LA PROBABILITÀ QUANTISTICA

Luigi Accardi

Centro matematico Vito Volterra
Dipartimento di Matematica
Università di Roma Tor Vergata

Indice

1 Il nuovo modello probabilistico **6**

2 Gli assiomi della teoria classica delle probabilità **6**

3 Il modello quantistico puro **12**

4 Conclusioni **16**

Agli inizi dell'800 ebbe inizio una rivoluzione scientifica che, relegata inizialmente al ristretto ambiente dei matematici, doveva trovare, circa un secolo dopo, spettacolari applicazioni nelle teorie di Einstein. Ciò che accadde in quel secolo fu il superamento di uno dei più radicati pregiudizi della storia dell'uomo: l'unicità delle categorie spaziali. In quel secolo si comprese che gli assiomi sui quali è costruita la geometria euclidea non sono una lista di proprietà dello spazio, ma la definizione di un modello di spazio. L'aspetto profondo di questa conquista fu che furono forgiati strumenti che permettevano di distinguere tra i vari modelli di spazio mediante misure effettuate all'interno dello spazio stesso (questo è il contenuto del famoso "theorema egregium" di Gauss). Da quel momento la geometria cessò di essere lo studio delle proprietà di un singolo modello di spazio (quello di Euclide), per diventare lo studio dei possibili modelli di spazio. Circa un secolo dopo Einstein fornì una interpretazione fisica di questo nuovo quadro concettuale aggiungendo a questo schema un nuovo elemento, e cioè una ipotesi sul modo un cui la fisica (più specificamente la distribuzione della materia) determina la struttura dello spazio. Su questa ipotesi, che è alla base della teoria della relatività generale, si basa la moderna cosmologia – una affascinante sintesi di fisica e geometria.

Il concetto di "caso" è meno primordiale di quello di "spazio". L'idea che il caso possa esser soggetto a leggi è tutt'altro che immediata, addirittura contraria all'intuizione ingenua che vede il caso come assenza totale di leggi. Il livello di maturità culturale e scientifica necessario per concepire un programma di studio sistematico delle leggi del caso è certamente più elevato di quello richiesto per sviluppare un analogo programma relativo alle proprietà dello spazio. Perciò non è stupefacente che un tale programma sia stato impostato quasi due millenni dopo l'analogo programma per la geometria.

D'altra parte i tempi dello sviluppo scientifico si sono accorciati in modo proporzionale al crescere della percentuale di umanità che si dedica alla ricerca scientifica (il numero di persone che oggi lavoro nella ricerca scientifica è superiore alla somma di tutti coloro che si sono occupati di scienza dalle origini dell'umanità fino alla seconda guerra mondiale). Così, a poco più di trecento anni dalla nascita della teoria delle probabilità come scienza quantitativa, oggi stiamo vivendo in questa scienza una rivoluzione analoga a quella che, nell'800, sconvolse i fondamenti della geometria nel modo indicato sopra.

A differenza di ciò che è accaduto nella geometria, dove il superamento di un pregiudizio concettuale (l'unicità del modello matematico di spazio) ha gettato le basi per nuove sconvolgenti scoperte nel campo della fisica, nel caso della probabilità è stata una scoperta fisica a gettare le basi per il superamento di un pregiudizio concettuale (l'unicità del modello matematico di leggi del caso). Nei primi anni del XX° secolo la visione deterministico–laplaciana della natura raggiunge il suo culmine con le teorie di campo di Einstein e nello stesso tempo il suo superamento con la fisica quantistica. Con la nuova fisica la descrizione probabilistica della natura, che fino ad allora era stata vista come una necessità pratica, eliminabile in linea di principio, diventa una necessità di principio. Una delle tante formulazioni del principio d'indeterminazione di Heisenberg è la seguente: esistono in natura coppie di osservabili con la proprietà che ad ogni informazione esatta su una di esse deve necessariamente corrispondere una informazione statistica sull'altra. In altri termini: ogni teoria che accetti la validità del principio di Heisenberg contiene delle affermazioni statistiche che non possono essere ricondotte, neppure in linea di principio, ad affermazioni esatte.

