conservazione della massa. Infatti pur non essendo la (2.26) esplicitamente troncata al valore corrente di ξ , sia esso m_0 , (m_0 massa della goccia "madre"), la (2.24) ci assicura che la somma delle masse di questi eguali il valore della massa iniziale. Più precisamente saranno proprio le singole realizzazioni della ξ a determinare i condizionamenti sulle variabili η_k :

pur essendo le η_k , $k = 1, \dots, N$, indipendenti, le realizzazioni della N -pla di variabili $\eta_1, \dots, \eta_k, \dots, \eta_N$ devono avere somma pari ad m_0 .

Quanto sopra si riflette nel modello simulativo: Definita la goccia da dividere, supposta di massa m_0 , vengono create $N - 1$ gocce con masse aventi distribuzione Gamma con parametro di forma α/N e parametro di scala λ ; ognuna di esse è inoltre vincolata a soddisfare la (2.24) nel senso che la k -ma massa generata viene scartata e generata di nuovo se il suo valore supera il limite $m_0 - \sum_{i=1}^{k-1} m_i$ dove m_i sono le prime $k-1$ masse generate. Ovviamente l' N -ma massa è data da $m_N = m_0 - \sum_{i=1}^{N-1} m_i$. Questo metodo di rigetto, ben noto in varie applicazioni simulate, (ad es. la generazione della Poissoniana, della Binomiale etc.) ha il difetto, che non appare eliminabile, di far aumentare i tempi di calcolatore.

Per completare il modello occorre tenere in conto l'aspetto temporale, cioè definire la probabilità di spezzamento nel tempo Δt per cause aerodinamiche $P(m, \Delta t)$. Essa è scelta uguale a quella dei primi due modelli (eq. (2.9))(+).

La suddivisione per urto si può rappresentare, ai fini dei frammenti, come quella spontanea, ignorando cioè i valori delle singole masse delle due gocce madri ed utilizzando la (2.23) applicata alla goccia somma delle due. In questo modo l'unico parametro del nostro modello è l'efficienza di agglomerazione che possiamo cercare di investigare, ipotizzando delle forme per tale funzione, mediante la simulazione ed il confronto con i risultati degli altri modelli e con le osservazioni. Le simulazioni saranno relative alle efficienze di agglomerazione delle sezioni 2.6 e 2.7.

3. SIMULAZIONE E RISULTATI

3.1 Descrizione del Software di Simulazione sviluppato

La procedura generale è la seguente:

si effettua la generazione delle gocce di pioggia (si considera già compiuta la formazione di queste descritte nella sezione 2.8) con masse distribuite secondo la legge avente densità

$$f_{\xi}(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \chi_{[0, \infty)}(x) \quad (3.1)$$

Successivamente avviene la simulazione della caduta delle gocce (con velocità secondo Gunn-Kinzer[3]) e dei fenomeni di aggregazione e suddivisione (come nelle sezioni 2.1, 2.6, 2.7, 2.8) e si procede infine alla analisi statistica mediante conteggio delle masse delle gocce per unità di superficie e di tempo alle varie quote.

Per quanto riguarda la descrizione dei parametri del simulatore si ha:

nella densità (3.1) $\alpha = 4$ e $\lambda = 1.569 \text{mg}^{-1}$, il numero N_p di punti di generazione sul ceiling è pari a 20 su una superficie di 10cm^2 (in assenza di aggregazione e suddivisione tale numero può essere incrementato fino a circa 100); infine lo strato di generazione delle gocce è situato in quota a 1000m s.l.m. (2000m in assenza di agglomerazione e divisione).

C'è da osservare che i parametri α, λ, N_p sopra elencati e la superficie A di generazione, sono scelti in modo da dar luogo ad un tasso di pioggia $r = 15 \text{mm/h}$. Il tempo di simulazione arriva fino ad un massimo di 3 ore.

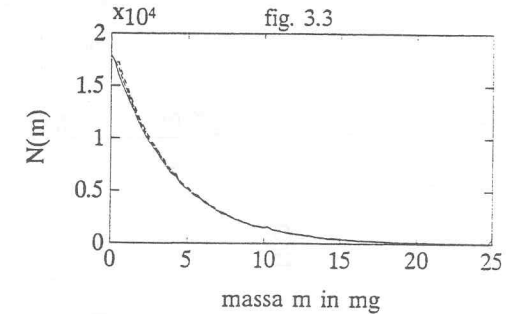
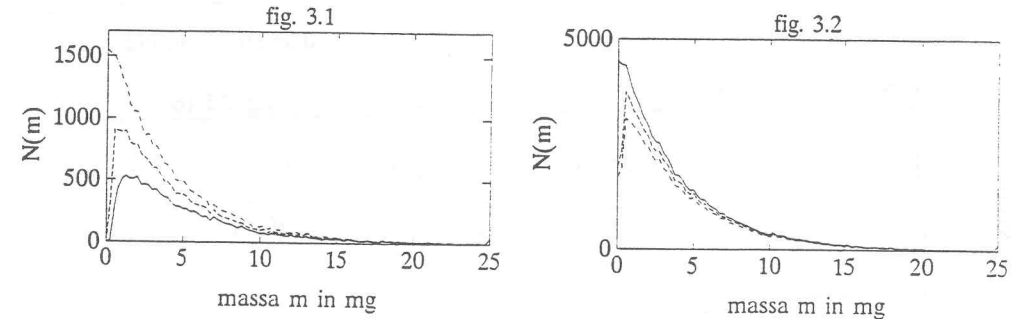
Il programma, consistente di 4000 righe, è stato scritto in linguaggio C e lavora sia in ambiente MS-DOS che UNIX.

