Probabilità e teoria quantistica[1]

Luigi Accardi

Istituto di Matematica

Università di Cagliari

[1]Testo ampliato di una relazione tenuta in occasione del Seminario su 'Modelli e teorie fisiche', Pisa, Domus Galileana, 13 giugno 1980. Per ragioni di spazio molti argomenti interessanti sono stati omessi o semplicemente sfiorati. Rimandiamo, per un approfondimento delle analisi contenute in questo lavoro, a una monografia dell'autore sui fondamenti della teoria quantistica, di prossima pubblicazione presso Il Saggiatore.

Indice

RIASSUNTO. Si discute il ruolo della probabilità in meccanica quantistica. Si propone un nuovo approccio alla teoria quantistica della misura. L'idea principale di quest'approccio consiste nell'affermazione che il cosiddetto "collasso del pacchetto d'onde" non è altro che la particolare forma assunta, in un contesto quantistico, dal teorema delle probabilità composte. Questa forma è una diretta conseguenza di una forma debole del principio d'indeterminazione di Heisenberg che, nella sua formulazione matematica, risulta essere una generalizzazione della consueta proprietà di Markov.

1 Teorie causali e teorie statistiche

Le scienze della natura associano ad ogni sistema fisico delle quantità o grandezze osservabili e forniscono un insieme di regole o prescrizioni sul modo in cui da alcune informazioni su un insieme di grandezze osservabili si possono dedurre informazioni su un altro insieme di tali grandezze. Il meccanismo deduttivo è basato sull'esistenza di *relazioni funzionali* le quali esprimono il fatto che il valore di certe grandezze osservabili A, B, C,... determina completamente o influenza in modo controllabile il valore di altre grandezze X, Y, Z,... Il metodo scientifico esprime in modo quantitativo tali relazioni funzionali mediante *modelli matematici*, nei quali alle grandezze osservabili corrisponda una equazione tra i corrispondenti oggetti matematici e viceversa.

Tali modelli matematici non sono solo delle idealizzazioni dei fenomeni naturali, ma sono limitati a particolari *settori* di fenomeni naturali, delimitati dalla scala di grandezza o di complessità. Ciò spiega la pluralità di modelli elaborati per la descrizione della natura. Il ruolo dell'impresa teorica in questa descrizione consiste da una parte nella costruzione di modelli matematici relativi ai singoli settori, dall'altra nella progressiva unificazione di tali modelli alla luce di principi generali.

Un importante fattore di distinzione tra i vari modelli matematici consiste nel tipo di affermazioni che essi consentono sulle varie grandezze osservabili o sulle loro relazioni funzionali. In particolare noi distingueremo tra *affermazioni esatte* (per es. "la grandezza A assume il valore a..."); *affermazioni causali* (per es. "se la grandezza A assume il valore a, allora la grandezza B assume il valore b...", ecc.); *affermazioni deterministiche* (per es. "se la grandezza A assumme il valore a al tempo t_0 allora la grandezza B assume il valore b al tempo $t_0 + t$..."); *affermazioni statistiche* (o *probabilistiche*) (per es. "la probabilità che la grandezza A assuma un valore compreso nell'intervallo (a, b) è p..."), "se la grandezza A assume il valore a, allora il valor medio della grandezza B è b..."). Corrispondentemente una teoria sarà detta esatta, deterministica, statistica se tutte le affermazioni che essa consente sulle grandezze osservabili sono rispettivamente esatte, deterministiche, statistiche. Per esempio, la meccanica classica è una teoria esatta e deterministica. La meccanica statistica classica è una teoria statistica deterministica. La meccanica quantistica contiene affermazioni di tutte i tipi sopraelencati.

Dal punto di vista matematico le affermazioni esatte sono un caso particolare di affermazioni statistiche, quindi in una teoria statistica è certamente possibile incontrare *alcune* affermazioni esatte o deterministiche.

Osserviamo infine che, nella nostra accezione, *teoria statistica* è una qualsiasi teoria che necessariamente includa alcune affermazioni probabilistiche, indipendentemente dalla interpretazione che si può dare del concetto di probabilità. Vogliamo sottolineare questo punto poiché, nel dibattito suol ruolo della probabilità in teoria quantistica, alcuni autori usano il termine "interpretazione statistica" come sinonimo di "interpretazione frequentistica" delle affermazioni probabilistiche. La meccanica quantistica è quindi, nella nostra accezione, una teoria statistica. Essa tuttavia differisce da tutte le altre teorie statistiche per il fatto che, mentre in queste ultime le affermazioni probabilistiche si possono in linea di principio eliminare, aumentando le informazioni disponibili sul sistema, in meccanica quantistica tali affermazioni sono in linea di principio ineliminabili, in conseguenza del fatto che esistono dei limiti a priori sulle quantità di informazione che l'uomo può ottenere su un sistema. Tali limiti a priori vengono chiamati *principi di indeterminazione*. Nella loro forma più semplice tali principi esprimono il fatto che la conoscenza dei valori esatti di alcune grandezze implica che la nostra informazione su altre grandezze non potrà essere che di tipo statistico. Il più famoso di questi è il *principio d'indeterminazione di Heisenberg*, secondo il quale all'aumentare della nostra informazione sulla posizione di un sistema in un dato istante corrisponde una diminuzione della nostra informazione sulla sua velocità in quell'istante, e viceversa.

La radice fisica dei principi di indeterminazione sta nel fatto che alcune grandezze sono *quantizzate* – i loro valori cioè non variano con continuità, ma per salti, e ogni salto è sempre maggiore o uguale di una quantità fondamentale. Conseguenza di ciò che anche il "disturbo" che si arreca ad un sistema quando si misura una grandezza ad esso associata risulterà quantizzato, e perciò il suo valore sarà sempre maggiore o uguale di questa quantità fondamentale.

N. Bohr ha più volte sottolineato che la impossibilità di una descrizione esatta dei fenomeni microscopici non è conseguenza solo della *ineliminabilità* del disturbo, ma anche della sua *incontrollabilità*. Quest'ultimo aspetto è molto delicato da un punto di vista concettuale poiché non è una semplice conseguenza del fatto che certe grandezze sono quantizzate, ma coinvolge una differenza tra *macroscopico* e *microscopico* determinata dall'uomo in quanto soggetto conoscente. Noi non possiamo avere una conoscenza *diretta* degli oggetti microscopici; non possiamo – per usare un'immagine cara a Einstein – "cavalcare un quanto di luce (fotone)" o un elettrone. Possiamo soltanto, con ingegnosi apparati sperimentali, amplificare alcuni effetti da essi provocati e osservarne le conseguenze macroscopiche. Ma in questo processo di "amplificazione" alcuni dettagli del loro moto o, più in generale, delle loro proprietà vanno inevitabilmente persi, e ciò introduce quell'elemento di *incontrollabilità* nelle interazioni microscopiche su cui Bohr giustamente insiste. Mentre la quantizzazione del disturbo nelle interazioni e la conseguente impossibilità di renderlo arbitrariamente piccolo è un fatto di natura, la incontrollabilità del disturbo è legata all'uomo in quanto soggetto conoscente. Ci sono, cioè, dei limiti a priori sulla *completezza* con cui *noi* possiamo seguire i fenomeni naturali al di sotto di un certo ordine di grandezza. È probabile che, estendendo e completando le analisi di Bohr, Heisenberg,..., alla luce del punto di vista suggerito dalla teoria quantistica dei campi (secondo cui tutte le possibili interazioni tra sistemi avvengono per scambio di quanti, la cui natura dipende dall'interazione stessa) si possa arrivare a dimostrare che la non completa controllabilità del disturbo appare ad un livello ancora più fondamentale di quanto non risulti dall'analisi di Bohr, cioè che essa emerga come risulta *dell'interazione* tra due sistemi, e non solo dal processo di amplificazione degli effetti dal microscopico al macroscopico. Un tale risultato dimostrerebbe che le limitazioni a priori sulla conoscenza del mondo esterno emerse dalla teoria quantistica sono *obiettive*, cioè non legate alla specie umana e alla scala di grandezze determinata dai suoi sensi, ma intrinseche ad ogni tipo di conoscenza in cui il soggetto conoscente acquista informazioni sul mondo esterno interagendo con esso.

Riassumendo quindi: misurando una osservabile A di un sistema si altera, in modo non controllabile precisamente, il valore di qualche altra osservabile B, e quindi si introduce una imprecisione nella misura di B.L'impossibilità, in linea di principio, di rendere arbitrariamente piccolo o di controllare il "disturbo" provocato in B dalla misura di A implica la impossibilità, in linea di principio, di misurare simultaneamente con precisione arbitraria A e B. Nel Section 6 discuteremo un esempio concreto della situazione appena descritta.

La relazione tra la quantizzazione di certe grandezze e la necessità dei principi di indeterminazione è stata illustrata in una serie di analisi molto sottili e profonde da Bohr, Heisenberg e vari altri autori. Queste analisi (basate sugli argomenti cui abbiamo schematicamente accennato) hanno condotto ad alcune conclusioni generali di grande importanza per la costruzione della teoria quantistica e per la comprensione del ruolo che la probabilità gioca in essa. Precisamente:

1. Esistono coppie di grandezze A e B tali che l'evento

$$[A = a] \cap [B = b] = \{\text{grandezza } A \text{ assume il valore } a$$

$$\text{e la grandezza } B \text{ assume il valore } b\}$$

non ha alcun significato operativo (cioè non è possibile, in linea di principio, escogitare un esperimento per verificare se tale evento accade o no).

2. Comunque date due grandezze A e B è sempre possibile dare un significato operativo all'affermazione

$$P\{[B = b] \,|[A = a]\} = p$$

(cioè la probabilità che il valore B sia b, una volta noto che il valore di A è a, è p).

3. Tutte le affermazioni della teoria quantistica sono riconducibili ad affermazioni del tipo (2).

La (1.) è un principio negativo, che non riguarda affatto la teoria delle probabilità, anche se avrà importanti conseguenze sul modello matematico di probabilità utilizzabile in teoria quantistica. La (2.) e la (3.) sono principi positivi che qualificano la teoria quantistica come teoria statistica.

Il complesso di affermazioni (1.), (2.), (3.) implica che il modello matematico della teoria quantistica non potrà essere basato sul tradizionale modello matematico della teoria delle probabilità; infatti in quest'ultimo vale la formula elementare per le probabilità condizionate:

$$P\{[B = b]|[A = a]\} = \frac{P([B = b] \cap [A = a])}{P([A = a])} \tag{1}$$

mentre in un contesto quantistico il primo membro di (1) ha significato operativo a causa di (2.), ma il secondo membro non ha significato operataivo a causa di (1.).

Concludendo quindi: se accettiamo le affermazioni (1.), (2.), (3.), il modello matematico della probabilità quantistica non potrà coincidere con quello della probabilità classica.

In effetti la teoria quantistica fornisce delle prescrizioni formali per il calcolo della probabilità condizionata $P\{[B = b]|[A = a]\}$, che non hanno nulla in comune con la formula elementare (1).

Tali prescrizioni matematiche si sono rivelate molto utili, ma ancora oggi non è possibile elencare una serie di condizioni fisiche di cui esse siano conseguenze univoche[2]. In altre parole, ancora oggi non è chiaro se e fino a che punto il modello matematico della teoria quantistica è univocamente determinato dalle ipotesi fisiche alla base di questa. Molti dei problemi di interpretazione e dei tentativi di un diverso approccio alla teoria hanno la loro radice in questa insufficienza fondamentale.

2 La teoria quantistica: nuova meccanica e nuova probabilità

Già nel 1927 M. Born parla della teoria quantistica come di una "singolare fusione di meccanica e probabilità". Tuttavia, nello sviluppo storico della teoria, l'aspetto meccanico e quello probabilistico giocano ruoli molto diversi.

Il carattere di nuova meccanica è quello storicamente precedente; l'analogia con la meccanica classica è stata il motivo ispiratore di tutti i pionieri della meccanica quantistica. Tale analogia è stata successivamente formalizzata nel cosiddetto *principio di corrispondenz*, il cui contenuto euristico è che tutte le affermazioni della meccanica quantistica tendono a ridursi alle corrispondenti affermazioni della meccanica classica quando si faccia tendere a zero il parametro che rappresenta la costante di Planck. L'ispirazione meccanica impregna inoltre tutta la terminologia quantistica e sin dai primi anni le tecniche e i risultati più profondi della meccanica analitica vengono inseriti e utilizzati nella nuova teoria, mentre un fatto analogo per la probabilità è cominciato solo recentemente.

