L'edificio matematico della meccanica quantistica non–relativistica: situazione attuale

Comunicazione al Convegno

Aspetti Strutturali e Ideologici nel Rapporto tra
Scienze Fisiche e Matematiche, Lecce, 1–5 luglio 1975

Luigi Accardi

Laboratorio di Cibernetica del C.N.R.
Arco Felice, Napoli

Istituto di Fisica dell'Università
Salerno

1.) Nel suo intervento sull'"Avvenire della Matematica" tenuto al Congresso Internazionale dei matematici di Roma nel 1908 Henri Poincaré faceva rilevare l'enorme ampiezza raggiunta dalla Matematica a quei tempi e la conseguente necessità, per il singolo ricercatore di una specializzazione sempre maggiore. Contemporaneamente, egli sottolineava la necessità per la comunità matematica, e scientifica in generale, di elaborare strumenti che permettessero di attenuare gli effetti negativi della inevitabile specializzazione e individuava nel Congresso Internazionale dei Matematici uno di questi strumenti:

"... A mesure que la science se developpe, il devient plus difficile de l'embrasser tout entière; alors on cherche à la couper en morceaux à se contenter de l'un de ces morceaux: en un mot, à se spécialiser. Si l'on continuait dans ces sens, ce cera un obstacle fâcheux aux progrès de la Science. Nous l'avons dit, c'est par des rapprochements inattendus entre ces diverses parties que ses progrès peuvent se faire. Trop se spécialiser, ce serait s'interdire ces rapprochements. Espérons que des Congrès come celui–ci, en nous mettent en rapports les uns avec les autres, nus ouvriront les vues sur le champ du voisin, nous obligeront à le comparer au nôtre, à sortir un peu de nôtre petit village, et seront ainsi le meilleur remède au danger que je viens de signaler".

A quasi settant'anni di distanza queste parole di Poincaré mi sembrano mantenere una grande attualità, con la differenza che oggi i congressi relativi alle singole discipline hanno perso quel carattere di momento di unificazione culturale che essi avevano. È piuttosto a convegni come quello che si sta realizzando in questi giorni a Lecce che il mondo scientifico dovrà rivolgersi sempre più spesso nella ricerca di un momento unificamente non solo a livello settoriale, ma anche tra attività di tipo diverso all'interno delle singole scienze e tra discipline diverse. È un dato di fatto che i congressi di tipo tradizionale hanno, oggi, sostanzialmente perso la funzione di momento di sintesi, di incontro di idee e di tendenze culturali diverse, e tendono sempre più a realizzarsi come ulteriore momento specialistico. Ciò si può constatare da una parte analizzando la stessa cultura organizzativa dei grossi congressi internazionali (rigida divisione per sezioni, spesso simultanee), dall'altra riscontrando la tendenza alla scomparsa di quella tradizione che voleva la presenza di una o due relazioni di ampio respiro che avessero il compito di fornire una panoramica globale e concettuale diuna disciplina allo scopo di stimolare la discussione e la riflessione sulle sue prospettive di sviluppo e di contatti con le altre scienze. Questa perdita del ruolo unificamente, auspicato da Poincaré, da parte dei congressi di tipo tradizionale si contrappone alla tendenza, che ai giorni nostri va delineandosi sempre più coscientemente, verso un recupero della dimensione unitaria e umanistica della cultura. Questa tendenza trascende l'ambito ristretto del mondo della cultura inteso in senso tradizionale e si inserisce nel processo di transizione dalla "società tecnologica" a una società fondata sui principi dell'umanesimo marxiano intorno al quale si accentrano le lotte che, a livelli diversi e con obiettivi intermedi diversi si concludono oggi in tutte le parti del mondo.

Naturalmente i presupposti per la realizzazione di un tale programma sono politici: la sconfitta dell'imperialismo, il superamento della società capitalistica basata sullo sfruttamento dell'uomo sull'uomo. Sarebbe una vera e propria ingenuità pensare a mutamenti strutturali del mondo scientifico senza inserirli nella più ampia prospettiva delle lotte politiche per la ristrutturazione della società.