(+) Chiaramente un modello più generale, ad es. quello Poissoniano con intensità dipendente dalla massa della goccia, sarebbe matematicamente più consona.

3.2 Risultati ottenuti

In questa sezione sono riportati i grafici dei dati ottenuti dalle simulazioni su elaboratore dei tre modelli di pioggia precedentemente descritti. Le tre curve riportate in ognuna delle prime tre figure rappresentano la *d.s.d.* $N_h(m, t)$ misurata rispettivamente a quota $h = 2000 \text{m}$ (---), $h = 1000 \text{m}$ (- - -) e $h = 0 \text{m}$ (—) in una simulazione in assenza di agglomerazione e suddivisione delle gocce con una distribuzione delle masse sul ceiling di tipo esponenziale ($\lambda = 0.25 \text{mg}^{-1}$). In particolare le 3.1, 3.2 e 3.3 sono relative a misure effettuate rispettivamente dopo 20, 45 e 180 minuti.

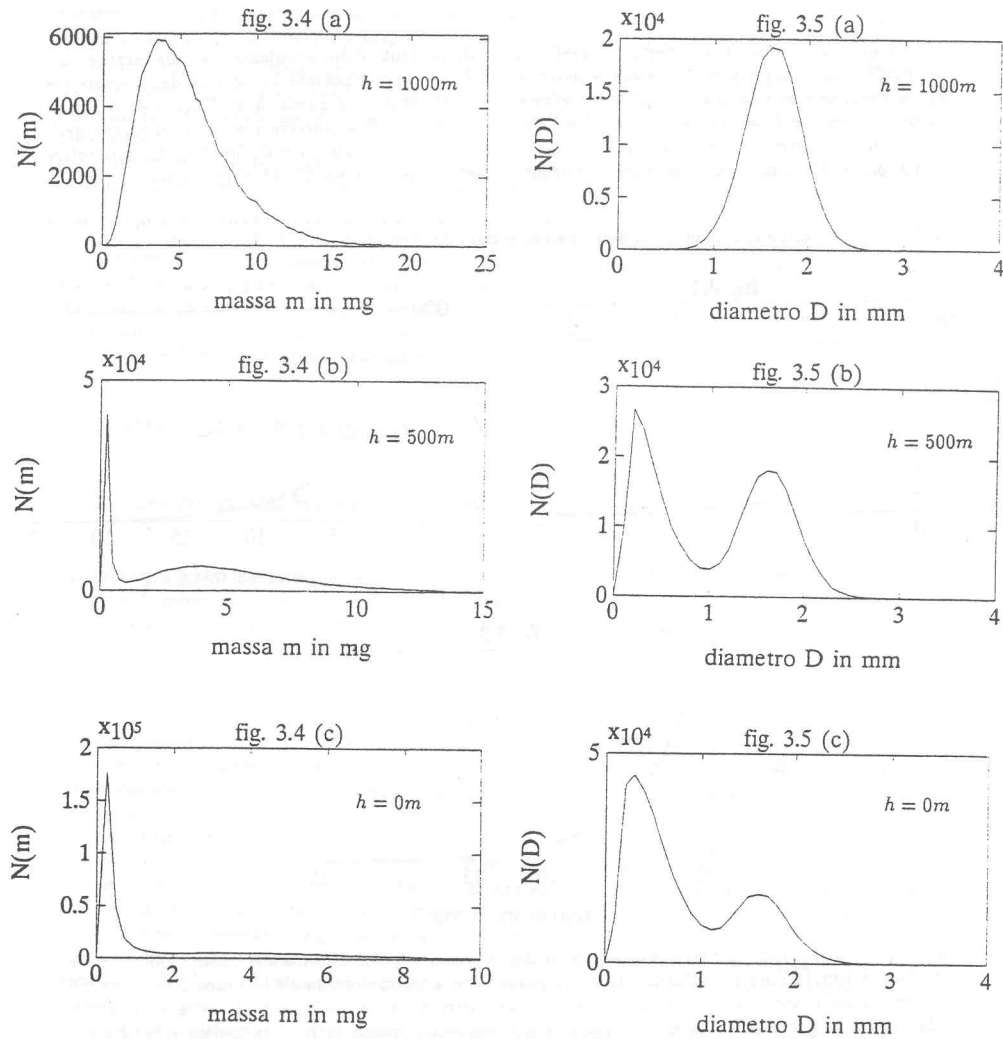
Si può osservare come il raggiungimento del regime stazionario rispetto alla quota richieda tempi prossimi ai 60min , confermando quanto già detto nell'introduzione.



