ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 342, № 4, с. 442 - 445

МАТЕМАТИКА

УДК 513.1

ГАУССОВСКИЙ ПРОЦЕСС, ПОРОЖДАЕМЫЙ ЛАПЛАСИАНОМ ЛЕВИ, И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЕМУ ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА–КАЦА

© 1995 г. Л. Аккарди, О. Г. Смолянов

Представлено академиком В.П. Масловым 15.02.94 г.

Поступило 15.02.94 г.

В заметке описано построение случайного процесса, который мы называем броуновским движением Леви и который можно считать гауссовским процессом с независимыми приращениями в несепарабельном предгильбертовом пространстве, порождаемым так называемым лапласианом Леви (определение лапласиана Леви приводится ниже). Это построение основано на использовании теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, содержащего лапласиан Леви. Важной особенностью описываемой конструкции является то обстоятельство, что в ней используется переходная вероятность (фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с лапласианом Леви), соответствующая (гауссовской) мере, не обладающей счетно-аддитивной гильбертовой версией. В связи с отсутствием счетной аддитивности при получении формулы Фейнмана–Каца для такого уравнения теплопроводности оказывается полезным (восходящий к В.П. Маслову [2]) метод, применяемый при выводе формулы Фейнмана–Каца для уравнения Шредингера и основанный на использовании так называемой комплексной пуассоновской меры на пространстве траекторий в "импульсном пространстве".

Отметим еще, что интерес к исследованию "лапласианов Леви" значительно возрос после того, как в [1] было показано, что евклидовы уравнения Янга–Миллса на n-мерном пространстве эквивалентны уравнениям, содержащим лапласиан Леви.

1. Некоторые обозначения и определения. Терминология и обозначения из [6] используются обычно без объяснений. Если E – локально-выпуклое пространство (ЛВП)*, E_1 – его векторное подпространство, L – векторное пространство (некоторых) линейных отображений из E_1 в (алгебраическое сопряженное к E_1) пространство E_1^* и g – линейный функционал на L, то (однородный) линейный дифференциальный оператор второго порядка ("лапласиан"), соответствующий функционалу g – это (линейное) отображение Δ^g пространства дважды дифференцируемых (в каком-либо смысле) по подпространству E_1 вещественных (или комплексных) функций на E в пространство всех функций на E, определяемое равенством

$$(\Delta^g f)(x) = g(f''(x)).$$

В частности, если E_1 – гильбертово пространство, L – пространство ядерных операторов в E_1 и $g(A) = \operatorname{tr} A$, $A \in L$, то Δ^g – оператор, обычно называемый лапласианом Вольтерры (–Гросса). Если $E_1 = L_2(0, 1)$, причем L – пространство (даже алгебра) всех операторов вида $A_\psi + K$, где K – компактный оператор, а A_ψ – оператор умножения на функцию $\psi \in L_2(0, 1)$, и $g(A_\psi + K) = \int \psi(t)\, dt$, то Δ^g – это (классический) лапласиан Леви (называемый также оператором Лапласа–Леви).

Отметим, что возможны и несколько иные определения оператора Лапласа–Леви. С одной стороны, можно сузить пространство L (например, – это крайний случай – считать его состоящим из сумм компактных операторов и операторов, кратных единичному); с другой стороны, можно использовать различные продолжения введенного выше оператора Δ^g (определение лапласиана Леви, используемое в настоящей работе, приводится ниже). Отметим еще, что описанную конструкцию функционалов на пространстве операторов можно существенно обобщить, распространив ее на (некоторые) пространства, содержащие неограниченные операторы [3].

Пусть E – ЛВП, $\|\cdot\|$ – непрерывная гильбертова норма на E, H – (предполагаемое сепарабельным) гильбертово пространство, представляющее собой пополнение пространства $(E, \|\cdot\|)$, F – каноническое вложение E в H, E' – топологическое сопряженное

* Все рассматриваемые ЛВП считаются отделимыми, а все векторные пространства – вещественными.