L'aspetto di nuova probabilità emerge molto più lentamente. La probabilità è presente nei primi lavori riguardanti la teoria quantistica, per esempio nel lavoro di Einstein (1905) sulle probabilità di emissione o assorbimento di quanti di radiazione elettromagnetica da parte degli atomi – cioè le probabilità di transizione di un elettrone tra i vari livelli energetici degli atomi – o nei lavori di Heisenberg sullo stesso argomento (1925).

Tuttavia in questo periodo non sorge neppure il dubbio che la probabilità in meccanica quantistica possa avere un ruolo diverso da quello che ha nelle

[2]Tale problema è stato risolto di recente nel caso di osservabili che assumono un numero finito di valori. Cfr. L. Accardi, *Non kolmogorovian models in probability theory*. Conferenza tenuta all'International Symposium on Probability and Statistics (Vilnius 1981).

teorie classiche.

Un cambiamento qualitativo nella situazione è provocato da:
– il principio di indeterminazione
– il concetto di dualità onda–corpuscolo
– l'interpretazione statistica di Born.

I problemi sollevati da queste scoperte relativamente al rapporto probabilità–teoria quantistica possono essere divisi in due gruppi:

– un primo concernente l'interpretazione della probabilità in meccanica quantistica;

– un secondo gruppo concernente il ruolo delle probabilità nella meccanica quaantistica e la relazione di questa con il modello matematico della teoria.

Il problema del ruolo della probabilità in teoria quantistica, e quello strettamente collegato del corrispondente modello matematico, ancora oggi non si può considerare completamente chiarito. Come vedremo in seguito, su questi argomenti si sono sviluppati accesi dibattiti, alcuni dei quali, sia pure in una prospettiva diversa, sono ancora ai nostri giorni attuali. Per questo motivo è opportuno tener presente, nell'analisi di tali dibattiti, il contesto storico in cui si sono sviluppati; in particolare il fatto che le principali connotazioni fisiche della teoria quantistica vengono tracciate tra il 1925 e il 1928 e la formulazione matematica trova la sua sistemazione, ancora oggi generalmente accettata, nelle monografie di P.A.M. Dirac (1930) e di J. von Neumann (1932), mentre la formulazione matematica della teoria delle probabilità oggi generalmente accettata è contenuta nella monografia di A.N. Kolmogorov *Teoria della probabilità* del 1933. Gli anni '30 segnano quindi per entrambe le teorie l'inizio di un periodo di fervente sviluppo interno. Ciascuna teoria, avendo formulato in modo preciso i suoi fondamenti matematici, i suoi scopi, il suo linguaggio, procede allo sviluppo del suo programma. Tali programmi vengono realizzati indipendentemente e, salvo fortunate (e importanti) eccezioni, si può senz'altro affermare che non c'è alcuna comunicazione organica tra probabilità e teoria quantistica (per esempio, nelle più importanti riviste di teoria delle probabilità, la percentuale di lavori ispirati alla teoria quantistica è, sia quantitativamente che qualitativamente, marginale).

L'interpretazione statistica proposta da Born della funzione d'onda come *ampiezza di probabilità* (cioè grandezza il cui modulo quadro è una densità di probabilità) è del 1926, e segna una tappa importante poiché esprime la presa di coscienza da parte dei fisici del fatto che l'uso della probabilità in meccanica quantistica non è un espediente tecnico bensı una necessità intrinseca. I fisici teorici che, come W. Heisenberg, avevano lavorato con piena consapevolezza al progetto di costruire una nuova meccanica, si trovano nella necessità di inserire una componente statistica nella teoria. Da un punto di vista tecnico questo innesto non comporta alcuna difficoltà: si, tratta solo di interpretare in modo diverso un oggetto matematico già presente nella teoria (la funzione d'onda); le equazioni rimangono le stesse. Da un punto di vista concettuale invece è naturale che ci sia stata una reazione di rigetto, poiché l'intuizione e la visione del mondo legate ad una concezione meccanicistica sono profondamente diverse da quelle associate ad una visione statistica. La meccanica descrive i singoli sistemi, in quanto entità individuali, nello spazio e nel tempo, mentre la probabilità è la scienza dei fenomeni collettivi e non dice nulla sui singoli individui. In quell'epoca i fisici avevano da poco cominciato ad accettare la teoria statistica del calore; la teoria statistica del moto browniano aveva permesso a Perrin e Chaudesaigues (1909) di calcolare il numero di Avogadro con una tecnica nuova e più precisa delle precedenti. Ma dietro questi modelli si estendeva l'ombra rassicurante della meccanica alla quale tali modelli avrebbero potuto essere ricondotti. L'uso delle tecniche statistiche nella descrizione di un gas, di un processo di diffusione, era una *scelta*: "... è complicato descrivere il moto di 10^{24} molecole...", "... non ci interessa conoscere i dettagli di questo moto, ma le caratteristiche collettive, d'insieme...". I processi fondamentali si ritenevano descritti nei loro dettagli spazio–temporali dalla meccanica; la descrizione statistica nella fisica classica interveniva solo a livello di *sistemi composti*, come descrizione *approssimata* (rispetto alla descrizione *esatta* data dalla meccanica); l'eliminazione di tale approssimazione era solo un problema tecnico.

Nella teoria quantistica invece la descrizione statistica interviene a livello fondamentale; essa riguarda tanto la singola particella quanto il più complicato gas di particelle; essa, infine, non può essere eliminata per motivi di principio.

La convinzione, più volte ribadita da Einstein, secondo cui l'universo è retto da leggi generali esatte (cioè non solo statistiche), la cui struttura è semplice e completamente accessibile alla conoscenza umana attraverso il linguaggio matematico, era stata (e in gran parte è tutt'ora) uno dei grandi motori psicologici dell'impresa scientifica. Con la teoria quantistica, per la prima volta nella storia dell'umanità, a questa fiducia vengono posti dei limiti non da religioni o superstizioni, ma dalla elaborazione razionale dei dati sperimentali. L'idea kantiana dell'esistenza di limiti a priori per la conoscenza umana si estende dalla metafisica alla fisica, ma questa volta l'esistenza di tali limiti a priori è conseguenza di una realtà scoperta nell'ambito della fisia stessa, e verificata sperimentalmente: il quanto d'azione di Planck e la impossibilità di avere una esperienza diretta del mondo microscopico.

Come si è già accennato, l'esistenza di grandezze osservabili quantizzate e la inaccessibilità diretta del mondo microscopico, implicano, secondo l'analisi di Bohr, Heisenberg e molti altri, l'esistenza di coppie di grandezze che non possono essere misurate (simultaneamente) con precisione arbitraria sullo stesso sistema, e ciò pone dei limiti a priori alla conoscibilità dei valori assunti dalle varie grandezze associate ad un sistesma. La *necessità*, in linea di principio, di una componente statistica nella descrizione della natura anche a livello fondamentale, anche nella descrizione di una singola particella, è conseguenza di questo fatto.

È naturale che tale necessità abbia rappresentato un trauma culturale per la massima parte dei ricercatori impegnati nel tentativo di comprendere la natura. Alcuni di questi, come Einstein, hanno semplicemente negato l'esistenza di tale necessità ed hanno mantenuto la loro fede non solo nell'esistenza di leggi semplici e universali, ma anche nella loro *totale accessibilità* alla conoscenza umana. Coerentemente con questa visione del mondo essi hanno tentato di riformulare le leggi della natura nell'ambito di un modello matematico *esatto*, privo cioè di componenti statistiche. Nel seguito ritorneremo su tali tentativi (cfr. i SectionS 4 e 8), ma occorre notare che nel complesso essi non hanno finora offerto una reale alternativa al modello quantistico.

Altri autori, tra cui Heisenberg e Born, hanno affermato che la probabilità in meccanica quantistica non è dello stesso tipo di quella che si incontra comunemente in statistica, poiché essa conterrebbe informazioni sui singoli sistemi e non solo sui collettivi. Tale punto di vista rischia però di ridursi ad una mera affermazione di principio. Infatti, come si fa a misurare una probabilità che riguarda un evento singolo o irrepitibile?

3 Sulla probabilità di eventi irripetibili

Fin dalle sue origini la teoria delle probabilità si è scontrata con il problema del significato da attribuire alle probabilità di eventi singoli o irripetibili. Per esempio, il termine probabilità che compare in domande come "... qual è la probabilità che l'ultimo teorema di Fermat sia vero?", "... qual è la probabilitche la 10^{80}–esima cifra decimale del numero π sia pari?", può avere lo stesso significato che ha in domande come "... qual è la probabilità che lanciando a caso una moneta il risultato sia testa?"?.

L'interpretazione soggettivistica della probabilità rende conto bene dell'uso del termine probabilità in domande del primo tipo; l'interpretazione frequentistica si adatta bene all'uso del termine probabilità in domande del secondo tipo. Sul problema non c'è oggi uniformità di vedute. Alcuni sostengono che la probabilità è una grandezza osservabile come il peso o la lunghezza che si misura valutando frequenze relative; di conseguenza nelle domande del primo tipo si farebbe un uso improprio del termine probabilità. Altri attribuiscono un senso più ampio ala termine probabilità, e accettano una differenza di significaato nell'uso di questo in un contesto frequentistico o attribuito ad eventi irripetibili. Nel primo caso ci si riferisce a una grandezza che può essere quantitativamente stimata valutando frequenze relative; nel secondo ad una grandezza soggetta a valuazioni qualitative e, in linea di principio, non quantificabili. Per esempio la frase: "la probabilità che una fabbrica di frigoriferi al Polo Nord lavori in perdita è *abbastanza alta*" ha perfettamente senso mentre, se alla valutazione qualitativa "abbastanza alta" sostituiamo la valutazione quantitativa "0.9" (per esempio) otteniamo una affermazione priva di significato operativo, non perché la stima 0.9 possa essere sbagliata, ma perché essa o è arbitraria o dipende troppo fortemente da criteri valutativi che sono specifici dell'esempio considerato, e non indipendenti da esso, come nel caso della frequenza.

Tuttavia, anche accettando l'attribuzione di un significato qualitativo alle stime probabilistiche di eventi irripetibili, va sottolineato che le stime probabilistiche che compaiono in meccanica quantistica non sono affatto di questo tipo. Non solo esse sono espresse in termini quantitativi molto precisi, cioè in termini di numeri, ma i dati sperimentali con cui vengono poi confrontate sono proprio le frequenze relative.

Perciò, se accettiamo il punto di vista, espresso più volte dallo stesso Heisenberg, secondo il quale ogni grandezza fisica è completamente definita dai metodi operativi della sua misura, dobbiamo concludere che la probabilità che interviene in meccanica quantistica, essendo valutata operativamente in termini di frequenze, è esattamente dello stesso tipo di quella che interviene in ogni altra teoria statistica frequentistica. Essa riguarda i singoli individui esattamente nello stesso senso in cui può riguardare un'affermazione del tipo: "la probabilità di mortalità infantile nell'Italia meridionale è alta". Vale a dire: essa non fornisce alcuna informazione sulla sorte dei singoli individui, ma solo sul comportamento globale di un collettivo di invidui similmente preparati.

Una tale interpretazione della probabilità è detta *frequentistica* (o statistica). Il pioniere dell'interpretazione frequentistica della probabilità in meccanica quantistica è stato Einstein, in polemica con Bohr, Dirac, Heisenberg, Born e molti altri.

Oggi si può senz'altro affermare che la larga maggioranza dei fisici accetta *di fatto*, cioè da un punto di vista puramente pragmatico, l'interpretazione frequentistica.