Le figure 3.4(a),(b),(c) si riferiscono invece ai dati raccolti rispettivamente alle quote 1000m , 500m , 0m da una simulazione della durata di 2 ore (situazione a regime) del modello Fisico 1 (sezione 2.6). In questo caso il tutto avviene con i valori dei parametri uguali a quelli elencati nella sezione 3.1 e nella misura le gocce sono classificate rispetto alle masse (la massa in $[\text{mg}]$ in ascissa e la *d.s.d.* in $[\text{m}^{-3}][\text{mg}^{-1}]$ in ordinata).

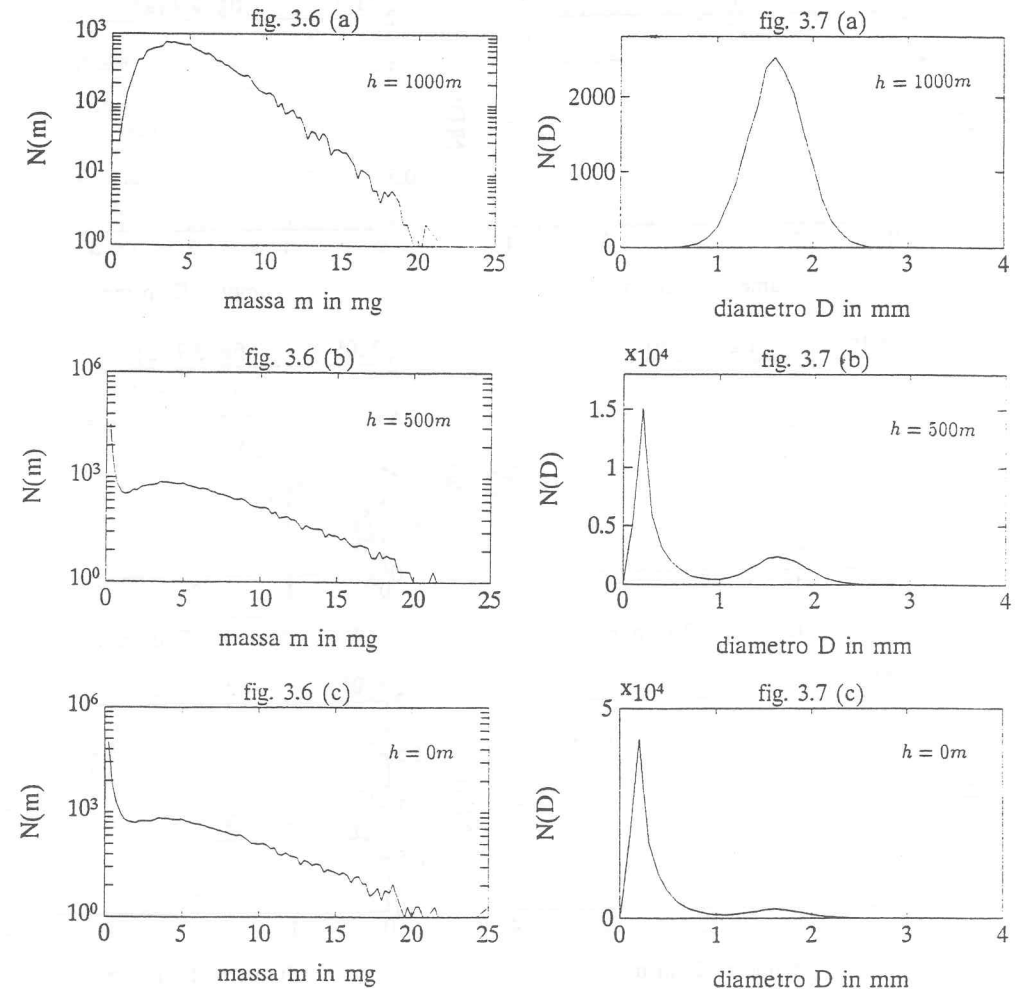
Nelle figure 3.5(a),(b),(c) sono riportati gli stessi dati, con le gocce classificate però rispetto ai diametri (i diametri in $[\text{mm}]$ in ascissa e la *d.s.d.* in $[\text{m}^{-3}][\text{mm}^{-1}]$ in ordinata).