Centro Vito Volterra Università di Roma "Tor Vergata"
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

к E, наделенное топологией Макки; таким образом, F^* – это вложение H' в E' (обладающее плотным образом). Мы отождествляем пространства H и H'; при этом $E \subset H \subset E'$, и если $h \in H\ (\subset E')$, $x \in E$, то $h(x) = (h, x)$ ($(\cdot, \cdot)$ – это скалярное произведение в H). Пусть $b = (e_n)$ – ортонормированный базис в H, состоящий из элементов пространства E. Мы предполагаем, что для каждой ограниченной последовательности (a_n) вещественных чисел ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ сходится в E' (конечно, он не обязан сходиться в H); подпространство пространства E', состоящее из сумм таких рядов, обозначается символом Q.

Определение 1. Лапласиан Леви, соответствующий базису b, – это отображение Δ_L (определяемого ниже) подпространства D пространства всех определенных на E дважды дифференцируемых по каждому из направлений e_n (вещественных или комплексных) функций в пространство всех (числовых) функций на E, определяемое равенством

$$(\Delta_L f)(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f''(x)e_j, e_j),$$

при этом множество D состоит из всех тех функций, для которых предел справа существует.

Замечание 1. Если f обладает непрерывным продолжением на H, представляющим собой функцию, дважды дифференцируемую по Фреше в точке $x \in E$, причем $f''(x)$ является суммой компактного оператора и оператора, кратного единичному, то $(\Delta_L f)(x)$ не зависит от выбора базиса b. Ряд результатов о независимости от выбора базиса можно найти, например, в [4, 7, 8].

2. Задача Коши для уравнения теплопроводности с лапласианом Леви. Для решения этой задачи используется преобразование Фурье, причем решение ищется в классе функций, являющихся преобразованиями Фурье (счетно-аддитивных комплексных) мер на пространстве, которое сейчас будет определено.

Пусть S – пространство всех бесконечных последовательностей вещественных чисел, которые являются (покомпонентными) суммами конечных семейств последовательностей вида $(\varphi(n))$, где φ – непрерывные периодические функции вещественного аргумента. Мы предполагаем, что S наделено скалярным произведением, (корректно) определяемым равенством $((x_n), (z_n))_L = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_j z_j$; соответствующая норма на S обозначается символом $\|\cdot\|_L$*. Далее мы будем отождествлять пространство S с (обозначаемым тем же символом) его образом в Q относительно вложения

$$(x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

считая этот образ наделенным скалярным произведением и нормой, индуцируемыми только что определенными скалярным произведением и нормой в исходном S. Отметим еще, что двойственность между E и E' индуцирует двойственность между E и S.

Напомним, что если T и G – два векторных пространства в двойственности (задаваемой билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$), то подмножество A пространства T называется G-цилиндрическим, если оно принадлежит σ-алгебре, порождаемой некоторым конечным множеством $G_0 \subset G$. При тех же предположениях G-цилиндрической мерой на T называется ограниченная вещественная (или комплексная) функция на алгебре всех цилиндрических множеств, сужение которой на всякую σ-алгебру, порождаемую конечным множеством элементов из G, счетно-аддитивно. При этом всякую счетно-аддитивную G-цилиндрическую меру мы считаем продолженной на σ-алгебру, порожденную алгеброй цилиндрических множеств.

Преобразование Фурье J_+ (J_-) G-цилиндрической меры определяется равенством

$$(J_{\pm}\nu)(g) = \int_T e^{\pm i g(x)} \nu(dx), \quad g \in G$$

(как известно, по преобразованию Фурье цилиндрическая мера восстанавливается однозначно). Напомним наконец, что G-цилиндрическая мера ν называется гауссовской (мерой с нулевым средним значением), если

$$(J_{\pm}\nu)(g) = \exp(-0.5B(g, g)),$$

где B – билинейный функционал на $G \times G$, называемый корреляционным (далее он всегда предполагается невырожденным).

Если T_1 – еще одно пространство, находящееся в двойственности с пространством G, то алгебры G-цилиндрических подмножеств T и T_1 канонически изоморфны. G-цилиндрическая мера на пространстве T и G-цилиндрическая мера на пространстве T_1 называются (G-)эквивалентными, если отображения, определяющие этот изоморфизм, переводят эти меры друг в друга. Каждая из двух эквивалентных G-цилиндрических мер называется версией другой. Хорошо известно, что всякая

* Пространство $(S, \|\cdot\|_L)$ несепарабельно.

G-цилиндрическая мера обладает счетно-аддитивной версией (даже – определяемым естественным образом – расширением [5]). Отметим еще, что G-цилиндрические меры эквивалентны в точности тогда, когда их преобразования Фурье совпадают.