4 Sulla necessità di una descrizione probabilistica della natura

Da quanto detto al Section 3 si possono intuire i motivi per cui Einstein abbia, per tutta la vita, mantenuto fermo il rifiuto di una teoria, come la teoria quantistica, che, rinunciando all'ideale della *completa accessibilità* delle leggi della natura da parte dell'uomo, finiva con l'intaccare tutta la concezione "classica" della conoscenza della natura ed apriva la strada ad interpretazioni secondo cui le *proprietà* degli oggetti non erano più *attributi intrinseci* che l'uomo registrava passivamente, ma *qualità potenziali* che l'uomo, con il suo intervento attivo, rendeva *attuali*. Inoltre, in questo passaggio dal potenziale all'attuale si inseriva un elemento di incontrollabilità che rendeva necessaria la sostituzione del concetto di *legge esatta* con quello di *legge statistica*. Ma con questa sostituzione la scienza perde il suo controllo previsionale sui sistemi individuali: essa non può più dirci che cosa farà una singola particella in determinante condizioni, può soltanto considerare un gran numero di particelle in condizioni simili, classificare a priori i possibili comportamenti delle singole particelle di questo collettivo e valutare, per ciascun comportamento possibile, quale percentuale di particelle adotterà tale comportamento (senza alcuna informazione sul fatto che *questa* particella seguirà *quel* comportamento). A questo punto, se le leggi che determinano uno specifico comportamento della singola particella sono inaccessibili alla conoscenza umana, in linea di principio, che senso ha parlare della *esistenza* stessa di tali leggi?

Supponiamo, ad esempio, che un matematico abilissimo riesca ad escogitare un modello in cui ogni singola particella si muova secondo leggi esatta e deterministiche, mantenendo in ogni punto dello spazio–tempo delle proprietà ben definite e indipendenti dal fatto che l'uomo decida o meno di misurarle (secondo l'ideale che abbiamo chiamato "classico"). Supponiamo inoltre che tale modello concordi perfettamente con il modello matematico della teoria quantistica in tutte le affermazioni esatte che quest'ultima può fare, e che anche le affermazioni statistiche della teoria quantistica siano ottenibili da questo modello qualora si tenga conto del fatto che alcuni parametri della teoria esatta sono solo imperfettamente conosciuti (tali parametri vengono spesso chiamati "variabili nascoste", cfr. Section 8). Supponiamo infine di volerci servire di un tale modello per riaffermare la validità dell'ideale classico di descrizione della natura. Potremo allora:

(i) tentare di dimostrare che questo modello fornisce una descrizione della natura più *completa* di quella offerta dal modello statistico della teoria quantistica;

(ii) trascurare l'informazione supplementare contenuta nel modello esatto e decretare che, per definizione, a parità di potere previsionale, un modello esatto è "più soddisfacente" di uno statistico in quanto suggerisce una descrizione "più intuitiva" della natura e, in particolare, suggerisce un criterio di scelta tra i possibili comportamenti di un singolo sistema che non sia il semplice caso.

Il problema, con il secondo punto di vista, è che, se si trascura l'informazione specifica del modello esatto e ci si limita a richiedere che opportune medie statistiche su tale modello riproducano i risultati della teoria quantistica, allora di modelli siffatti ne possono esistere molti e perciò la "rappresentazione intuitiva" risultante non sarà in nessun modo univoca. In tal caso quindi il ristabilire una descrizione esatta, puramente spazio–temporale, della natura sarà un'operazione meramente psicologica, in quanto priva di una necessità intrinseca.

Nel primo caso, invece, per dimostrare la maggiore completezza del modello esatto rispetto a quello statistico dovremo calcolare,servendoci del modello, i valori esatti di alcune grandezze la cui descrizione nel modello matematico della meccanica quantistica sia parzialmente esatta e parzialmente statistica, e poi escogitare un esperimento per misurare tali valori esatti. Ma a questo punto intervengono le analisi di Bohr, Heisenberg, ecc. che sono basate unicamente su presupposti fisici e sono quindi indipendenti dalla scelta del modello matematico della teoria. La conclusione di tali analisi è che non è possibile misurare simultaneamente i valori esatti di tutte le grandezze osservabili associate ad un sistema. Più precisamente: l'insieme di quete grandezze può essere suddiviso in due gruppi, A e B; del gruppo A possiamo misurare i valori esatti ma, una volta noti questi, delle grandezze del gruppo B possiamo solo stimare i *valori medi*. La suddivisione non è univoca, ma in nessun caso tutte le grandezze potranno essere ridotte al gruppo A. Inoltre, comunque si faccia la suddivisione in gruppi A e B, il modello quantistico permette di calcolare la suddivisione in gruppi A e B, il modello quantistico permette di calcolare i valori esatti delle osservabili del gruppo A e i valori medi delle osservabili del gruppo B in buon accordo con i dati sperimentali.

Fino ad ora l'esperienza ha confermato le conclusioni delle analisi di Bohr, Heisenberg,... Perciò, sulla base delle nostre attuali conoscenze, dobbiamo concludere che la maggior completezza previsionale di un eventuale modello esatto saraebbe puramente fittizia da un punto di vista operativo poiché le informazioni esatte fornite da un tale modello, in aggiunta a quelle già note dal modello quantistico, non potrebbero essere, in linea di principio, soggette ad una verifica sperimentale.

Riassumendo quindi: se anche si riuscisse a costruire un modello esatto che includesse tutte le affermazioni esatte della teoria quantistica, l'informazione supplementare contenuta in tale modllo non sarebbe soggetta a verifica sperimentale. In particolare, se avessimo due modelli con questa proprietà, non avremmo alcuna possibilità, né operativa né concettuale, di scegliere a favore dell'uno o dell'altro. Se accettiamo le analisi di Bohr, Heisenberg, ecc. dobbiamo concludere che ogni tentativo di fondare su basi sperimentali la scelta di un eventuale modello esatto di descrizione della natura è a priori votato al fallimento. In altre parole: noi non possiamo se Dio gioca o no ai dadi, ma l'uomo deve farlo, se non vuole pagare il prezzo di una arbitrarietà che è peggiore dell'incertezza.

5 Il contributo di von Neumann

Nel dibattito storico sul ruolo della probabilità in teoria quantistica abbiamo distinto due aspetti. Uno riguarda la interpretazione della probabilità in teoria quantistica e il problema se il termine "probabilità" nella fisica quantistica abbia lo stesso significato che ha nella fisica classica. Un altro è relativo al fatto che il modello matematico per il calcolo delle probabilità in teoria quantistica è diverso dal modello matematico che interviene nella fisica classica. Entrambi i problemi vengono affrontati da J. von Neumann in una serie di articoli scritta tra il 1927 e il 1929 e poi rielaborati in una monografia che ancora oggi costituisce una delle più lucide introduzioni ai fondamenti matematici della teoria quantistica.

Von Neumann esprime senz'altro la pratica corrente dei fisici (anche se non la loro ideologia dominante) considerando la probabilità che interviene in fisica classica, e si richiama esplicitamente all'approccio frequentistico di von Mises e Gibbs. Il problema che si pone von Neumann è: come si può garantire che il nuovo modello matematico di probabilità, che interviene in teoria quantistica, non sia contraddittorio?

Von Neumann risolve questo problema formulando un sistema di assiomi per la teoria delle probabilità che non determina univocamente il modello matematico ma tale che, sia il modello della probabilità classica che quello della probabilità quantistica, risultino particolari realizzazioni di tale sistema di assiomi. In questo modo non viene dimostrata la non contradditorietà assoluta del nuovo modello, bensı la sua non contradditorietà *relativa*: se si trova una contraddizione nel nuovo modello, allora essa è necessariamente presente nel vecchio.

Nel corso della dimostrazione von Neumanan riconduce tutte le affermazioni statistiche della teoria quantistica ad affermazioni del tipo: "il valor medio (o valore d'attesa) dell'osservabile A nello stato Ψ è il numero $E(A; \Psi)$...", e formula poi gli assiomi in termini di condizioni che i numeri $E(A; \Psi)$ devono soddisfare come funzioni dell'osservabile A e dello stato Ψ.

Con questo lavoro la probabilità quantistica trova il suo naturale contesto matematico. In una serie di lavori successivi (alcuni dei quali in collaborazione con Murray) von Neumann sviluppa, partendo quasi da zero, un imponente apparato matematico che costituisce una generalizzazione del formalismo quantistico. La teoria risultante (oggi chiamata teoria delle algebre di von Neumann) è un fiorente ramo della matematica contemporanea. Tuttavia von Neumann non affronta il problema fondamentale del ruolo e del significato della *probabilità condizionata* in teoria quantistica, problema che, come mostrano le considerazioni del Section 1 (cfr. anche i SectionS 6 e 7), rappresenta la principale novità, sia concettuale che tecnica, rispetto ai modelli probabilistici classici. (In effetti tale problema sarà affrontato successivamente da von Neumann in un lungo manoscritto inedito del 1937, che però non contiene risultati conclusivi sul problema).

6 Il punto di vista di Feynmann

In un famoso intervento al convegno di probabilità e statistica di Berkeley (1951) il fisico R.P. Feynman presenta una relazione sul concetto di probabilità in meccanica quantistica. In essa gli aspetti essenziali del nuovo formalismo probabilistico vengono presentati in modo lucido e pragmatico (rispecchiando cioè il loro uso concreto e quotidiano da parte dei fisici) e le differenze con il consueto formalismo probabilistico vengono illustrate mediante l'analisi di un esperimento ideale. Tale esperimento ideale era stato spesso usato alle origini della teoria quantistica per illustrare uno dei "misteri" della teoria, e cioè il fatto che le particelle talvolta si comportano come corpuscoli, talvolta come onde. Feynman, sviluppando un'analisi di heisenberg, reinterpreta in chiave probabilistica questo esperimento ideale; vede una manifestazione della dualità onda–corpuscolo nel fatto che "in natura le leggi per combinare le probabilità non sono quelle della teoria classica della probabilità di Laplace..." e, come scopo del suo articolo, dichiara "voglio discutere qui le leggi della probabilità della meccanica quantistica...". A differenza degli autori che vedono nella probabilità che compare in teoria quantistica un concetto diverso da quello che compare nelle consuete teorie fisiche, Feynman insiste sul fatto che "il concetto di probabilità non è alterato in meccanica quantistica.... non è richiesta alcuna deviazione dai concetti usati nella statistica classica...", mentre "... ciò che cambia, e cambia radicalmente, è il metodo per calcolare le probabilità...".

Per esempio, il concetto di *angolo* come grandezza misurabile è lo stesso in uno spazio piatto o in uno spazio curvo; in entrambi i casi le operazioni per misurare gli angoli, e le unità di misura, sono le stesse. Tuttavia in uno spazio piatto vale il teorema secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, mentre tale teorema non vale in generale in uno spazio curvo. Cioè siamo in presenza di due modelli matematici in cui la stessa grandezza fisica gode di proprietà diverse. Quando si parla di *stessa* grandezza fisica, ci si riferisce ad un complesso di proprietà che sono indipendenti dal modello e che si ritengono caratteristiche di tale grandezza. Talvolta accade che queste proprietà caratteristiche non determinano in modo univoco il loro modello matematico, e quindi è possibile costruire diversi modelli matematici di queste grandezze nei quali le proprietà che abbiamo chiamato *caratteristiche* sono le stesse, mala proprietà *derivate* sono diverse.

Nel caso della probabilità, le proprietà caratteristiche sono che essa assume valori tra *zero* e *uno*, si addiziona su coppie di eventi mutuamente esclusivi, vale *uno* su un evento che esaurisce tutte le possibilità e *zero* su un evento che le esclude tutte. Esempi di proprietà derivate (legate cioè non al concetto in sé, ma al modello matematico che noi costruiamo di esso) sono la additività su insiemi numerabili di eventi mutuamente esclusivi, la formula che, nel modello kolmogoroviano di probabilità, esprime la probabilità condizionata in funzione delle cosiddette probabilità congiunte (cfr. formula (1.1)) e il teorema delle probabilità composte che sarà discusso tra breve.

Il modello matematico classico della teoria delle probabilità è adeguato a un contesto in cui la congiunzione di due qualsiasi eventi osservabili è un evento osservabile. Le analisi di Bohr, Heisenberg,... mostrano che un tale contesto non descrive fedelmente le nostre esperienze relative al microcosmo. Da queste analisi emerge il problema concettuale di costruire un modello matematico di teoria delle probabilità in un contesto in cui non sempre la congiunzione di due eventi osservabili è un evento osservabile.