Infatti il rapporto di funzionalità tra cultura e sistema sociale è proprio di ogni epoca storica, ma la dimensione di massa assunta oggi dal mondo scientifico ed il nuovo ruolo di questa è un fenomeno proprio della nostra epoca e la conseguenza di ciò è stata la nascita di una nuova, grossa struttura con apparati organizzativi, amministrativi, professionali, propagandistici propri e senz'altro comparabili con quelli dei più grossi gruppi industriali multinazionali.

Questo parallelo tra le organizzazioni multinazionali del mondo scientifico e di quello industriale, non si limita alle dimensioni economiche o umane, ma investe la struttura nel suo complesso, i ruoli che essa richiede le "regole del gioco" che impone e, soprattutto, il tipo di uomo che essa tende a formare. È dall'analisi di questi aspetti che massimamente risalta il carattere di assoluta non neutralità della scienza e l'inappropriatezza delle argomentazioni basate sulla distinzione tra usi e contenuti. Infatti l'aspetto più condizionante nella pressione effettuata, ai nostri giorni dal sistema sul mondo scientifico, più che a livello di *contenuti* va riscontrato al livello di *formazione*.

La società che pratica sistematicamente la scissione della personalità individuale dal ruolo, emblema della quale è la catena di montaggio, la confusione ideologica a livello di massa per imporre di fatto linee d'azione reazionarie, che punta esclusivamente sulla tecnologia per risolvere i problemi sociali che la travagliano, riproduce queste linee di tendenza nel mondo scientifico incoraggiando la formazione di un intellettuale che si potrebbe definire "settorializzato" e ciò non tanto per la sua specializzazione tecnica quanto per la assoluta mancanza, di punti di riferimento culturali che aiutino a superare il momento alienante della specializzazione, in un discorso di sintesi che investa la problematica scientifica sociale, filosofica e politica.

La figura dell'intellettuale "settorializzato", che riproduce uno schema di personalità e di comportamento incoraggiato a tutti i livelli, è la più funzionale al sistema perché è quella che meglio si adatta a subire le tecniche di repressione adottate oggi dalle varie forme del potere nei confronti dei lavoratori della cultura.

In epoche passate la strategia adottata dal potere nei confronti della cultura è stata quella di tentare di imporre una *unicità del punto di riferimento ideologico* e le tecniche di repressione funzionali a tale strategia erano il rogo, la segregazione, l'esilio,... Oggi tale strategia è stata, almeno nel mondo occidentale, abbandonata e sostituita con la strategia della *assenza totale di punti di riferimento culturali*. Le tecniche di repressione funzionali a questa "strategia del rumore" (o della confusione) consistono nell'abbinare l'impiego massiccio degli strumenti di informazione e di propaganda di massa, a favore delle linee culturali più vicine all'"ortodossia del potere" con la dispersione delle linee culturali giudicate eretiche all'interno di una miriade di altre "proposte" più o meno inconsistenti e tenute in vita proprio per questa loro funzione di "rumore". Non è, purtroppo, necessaria, una consuetudine molto grande con il mondo scientifico contemporaneo per constatare fino a che punto tale "strategia del rumore" sia stata assorbita da questo. Il presupposto del successo della "strategia del rumore" (o della confusione) è la esistenza di un terreno culturale ad essa adeguato ed è per questo motivo che la pressione maggiore da parte del sistema non viene esercitata sui *contenuti* culturali (dei quali, al contrario, viene incoraggiata la dispersione) quanto sulla *formazione* di personalità atte a subire più facilmente quelle tecniche di pressione a cui si accennava sopra.

Naturalmente la rottura del profondo legame tra contenuti e ruolo formativo dell'elaborazione di questi è un *obiettivo* delle tecniche di repressione menzionate sopra.

Il metodo scientifico, col suo imporre un costante richiamo ad un atteggiamento critico, una costante dialettica tra mezzo tecnico e fine conoscitivo, può avere un ruolo altamente formativo. Ed è per questo motivo che la dimensione di massa assunta oggi dalle strutture culturali presenta delle potenzialità intrinsecamente progressiste. Ma non bisogna commettere l'errore di scambiare queste potenzialità per attualità. Infatti ci sono oggi molti esempi, sia tra le discipline scientifiche che tra quelle umanistiche che dimostrano come sia possibile per un sistema ottenere la vanificazione di questa azione formativa (almeno a livello di massa e in tempo storici relativamente brevi) e ciò senza agire direttamente sui contenuti ma semplicemente sul mondo di produrli, cioè sul modo di fare scienza.