Come si vede il cambiamento di prospettiva rispetto alla visione deterministico–laplaciana è drastico. Secondo questa un matematico infinitamente bravo che conoscesse con precisione infinita lo stato dell'Universo a un certo istante, potrebbe dedurre dalle equazioni una informazione esatta e completa su tutto il passato e tutto il futuro dell'universo. Secondo la nuova fisica le equazioni fondamentali della natura danno solo una informazione statistica su certe grandezze e quindi una informazione infinitamente precisa sullo stato dell'universo in un certo istante è non solo impossibile (per il principio di Heisenberg) ma anche qualora fosse resa disponibile da una benevola divinità a un matematico infinitamente bravo, non permetterebbe una conoscenza precisa del futuro e del passato, ma solo una conoscenza statistica poché le equazioni su cui un tale matematico dovrebbe basarsi, non descrivono l'evoluzione dello stato, ma quella della probabilità.

Questo cambiamento di prospettiva fu subito colto dai padri della nuova fisica e su di esso si è aperto un dibattito che dura fino ai nostri giorni. Il problema centrale affrontato in questo dibattito è il seguente: dobbiamo accettare che il livello fondamentale di descrizione della natura contenga una componente statistica ineliminabile in linea di principio? Non è possibile invece ritornare all'ideale ottocentesco di descrizione della natura (cioè una teoria di campo esatta)? Alcuni, come Einstein, non hanno mai voluto rinunciare a quest'ultima possibilità, ma nessuno dei sostenitori di questa tesi è riuscito a produrre un modello matematico veramente soddisfacente e perciò la maggioranza dei ricercatori contemporanei ha (più o meno implicitamente) accettato l'abbandono della speranza di una descrizione delle leggi fondamentali della natura in termini non statistici.

Il dibattito sul problema della scelta tra determinismo e indeterminismo (che sarebbe più esatto qualificare come scelta tra l'uso di modelli esatti o statistici) si è protratto, con grande intensità per più di sessant'anni e ha oscurato un altro problema, più sottile e ad esso strettamente intrecciato: QUALE INDETERMINISMO? Nell'analogia con lo sviluppo storico della geometria, introdotta all'inizio del paragrafo, la situazione può essere paragonata a un ipotetico dibattito sulla relatività generale nel quale l'attenzione fosse concentrata sul problema generico dell'opportunità o meno di usare modelli geometrici in fisica, trascurando il fatto che la teoria della relatività non solo propone un modello geometrico dello spazio, ma che tale modello è NON EUCLIDEO, cioè non descrivibile con i tradizionali assiomi della geometria classica.

Allo stesso modo, il dibattito sui fondamenti della teoria quantistica si è sviluppato sullo sfondo dell'alternativa generica determinismo–indeterminismo, senza tener conto del fatto che, oltre a non essere deterministica, la teoria quantistica introduceva un calcolo delle probabilità basato su regole di tipo non classico.

Solo negli ultimissimi anni si è riusciti a raggiungere una completa chiarezza sulla struttura matematica di questo nuovo calcolo delle probabilità, sulle sue relazioni con il calcolo delle probabilità classico e sulle sue implicazioni relative al dibattito sui fondamenti della teoria quantistica il quale, da questa chiarificazione matematica è uscito completamente rinnovato e liberato per sempre da certi pseudo–paradossi che lo avevano condizionato negli ultimi cinquant'anni.

1 Il nuovo modello probabilistico

I pionieri della teoria quantistica erano bene al corrente del fatto che, alla base di questa teoria c'era un nuovo tipo di calcolo delle probabilità e avevano sviluppato delle regole empiriche soddisfacenti per utilizzare questo nuovo calcolo. Alcuni problemi fondamentali però restavano aperti, cioè: **(I.)** L'uso, in teoria quantistica, di un nuovo calcolo delle probabilità implica che alcuni degli assiomi elementari del vecchio calcolo delle probabilità non sono applicabili a questa teoria. Quali? **(II.)** Possiamo discriminare tra il vecchio e il nuovo calcolo delle probabilità in modo analogo a quello in cui il "theorema egregium" della geometria differenziale permette di discriminare tra modelli spaziali inequivalenti? **(III.)** Quali assiomi sono responsabili della diversa struttura matematica del nuovo calcolo delle probabilità?