L'analisi di Heisenberg–Feynman mostra che questo problema non è solo concettuale, ma anche empirico: se insistiamo ad applicare in un contesto quantistico le proprietà della probabilità *derivate* nell'ambito del modello matematico classico, arriviamo a conclusioni che sono in disaccordo con i dati sperimentali. Più precisamente questi autori, con l'analisi di un esperimento ideale (che schematizza degli esperimenti realmente effettuati), mostrano che l'applicazione del teorema classico delle probabilità composte in un contesto quantistico conduce a previsioni sperimentali sbagliate. L'esperimento ideale è il seguente. Una sorgente S emette particelle (per es. elettroni o fotoni) che vengono filtrate da uno schermo Σ_1, con due buchi, e raccolte su uno schermo Σ_2. Si chiede quale è la probabilità che una particella venga raccolta nella zona X dello schermo Σ_2. Secondo il teorema delle probabilità composte tale probabilità è:

$$P(X) = P(1)P(X|1) + P(2)P(X|2) \tag{2}$$

dove $P(j)$ è la probabilità che la particella passi per il buco j, e $P(X|j)$ è la probabilità condizionata che la particella venga raccolta nella zona X essendo passata per il buco j $(j = 1, 2)$[3]. La validità della formula (2) –

[3]La formula (2) differisce un po' da quella di Feynman per il fatto che quest'autore identifica implicitamente i concetti di "probabilità congiunta" e "probabilità condiziona-

teorema delle probabilità composte – è basata sull'uguaglianza:

$$P(X|j) = \frac{P(X \wedge j)}{P(j)} \quad (j = 1, 2) \tag{3}$$

dove $X \wedge j$ indica l'evento congiunto "la particella passa per il buco j ed è raccolta in X". Ora, la teoria quantistica fornisce gli strumenti per calcolare $P(X|1)$, $P(X|2)$ e $P(X)$, ma queste tre grandezze non soddisfano la (2) per nessuna scelta di $P(1)$ e $P(2)$. Fig. 1 – Le prime due curve da sinistra rappresentano rispettivamente $P(X|1)$, $P(X|2)$; la successiva rappresenta $\frac{1}{2}\,P(X|1) + \frac{1}{2}\,P(X|2)$; l'ultima rappresenta $P(X)$.

D'altra parte, come hanno dimostrato Bohr, Heisenberg,..., l'evento congiunto $X \wedge j$ non è osservabile, perciò parlare della sua probabilità non ha

---

ta". La difficoltà legata a questa identificazione non è certo nel risultato numero; infatti i due "pesi" $P(1)$ e $P(2)$ che compaiono nella (2) e non nell'articolo di Feynman possono essere posti entrambi uguali a $1/2$, senzaper questo fare particolare violenza al problema, e in ogni caso non è certo la loro presenza che giustifica la curva di interferenza. Anche se nel modello matematico classico la probabilità congiunta $P(X \wedge 1)$ e la probabilità condizionata $P(X|1)$ differiscono solo per un fattore moltiplicativo, dal punto di vista concettuale ed operativo invece esse sono diverse, poiché le condizioni sperimentali che permettono di valutare tali probabilità sono diverse. La $P(X \wedge 1)$ si valuta lasciando i buchi 1 e 2 aperti, osservando quali particelle passano per 1, e registrando quante di queste vanno a cadere in X. La $P(X|1)$ invece si calcola *condizionamento prima* la particella a passare per il buco 1 (cioè chiudendo il buco 2) e poi registrando le incidenze in X. Nella sua analisi Feynman comincia con l'identità:

$$X = (X \wedge 1) \vee (X \wedge 2)$$

che esprime il fatto che l'elettrone arriva in X passando *o* per *o* per 2. Quest'affermazione riguarda una possibilità logica, e non la probabilità. Dedurre da questa identità che

$$P(X) = P(X \wedge 1) + P(X \wedge 2)$$

ha significato operativo solo se specifichiamo le operazioni di misura per valutare entrambi gli addendi del secondo membro. D'altra parte le prescrizioni di misura per valutare questi addendi proposte da Feynman (chiudere uno dei buchi) non si riferiscono, come abbiamo già visto, a $P(X \wedge 1)$ e $P(X \wedge 2)$, bensì a $P(X|1)$ e $P(X|2)$. Nel modello matematico classico la (3) è la definizione di $P(X|1)$; ma dal momento che prescriviamo due diversi tipi di operazioni fisiche per valutare $P(X \wedge 1)$ e $P(X|1)$, la (3) diventa un'affermazione soggetta a verifica sperimentale. L'analisi successiva mostra che una conseguenza della (3) è in disaccordo con i fatti. Essa non inficia la validità di nessun *risultato* probabilistico classico, ma soltanto mette in dubbio la plausibilità della *definizione* di probabilità condizionata in termini di probabilità congiunta.

alcun senso operativo e quindi il primo membro dell'uguaglianza (3) non può avere senso in un contesto quantistico. Ma allora non c'è alcun motivo per ritenere che la relazione (2), che è conseguenza della (3), continui a sussistere. In effetti gli esperimenti, dimostrando che tale relazione non sussiste, confermano la necessità empirica di un nuovo modello matematico per la probabilità in un contesto quantistico.

Che l'evento $X \wedge 1$ (oppure $X \wedge 2$) non sia osservabile è conseguenza del fatto che per sapere se la particella è passata per il buco 1 o per il buco 2 occorre illuminarla, cioè, secondo la teoria quantistica, bombardarla con quanti di luce (fotoni). Effetto di questo bombardamento è un disturbo *incontrollabile* sulla particella, che altera il numero di particelle che vanno a cadere nella regione X rispetto a quello che si sarebbe avuto in assenza di disturbo. Come si è già visto al Section 1, caratteristica del mondo sub–atomico non è tanto l'esistenza di questo disturbo, o il fatto che il suo ordine di grandezza sia paragonabile al fenomeno studiato, quanto la sua incontrollabilità e imprevidibilità. Per esempio, se alale particelle sostituiamo delle palle di biliardo ed ai fotoni delle palline un po' più piccole, allora conoscendo massa e velocità delle palle grandi e piccole potremmo valutare esattamente il disturbo e quindi risalire, dalla posizione su Σ_2 della palla "disturbata" a quella che sarebbe stata la sua posizione in assenza di disturbo. In questo caso quindi, anche in presenza di un disturbo dello stesso ordine di grandezza del fenomeno in esame, l'evento $X \wedge 1$ sarebbe perfettamente osservabile. Concludendo quindi: le leggi della probabilità sono esattamente le stesse sia in un contesto classico che in uno quantistico. La teoria quantistica ha richiamato l'attenzione sul fatto che non sempre la congiunzione di due eventi osservabili è un evento osservabile e quindi, se si vuole parlare di probabilità di uno di questi eventi, condizionata dall'altro, tale probabilità non potrà essere espressa dalla formula che *definisce* la consueta probabilità condizionata.

L'esistenza di eventi osservabili la cui congiunzione non è un evento osservabile non è caratteristica del solo contesto quantistico. Ciò è stato mostrato da Koopman con il seguente ingegnoso controesempio. Siano dati due tipi di veleno per topi, A e B, e si consideri un insieme di tipo "identicamente preparati". Si considerino le due variabili casuali:

α = numero di giorni di sopravvivenza di un topo cui sia stato inoculato il solo veleno A.

β = l'analogo per il veleno B.

I due eventi $(\alpha = n)$ e $(\beta = n)$, dove n e m sono dei numeri interi, sono chiaramente osservabili, ma la congiunzione dei due $(\alpha = n) \wedge (\beta = m)$ non ha alcun senso operativo se riferito ad un singolo individuo, poiché si possono uccidere le bestione soltanto con il veleno A o soltanto con il veleno B, ma non "soltanto con A e soltanto con B". Quindi le due osservabili α e β non possono essere simultaneamente misurate sullo stesso individuo.

Due eventi, o due proprietà, la cui congiunzione non sia operativamente osservabile sullo stesso sistema sono detti da N. Bohr in *relazione di complentarità*. L'essenza del principio di complementarità di Bohr sta nell'affermare che esistono in natura proprietà o grandezze in relazione di complentarità (anche al di fuori del mondo microscopico). In questo senso il principio di complementarità di Bohr può essere considerato come una estensione del principio di indeterminazine di Heisenberg. Per esempio, le proprietà di una particella (elettrone, fotone,...) "essere onda" e "essere corpuscolo" sono complementari nel senso di Bohr: è possibile escogitare esperimenti che verifichino sullo stesso oggetto l'una o l'altra proprietà, ma anon entrambe simultaneamente.

7 Analisi probabilistica della teoria quantistica della misura

Per una discussione della teoria quantistica della misura è necessario approfondire l'analisi del concetto di probabilità condizionata. Alcuni punti di quest'analisi sono stati anticipati, nel Section 6, in un esempio concreto. L'analisi che segue estende e precisa le considerazioni svolte nel Section 6.

Indicheremo con lettere maiuscole $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, ...)$ gli eventi relativi a un certo sistema, e con il simbolo $P\ \{\mathcal{A}|\mathcal{D}\}$ la probabilità che l'evento $\mathcal{A}$ si verifichi, una volta noto che l'evento $\mathcal{D}$ si è realizzato, cioè la probabilità condizionata di $\mathcal{A}$ dato $\mathcal{D}$.Useremo la locuzione "il sistema è (era) preparato in $\mathcal{D}$" come sinonimo di "l'evento $\mathcal{D}$ si verifica (verificava) con certezza". Nel Section 1 abbiamo detto che tutte le affermazioni della teoria quantistica sono riducibili al calcolo di probabilità condizionate. In effetti ciò è vero per ogni teoria statistica: *qualsiasi probabilità è una probabilità condizionata*. In genere si suppone che la condizione sia fissata una volta per tutte e perciò si parla semplicemente di probabilità; tuttavia da un punto di vista rigoroso questa è una terminologia impropria poiché ha senso parlare di probabilità di un evento relativo a un sistema solo se si specificano le condizioni sotto cui si valuta tale probabilità, cioè la preparazione del sistema.

Consideriamo, per esempio, il lancio di una moneta. Supponiamo che la moneta venga lanciata da un congegno che noi possiamo controllare con precisione e del quale sappiamo che due volte su tre lancia la moneta in modo che il risultato sia testa. Con questa conoscenza della preparazione del sistesma "congegno più moneta" è ragionevole valutare a 2/3 la probabilità che il risultato del lancio sia testa. D'altra parte, se noi non abbiamo alcuna informazione sui dettagli del congegno che lancia la moneta (per esempio la nostra mano) tenderemo a valutare 1/2 la stessa probabilità. Cioè, quando si parla di *condizione*, o di *preparazione*, non ci si riferisce solo a proprietà intrinseche del sistema, ma anche alla nostra conoscenza di tali proprietà.

A considerazioni esattamente dello stesso genere si riferisce W. Heisenberg quando afferma che "ci si invischia in contraddizioni se si parla della posizione probabile dell'elettrone senza considerare l'esperimento usato per determinarla".

Le affermazioni di una qualsiasi teoria statistica sono quindi del tipo:

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} = p \qquad 0 \leq p \leq 1$$

Nell'ambito di una tale teoria consideriamo il seguente problema: supponiamo che il sistema sia preparato in $\mathcal{B}$, e che quindi la probabilità dell'evento $\mathcal{A}$ sia:

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\}$$

Supponiamo che, dopo aver preparato il sistema in $\mathcal{B}$, veniamo a sapere che un certo evento $\mathcal{C}$ si è verificato. Poiché la nostra informazione sul sisetma è cambiata, anche la probabilità che attribuiamo all'evento $\mathcal{A}$ cambierà. Indichiamo con

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}\} \tag{4}$$

la nuova probabilità. Ci chiediamo come si possa calcolare questa nuova probabilità.