Если G – нормированное пространство и ν – G-цилиндрическая мера на T, обладающая непрерывным преобразованием Фурье, то (G-)гильбертовой версией меры ν называется P-цилиндрическая мера ν_P на некотором гильбертовом пространстве P (предполагаемом отождествленным со своим сопряженным) с непрерывным преобразованием Фурье, обладающая следующим свойством: если $\bar{\nu}$ – версия меры ν, определенная на сильном сопряженном G' к пространству G, то существует такое непрерывное вложение Φ: $G' \to P$ с плотным образом, что ν_P совпадает с образом ν на $(\Phi^*)^{-1}G$-цилиндрических подмножествах P.

Если G – векторное пространство и ν – G-цилиндрическая гауссовская мера с корреляционным функционалом B, то ее гильбертовой версией называется всякая ее $(G, \|\cdot\|)$-гильбертова версия, где $\|\cdot\|$ – норма в G, относительно которой функционал B непрерывен.

Теорема 1. *Если G – векторное пространство и ν – G-цилиндрическая гауссовская мера с корреляционным функционалом B, причем предгильбертово пространство (G, B) несепарабельно, то мера ν не обладает счетно-аддитивной гильбертовой версией.*

Пример 1. Функция f на S, определяемая равенством $f(x) = \exp(-0.5\|x\|_L^2)$, представляет собой преобразование Фурье гауссовской S-цилиндрической меры на E, которую мы будем обозначать символом ν_L (ее можно было бы назвать мерой Леви–Гаусса). Эта мера не является счетно-аддитивной на E и не обладает счетно-аддитивной гильбертовой версией.

Обозначим: $\mathcal{M}_2$ – векторное пространство всех счетно-аддитивных (комплекснозначных) E-цилиндрических мер ν на S таких, что

$$\int |(x, e_j)|^2 \|\nu\|(dx) < \infty$$

для всех $j \in N$, и $\tilde{\mathcal{M}}_2$ – векторное пространство, состоящее из преобразований Фурье мер из $\mathcal{M}_2$.

Теорема 2. *Пусть $\nu_0 \in \mathcal{M}_2, f_0 = J_+\nu_0$, и пусть функция f: $[0, \infty) \to \tilde{\mathcal{M}}_2$ определяется равенством $f(t) = J_+\nu(t)$, где для каждого $t > 0$ $\nu(t) = e^{-0.5\|\cdot\|_L}\nu_0$ и $f(0) = f_0$. Тогда f является единственным решением задачи Коши для уравнения*

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}\Delta_L(f(t))$$

в пространстве $\tilde{\mathcal{M}}_2$ с начальными данными $(0, f_0)$ (это значит, что эта функция непрерывна в точке $t = 0$, $f(0) = f_0$ и при $t > 0$ удовлетворяет приведенному уравнению).

Пусть теперь $\mathcal{M}(E)$ – векторное пространство всех S-цилиндрических (комплекснозначных) мер на E, преобразования Фурье которых ν-измеримы для всех $\nu \in \mathcal{M}_2$. Пространства $\mathcal{M}(E)$ и $\tilde{\mathcal{M}}_2$ приводятся в двойственность билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \int (J_+\mu)(x)(J_-^{-1}\varphi)(dx).$$

Символом Δ_L^* обозначается отображение (некоторого подпространства) пространства $\mathcal{M}(E)$ в $\mathcal{M}(E)$, являющееся сопряженным относительно этой двойственности к отображению Δ_L.

Теорема 3. *Функция μ: $t \mapsto \mu(t) = J_+^{-1}(e^{-0.5t\|\cdot\|_L})$ является единственным решением задачи Коши для уравнения*

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{2}\Delta_L^*(\mu(t))$$

в пространстве $\mathcal{M}(E)$ с начальными данными $(0, \delta)$.

Замечание 2. Определение билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ фактически представляет собой определение (с помощью равенства Парсеваля) интеграла от функции из пространства $\tilde{\mathcal{M}}_2$ по мере, являющейся элементом пространства $\mathcal{M}(E)$. С помощью этого интеграла можно естественным образом определить понятие свертки функции из $\tilde{\mathcal{M}}_2$ и меры из $\mathcal{M}(E)$, что позволяет, в свою очередь, ввести понятие фундаментального решения задачи Коши для уравнения из теоремы 2. Из теоремы 2 вытекает, что этим фундаментальным решением является функция μ из теоремы 3.