Le 3.6(a), (b), (c) e le 3.7(a), (b), (c) rappresentano le misure effettuate sulla simulazione del modello Fisico 2 (sezione 2.7) sempre relative alle tre quote prima citate (1000m (c), 500m (b), 0m (a)) e rispetto alle masse (3.6) e ai diametri (3.7), dopo 60 minuti.



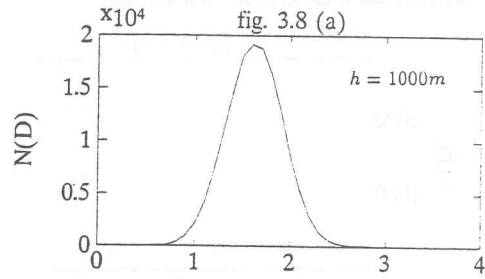
Infine nelle figure 3.8(a), (b), (c) sono mostrate le curve risultanti dalla simulazione del modello basato sulla legge Gamma della sezione 2.8 con efficienza di agglomerazione data da (2.17), e nelle 3.9(a), (b), (c) quelle relative allo stesso modello ma con efficienza di agglomerazione data da (2.21).

Si osserva immediatamente che nei modelli in cui sono presenti i fenomeni di agglomerazione e divisione delle gocce la *d.s.d.* si modifica sensibilmente al variare della quota ed il regime stazionario da questo punto di vista non è mai raggiunto. È invece importante sottolineare che ad ogni fissata quota la stazionarietà della $N_h(D, t)$ rispetto al tempo è per tutti e tre i modelli raggiunta in tempi di poco superiori ai 45 minuti. Si riscontra inoltre in tutte le simulazioni, una perdita dell'unimodalità per la distribuzione delle gocce scendendo di quota, dovuta alla netta prevalenza delle divisioni sulle agglomerazioni, portandoci a pensare che sia più appropriato adottare delle distribuzioni di tipo miscele di Gamma per le gocce (vedi Appendice A) piuttosto che le Gamma di solito utilizzate.

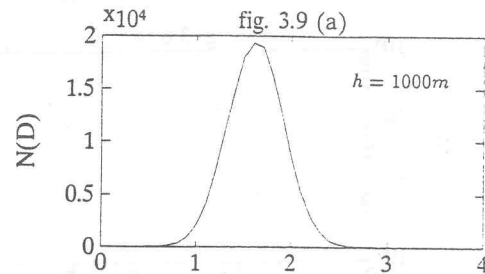


In particolare nei dati relativi alle simulazioni del modello Fisico 2 e del modello Gamma con efficienza di agglomerazione data da (2.21) è presente una maggiore concentrazione di gocce di piccole dimensioni (diametri inferiori a $0.8mm$) rispetto al modello Fisico 1. risultato atteso vista la differenza tra le efficienze di agglomerazione adottate nei due casi (seguendo la (2.21) la agglomerazione diventa infatti un fenomeno raro).

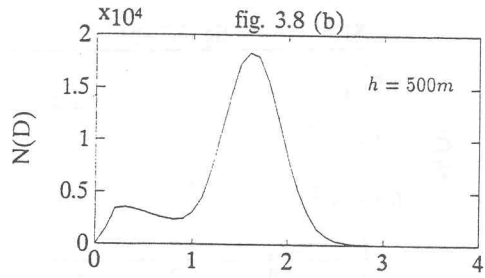
In conclusione la drop size distribution risulta variabile nel tempo e, anche dopo raggiunta la situazione di regime, con la quota; tende a diventare bimodale a quote basse ed è molto sensibile al modello di suddivisione, in particolare per urti.



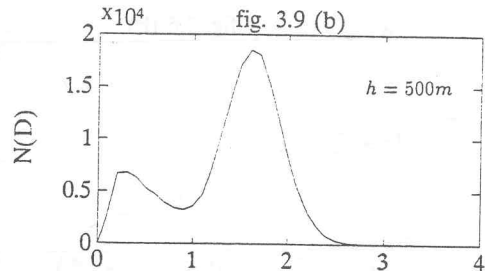
diametro D in mm



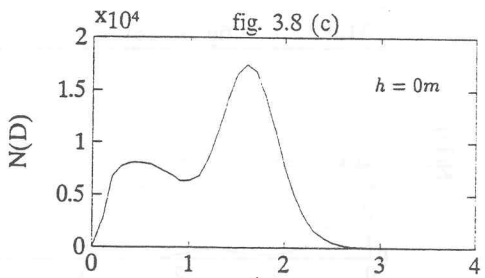
diametro D in mm



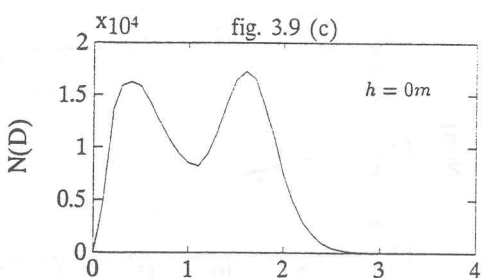
diametro D in mm



diametro D in mm



diametro D in mm



diametro D in mm

3.3 Schema del Programma

Quanto segue rappresenta una descrizione per grandi linee, sotto forma di schema a blocchi, del programma di simulazione della pioggia.