Nell'ambito del consueto modello matematico della teoria delle probabilità (se si suppone cioè le espressioni $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\}$ – al variare di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ – siano le probabilità condizionate associate ad *un'unica* misura di probabilità) il calcolo si esegue facilmente, e il risultato è che

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}\} = P\{\mathcal{A}|\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}\} \tag{5}$$

(dove $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ indica la *congiunzione* dell'evento $\mathcal{B}$ e dell'evento $\mathcal{C}$, cioè l'evento che corrisponde al verificarsi di entrambi). In altre parole, il modello matematico classico della teoria delle probabilità ci porta alla conclusione che, se prepariamo il sistema in $\mathcal{B}$ e poi veniamo a sapere che l'evento $\mathcal{C}$ si è verificato, la probabilità di $\mathcal{A}$ va calcolata sotto la condizione che sia $\mathcal{B}$ che $\mathcal{C}$ siano verificati. In tale modello matematico quindi ogni conoscenza acquisita dopo una preparazione corrisponde a un *incremento* di informazione. (Osserviamo, incidentalmente, che la deduzione della uguaglianza (5) non fa uso del postulato di *numerabile additività*; essa ha perciò validità universale nell'ambito dei modelli probabilistici classici). D'altra parte, da un punto di vista operativo, dobbiamo tener conto del fatto che, per sapere se l'evento $\mathcal{C}$ si è verificato o no, dobbiamo effettuare un'operazione di misura sul sistema, cioè agire su di esso. E non si può escludere a priori la possibilità che le operazioni di misura eseguite per acquisire informazioni su $\mathcal{C}$ distruggano le informazioni precedentemente acquisite su $\mathcal{B}$. In tal caso l'informazione su $\mathcal{C}$ non corrisponderà ad un *incremento*, bensı ad un *cambiamento* dell'informazione sul sistema. Per esempio, se l'acquisto di informazione su $\mathcal{C}$ distrugge completamente l'informazione precedentemente acquisita su $\mathcal{B}$ (in questo caso diremo che gli eventi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono *incompatibili*) allora la risposta al problema posto sopra, invece che dalla (5) è data da:

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}\} = P\{\mathcal{A}|\mathcal{C}\} \tag{6}$$

Abbiamo già visto come le analisi di Bohr e Heisenberg implichino la esistenza in natura di eventi incompatibili. Oltre ai casi estremi (5) e (6), corrispondenti rispettivamente alla totale conservazione e alla totale distruzione dell'informazione su $\mathcal{B}$ dovuta alla misura di $\mathcal{C}$, esistono casi intermedi, corrispondenti alla parziale distruzione dell'informazione su $\mathcal{B}$. In questi casi diremo che gli eventi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono *parzialmente compatibili*. Per esempio, consideriamo il caso in cui $\mathcal{B}$ sia un evento *composto* da due eventi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ (scriveremo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$), tali che $\mathcal{B}_1$ sia compatibibile con $\mathcal{C}$ ma $\mathcal{B}_2$ no. Allora l'operazione di misura su $\mathcal{C}$ distruggerà l'informazione su $\mathcal{B}_2$, ma non quella su $\mathcal{B}_1$. Corrispondentemente la risposta al problema sollevato sopra sarà data dall'uguaglianza

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}\} = P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{C}\} \tag{7}$$

che include come casi particolari sia la (5) che la (6). (È facile costruire in un contesto quantistico esempi di eventi parzialmente compatibili).

L'espressione $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}\}$ sarà detta *probabilità bicondizionata di $\mathcal{A}$, dati* $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ (nell'ordine!). Per quanto segue è essenziale insistere sul fatto che tale espressione è stata definita in termini puramente operativi, indipendentemente cioè da qualsiasi modello matematico della probabilità; gli eventi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,... rappresentano quantità osservabili, e non bisogna conforderli con i loro corrispondenti nel modello matemataico (che, per esempio, nel modello classico sono sottoinsiemi di un insieme Ω). Una conseguenza di ciò è che, se $(\mathcal{C}_j)$ è una famiglia di eventi con le seguenti proprietà:

$$\text{due eventi distinti si escludono a vicenda} \tag{8}$$

$$\text{almeno uno degli eventi della famiglia “si verifica”} \tag{9}$$

allora occorrerà distinguere tra l'evento $V_j\mathcal{C}_j$ – che corrisponde all'avere eseguito un'operazione di misura per verificare quale degli eventi $\mathcal{C}_j$ si realizza – e l'evento $\mathcal{C}_j$ – che corrisponde all'aver effettuato tale operazione di misura e ad aver riscontrato che lo specifico evento $\mathcal{C}_j$ si è verificato. Perciò, se $(\mathcal{D}_k)$ è un'altra famiglia di eventi con le stesse proprietà, i due eventi $V_j\mathcal{C}_j$ e $V_k\mathcal{D}_k$ saranno in generale diversi, poiché le operazioni di misura per verificare quale dei $\mathcal{C}_j$ si è verificato possono essere molto diverse da quelle per verificare quale dei $\mathcal{D}_k$ si è verificato. Per esempio, se C e D sono due grandezze osservabili del sistema, e l'evento $\mathcal{C}_j$ (risp. $\mathcal{D}_k$) corrisponde al fatto che la grandezza C (risp. D) assume il valore c_j (risp. d_k), allora all'evento $V_j\mathcal{C}_j$ corrisponde la misura della grandezza C, mentre all'evento $V_k\mathcal{D}_k$ la misura della grandezza D. Invece, nell'ambito del modello matematico classico, agli eventi $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{D}_k$ corrispondono dei sottoinsiemi di un insieme Ω, e gli eventi $V_j\mathcal{C}_j$ e $V_k\mathcal{D}_k$ corrisponde lo stesso sottoinsieme, cioè tutto lo spazio Ω¡ che è associato a ogni evento che si verifica con certezza, e perciò un tale evento costituisce un condizionamento banale.

Premesso ciò, possiamo introdurre il *Principio delle probabilità composte*. siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ eventi, e $(\mathcal{C}_j)$ una famiglia di eventi che soddisfa (8) e (9). Allora

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|V_j\mathcal{C}_j\} = \Sigma P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}_j\}P\{\mathcal{C}_j|\mathcal{B}\} \tag{10}$$

Nell'esempio discusso sopra, cioè quando esistano grandezze A, B, C, tali che $\mathcal{A} = [A = a]\mathcal{B} = [B = b]\mathcal{C}_j = [C = c_j]$, $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|V_j\mathcal{C}_j\}$ esprime come varia la probabilità di $\mathcal{A}$ in conseguenza del *solo* disturbo dovuto al fatto che si è misurata la grandezza C senza leggere il risultato della misura (Feyerabend chiama una tale operazione “processo di misura incompleto”). $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}_j\}$

esprime invece come varia la probabilità di $\mathcal{A}$ in funzione del disturbo dovuto all'operazione di misura *e* all'ulteriore informazione ottenuta, cioè che l'evento $\mathcal{C}_j = [C = c_j]$ si verifica. Osservare che il primo membro della (10) ha un ben definito significato operativo, indipendente dal secondo membro. Perciò l'uguaglianza (10) è effettivamente un principio, e non una definizione[4]. Nel caso classico l'uguaglianza (10) è una teorema, e non un postulato, come si vede subito dalla (6) e dalla formula elementare della probabilità condizionata. Inoltre in questo caso

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|V_j\mathcal{C}_j\} = P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} \tag{11}$$

cioè: nel modello classico, poiché il disturbo viene trascurato, il solo fatto di eseguire una misura non altera la nostra informazione sul sistema, e perciò non altera la probabilità.

Un'analisi probabilistica della teoria di von Neumann della misura quantistica rivela che tale teoria è *implicitamente* fondata sul caso particolare dell'uguaglianza (10) che si ottiene quando la probabilità bicondizionata $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|\mathcal{C}_j\}$ coincide con la probabilità condizionata $P\{\mathcal{A}|\mathcal{C}_j\}$ (cioè quando c'è una totale perdita della informazione iniziale). In questo caso si ha:

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}|V_j\mathcal{C}_j\} = \sum_j P\{\mathcal{A}|\mathcal{C}_j|\mathcal{B}\} \tag{12}$$

Se supponiamo che gli eventi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}_j$ corrispondano rispettivamente al

[4] Il fatto che in generale (cioè al di fuori di un modello classico) questo sia un *principio* e non un *teorema* non è sufficientemente apprezzato nella lettera. Per esempio H. Reichenbach, nel suo saggio *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica* (Einaudi 1954, Cap. II, Section 22), afferma che: "... se si interpretano le probabilità come frequenze, le regole della probabilità sono tautologiche; non possiamo pertanto escludere l'uso della (10)..." (il numero della formula è diverso (N.d.a.)). Tuttavia, per dimostrare la (10) egli fa uso di una identità che, nelle nostre notazioni si esprime:

$$P(\mathcal{A}\mathcal{A}|\mathcal{B}\wedge\mathcal{C})P(\mathcal{C}|\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}\wedge\mathcal{C}|\mathcal{B})$$

(più una ipotesi che equivale alla nostra uguaglianza (19). Ma noi abbiamo già dimostrato che, affinché una tale identità possa essere interpretata in termini di frequenze relative, occorre che entrambi gli eventi $\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}\wedge\mathcal{C}$ abbiano un senso operativo, e cioè che *sia* $\mathcal{A}$ *che* $\mathcal{B}$ siano compatibili con $\mathcal{C}$. In caso contrario il ragionamento di Reichenbach non è giustificato.

fatto che le grandezze A, B, C assumano i valori a, b, c_j, la (12) diventa

$$P\{[A=a]|[B=b]|V_j[C=c_j]\} = \sum_j P\{[A=a]|[C=c_j]\}\cdot P\{[C=c_j]|[B=b]\} \tag{13}$$

Il primo membro indica la probabilità bicondizionata che $A = a$ qualora su un sistema inizialmente preparato in modo che $B = b$ si effettui la misura incompleta (nel senso di Feyerabend) della grandezza C. Nel secondo membro compaiono solo quantità esplicitamente calcolabili in teoria quantistica. Usando per tali quantità le formule esplicite della teoria quantistica, si verifica facilmente che il secondo membro della (13) è esattamente la formula postulata da von Neumann per descrivere il processo di misura.

Insistiamo sul fatto che nell'analisi di von Neumann la formula che fornisce le probabilità composte – cioè la (13) – non viene dedotta dal formalismo probabilistico quantistico, come avviene nel caso classico, ma postulata. Ci sono stati molti tentativi di *dedurre* questa formula dal formalismo quantistico. La maggior parte di tali tentativi è basata sullo sviluppo di considerazioni dovute a Bohr, von Neumann e Jordan, secondo le quali nel processo di misura si intrecciano due livelli di descrizione della natura; uno microscopico, relativo al sistema osservato, e uno macroscopico, relativo all'apparato di misura che amplifica, in modo irreversibile, gli effetti microscopici fino a renderli percepibili da parte dello pserimentatore. Il problema viene quindi ricondotto alla costruzione di un modello matematico di questo processo di amplificazione che, sotto opportune approssimazioni, renda conto della formula (13) per le probabilità composte. In questa direzione i principali risultati sono stati ottenuti, in una serie di memorie, da A. Daneri, A. Loinger, G.M. Prosperi, A. Scotti. Occorre distinguere, in questa linea di ricerca, due aspetti[5]. Uno riguarda la possibilità di dedurre la descrizione dei sistemi macroscopici, sia a livello classico che quantistico, dalla corrispondente descrizione microscopica a livello quantistico. Questo, che può essere considerata una estensione al campo quantistico del programma di Boltzmann di dedurre la termodinamica dalla meccanica classica, è un aspetto estremamente importante e attuale. Un altro riguarda specificamente il processo di misura e la particolare forma

[5]Per motivi di spazio (e anche perché richiederebbe un linguaggio tecnico, che abbiamo cercato di evitare in questo lavoro) tralasciamo il problema della compatibilità tra la valutazione a priri della probabilità $P(\mathcal{A}_j|\mathcal{B}_j|\vee_j \mathcal{C}_j)$ data dalla (12) e quella ottenuta applicando le regole della MQ a un sistema macroscopico. L'aver stabilito in molti casi tale coerenza è uno dei principali risultati dei lavori di Prosperi et al., menzionati sopra.

assunta dal teorema delle probabilità composte in un contesto quantistico. Relativamente a questo secondo aspetto, il nostro punto di vista è che la deduzione della formula quantistica per le probabilità composte è un problema che riguarda solo il particolare modello di teoria delle probabilità che interviene nella teoria quantistica, e non le specifiche proprietà fisiche del sistema in esame o la particolare grandezza osservabile che si vuole misurare. In altri termini: la differenza tra la formula classica (11) e quella quantistica (13) ha le sue radici *soltanto* nei principi di indeterminazione, ed è solo attraverso tali principi che la distinzione macroscopico–microscopico interviene a provocare tale differenza (cfr. le considerazioni sviluppate più oltre sulla teoria della misura).