In quanto segue cercherò di dare un'idea, sia pure approssimata e molto qualitativa, di come la matematica contemporeanea abbia risposto alle domande (I.), (II.) e (III.) e come, da queste risposte, il calcolo delle probabilità sia stato cambiato nella sua attualità e nelle sua prospettive.

2 Gli assiomi della teoria classica delle probabilità

Le nozioni di evento, osservabile, valore di una osservabile a un dato istante, saranno assunte come primitive. La nozione di probabilità di un evento sarà trattata assiomaticamente, cioè senza far riferimento ad alcuna specifica interpretazione di questo termine. In molte applicazioni alla fisica è utile pensare alla probabilità come a una frequenza relativa approssimata; nelle applicazioni alla sociologia, alla teoria delle decisioni, all'economia,... spesso non ha senso paragonare una probabilità a una frequenza relativa ed è preferibile pensare ad essa come a un grado di fiducia razionalizzato ed espresso quantitativamente mediante certi criteri.

Un calcolo delle probabilità è un insieme di regole che collega tra loro probabilità di eventi diversi e che quindi permette di dedurre, dalla conoscenza delle probabilità di certi eventi, la probabilità di altri. Queste regole possono essere dedotte da un insieme di assiomi fondamentali i quali, a loro volta, possono essere suddivisi in cinque gruppi: **(I.)** Assiomi di struttura – che descrivono le operazioni che si possono effettuare sugli eventi. **(II.)** Assiomi di normalizzazione – che descrivono i possibili valori delle funzioni di probabilità. **(III.)** L'assioma di finita additività – che esprime l'additività della probabilità su un insieme di eventi disgiunti. **(IV.)** Assiomi di continuità – che riguardano le probabilità di insiemi infiniti di eventi. **(V.)** Assiomi di condizionamento – che esprimono come varia la probabilità di un evento al variare dell'informazione disponibile su questo o su altri eventi.

Gli assiomi di struttura delle probabilità classica sono basati sulla corrispondenza biunivoca tra insiemi e proprietà che è alla base della teoria intuitiva degli insiemi: ad ogni insieme A si associa la proprietà P_A definita da:

$$P_A\,(x) \iff x \in \, A \tag{1}$$

e ad ogni proprietà P si associa l'insieme

$$A_P = \{x : P(x) \text{ è vera}\} \tag{2}$$

È ben noto che una applicazione acritica di questa corrispondenza conduce a paradossi (i famosi paradossi della teoria degli insiemi). Nel calcolo delle probabilità queste difficoltà si superano fissando a priori un unsieme Ω detto lo **spazio dei campioni** (o, a seconda delle interpretazioni, lo spazio degli eventi elementari, o delle traiettorie, o delle configurazioni,...) e ci si limita alla considerazione di una particolare sottoclasse $\mathcal{F}$ di parti di Ω e delle proprietà corrispondenti agli elementi di $\mathcal{F}$ secondo la corrispondenza (2.1). Gli elementi di $\mathcal{F}$ sono detti **eventi**.

Nella corripondenza tra insiemi e proprietà, definita dalle relazioni (2.1) e (2.2), i connettivi della logica elementare (e, o, non) corrispondono alle operazioni insiemistiche di intersezione, unione, complemento. Perciò chiedere che l'insieme delle proprietà di cui ci si occupa sia chiuso rispetto alle operazioni determinate dai connettivi logici elementari, equivale a chiedere che la famiglia $\mathcal{F}$ degli eventi sia chiusa rispetto alle operazioni insiemistiche di unione, intersezione, complemento. Si richiede inoltre che l'evento impossibile, denotato ϕ e corrispondente alla classe vuota, e l'evento certo, corrispondente a tutto l'insieme Ω, appartengano ad $\mathcal{F}$. Una famiglia con questa proprietà è detta **un'algebra booleana**. Se si richiede che anche le unioni numerabili di eventi di $\mathcal{F}$ appartengano ad $\mathcal{F}$, si parla di $\sigma -$ **algebra booleana**. Ciò conduce al primo assioma di struttura della probabilità classica: **(A1.)** Il modello matematico dell'insieme degli eventi ammissibili è un'algebra booleana, $\mathcal{F}$ di parti di un insieme Ω.