Il corpo principale dell'algoritmo è riportato nel diagramma denominato *Simula* nel quale i blocchi di forma circolare rappresentano routine che sono descritte dai flow-chart successivi.

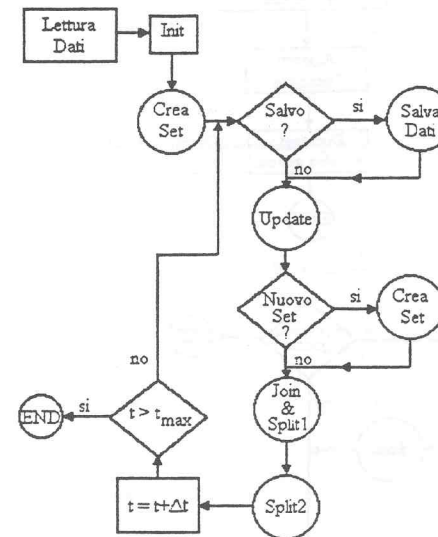
Una volta effettuata la lettura dei dati di ingresso (parametri delle distribuzioni), nel settore *Init* viene effettuata la inizializzazione delle variabili, il dimensionamento dell'ambiente di simulazione e la scelta del modello da simulare (Fisico 1, Fisico 2, Gamma). La routine *Salva Dati* opera il salvataggio su file, ad intervalli di tempo prefissati, delle statistiche raccolte alle varie quote ed a terra.

I blocchi *Join&Split1* e *Split2* rappresentano rispettivamente la procedura di agglomerazione e di divisione per cause aerodinamiche e quella di divisione per urti, ed operano ovviamente nelle modalità descritte nelle sezioni precedenti (a seconda del modello scelto).

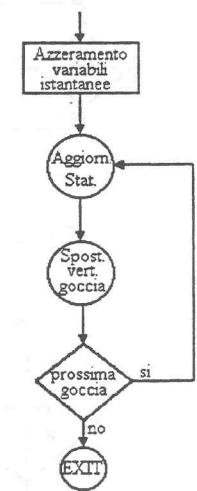
Si può osservare che in entrambe le routine la vera e propria frammentazione della goccia di pioggia viene effettuata dalla *Split*, alla quale però nei due casi vengono passati dei differenti parametri che determinano il diverso tipo di divisione.

Infine nel blocco chiamato *Update* avviene l'aggiornamento delle statistiche, il calcolo, ad intervalli di tempo di lunghezza Δt , della posizione delle gocce presenti nell'ambiente simulativo e le operazioni necessarie per la grafica.

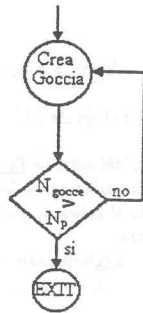
Simula:



Update:



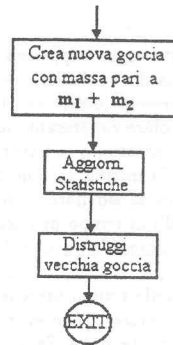
Crea Set:



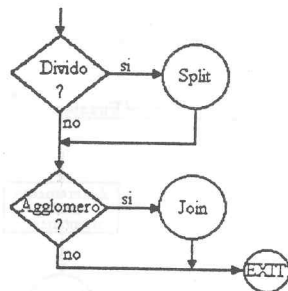
Crea Goccia:



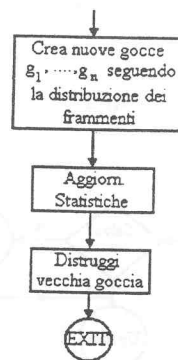
Join:



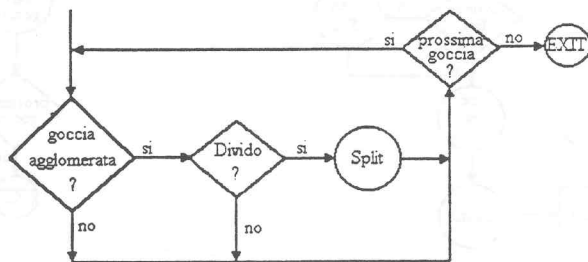
Join & Split 1:



Split:



Split 2:



Appendice A: La variabile Gamma

A1) Definizioni e proprietà di base

Una variabile aleatoria ξ è di tipo Gamma (pag.77 di [16]) con parametro di forma α e parametro di scala λ , con $\alpha > 0, \lambda > 0$:

$$\xi \sim \gamma(\alpha, \lambda)$$

se la sua densità di probabilità è

$$f_{\xi}(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \chi_{[0, \infty)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\alpha, \lambda)(x) \quad (A1)$$

dove $\Gamma(\cdot)$ è la funzione gamma, o "fattoriale generalizzato"**. Nel caso particolare di $\alpha = n$ con n intero si ottiene la variabile aleatoria di Erlang, e $\Gamma(\alpha) = \Gamma(n) = (n-1)!$.