Il seguente diagramma riassume le conclusioni raggiunte finora con la nostra analisi degli aspetti probabilistici del concetto di misura. Esso mostra come varia la probabilità che la grandezza A assuma il valore a (cioè dell'evento $[A = a]$) al variare della nostra informazione sul sistema, provocata dall'eseguire (nell'ordine) le tre seguenti operazioni: (i) preparazione del sistema in modo che sia $B = b$; (ii) misura della grandezza C senza lettura del risultato; (iii) lettura del risultato della misura di C ($C = c$). (Nel caso quanatistico abbiamo supposto che le grandezze B e C siano incompatibili. Se sono compatibili, il diagramma quantistico si riduce a quello classico. Il caso di grandezze parzialmente compatibile è stato escluso).

	Caso classico	Caso quantistico (B e C incopatibili)
Preparazione $B = b$	$P\{[A = a] \| [B = b]\}$	$P\{[A = a] \| [B = b]\}$
Misura di C senza lettura del risultato	$\sum_c P\{[A = a] \| [B = b] \wedge [C = c]\} \cdot$ $\cdot P\{[C = c] \| [B = b]\} =$ $= P\{[A = a] \| [B = b]\}$	$\sum_c P\{[A = a] \| [C = c]\} \cdot$ $\cdot P\{[C = c] \| [B = b]\} \neq$ $\neq P\{[A = a] \| [B = b]\}$
Lettura del risultato $C = c$	$P\{[A = a] \| [B = b] \wedge [C = c]\}$	$P\{[A = a] \| [C = c]\}$

Nella letteratura fisica il variare della probabilità dell'evento $A = a$ relativo alle ter condizioni (i), (ii), (iii) elencate sopra (e riferito al caso quantistico) viene chiamato "*collasso* (o *riduzione*) *del pacchetto d'onde*". (Il termine "collasso" sta a evocare il fatto che, al variare della condizione, la probabilità condizionata varia in modo brusco, discontinuo ed immediato).

Più precisamente, in teoria quantitsica il termie "collasso del pacchetto d'onde" è, in genere, riferito non alla probabilità, ma alla densità di probabilità (o meglio, al suo analogo quantistico: la matrice densità). La nostra formulazione è equivalente a quella consueta ed ha il vantaggio di far intervenire solo quantità condizionate. In questo modo si evitano alcuni insidiosi "idola fori" connessi al termine "stato", che possono provocare (e di fatto hanno provocato) molte discussioni e perplessità sul significato fisico del diagramma riportato sopra.

Le variazioni della probabilità dell'evento $[A = a]$ del tipo

$$P\{[A = a]|[B = b]\} \to P\{[A = a]|[B = b] \wedge [C = c]\}$$

oppure

$$P\{[A = a]|[B = b]\} \to P\{[A = a]|[C = c]\}$$

sono ben note in tutte le trattazioni della probabilità classica, mentre le variazioni del tipo

$$P\{[A = a]|[B = b]\} \to \sum_c P\{[A = a]|[C = c]\} \cdot P\{[C = c]|[B = b]\} \neq P\{[A = a]|[B = b]\} \tag{14}$$

"... non esistono nelle teorie classiche, che assumono la possibilità di osservare senza perturbazione..." (W. Heisenberg).

Per isolare completamente la differenza tra il caso classico e quello quantistico occorre introdurre esplicitamente il tempo nella nostra analisi. Finora il tempo è stato introdotto implicitamente quando abbiamo affermato che il sistema *prima* viene preparato in modo che $B = b$, *poi* si effettua la misura di C, e la probabilità dell'evento $A = a$ è considerata in un istante successivo a queste operazioni. Ora introduciamo la notazione $A(t) = a$ per indicare l'evento che la grandezza A assume il valore a *all'istante* t, e analogamente per le altre grandezze B e C. Con queste notazioni, se t_1 è l'istante in cui viene preparato il sistema, t_2 l'istante in cui si misura C, e t_3 quello in cui ci interessa il valore di A, si ha che $t_1 < t_2 < t_3$, e che

$$P\{[A(t_3) = a]|[B(t_1) = b]|[C(t_2) = c_j]\} = P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c] \wedge [B(t_1) = b]\} \tag{15}$$

cioè la probabilità bicondizionata diventa la consueta probabilità condizionata con condizioni a tempi diversi. La probabilità che $A = a$ al tempo t_3 se

$B = b$ al tempo t_1, e se la grandezza C è stata misurata al tempo t_2, cioè

$$P\{[A(t_3) = a]|V_j[C(t_2) = c_j] \wedge B(t_1) = b]\} \tag{16}$$

diventa, nel caso classico.

$$\sum_j P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c_j] \wedge [B(t_1) = b]\} \cdot P\{[C(t_2) = c_j]|[B(t_1) = b]\} \tag{17}$$

e nel caso quantistico

$$\sum_j P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c_j]\} \cdot P\{[C(t_2) = c_j]|[B(t_1) = b]\} \tag{18}$$

(ricordiamo che parlando di "caso quantistico" stiamo intendendo il caso in cui B e C siano grandezze *incompatibili*). D'altra parte il principio di indeterminazione afferma proprio che la misura di C al tempo $t_2 > t_1$ distrugge l'informazione che avevamo su B al tempo t_1, cioè in termini probabilistici, il principio di indeterminazione implica la uguaglianza

$$P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c_j] \wedge [B(t_1) = b]\} = P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c_j]\} \tag{19}$$

Più in generale, se $C_1, \ldots, C_n$ sono osservabili tali che C_j non sia compatibile con C_{i+1}, e se $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, allora il principio di indeterminazione implica l'uguaglianza

$$\begin{aligned} &P\{[A(t_{n+1}) = a]|[C_n(t_n) = c_n] \wedge \ldots \wedge [C_2(t_2) = c_2] \wedge \\ &\wedge [C_1(t_1) = c_1]\} = P\{[A(t_{n+1}) = a]|[C_n(t_n) = c_n]\} \end{aligned} \tag{20}$$

(osserviamo che ora il primo membro della (7.17) ha senso operativo anche in un contesto quantistico, poiché nulla vieta di misurare con precisione arbitraria osservabili incompatibili, *a tempi diversi*).

Relazioni del tipo (20) sono ben note nella letteratura probabilistica classica con il nome di *proprietà di Markov*. Riassumendo, quindi: *il principio di indeterminazione implica che le probabilità condizionate che intervengono nella teoria quantistica hanno la proprietà di Markov*. (Osserviamo che abbiamo dimostrato quest'affermazione nel caso particolare in cui il condizionamento sia effettuato con osservabili ciascuna delle quali sia incompatibile con la successiva).

Nel caso generale – cioè quello in cui ogni osservabile è parzialmente con la successiva – quest'affermazione non è sempre vera.

Usando la proprietà di Markov nella forma dell'uguaglianza (19) si vede che le due espressioni (17) e (18) – che esprimono la probabilità condizionata (16) rispettivamente nel caso classico e nel caso quantistico – sono *formalmente* uguali, cioè entrambe assumono la forma:

$$\sum_j P\{[A(t_3)=a]|[C(t_2)=c_j]\wedge[B(t_1)=b]\}\cdot P\{[C(t_2)=c_j]|[B(t_1)=b]\} \tag{21}$$

L'uguaglianza però è solo formale. Infatti, mentre nel caso classico l'espressione (21) è uguale a $P\{[A(t_3)=a]|[B(t_1)=b]\}$ (teorema delle probabilità composte), ciò non è vero nel caso quantistico. Ciò è riflesso, nel modello matematico, del differente significato assunto dalla proprietà di Markov – cioè la (20) – nel caso classico e in quello quantistico. Nel caso classico essa esprime il fatto che, se il presente è noto (cioè se si sa che $[C_n(t_n)=c_n]$) ogni informazione sul passato (cioè i valori di $C_1(t_1),\ldots,C_{n+1}(t_{n+1})$) *è superflua*. Nel caso quantistico essa esprime il fatto che, se il presente è noto, allora per calcolare la probabilità di un evento futuro le informazioni sul passato *non sono disponibili* (abbiamo già detto che nel caso di variabili parzialmente compatibili la formulazione è più delicata). D'altra parte l'uguaglianza

$$P\{[A(t_3)=a]|[B(t_1)=b]\}=\sum_j P\{[A(t_3)=a]|[C(t_2)=c_j]\wedge$$
$$\wedge[B(t_1)=b]\}\cdot P\{[C(t_2)=c_j]|[B(t_1)=b]\} \tag{22}$$

è universale in un modello probabilistico classico, cioè in un modello in cui tutte le osservabili $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sono variabili casuali definite su un singolo spazio di probabilità, e le probabilità condizionate sono quelle da esse definite. Poiché quest'uguaglianza non vale nel caso quantistico, dobbiamo concludere che non esiste alcun modello probabilistico classico con le seguenti proprietà:

(i) tutte le osservabili $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, sono variabili casuali (per ogni tempo t);

(ii) le probabilità condizionate della teoria quantistica coincidono con quelle del modello probabilistico;

(iii) vale la seguente forma debole del principio di indetermianzione: se B e C sono grandezze incompatibili nel senso della teoria quantistica, A è una grandezza qualsiasi, e $t_1 < t_2 < t_3$ sono istanti di tempo, allora

$$P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c] \wedge [B(t_1) = b]\} = P\{[A(t_3) = a]|[C(t_2) = c]\}$$

In altri termini: *i presupposti fisici della teoria quantistica* (principio di indeterminazione) *e il suo contenuto statistico* (probabilità di transizione) *non sono esprimibili all'interno di un modello probabilistico classico.*

Come abbiamo già detto, la variazione tipicamente quantistica della probabilità nella transizione

$$P\{[A = a]|[B = b]\}|[B = b]\} \to \sum\{[A = a]|[C = c_j]\}P\{[C = c_j]|[B = b]\}$$

(collasso del pacchetto d'onde) ha suscitato discussioni e perplessità. K. Popper, nell'articolo *Tredici tesi sulla meccanica quantistica*, attribuisce tali perplessità a ciò che egli chiama "il grande pasticcio quantistico", e cioè il considerare una distribuzione di probabilità come una proprietà fisica di un sistema. Infatti, se si accetta questo punto di vista, sorge spontanea la domanda: come può una variazione di una proprietà fisica di un sistema, magari molto lontano da noi? E, se il variare dell'informazione può provocare la variazione di una proprietà fisica di un sistema, allora. tenuto conto del fatto che la informazione può essere diversa da individuo a individuo, *quale* individuo provocherà, con una variazione della *sua* informazione, la variazione della proprietà fisica del sistema? Domande di questo genere sono alla base della maggior parte dei cosiddetti "paradossi della teoria quantistica". Tali paradossi non riguardanao la teoria in sé (come ad esempio il paradosso di Loschmidt riguarda la possibilità di dedurre una teoria irreversibile come la termodinamica da una teoria reversibile come la meccanica). Essi riguardano una particolare interpretazione della teoria, e precisamente l'interpretazione secondo cui le proprietà di un sistema (per esempio il fatto che una certa grandezza assuma in un certo istante un determinato valore) non sono attributi intrinseci, ma qualità virtuali, potenzialità. (M. Jammer ha sottolineato l'analogia tra questa concezione e il concetto aristotelico di "potentia"). Il passaggio della potenzialità all'attualità si realizzerebbe con l'atto della misura, che risulterebbe perciò agire sul sistema in due modi: come disturbo e come costrizione al passaggio dalla potenzialità all'attualità. Molti autori hanno escogitato degli esempi concreti per dimostrare come accertare tale interpretazione conduca a conseguenze paradossali. Einstein, Podolsky e Rosen hanno mostrato come ciò implichi l'introduzione, nella teoria, di azioni a distanza "discontinue", tali cioè che l'effetto dell'azione istantanea non diminuisce all'aumentare della distanza. Schrödinger ha mostrato che una tale concezione si propagherebbe al mondo macroscopico, per cui di un dato individuo (per esempio un gatto) ad un dato istante non si potrebbe dire se è vivo o morto, ma solo che si trova in uno stato misto di vita e di morte virtuali; soltanto il nostro tentativo di verificare in quale stato si trovi lo farebbe precipitare in uno stato definito di vita o di morte. Wigner ha mostrato che in una tale interpretazione come fattore attivo di passaggio dalla potenzialità all'attualità interverebbe non soltanto l'atto della misura, ma anche la sola presa di coscienza del risultato di essa, ec...