Assegnare una probabilità sull'insieme $\mathcal{F}$ degli eventi significa assegnare una funzione

$$P : A \,\in\, \mathcal{F} \,\longrightarrow\, P(A) \,\in\, [0,1] \tag{3}$$

con le due seguenti proprietà:

$$P(\Omega) = 1 \qquad \text{assioma di normalizzazione } (A2.) \tag{4}$$

$$A \cap B = \phi,\ A,\ B,\ \in \mathcal{F} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

(Assioma di finita additività) (A3.).

Il numero $P(A)$ è chiamato la **probabilità dell'evento** A. Una funzione $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ che soddisfa le due condizioni (2.4) e (2.5) è detta una misura di probabilità finitamente additiva. Se la P soddisfa l'ulteriore condizione (assioma di continuità, o di numerabile additività):

$$\lim_n P(A_n) = 0 \qquad (A4.) \tag{6}$$

per ogni successione (A_n) di eventi tale che

$$A_n \supseteq A_{n+1} \qquad ; \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi \tag{7}$$

allora la P è detta una misura di probabilità su $\mathcal{F}$.

Una terna $(\Omega,\ \mathcal{F}\ P)$ dove Ω è un insieme, $\mathcal{F}$ una $\sigma -$ algebra booleana e P una misura di probabilità su $\mathcal{F}$, è deta uno **spazio di probabilità**.

Dal punto di vista matematico, la teoria classica delle probabilità è lo studio delle proprietà degli spazi di probabilità.

Finora l'ultimo gruppo di assiomi della probabilità (gli assiomi di condizionamento) non sono entrati nella nostra discussione. In effetti, il riconoscimento del fatto che queste affermazioni costituiscono un nuovo gruppo di assiomi della probabilità è piuttosto recente. Basti pensare che nella classica monografia di Kolmogorov, del 1933, la nozione di probabilità condizionata viene introdotta come definizione e non come ulteriore assioma della teoria.

Da un punto di vista puramente matematico non c'è nulla di male in ciò: si introduce una definizione in una teoria e si studiano le proprietà dell'oggetto definito. Se si aggiunge che questa definizione ha dietro di se una storia di almeno due secoli, che essa ha funzionato estremamente bene in una molteplicità di applicazioni, che semplici considerazioni sulle frequenze relative ne mostrano la plausibilità,. . . ce n'è più che a sufficienza pe giustificare, da un punto di vista storico, la scelta della definizione classica.

Ma il tribunale della matematica ha un unico giudice, la ragione. La storia, l'utilità, l'intuito, la plausibilità, l'accordo dei più,. . . sono tutte cose che hanno la loro importanza ma che impallidiscono e scompaiono se non sostenute da una solida argomentazione razionale.

Nel caso della probabilità condizionata, ci chiediamo come varia la probabilità di un evento A se veniamo a conoscenza del fatto che un evento B ha avuto luogo. A questa domanda il Reverendo Bayes rispose, nel 1745, nel modo seguente: se $P(A)$ denota la probabilità dell'evento A prima che io conosca che B è accaduto e $P(A|B)$ è la probabilità di A dopo che io ho saputo che B è accaduto, allora

$$P(A|B) = \frac{P(A\ \cap\ B)}{P(B)} \tag{8}$$

Come si vede, il membro destro della (2.8) contiene solo probabilità che si riferiscono alla mia conoscenza prima di sapere che B era accaduto; mentre il membro sinistro contiene la probabilità aggiornata dalla nuova conoscenza.

Dal '700 in poi in tutti i testi di probabilità, dai più elementari ai più avanzati, la formula (2.9) è stata assunta come definizione del membro sinistro $P(A|B)$ – che è la probabilità dell'evento A condizionata dall'accadere dell'evento B.

L'affermarsi della teoria quantistica, nelle prime decadi del 20° secolo, ha messo in moto un processo culturale molto complesso che è culminato, alla fine degli anni '70 con una critica della formula (2.8) e un'analisi dei suoi presupposti impliciti. Il percorso storico che ha condotto alla critica della (2.8) come definizione di probabilità condizionata è stato lungo e tortuoso e non tenteremo neppure di riassumerlo qui. Ci limiteremo alle seguenti osservazioni:

(1.) La (2.8) definisce la probabilità condizionata nel senso che il membro destro, supposto noto, definisce il sinistro. Ma nel caso in cui la probabilità ai due membri della (2.8) possano essere stimate mediante due esperimenti diversi, la loro uguaglianza diventa un fatto sperimentale che può verificarsi o no e certamente non può essere assunta come definizione.