La Erlang è la somma di n variabili esponenziali di egual parametro λ , e ovviamente, per $n = 1$, la ben nota legge esponenziale:

$$f_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{[0, \infty)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(1, \lambda)(x)$$

La funzione generatrice dei momenti di una variabile aleatoria ξ è definita (pag.115 di [16]) come il valore atteso di $e^{s\xi}$, dove $s \in C^1$ è la variabile trasformata, o di Laplace:

$$\Phi_{\xi}(s) \stackrel{\text{def}}{=} E\{e^{s\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) e^{s x} dx \quad (A3)$$

Nel caso della variabile aleatoria Gamma, inserendo la (A1) nella (A3) si ottiene:

$$\Phi_{\xi}(s) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-s)x} dx$$

L'integrale si risolve immediatamente con il cambio di variabile:

$$y = (\lambda - s)x$$

così

$$\Phi_{\xi}(s) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda - s)^{\alpha}} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

e, utilizzando la (A2):

$$\Phi_{\xi}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\alpha} \quad (A4)$$

Pertanto, la somma ξ di ν variabili aleatorie indipendenti di egual parametro λ : $\xi = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i$, con

$$\xi_i \sim \gamma(\alpha_i, \lambda), \quad i = 1, \dots, \nu$$

è ancora Gamma, con parametro $\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$:

$$\xi \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i, \lambda\right) \quad (A5)$$

** $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ (A2)

In altri termini, la variabile Gamma è additiva se viene fissato il parametro di scala.

A2) I momenti delle variabile Gamma

È noto [16] che il momento di ordine k , definito come $m_k = E\{\xi^k\}$, si ottiene per derivazione della funzione generatrice dei momenti:

$$m_k = \Phi_\xi^{(k)}(0) \quad (A6)$$

Dalla (A4) si ottiene

$$\Phi_\xi^{(k)}(s) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{\lambda^k} \quad (A7)$$

In particolare:

$$m_1 = E\{\xi\} = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (A8)$$

$$\sigma_\xi^2 = E\{\xi^2\} - E^2\{\xi\} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2} \quad (A9)$$

In radarmeteorologia [13] è importante il momento di ordine 6 della distribuzione dei diametri. Esso è proporzionale alla riflettività radar Z e vale:

$$m_6 = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+5)/\lambda^6 \quad (A10)$$

A3) Infinita divisibilità della variabile Gamma

Si consideri la somma pesata

$$\xi = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \xi_i$$

con ξ_i , $i = 1, \dots, \nu$ variabili indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.), con funzione generatrice $\Phi_i(s) = E\{e^{s\xi_i}\}$ e p_i , $i = 1, \dots, \nu$ coefficienti (pesi) reali e positivi (che senza perdita di generalità possono essere normalizzati così che sia $\sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1$ oppure $\sum_{i=1}^{\nu} p_i = \nu$).

Ciascun addendo ha funzione generatrice dei momenti

$$E\{e^{sp_i \xi_i}\} = \Phi_i(sp_i)$$

e la somma pesata ξ ha funzione caratteristica:

$$\Phi_\xi(s) = \prod_{i=1}^{\nu} \Phi_i(sp_i) \quad (A11)$$

Nel caso in cui ξ_i , $i = 1, \dots, \nu$ sono di tipo Gamma con parametri α_i e λ la (A11) fornisce:

$$\Phi_\xi(s) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\lambda}{\lambda - sp_i}\right)^{\alpha_i} \quad (A12)$$

Pertanto risulta che la somma pesata di variabili aleatorie $\gamma(\alpha_i, \lambda)$ è ancora di tipo Gamma se e solo se i pesi p_i , $i = 1, \dots, \nu$ sono tutti uguali. In tal caso si ha:

$$\Phi_\xi(s) = \left(\frac{\lambda/p_i}{(\lambda/p_i) - s}\right)^{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i}, \quad p_i = \text{cost.} \quad (A13)$$

Pertanto, in maniera duale rispetto all'espressione (A5), una variabile aleatoria di tipo Gamma, $\gamma(\alpha, \lambda)$, può essere considerata come somma di un numero ν di variabili indipendenti $\gamma(\alpha_i, \lambda)$, purché sia soddisfatta la condizione $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = \alpha$.