L'interpretazione delle proprietà fisiche di un sistema come "potenzialità" viene in genere attribuita alla cosiddetta "scuola di Copenhagen". Il punto di vista opposto secondo il quale, per esempio, una grandezza osservabile associata ad un oggetto ha un ben preciso valore in un certo istante, indipendentemente dal fatto che si misuri o no tale grandezza, è basato su quello che Einstein, Podolsky e Rosen chiamano il *postulato del realismo*. Si tratta di un postulato poiché, per la sua stessa formulazione, è impossibile darne una dimostrazione operativa; per dirla con B. Russel: "... come si fa a dire che può piovere in un paese in cui non ci sono occhi (né strumenti di altro genere)[6] per controllare se piove o no?".

Nell'analisi precedente, senza analizzare le motivazioni (tutt'altro che banali) che hanno spinto Bohr, Heisenberg e altri ad elaborare la "interpretazione di Copenhagen", ci siamo limitati a dimostrare ch eil "postulato del realismo" è sufficiente per dedurre tutte le affermazioni della teoria. La variazione discontinua della probabilità attribuita ad uno stesso evento corrisponde alla variazione delle condizioni sotto le quali tale probabilità viene valutata. Un tale punto di vista viene detto "statistico", ed è stato sostenuto da molti autori, in particolare da K. Popper. Tuttavia, nella nona tesi dell'articolo già menzionato, Popper afferma che la riduzione del pacchetto d'onda non è una caratteristica della teoria quantistica, ma di tutta la teoria

[6]La precisione tra parentesi è mia.

delle probabilità. L'analisi precedente mostra che le cose non stanno cosi'. La variazione discontinua della probabilità condizionata al variare della condizione (cioè della nostra informazione) è effettivamente una caratteristica generale della probabilità, e non specifica della teoria quantistica, ma il modo di variare della probabilità all'atto di una misura incompleta (nel senso di Feyerabend) è una peculiarità del modello. Gli esempi seguenti (uno riferito al caso classico, e uno al caso quantistico) illustrano in due casi particolari la situazione generale espressa nel diagramma.

Caso classico. Un'urna contiene n palline, di cui n_r rosse e n_b bianche; la probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è n_r/n. Se estraggo a caso k palline, e non le guardo, la probabilità che la $(k+1)$esima pallina estratta sia rossa è ancora – come si verifica immediatamente – n_r/n. Se però le guardo e scopro che, delle k estratte, k_r sono rosse e k_b bianche, allora la probabilità che la $(k+1)$esima pallina estratta sia rossa diventa $(n_r - k_r)/(n - k)$. In diagramma:

Caso quantistico. Si considerano delle osservabili che – in una opportuna unità di misura – possono assumere solo i valori ± 1–spin in una data direzione spaziale. Siano α, β, γ tre direzioni spaziali e denotiamo rispettivamente S_α, S_β, S_γ, lo spin in queste direzioni. Inizialmente il sistema è preparato in modo che la probabilità che S_α sia $+1$ è $\cos^2(\beta\alpha)$, dove $(\beta\alpha)$ è l'analogo tra le direzioni β e α. Se si misura S_γ e non si legge il risultato, secondo la teoria quantistica, la probabilità che S_α sia $+1$ diventa $\cos^2 \frac{(\beta\gamma)}{2} \cos^2 \frac{(\gamma\alpha)}{2} + \sin^2 \frac{(\beta\gamma)}{2} \sin^2 \frac{(\gamma\alpha)}{2}$. Se si legge il risultato della misura di S_γ e si trova $+1$, la probabilità che S_γ sia $+1$ diventa $\cos^2 \frac{(\gamma\alpha)}{2}$.

8 Variabili nascoste

L'analisi precedente mette in luce due importanti aspetti della teoria quantistica:

(i) la conclusione delle analisi di Bohr, Heisenberg,..., secondo la quale una componente statistica nella descrizione della natura è inevitabile in linea di principio;

(ii) il fatto che la costruzione del modello matematico della teoria quantistica fa uso di un formalismo statistico completamente diverso da quello classico.

Come il secondo principio della termodinamica, cosı i principi di indeterminazione non sono il risultato di una dimostrazione logica, bensı la sintesi e l'estrapolazione di esperienze reali o cencettuali. Inoltre, anche accettando tale principi, nessuno ha finora dimostrato (nonostante alcune affermazioni del contrario) che essi – integrati eventualmente da altre *richieste fisiche* – determinano la necessità del nuovo formalismo statistico. Perciò è legittimo porsi le seguenti due domande:

(8.1) Una componente statistica nella descrizione della natura è davvero necessaria in linea di principio?

(8.2) Supponenedo pure una risposta affermativa a questa domanda, è davvero necessario l'abbandono *anche* del modello probabilistico classico a favore del nuovo formalismo quantistico?

Numerose ricerche sono state dedicate al tentativo di dimostrare che la risposta a entrambe queste domande, o almeno a una di esse, è negativa. La prima domanda riguarda la questione della *completezza* della teoria quantistica. Per secoli lo studio dei fenomeni naturali è stato basato su due postulati: il principio di *ragion sufficiente* e il principio di *completa accessibilità* delle leggi naturali all'intelletto umano. Il contenuto del primo è che comportamenti diversi di un sistema sono dovuti a cause diverse; il secondo afferma che tali cause sono comprensibili con la ragione e discernibili con l'esperimento.

Dal principio di ragion sufficiente segue che ogni descrizione statistica (cioè basata su probabilità condizionate) è *incompleta*. Per esempio, se A e B sono grandezze osservabili associate a un sistema, l'affermazione

$$P\{A = a|B = b\} = \text{ Prob. } \{\text{che } A = a \text{ se è noto che } B = b\} = p$$

significa che, se l'unica informazione che abbiamo sul sistesma è il fatto che $B = b$, allora sulla grandezza A l'unica cosa che si può dire è che, effettuando la misura di A su un gran numero di sistemi, la frequenza relativa del valore $A = a$ sarà circa p. Il principio di ragion sufficiente afferma che esistono delle grandezze $C_1, \ldots, C_n$ associate al sistema tali che

$$P\{A = a|B = b \wedge C_1 = c_1 \wedge \ldots \wedge C_n = c_n\} = 0 \text{ oppure } 1 \qquad (23)$$

In altri termini, esistono delle grandezze $C_1, \ldots, C_n$ tali che la relazione tra l'insieme $(B, C_1, \ldots, C_n)$ e la grandezza A è causale e non statistica. La differenza di comportamento riscontrabile nei sistemi cui sappiamo solo che $B = b$ si spiega tenendo conto del fatto che in sistemi diversi le grandezze $C_1, \ldots, C_n$ assumono valori diversi. *Completando* la nostra informazione con la assegnazione dei valori di $C_1, \ldots, C_n$ ogni indeterminazione scompare. Come abbiamo visto, tutte le affermazioni della teoria quantistica sono riducibili al calcolo di probabilità condizionate $P\{A = a|B = b\}$ e spesso tali affermazioni sono statistiche in senso stretto (cioè queste probabilità non assumono soltanto i valori 0 o 1). In questo senso la teoria quantistica è *incompleta*. D'altra parte, se crediamo nel principio di ragion sufficiente, dobbiamo ritenere che esistano delle grandezze $C_1, \ldots, C_n$ tali che valga la (23), la cui conoscenza cioè determini in modo univoco (causale) il valore della grandezza AA. E, se crediamo nel principio di complet accessibilità delle leggi della natura alla conoscenza umana, dobbiamo ritenere che tali grandezze siano accessibili alla nostra teoria e suscettibili di rivelazione sperimentale. Ma il principio di indeterminazione implica che, se vogliamo che le affermazioni di una teoria riguardino solo quantità osservabili, allora tale teoria conterrà sempre delle affermazioni statistiche; in particolare il processo di completamento mediante introduzione di "variabili nascoste" sarà impossibile. Quindi, se accettiamo il principio di indeterminazione, dobbiamo scegliere tra due rinuncie: o rinunciamo al principio di ragion sufficiente, o rinunciamo al principio di completa accessibilità delle leggi della natura da parte dell'uomo. Poiché entrambi i principi (e specialmente il primo) sono profondamente radicati nella psicologia umana, è comprensibile che, prima di accettare una tale rinuncia, molte persone ritengano necessario esplorare a fondo tutte le altre eventuali possibilità. Le teorie di *variabili nascoste* sono nate da queste indagini.

In generale, se riteniamo una teoria completamente determinata da:

(i) l'insieme $\mathcal{O}$ delle grandezze osservabili;

(ii) l'insieme $\mathcal{A}$ delle sue affermazioni, espresse nella forma di probabilità condizionate[7] $P\{A = a|B = b\}$;

allora una teoria di variabili nascoste relativa ad $\{\mathcal{O}, \mathcal{A}\}$ è un'altra teoria $\{\mathcal{O}', \mathcal{A}'\}$ con le seguenti proprietà:

(8.4) ogni grandezza osservabile per la vecchia teoria è anche una grandezza osservabile per la nuova teoria (cioè $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$);

(8.5) ogni affermazione della vecchia teoria è un'affermazione della nuova teoria (cioè $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$);

(8.6) se A, $B \in \mathcal{O}$ (cioè sono osservabili della vecchia teoria), allora esistono delle osservabili[8] $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{O}'$ (cioè della nuova teoria) tale che

$$P\{A = a|B = b \wedge C_1 = c_1 \wedge (\ldots \wedge C_n = c_n\} = 0 \text{ oppure } 1 \qquad (24)$$

cioè tale che i valori di ogni grandezza della vecchia teoria siano determinati in modo causale dai valori di alcune grandezze della nuova.

Esempi di grandezze che potrebbero servire a spiegare la diversa evoluzione di sistemi che partono da condizioni considerate identiche dalla teoria quantistica sono: la storia passata del sistema, la sua posizione relativa nello spazio e nel tempo, oppure certe altre grandezze associate ai sistemi macroscopici che oggi i nostri strumenti non ci permettono di osservare e la nostra teoria di concepire, ma che, forse, potranno un domani essere osservate.

[7] Le affermazioni di una qualsiasi teoria si possono ridurre ad affermazioni del tipo: se la grandezza B assume (al tempo t) il valore b, allora la probabilità che il valore della grandezza A (al tempo t') sia a è $P\{A = a|b = b\}$. I simboli A, B possono anche denotare più grandezze $(A_1, \ldots, A_n)$ o $(B_1, \ldots, B_k)$, eventualmente a tempi diversi.

[8] Sia n che $C_1, \ldots, C_n$ possono dipendere sia da A che da B.

Il punto essenziale è che una tale teoria dovrebbe essere una *teoria fisica*, cioè a ciascuna delle affermazioni della nuova teoria deve corrispondere un ben definito procedimento di misura che permetta di confrontare tale affermazione con i dati dell'esperienza. Non è tanto importante che tale confronto sia effettivamente realizzabile con gli strumenti che abbiamo *oggi* a disposizione, ma è fondamentale che non ci siano ostruzioni che, in linea di principio, precludano la possibilità di un tale confronto (cioè ostruzioni del tipo di quelle messe in luce dalle analisi di Bohr e Heisenberg). In caso contrario una tale teoria sarebbe una mera affermazione di fede nel principio di ragion sufficiente, nonostante l'impossibilità di verificarlo in alcuni casi concreti. A questa si potrebbe contrapporre l'altra affermazione di fede (altrettanto incontrollabile operativamente) secondo cui tale principio non ha valore a livello microscopico: le "stesse cause" possono condurre a "effetti" diversi (più precisamente: due sistemi che a un certo istante si trovano in condizioni che la fisica classica giudica *equivalenti*, possono avere una evoluzione diversa). Alcuni, che adottano questo punto di vista, scorgono nella non validità del principio di ragion sufficiente a livello microscopico una confutazione della distinzione kantiana tra "mondo della necessità" e "mondo della libertà": la libertà, il libero arbitrio, interverrebbe anche nelle leggi fondamentali della natura, e non soltanto nell'ambito del comportamento umano. Altri ritengono che la non validità del principio di ragion sufficiente si armonizzi bene con "... la fede in Dio, che continuamente fa le sue decisioni sugli eventi in questo mondo, decisioni imprevedibili per noi..." (F.J. Belifante).

Se si accettano le conclusioni delle analisi di Bohr, Heisenberg.... bisogna concludere che la scienza della natura non può fornire alcun criterio di scelta tra questi punti di vista: non essendo soggetti ad alcun tipo di verifica sperimentale, essi appartengono al dominio delle convinzioni personali e non della scienza.