(2.) Se si verifica una situazione in cui il membro sinistro della (2.8) può essere misurato sperimentalmente e il membro destro no, lo stesso schema definitorio viene a crollare poiché si perviene alla situazione paradossale di tentare di definire una cosa misurabile mediante una cosa che non lo è.

È possibile tradurre queste perplessità concettuali in termini matematici? Per rispondere a questa domanda è conveniente utilizzare il metodo assiomatico: si elenca una serie di proprietà (assiomi) il cui complesso è equivalente alla (2.8). Se queste proprietà sono scelte bene, esse saranno sperimentalmente verificabili e perciò la applicabilità della (2.8) diventa una questione che può essere risolta sperimentalmente (una questione analoga, nel caso della geometria, potrebbe essere: lo spazio intorno a una data stella è curvo o no? Anche in questo caso la matematica ha forgiato gli strumenti tecnici che permettono di dare una risposta sperimentale a questa domanda).

Un elenco di assiomi, equivalenti alla formula (2.8) è la seguente:

(C1.) Sia $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ una famiglia di eventi, detta la famiglia dei condizionamenti ammissibili. Per ogni B e $\mathcal{F}_0$ esiste una misura di probabilità $P(\cdot|B)$ su $\mathcal{F}$ tale che

$$P(B|B) = 1 \tag{9}$$

(la probabilità di B, se so che B è avvenuto, è 1).

(C2.) Per ogni $B \in \mathcal{F}_0$ e per ogni $A \in \mathcal{F}$ tale che $A \subseteq B$

$$P(A) = 0 \implies P(A|B) = 0 \tag{10}$$

(se l'evento A era considerato impossibile prima di sapere che B era accaduto, esso continua ad essere considerato impossibile anche dopo aver saputo che B è accaduto).

(C3.) Se A e B sono come nell'assioma (C2.), allora

$$P(A|B) \geq P(A) \tag{11}$$

(sapere che B è vera aumenta la probabilità di una premessa di B. Per esempio: so che in una stanza c'è un essere vivente; A è l'evento: "quest'essere è una donna". Se vengo a sapere (evento B) che nella stanza c'è un essere umano (quindi $A \subseteq B$), mi aspetto che la probabilità dell'evento A non sia diminuita dopo questa informazione). **(C4.)** Se A e B sono come nell'assioma (C2.) allora la funzione

$$A \in \mathcal{F} \longrightarrow g_A := \frac{P(A|B)}{P(A)} \tag{12}$$

raggiunge il suo massimo per $A = B$.

Quest'ultimo assioma è il meno intuitivo di tutti. Per capirne il significato osserviamo che, a causa dell'assioma (C3.), il numero $g_A := P(A|B)/P(A)$ è sempre ≥ 1 e quindi si può interpretare come l'incremento nella probabilità di A dovuto al fatto di sapere che B è accaduto. Quindi, a causa dell'assioma (C1.)

$$g_B = 1/P(B) \tag{13}$$

L'assioma (C4.) afferma che, non solo B passa dalla probabilità $P(B)$ a 1 ma che, in questo passaggio il guadagno in probabilità dell'evento B è maggiore di quello di qualunque premessa di B.

È chiaro che, a priori, si può immaginare una situazione in cui la probabilità di B è molto vicina a 1 (diciamo $1-\varepsilon$) e perciò il guadagno in probabilità di B, nel passaggio da $P(\cdot)$ a $P(\cdot|B)$ è relativamente piccolo, mentre un altro evento A passa da una probabilità $P(A) = \delta$ a una probabilità $P(A|B) = 1-\eta$, con δ e η molto piccoli e tali che

$$(1-n)/\delta > 1/(1-\varepsilon) \tag{14}$$

Quindi l'evento A, pur non diventando certo, guadagna, nel passaggio da $P(\cdot)$ a $P(\cdot|B)$ più di quanto non abbia guadagnato l'evento B.

Non c'è niente di intrinsecamente assurdo in questa situazione, ed è perciò interessante, il fatto che essa non sia esprimibile nell'ambito del modello classico di probabilità.