In particolare se le variabili sommate sono i.i.d., e quindi α_i non dipende da i , dalla (A13) valutata per $p_i = 1$ si ha:

$$\Phi_\xi(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\nu\alpha_i} \quad (A14)$$

Per quanto riguarda valore atteso, varianza, sesto momento, dalle (A8), (A9), (A10) e (A14) risulta:

$$E\{\xi\} = \frac{\nu\alpha_i}{\lambda} = \nu E\{\xi_i\} = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (A15)$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\nu\alpha_i}{\lambda^2} = \nu\sigma_{\xi_i}^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} \quad (A16)$$

$$m_6(\xi) = (\nu\alpha_i)(\nu\alpha_i + 1)\dots(\nu\alpha_i + 5)/\lambda^6 \quad (A17)$$

A4) Miscela di variabili Gamma

Si considerino N variabili aleatorie indipendenti ξ di tipo Gamma:

$$\xi \sim \gamma(\alpha_i, \lambda)$$

e siano assegnati N numeri reali e positivi q_i , $i = 1, \dots, N$ normalizzati in modo da avere somma unitaria.

Si chiama miscela o combinazione convessa di Gamma la variabile aleatoria ξ la cui funzione densità è

$$f_\xi(x) = \sum_{i=1}^N q_i f_{\xi_i}(x) = \sum_{i=1}^N q_i \gamma(\alpha_i, \lambda)(x) \quad (A18)$$

La funzione generatrice dei momenti della miscela ξ si ottiene dalla linearità dell'integrale (A3) e vale:

$$\Phi_\xi(s) = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i(s) = \sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\alpha_i} \quad (A19)$$

La miscela è ancora una Gamma solo nel caso banale di α_i tutti uguali.

Escluso tale caso banale, la somma η di ν miscele di Gamma, le quali miscele sono indipendenti ed identicamente distribuite, ha la funzione generatrice dei momenti che segue:

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(s) &= \left[\sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\alpha_i} \right]^\nu = \\ &= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_\nu=1}^N q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_\nu} \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_\nu}} \end{aligned} \quad (A20)$$

che si può scrivere:

$$\Phi_\eta(s) = \sum_{n=1}^M a_n \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\beta_n} \quad (A21)$$

dove $M = N\nu$, gli a_n sono funzioni dei q_i e i β_n sono funzioni degli α_i .

Confrontando la (A21) con la (A19) si deduce che la somma di miscele i.i.d. di Gamma è un'opportuna miscela di gamma.

Una proprietà analoga a quella appena dimostrata non vale per quanto riguarda la divisibilità delle variabili aleatorie miscele di Gamma.

Se indichiamo infatti con ξ la variabile casuale di tipo combinazione convessa di Gamma, questa avrà allora funzione densità

$$f_{\xi}(y) = \sum_i q_i \cdot \gamma(\alpha_i, \lambda)(y)$$

dove i pesi q_i sono tali che $\sum_i q_i = 1$ e $\gamma(\alpha_i, \lambda)(y)$ sono funzioni densità Gamma con parametri di forma α_i e parametro di scala fissato λ . Passando alla funzione generatrice dei momenti risulta quindi

$$\Phi_{\xi}(s) = E\{e^{s\xi}\} = \sum_i q_i \cdot \Phi_i(s)$$

con $\Phi_i(s)$ funzione generatrice della variabile casuale gamma con parametri α_i e λ .

Supponiamo ora che ξ sia la somma di N variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite η_k

$$\xi = \sum_{k=1}^N \eta_k$$

vogliamo determinare la distribuzione di queste ultime.

Per le proprietà delle funzioni generatrici e per l'indipendenza delle η_k abbiamo

$$\Phi_{\xi}(s) = \Phi_{\eta_1 + \dots + \eta_N}(s) = \Phi_{\eta_1}(s) \cdots \Phi_{\eta_N}(s) = [\Phi_{\eta_1}(s)]^N$$

di conseguenza $\forall k = 1, \dots, N$

$$\Phi_{\eta_k}(s) = [\Phi_{\xi}(s)]^{1/N} = \left[\sum_i q_i \Phi_i(s) \right]^{1/N} = \left[\sum_i q_i \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^{\alpha_i} \right]^{1/N} \quad (A22)$$

ed è allora evidente, ma si può verificare calcolandone l'antitrasformata di Laplace, che la (A22) non è la funzione generatrice di una distribuzione di tipo combinazione convessa di gamma.

Nel caso in cui la distribuzione iniziale delle masse sul ceiling è una combinazione convessa di Gamma, il discorso della infinita divisibilità cessa quindi di valere, di conseguenza il modello della sezione 2.8 non risulta per ora applicabile.