La formulazione data sopra del problema delle variabili nascoste riguarda unicamente la domanda (8.1), cioè la completezza della teoria quantistica in quanto teoria fisica. Un modo di affrontare il problema è quello di tentare di dimostrare che le analisi di Bohr, Heisenberg non hanno validità universale, cioè che le limtiazioni che esse pongono sulla misurabilità simultanea di grandezze classiche sono solo di tipo tecnico, e non concettuale. In questo caso quindi non ci sarebbe bisogno di introdurre nuove grandezze (varaiabili nascoste), si tratterrebbe solo di completare laa teoria quantistica in modo da arrivare ad una descrizione *esatta* dei sistemi microscopici. Queto approccio al problema fu sviluppato da A. Einstein in un periodo che possiamo individuare tra il 1927 e il 1935. Einstein escogitò una serie di ingegnosi esprimenti ideali con i quali tentava di dimostrare la misurabilità simultanea di grandezze che, secondo le analisi di Bohr e Heinseberg, non lo erano. Tuttavia Bohr riuscı sempre a dimostrare che gli esperimenti ideali escogitati da Einstein per confutare il principio di indeterminazione conducevano, dopo un'analisi più appprofondita, ad una sua conferma.

Molti autori hanno tentato di interpretare la teoria quantistica come una teoria esatta di campo, in analogia con l'ottica classica (Shrödinger, de Broglie,...), con l'idrodinamica classica (Madelung, Bohm,...). Altri ancora (Fürth, Feynes, Wentzel,...), sviluppando l'analogia formale tra l'equazione di Schrödinger e l'equazione di diffusione, hanno ipotizzato l'esistenza di un mezzo, o di particelle, che provoca le fluttuazioni statistiche riscontrate a livello microscopico in modo analogo a quello in cui, nella teoria del moto browniano, gli urti delle molecole di un liquido provocano le fluttuazioni nel moto di una particella sospesa in esso (le variabili nascoste sarebbero, in questo caso, quelle che descrivono il moto di queste ipotetiche particelle (o del mezzo) sub–microscopiche).

Queste linee di ricerca sono state sviluppate fino ai nostri giorni. Tuttavia, col passare del tempo, il dibattito sulle variabili nascoste si è venuto pian piano spostando dal problema fisico di comprendere se tali grandezze esistano e quali possano essere, al problema di costruire un modello probabilistico classico per la teoria quantistica (cioè dalla domanda (8.1) alla domanda (8.2)). La connessione tra i due problemi sta nella speranza che, una volta risolto il problema di costruire un modello probabilistico classico per la teoria quantistica, i parametri che intervengono in tale modello risultino suscettibili di una interpretazione fisica che ne giustifichi il ruolo di "variabili nascoste". In questi ultimi anni quindi il problema principale della teoria delle variabili nascoste è stato il sguente: esiste un modello matematico esatto soggiacente al modello statistico della teoria quantistica? (Per modello esatto intendiamo un modello matematico in cui tutte le osservabili siano funzioni (nel senso consueto) di un numero finito di esse o, più in generale, funzioni definite su un certo spazio Γ (lo spazio dei parametri nascosti)[9]. Ma il fatto che un modello esatto sia "soggiacente al modello statistico della teoria quantistica" non è una proprietà che si può tradurre in modo univoco in linguaggio matematico.

[9]Se tutte le osservabili sono funzioni di n di esse, $A_1, \ldots, A_n$, allora lo spazio Γ è sp $(A_1) \ldots$ sp (A_n), dove sp (A_j) = insieme di tutti i possibili valori di A_j.

Autori diversi hanno tradotto in modi diversi questa proprietà in linguaggio matematico, e di conseguenza sono pervenuti a risposte diverse alla domanda posta sopra.

Nel Section 7 abbiamo interpretato questa proprietà nel senso che ad ogni osservabile quantistica A deve corrispondere una variabile casuale che assume gli stessi valori di A e che tale la probabilità condizionata che $A = a$ se $B = b$ sia la stessa nel modello quantistico e in quello esatto. Abbiamo visto che, se richiediamo inoltre che il modello probabilistico soddisfi una forma debole del principio di Heisenberg, allora la risposta è negativa, cioè non esistono modelli probabilistici classici con questa proprietà.

Altri autori non tengono conto del fatto che le probabilità in teoria quantistica sono sempre condizionate, e si limitano a cercare una corrispondenza.

$$\textit{osservabili quantistiche} \rightarrow \textit{variabili casuali classiche} \tag{25}$$

che conservi i valori medi. In questo caso la risposta al problema se sia possibile o no costruire una tale corrispondenza dipenderà dalle proprietà che su tale corrispondenza si imporrano. Nel presente lavoro non accenneremo neppure ai vari modelli matematici che sono stati costruiti sulla base di differenti proprietà imposte alla corrispondenza (8.8), o ai vari teoremi di impossibilità dimostrati sulla base della richiesta di altre proprietà. Ci limitiamo ad osservare che è stato dimostrato che, sotto ipotesi molto generali sulla corrispondenza (8.8), i modelli probabilistsici classici conducono a risultati in contrasto con quelli dedotti dalla teoria quantistica (disuguaglianze di Bell e di Wigner). Ciò ha provocato un cambiamento nel punto di vista di alcuni ricercatori: se inizialmente le teorie di variabili nascoste erano viste come un raffinamento della teoria quantistica nella direzione di una teoria esatta, ora l'esistenza di questa vasta classe di modelli e la "naturalezza" delle ipotesi su cui essi si basano ha suggerito la possibilità di verificare sperimentalmente la stessa *validità* della teoria quantistica. Cioè di fare un confronto tra le previsioni sperimentali di questi modelli di tipo classico e quelle della teoria quantistica. Vari esperimenti sono stati fatti. Per ora i dati sembrano favorire la teoria quantistica, ma altri esperimenti sono in corso.

9 Probabilità non kolmogoroviane e geometrie non euclidee

Nel presente lavoro abbiamo più volte sottolineato il fatto che dalla teoria quantistica emerge non soltanto la necessità di una descrizione statistica della natura, ma anche la necessità di una nuova teoria delle probabilità. La situazione della probabilità oggi presenta notevoli analogie con quella della geometria nella prima metà del XIX secolo, anche se ci sono delle differenze, la più significativa delle quali è che, mentre nel caso della geometria fu una scoperta concettuale che permise di superare il pregiudizio empirico dell'unicità a priori delle forme spaziali, nel caso della teoria quantistica sono state una serie di scoperte empiriche che hanno condotto al superamento del pregiudizio concettuale della sostanziale (cioè a meno di varianti tecniche) unicità del modello probabilistico.

Ma cominciamo a considerare le analogie: da un paragone tra il dibattito sui fondamenti della probabilità e quello sui fondamenti di una scienza molto più antica e studiata, come la geometria, potranno emergere utili indicazioni sugli sviluppi futuri della problematica relativa ai fondamenti della probabilità.

Per più di due millenni alla base del pensiero geometrico era stato il pregiudizio concettuale dell'esistenza di uno spazio come entità assoluta di cui la geometria doveva costituire il modello matematico. La teorizzazione di questo punto di vista trova la sua espressione sistematica nella teoria di Kant in cui lo spazio, inteso come spazio euclideo, viene considerato (insieme con il tempo, anch'esso assoluto) come una forma a priori della conoscenza umana.

Con l'apparizione dei primi modelli di geometrie non euclidee, con Boylai e Lobacevski, e delle analisi più profonde di Gauss e Riemann, questo pregiudizio viene spazzato via, e si comprende non solo la molteplicità a priori degli spazi possibili, ma anche la radice concettuale di tale molteplicità, ossia la *località* delle nostre percezioni spazili e il fatto che percezioni locali possono essere connesse tra loro in molti modi, dando luogo a configurazioni globali completamente diverse. Non solo viene superato il pregiudizio dell'unicità del modello di spazio, ma la molteplicità dei modelli viene posta in relazione con una molteplicità di rappresentazioni concettuali (o di ipotesi fisiche) di cui i vari modelli costituiscono la traduzione fedele. Cosı, per esempio, se fissiamo la dimensione spaziale uguale a due, e richiediamo la costanza della curvatura (più l'ipotesi di completezza geodesica) esistono solo tre classi di modelli matematici che soddisfano queste condizioni, e la scelta di una classe di modelli invece che di un'altra corrisponde a una precisa rappresentazione concettuale (o ipotesi fisica) sulle proprietà dello spazio, e cioè l'avere curvatura (o ipotesi fisica) sulle proprietà dello spazio, e cioè l'avere curvatura nulla (il piano), positiva (la sfera), negativa (il piano di Lobachevsky). Più in generale: la realizzazione della molteplicità a priori dei modelli di spazio pone il problema matematico della classificazione di tali modelli in termini di "proprietà significative" (cioè corrispondenti a una rappresentazione concettuale), e il problema fisico della decisione su quale di questi modelli descriva più fedelmente le proprietà dello "spazio fisico". Come è noto quest'ultimo problema è alla base della teoria della relatività generale di Einstein.

È importante osservare che nel nuovo modello di spazio il vecchio viene conservato in due modi. Innanzitutto in senso locale: regioni sufficientemente piccole di ogni spazio non euclideo sono "modellate" sullo spazio euclideo. In secondo luogo, in un senso asintotico, più sottile, secondo cui il nuovo modello "si riduce" al vecchio al tendere di alcuni parametri ad un valore limite (per esempio, lo spazio curvo "si riduce" allo spazio piatto – euclideo – al tendere a zero della curvatura).

Sotto questi aspetti la relazione tra probabilità quantistica e probabilità classica presenta notevoli analogie con quella tra geometrie non euclidee e geometria euclidea: anche la probabilità quantistica si riduce *localmente* a quella classica; soltanto in questo caso il termine "locale" non va inteso in senso spaziale, ma riferito ad un insieme di osservabili mutuamente compatibili. Inoltre, poiché nel limite in cui il parametro che rappresenta la costante di Planck tende a zero tutte le osservabili sono mutuamente compatibili, anche la probabilità quantistica si riduce, asintoticamente, a quella classica. Sulla base di queste analogie ci riferiremo alla probabilità quantistica e alle sue generalizzazioni come a modelli "non kolmogoroviani" di probabilità.

L'analogia tra geometrie non euclidee e probabilità non kolmogoroviane si rompe però in un punto importante: nel caso della geometria fin dall'inizio (cioè dopo i fondamentali risultati di Gauss e Riemann) le differenze tra i vari modelli matematici sono state interpretate in termini di parametri fisicamente significativi, cioè corrispondenti a una rappresentazione concettuale indipendente dal modello (per esempio, curvatura, metrica, ecc.). Inoltre in alcuni casi è stato possibili elencare una serie di proprietà "intuitive" che determinano *univocamente* il modello matematico, cioè dimostrare la necessità di un modello matematico corrispondente a una data rappresentazione concettuale. Purtroppo finora il processo, nel caso della probabilità quantistica, non ha ancora prodotto risultati cosı completi. Sappiamo, come è stato ampiamente discusso nei paragrafi precedenti, che il principio di indeterminazione è *una* delle radici della differenza tra modello classico e modello quantistico. Non possiamo dire se sia la sola differenza, poiché aattualmente, al contrario di quanto accade per la geometria, non è possibile dimostrare che il modello probabilistico quantistico è la naturale (e unica) traduzione matematica di alcuni ben precisi principi fisici[10].

È senz'altro vero che il modello quantistico trova la sua giustificazione principale negli enormi successi da esso ottenuti nella comprensione della natura, e non in considerazioni di carattere puramente concettuale. Tuttavia la storia della scienza dimostra che spesso una chiarificazione a livello profondo dei fondamenti di una disciplina ha dato origine a un nuovo e vigoroso sviluppo della disciplina stessa. Cosı è avvenuto per la geometria, ed è forse più che una semplice speranza attendersi che lo stesso possa avvenire per la teoria quantistica.

Summary

The role of probability in quantum theory is discussed. A new approach to the quantum theory of measurement is proposed. The main idea of this approach consists in the statement that the so called "collapse of the wave packet" is nothing but the peculiar form assumed, in a quantum theoretical framework, by the theorem of composite probabilities. This form is a direct consequence of a weak form of the Heisenberg indeterminacy principle which, when formulated mathematically turns out to be a generalization of the usual Markov property.

[10]Cfr. tuttavia la nota 1.