In effetti la situazione è ancora più interessante: attingendo ai dati sperimentali prodotti nella teoria quantistica, si possono produrre esempi di situazioni in cui ciascuno degli assiomi (C2.), (C3.), (C4.) viene violato.

Il significato di questa violazione è reso chiaro dal seguente Teorema:

Teorema 1 *Nelle notazioni introdotte sopra, se vale l'assioma (C1.) allora gli assiomi (C2.), (C3.), (C4.) sono equivalenti al fatto che la probabilità condizionata $P(A|B)$ è espressa dalla formula di Bayes (2.8).*

In altri termini: per produrre dei dati sperimentali che violano la formula di Bayes (2.8) è sufficiente trovare dei dati statistici che soddisfano (C1.) e che violino anche uno solo dei postulati (C2.), (C3.), (C4.). Il vantaggio di queste proprietà rispetto alla formula (2.8) sta nel fatto che esse sono espresse unicamente in termini delle probabilità condizionate $P(A|B)$ e non fanno intervenire le probabilità congiunte $P(A \cap B)$ le quali non sono sperimentalmente misurabili nei casi in cui A e B siano soggetti delle limitazioni previste dal principio d'indeterminazione di Heisenberg. Il fatto che tali dati esistano effettivamente in natura significa che esistono in natura delle probabilità condizoinate che non possono essere descritte mediante la formula di Bayes (2.8), che è alla base del calcolo delle probabilità classica.

3 Il modello quantistico puro

Dal punto di vista probabilistico, i termini "osservabile" e "variabile casuale" sono sinonimi.

Nel modello probabilistico quantistico gli eventi che interessano sono del tipo: "l'osservabile A assume valori in un certo insieme I". Perciò per descrivere questo modello sarà utile introdurre alcune notazioni.

Sia T un insieme, che interpreteremo come l'insieme che indicizza tutte le osservabili di cui ci interesseremo. Per fissare le idee possiamo pensare a T come a un intervallo di tempo (per es. $[0, +\infty)$) e, per ogni $t \in T$ l'osservabile A_t sarà pensata come una quantità che descrive una informazione sperimentale di tipo massimale (cioè non ampliabile in modo non banale) disponibile sul sistema all'istante t. Come ulteriore semplificazione supporremo che le osservabili che c'interessano siano discrete, cioè: esiste un insieme numerabile S, indipendente da t, i cui punti vengono chiamati i valori delle osservabili $A_t(t \in T)$ tale che l'insieme degli eventi che c'interessano coincida con l'insieme dei condizionamenti possibili e consista di tutti gli eventi del tipo $[A_t = a_m]$ al variare di t in T, di a_m in S, e di m tra gli interi naturali. L'evento $[A_t = a_m]$ si può interpretare come l'affermazione che al tempo t l'osservabile A_t assuma il valore a_m.

Le probabilità che ci interessano saranno del tipo

$$P\left(A_t = a_n | A_s = a_m\right) = P_{mn}(s,t) \tag{15}$$

una tale probabilità viene chiamata probabilità di transizione relativa all'osservabile A dallo stato a_m al tempo s allo stato a_n al tempo t.

Definizione 1 *Un modello quantistico puro per le probabilità di transizione (3.1) è definito dall' assegnazione, per ogni $s, t \in T$, di una matrice unitaria $U(s,t)$ che soddisfa le relazioni*

$$U(s,t)^{-1} = U(t,s) = U(s,t)^* \qquad ; \qquad U(s,s) = 1 \tag{16}$$

$$U(s,t)u(r,s) = U(r,t) \tag{17}$$

$$p_{m,n}(s,t) = |U_{n,m}(s,t)|^2 \tag{18}$$

Una prima interessante conseguenza della (3.3) si ottiene scrivendo questa equazione in termini di elementi di matrice delle $U(s,t)$ nella base (e_n):

$$U_{n,m}(r,t) = \sum_k U_{n,k}(s,t)U_{k,m}(r,s) \tag{19}$$

elevando a quadrato entrambi i membri e usando (3.4), ciò conduce a

$$p_{n,m}(r,t) = \sum_k P_{n,k}(s,t) \cdot P_{k,m}(r,s) + TI \tag{20}$$

dove TI è un termine che si calcola facilmente e che, nella letteratura fisica è noto col nome di "termine d'interferenza". Se introduciamo le matrici stocastiche