Замечание 3. Пусть $f = J_+\nu$, $\nu \in \mathcal{M}_2$, причем функция $e^{-0.5\|\cdot\|_L}$ ν-почти всюду постоянна на S. Тогда f – собственная функция оператора Лапласа–Леви (примером такой меры ν является вероятностная мера, соответствующая эргодическому стационарному случайному процессу с дискретным временем, сосредоточенная на множестве траекторий, являющихся последовательностями из пространства S).

3. Случайный процесс, порождаемый лапласианом Леви. Пусть $C_t(E)$ – пространство всех E-значных непрерывных функций на $[0, t]$, D – пространство S-значных мер на $[0, t]$, обладающих конечным носителем,

связанные двойственностью, определяемой билинейной формой

$$\langle x, \Psi \rangle = \int_0^t x(\tau)\Psi(d\tau).$$

Определение 2. Мерой Винера на $C_t(E)$, порождаемой лапласианом Леви, называется D-цилиндрическая гауссовская мера W_t на $C_t(E)$ с корреляционным функционалом $(P_1, P_2) \mapsto \iint \min(\tau_1, \tau_2)(P_1(d\tau_1)P_2(d\tau_2))_L$.

Замечание 4. Как и всякая гауссовская цилиндрическая мера, W_t совпадает со значением (при $\tau = 1$) фундаментального решения уравнения теплопроводности, в правой части которого стоит дифференциальный оператор второго порядка, преобразование Фурье которого совпадает с квадратичным функционалом, порождаемым корреляционным функционалом рассматриваемой меры.

Замечание 5. Соответствующие мере W_t стохастические дифференциальные уравнения определяют "диффузионные процессы, связанные с лапласианом Леви", в частности "процесс Орнштейна–Уленбека".

Замечание 6. Мера W_t не обладает счетно-аддитивным гильбертовым расширением; поэтому роль пространства C_t может играть любое пространство, двойственное пространству D.

4. Формула Фейнмана–Каца.

Предложение 1. *Пусть* $\nu \in \mathcal{M}_2$ *и* $V = J_+\nu$. *Тогда функция*

$$\varphi \mapsto \exp\left(\int_0^t V(\varphi(\tau))d\tau\right)$$

является преобразованием Фурье $C(E)$*-цилиндрической счетно-аддитивной меры* P_V *(можно сказать, что эта мера соответствует обобщенному пуассоновскому процессу* (*ср*. [2])).

Теорема 4. *Пусть* $V, \psi_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_2(b)$. *Задача Коши для уравнения*

$$\frac{d\psi}{dt} = \Delta_L(\psi(t)) - V\psi(t)$$

в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_2$ *с начальными данными* $(0, \psi_0)$ *обладает решением* ψ: $[0, \infty) \to \mathcal{M}_2$, *определяемым равенством*

$$\psi(t)(s) = \int \psi_0(x(t) + s) \times$$
$$\times \exp\left[-\int_0^t V(x(\tau) + s)d\varepsilon\right] P_V(dx)$$

(определение интеграла справа аналогично определению, приведенному в замечании 2, так что он фактически равен интегралу по определенной выше мере P).

Во время работы над статьей первый автор пользовался поддержкой Human Canital and Mobility programme, contract number erbchrxct 930094.

Второй автор пользовался поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93–011–1693), Международного научного фонда (грант ND 8000) и Italian C.N.R.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V.* Volterra Preprint № 137, 1992.
2. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.
3. *Аккарди Л., Розелли П., Смолянов О.Г.* // Мат. заметки. 1993. Т. 54. В. 5. С. 144 - 149.
4. *Феллер М.Н.* // УМН. 1986. Т. 41. № 4. С. 119 - 170.
5. *Смолянов О.Г., Фомин С.В.* // УМН. 1976. Т. 31. № 4. С. 3 - 56.
6. *Шефер X.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
7. *Hida T., Obata N., Saito K.* // Nagoya Math. J. 1992. V. 128. P. 65 - 93.
8. *Hida T., Kuo H.-H, Potthoff J., Streit L.* White Noise. An Infinite Dimensional Calculus. Cluver, 1993.