Per questi motivi si tenta di "congelare" la rottura dell'equilibrio culturale del singolo individuo conseguente dalla specializzazione scoraggiando la ricostituzione, a un altro livello, di una unità culturale. È precisamente in ciò che va individuato l'intervento del sistema e non tanto nell'esistenza della specializzazione che è una inevitabile conseguenza di un accumularsi settoriale della conoscenza scientifica. Pertanto, mentre la lotta al fenomeno della specializzazione in sé esprime un atteggiamento di tipo luddista, la lotta per la sostituzione dello "specialista settorializzato" con una figura di specialista culturalmente indirizzato non solo è un obiettivo realistico e importante nella nostra epoca, ma in essa si può anche individuare un momento in cui il mondo scientifico può apportare uno specifico contributo.

Infatti il rapporto di funzionalità, quasi di "emanazione", tra sistema e mondo scientifico, al quale si riferisce lo schema di analisi delineato sopra, è soltanto un momento della dialettica articolata e complessa tra potere e mondo culturale, propria della nostra epoca.

Accanto e in opposizione a questo vanno individuate altre tendenze, anch'esse connesse con la nuova dimensione di massa della struttura scientifica e il diverso ruolo assunto nella società tecnologica. Innanzitutto come fa notare Umberto Cerroni (12) "... l'intellettuale ha cessato di essere il puro e semplice mediatore consenso tra i semplici e il potere di cui ebbe a parlare Gramsci. Quelle funzioni di mediazione sono oggi esercitate principalmente da grosse istituzioni (scuola, radio, televisione, case editrici, giornali, ecc.) entro le quali gli intellettuali si trovano ad operare contemporaneamente oltre che come mediatori del consenso anche come lavoratori sottoposti ad una alienazione economica e burocratica che origina una spinta verso l'organizzazione sindacale e la rivendicazione politica che mancava nelle antiche professioni "liberali"...".

È agli effetti di queste due spinte contradditorie che si riferisce Paolo Sylos–Labini nella sua monografia "Le classi sociali in Italia" quando individua la tendenza degli intellettuali a suddiviersi in due categorie: "... quelli organicamente integrati nella classe dominante e quelli che tendono ad avvicinarsi agli interessi e agli ideali della classe operaia...".

Va tuttavia rilevato che non a caso questa tendenza si manifesta in modo nettamente più accentuato in paesi, come l'Italia o la Francia, dove il movimento operaio è riuscito a darsi una organizzazione tale da rappresentare una concreta alternativa ideologica, culturale, politica al sistema. In paesi in cui il potere centrale è più forte o il movimento operaio non ha ancora espresso una organizzazione soddisfacente a tutti i livelli, la seconda tendenza assume dimensione nettamente inferiori rispetto alla prima, mentre maggior risalto assume la tendenza a rafforzare e ampliare quel *margine di autonomia* dal potere che il mondo scientifico ha conquistato e si è educato a gestire in una lotta più che secolare e che oggi è, a mio parere, una conquista irreversibile. Questo margine di autonomia ha oggi un carattere ben diverso da quello tradizionale di "concessione" da parte di un sovrano o un padrone illuminato. È effetto di questo se il grado di organicità intrinseca al sistema del "manager scientifico" (una figura che si diffonde sempre più nella nostra epoca) è certamente molto minore di quello del suo corrispondente industriale o burocratico.

Entrambe queste tendenze hanno le loro radici nella dimensione di massa assunta oggi dalla struttura culturale che porta alla luce la intrinseca contraddizione della società tecnologica la quale, da un lato impone la dimensione di massa della cultura, per il suo bisogno di tecnici, dall'altro, proprio con questa dimensione allarga le potenzialità critiche di strati sempre più ampi della popolazione e tende a rompere il rapporto di funzionalità tra cultura e sistema. La reazione principale di fronte a questa contraddizione è il tentativo di isolamento della cultura. Questo isolamento si cerca di imporlo a livello culturale, con la "strategia del rumore"; a livello materiale, allontanando per quanto possibili i centri culturali dalle grosse organizzazioni di massa; all'interno delle singole discipline con la creazione dell'"intellettuale settorializzato".