$$P(s,t) = (p_{n,m}(s,t)) \tag{21}$$

la (3.6) diventa

$$P(r,t) = P(s,t) \cdot P(r,s) + TI \tag{22}$$

Paragonando la (3.8) con l'equazione di Chapman – Kolmogorov, che interviene nella teoria dei processi di Markov classici:

$$P(r,t) = P(s,t) \cdot P(r,s); r < s < t \tag{23}$$

si vede che i termini d'interferenza della fisica quantistica non siano altro che termini di correzione all'equazione di Chapman – Kolmogorov classica la quale, a sua volta, è conseguenza del Teorema delle probabilità composte e della proprietà di Markov.

Nella fisica quantistica gli elementi di matrice $U_{n,k}(s,t)$ vengono chiamati **ampiezze di transizione** e la relazione (3.5), ovvero la sua forma operatoriale (3.3), per la sua analogia con il Teorema classico delle probabilità composte, è detta "Teorema delle ampiezze composte".

I termini d'interferenza sono quindi la correzione quantistica al teorema delle probabilità composte (così come la curvature scalare è la correzione non euclidea al Teorema che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi).

Un'altra interessante conseguenza della (3.3) è la equazione di Schrödinger, che si ottiene derivando (formalmente, poiché qui non discuteremo problemi di domini) entrambi i suoi membri rispetto a t:

$$\partial_t U(s,t) = iH(t)U(s,t) \tag{24}$$

dove $H(t)$ è un operatore simmetrico sul dominio in cui la derivata esiste.

L'operatore $H(t)$ è detto **Hamiltoniana** del sistema al tempo t.

Nel caso in cui le ampiezze di transizione siano temporalmente omogenee, cioè

$$U(s+r, t+r) = U(s,t); \forall r, s, t \tag{25}$$

allora, scrivendo

$$U^A(t) \ = \ U(0,\ t) \tag{26}$$

si ha che $U^A(t)$ è un gruppo unitario a un parametro di operatori su $\mathcal{H}$ e, sotto ipotesi molto generali (basta la misurabilità debole) il Teorema di Stone assicura che esso ha la forma

$$U^A(t) = \exp\left(it\ H^A\right) \tag{27}$$

ovvero, equivalenetemente, l'equazione di Schrödinger (3.10) assume la forma

$$\frac{d}{dt} U^A(t) = iH^A U^A(t) \tag{28}$$

dove H^A è un operatore autoaggiunto su $\mathcal{H}$.

A partire dalla (3.12) abbiamo introdotto l'indice A per sottolineare che tutto quanto detto finora dipende dalla famiglia $\{A(T) : t \in T\}$ (dove $A(t)$ rappresenta una osservabile A – per es. la posizione – al tempo t).

Uno dei **postulati impliciti** della attuale teoria quantistica è che l'operatore H^A (e pertanto l'evoluzione $U^A(s,t)$) **non dipenda da** A.

Non è difficile costruire esempi matematici in cui l'evoluzione $U^A(s,t)$ dipenda dalla osservabile A. Tali esempi ci portano al di fuori della teoria quantistica comunemente accettata. Una possibilità degna di essere investigata non solo matematicamente, ma anche nelle sue conseguenze fisiche, è che alcune difficoltà della teoria dei campi, in cui non si riesce, se non in modo molto artificioso e insoddisfacente, a dare un significato all'hamiltoniana H come operatore universale, possano essere superate accettando l'introduzione di una famiglia H^A che dipende dall'osservabile (o famiglia massimale di osservabili compatibili) tra cui si considerano le transizioni.

Le considerazioni che seguono comunque si limiteranno al contesto quantistico consueto e perciò d'ora in poi ometteremo l'indice A dalle notazioni. Inoltre assumeremo valida la condizione di omogeneità (3.11) e perciò parleremo di un'unica hamiltoniana H e non di una famiglia a 1 parametro $H(t)$.