Appendice B: La variabile "Pseudogamma"

Dopo aver parlato delle proprietà della variabile aleatoria di tipo Gamma, introduciamo quella che in questo lavoro indichiamo con il termine "Pseudogamma".

Abbiamo considerato spesso le gocce d'acqua come sfere regolari. Se ξ è la variabile massa, avente distribuzione Gamma e δ è la variabile aleatoria diametro, allora le due sono legate dalla relazione

$$\xi = c \cdot \delta^3 \quad (B1)$$

vogliamo calcolare la densità di probabilità di δ che appunto diciamo variabile "Pseudogamma".

Siano

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Prob}\{\xi < x\} \quad \text{e} \quad Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Prob}\{\delta < x\}$$

Allora abbiamo

$$Q(x) = \text{Prob}\{\delta < x\} = \text{Prob}\{c\delta^3 < cx^3\} = \text{Prob}\{\xi < cx^3\} = P(cx^3)$$

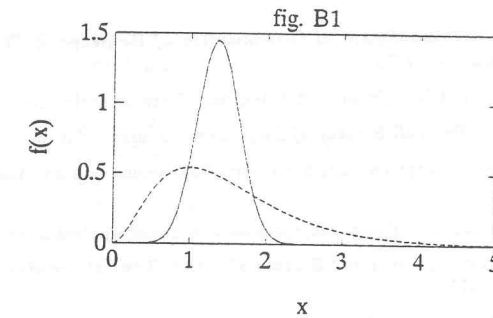
A questo punto è facile calcolare la densità di δ , $f_{\delta}(x)$:

$$f_{\delta}(x) = Q'(x) = 3cx^2 f_{\xi}(cx^3) \quad (B2)$$

Visto che la ξ ha densità Gamma, da (A1) e (B2) si ottiene

$$\begin{aligned} f_{\delta}(x) &= 3cx^2 \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (cx^3)^{\alpha-1} e^{-\lambda cx^3} \chi_{[0, \infty)}(x) = \\ &= 3 \frac{(\lambda c)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{3\alpha-1} e^{-\lambda cx^3} \chi_{[0, \infty)}(x) \end{aligned}$$

In figura (B1) sono confrontate le densità Gamma (---) e Pseudogamma (—) aventi gli stessi parametri $\lambda = 2$ e $\alpha = 3$; il parametro c , qui e nel testo principale, è uguale a $\frac{\pi}{9}$.



Bibliografia

- [1] R.C.Srivastava *The Cloud Physics of Particle Size Distribution*, Journal de Recherches Atmospheriques, 1974
- [2] R.List J.R.Gillespie *Evolution of Raindrop Spectra with Collision Induced Breakup*, Journal of Atmospheric Sciences, 1976
- [3] R.Gunn G.D.Kinzer *The Terminal Velocity of Fall of Water Droplets in Stagnant Air*, Journal of Meteorology., 11, 299-312, 1959
- [4] H.Sauvageot *Radar Meteorology*, Artech, London
- [5] R.C.Srivastava *Size Distribution of Raindrops Generated by their Breakup and Coalescence*, Journal of Atmospheric Sciences, 1970
- [6] Z.A.Melzak *A Scalar Transport Equation*, Trans.Amer.Math.Soc., 1957
- [7] P.T.Willis *Functional Fits to Some Observed D.S.D. and Parametrization of Rain*, Journal of Atmospheric Sciences, 1983
- [8] M.Komabayasi *Probability of Disintegration of Water Drops as a factor Determining Size Distribution of Raindrops*, Proc.Intern.Conf.Cloud Physics, Tokyo Sapporo 1965
- [9] D.C.Blanchard *The Behavior of Water Drops at Terminal Velocity in Air*, Trans.Amer.Geophys.Union 1950
- [10] H.R.Pruppacher R.Pitter *A Semi Empirical Determination of the Shape of Cloud and Raindrop* Journal of Atmospheric Sciences, 1971
- [11] J.D.Klett *On the Breakup of Water Drops in Air*, Journal of Atmospheric Sciences, 1971
- [12] R.H.Magarvey B.W.Taylor *Free Fall Breakup of Large Drops*, Journal of Appl. Phys., 1956
- [13] R.J.Doviak D.S.Zrnic *Doppler radar and weather observation*, second edition, Academic Press Inc., 1993
- [14] A.H.Markowitz *Raindrop Size Distribution Expressions*, Journal of Applied Meteorology, 1976
- [15] J.D.McTaggart-Cowan R.List *Collision and Breakup of Water Drops at Terminal Velocity*, Journal of Atmospheric Sciences, 1975
- [16] A.Papoulis *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, second edition, McGraw Hill, 1984
- [17] F.Pacini *Teoria del Filtraggio e Modelli Dinamici della Pioggia*, Tesi ,1993