Il modo in cui il mondo della cultura in quanto tale, cioè in quanto struttura, può reagire a questo tentativo di isolamento e realizzare un proprio contributo *specifico* (e cioè proprio della struttura culturale *in quanto tale*, e non in quanto componente all'interno della più vasta struttura politica) è quello di rinsaldarae i propri rapporti con le organizzazioni di massa, particolarmente le scuole e l'Università e, all'interno di queste, adoperarsi concretamente per la formazione di un nuovo tipo di "lavoratore della cultura" e di personalità che per il fatto stesso di essere culturalmente equilibrate risultino immuni dalla strategia del rumore e quindi non funzionali.

Questa forma di lotta è, come si è già detto, solo un momento della più generale lotta politica; ma la sua importanza non va sottovalutata poiché la dimensione di massa assunta oggi dal mondo della cultura rende un qualsiasi mutamento di struttura di questo un fatto sociale, e perciò le proposte che si generino nell'ambito di esso e che siano portate avanti con sufficiente decisione possono raggiungere strati considerevoli della popolazione.

La costruzione di questo nuovo equilibrio culturale (compatibile con le specializzazioni) richiede la elaborazione di una "strategia dei punti di riferimento" da contrapporre a quella che prima abbiamo chiamata strategia "del rumore" o della confusione. Questi punti di riferimento dovranno avere la funzione di "nodi concettuali" ai quali collegare, in maniera più o meno diretta le attività specialistiche e alla luce dei quali inserire queste attività in un orizzonte più vasto.

Per la sua stessa natura, questa "strategia dei punti di riferimento" non potrà riguardare soltanto le singole discipline, prese separatamente; né potrà essere elaborata solo a livello teorico, ma dovrà essere quello di indirizzare le singole attività specialistiche nel tentativo di inserirsi in un disegno più ampio, in una visione generale del mondo, in un rapporto articolato della struttura scientifico–culturale con quelle politiche e della produzione. È necessario tuttavia che tale rapporto si realizzi nel rispetto dei ruoli specifici delle singole componenti, e non si risolva nella negazione di una di esse, qualunque essa sia. Occorre cioè realizzare questo come un *rapporto tra strutture* e superare il momento individuale che oggi è predominante in tale rapporto e che và interpretato soltanto come sintomo della esigenza di un tale rapporto. Occorrerà inoltre distinguere, almeno a livello di analisi, i momenti unificanti all'interno delle attività culturali e quelli relativi al rapporto cultura–prassi politica o produttiva.

La rottura dello schema di comportamento dell'intellettuale del settorealizzato, realizzata attraverso la pratica di un diverso modo di espletare, anche a livello di massa, della figura gramsciana dell'intellettuale come specialista–dirigente.

Nel presente lavoro ho cercato di inviduare e analizzare uno di questi momenti culturali unificanti all'interno del mondo scientifico, più precisamente fisico–matematico, è cioè la Meccanica Quantistica.

2.) Il carattere di punto nodale per tutta la cultura scientifica contemporanea deriva alla Meccanica Quantistica non tanto dai suoi mirabili risultati nel campo di una vasta e importante classe di fenomeni fisici (basti pensare alla spiegazione teorica della tavola periodica degli elementi), quanto dall'essere giunta a tali risultati attraverso un travaglio intellettuale che ha completamente stravolto concetti come quelli di materia, energia, probabilità, simmetria e che ha profondamente modificato l'atteggiamento degli studiosi relativamente a ciò che è ragionevole aspettarsi da una descrizione quantitativa della natura. Soltanto nella rivoluzione galileiana, o nella teoria della relatività, si può riscontrare un mutamento di prospettive così radicali relativamente a concetti che sembravano ben stabiliti nel mondo scientifico. Tuttavia, a differenza della teoria della relatività il cui formalismo matematico appare come la naturale espressione quantitativa di un mutato atteggiamento concettuale e di principi fisici nuovi, ma perfettamente comprensibili anche nel contesto della fisica classica, nel caso della teoria quantistica il formalismo matematico ancora ai giorni nostri, non ha ricevuto un fondamento teorico. Vale a dire: mentre il formalismo matematico della relatività ristretta viene, interamente *dedotto* mediante un'analisi delle conseguenze della introduzione di alcuni nuovi principi (costanza della velocità della luce, invarianza delle leggi fisiche per passaggio di un sistema di riferimento ad un altro in moto uniforme rispetto al primo) a partire da un contesto semantico puramente classico, il formalismo matematico della teoria quantistica è stato minuziosamente *descritto* mirabilmente *applicato*, ma per ora non esiste nessuna spiegazione, che sia anche solo approssimativamente soddisfacente e che *giustifichi*, sulla base di principi concettuali e fisicamente significativi la apparizione di tale formalismo.