Per capire il significato dell'operatore H basta sviluppare in serie, per tempi piccoli l'espressione della probabilità di transizione

$$\begin{aligned} p_{m,n}(0,\ t) \quad &= \quad P\left(A_t = a_n | A_0 = a_m\right) = \\ &= |< \Psi_m(0), \Psi_n(t) >|^2 = \end{aligned}$$

$$|< \Psi_m, U_t \Psi_n >|^2 \tag{29}$$

dove si è usata la (3.9) con

$$e_m = \Psi_n = \Psi_n(0) \quad ; \quad t_0 = 0 \tag{30}$$

Usando la (3.14) e sviluppando al prim'ordine in t il membro destro della (3.15) si trova

$$p_{m,n}(0,\ t) = \begin{cases} t^2 \left|< \Psi_n, H\Psi_m >\right|^2 + 0\left(t^3\right); & \text{se } m \neq n \\ 1 - t^2 Var\left(H|\Psi_m\right) + 0\left(t^3\right); & \text{se } m = n \end{cases} \tag{31}$$

dove la quantità

$$Var\left(H|\Psi_m\right) =< \Psi_m, H^2\Psi_m > - < \Psi_m, H\Psi_m >^2 \tag{32}$$

è detta varianza dell'osservabile H nello stato Ψ_m.

La (3.17) chiarisce il significato probabilistico dell'opertore H: esso misura il tasso di transizione, per unità di tempo tra i valori a_n e a_m dell'osservabile A (secondo il postulato implicito della teoria quantistica, solo Ψ_n, e non H, dipendono da A).

Come si vede, il sistema di equazioni (3.17) per le probabilità di transizione $p_{m,n}(0\ t)$ è molto simile a quello che descrive i consueti processi di nascita e morte nella teoria di Markov classica. La differenza principale essendo che, nelle equazioni classiche il tasso di transizione infinitesimo è proporzionale al tempo, mentre nelle (3.17) esso è proporzionale al **quadrato del tempo**. Questo è un riflesso del fatto che, nel caso classico, è la stessa $p_{m,n}(0,\ t)$ a soddisfare una equazione lineare dle primo ordine in t. Mentre nel caso quantistico una tale equazione è soddisfatta dalla $\Psi_m(t)$, che è legata alla $p_{m,n}(0,\ t)$ dalla relazione quadratica (3.15).

4 Conclusioni

Nel § precedente abbiamo descritti gli aspetti più semplici del modello probabilistico quantistico e abbiamo visto che anche a questo livello di semplicità si celano alcuni impliciti pregiudizi la cui investigazione è certamente interessante dal punto di vista concettuale e probabilmente fruttuoso per le applicazioni fisiche.

D'altra parte la descrizione del § precedente, proprio per il fatto di essere una descrizione e non una deduzione non spiega perché si usa tale modello. Cioè non enuncia i postulati fisici in modo così chiaro e esauriente che il modello matematico ne risulti determinato univocamente.

Una tale deduzione non è banale e soltanto recentemente si è riusciti ad ottenerla.

Come spesso accade, l'aver chiarito i postulati soggiacenti ad un modello ha aperto la strada alla costruzione di nuovi modelli la investigazione delle cui possibilità è un problema aperto. Ma, come spesso è accaduto nello sviluppo della matematica e della fisica, l'analisi dei fondamenti, per essere feconda, dev'essere strettamente collegata con gli sviluppi più recenti della disciplina, altrimenti si rischia di cadere in pure esercitazioni formali. Dopo l'euforia e, (diciamolo) gli eccessi formalistici degli anni '50–'60, ai nostri giorni l'interesse per le strutture generali della matematica ha largamente perduto terreno a favore dei problemi più concreti. Tuttavia bisogna guardarsi dall'errore di saltare da un eccesso all'altro e ricordare che il limitare la propria attenzione ai soli problemi tecnici significa far torto alla grande tradizione della matematica mondiale il cui messaggio universale non sta solo nello sviluppo di tecniche e nella soluzione di problemi minuti, ma nella capacità di cogliere le strutture universali all'interno di problemi estremamente minuti e specialistici. L'esempio della nozione di insieme, nata dall'approfondimento di un problema strettamente tecnico relativo alle serie di Fourier, è sintomatico di questa perenne dialettica tra l'astratto e il generale da una parte e il concreto e lo specifico dall'altra, che accomuna la ricerca matematica a tutte le altre scienze della natura.