In ogni teoria fisica si incontrano delle affermazioni di tipi fenomenologico, cioè la cui giustificazione può essere data soltanto a posteriori, in base ai risultati. Per esempio non c'è nessun principio generale dal quale si possa dedurre che la equazione del moto di Newton debba essere esattamente del second'ordine o che prescriva la forma esatta delle equazioni di Maxwell.

Tuttavia, nel caso della teoria quantistica la situazione è diversa poiché non è una singola affermazione, per quanto importante, del modello ma è l'intero modello matematico che finora non ha soddisfacente fondamento teorico.

Che cosa precisamente si debba intendere per "fondamento teorico di un modello matematico" è stato illustrato sopra con l'esempio della relatività ristretta e sarà ulteriormente precisato nel seguito (cf. No. 5).

Per il momento il problema fondamentale concernente l'interpretazione del formalismo quantistico può essere enunciato, sia pur sommariamente, come segue: la Meccanica Quantistica è una teoria statistica; cioè le sue affermazioni concernono, in generale, probabilità e valori medi. Ora, tutte le teorie statistiche di tipo classico vengono descritte da un certo tipo di modelli matematici; mentre il modello matematico della Meccanica Quantistica differisce radicalmente da questi.

Ci si chiede: è possibile formulare delle proprietà dei sistemi fisici tali che il modello della teoria quantistica sia ottenuto a partire dai modelli delle teorie statistiche classiche espletando le conseguenze analitiche di queste proprietà?

3.) La soluzione del problema esposto sopra è essenziale al fine di eliminare quell'alone di oscurità che, nonostante anni d'intesa attività teorica e i molti importanti risultati parziali ottenuti, ancora circonda i fondamenti della teoria quantistica.

L'esistenza stessa di questo problema ha una funzione di stimolo e di richiamo alla umiltà per il ricercataore che è costretto ad ammettere che il suo controllo concettuale su argomenti di importanza fondamentale e di uso quotidiano come i concetti di probabilità, di teoria fisica, di teoria statistica è ancora molto insoddisfacente.

Oggi nell'ambiente scientifico, specialmente fisico e matematico, è molto diffuso un atteggiamento di scetticismo, quasi di ripulsa, verso i grandi problemi concettuali, considerati pericoloso terreno di speculazione metafisica, fonte di sterile dibattito di opinioni. Tuttavia proprio l'analisi dei classici del pensiero scientifico ci mostra come, anche a livello tecnico e specifico, i momenti di maggiore rigoglio siano stati quelli in cui si è riusciti a stabilire un rapporto corretto tra problematica generale e particolare, tra attività speculativa e attività tecnica, e non quelli in cui questo rapporto è stato rotto a favore di una queste due attività (qualunque essa sia).

Il problema, enunciato sopra, dei fondamenti della teoria quantistica mi sembra essere sintomatico per quanto riguarda questo rapporto dialettico tra innovazioni concettuali e innovazioni tecniche. La sintesi tra teoria quantistica e teorie classiche della probabilità potrà effettuarsi soltanto attraverso un arricchimento profondo delle nostre attuali concezioni sulla teoria delle probabilità; arricchimento paragonabile solo a quello operato dalla teoria della relatività nei riguardi del concetto di spazio.

Al momento attuale, dopo più di cinquant'anni di intenso lavoro teorico, si può dire che il principale risultato ottenuto sia stata la stessa possibilità di enunciare il problema dei fondamenti della teoria quantistica nei termini specificati sopra. Tale formulazione, infatti, non è per nulla un fatto ovvio: essa considera acquisito il fatto che la Meccanica Quantistica sia una particolare teoria statistica. E cioè che si sappia precisamente cos'è una teoria statistica, quali sono i possibili modelli matematici di una teoria statistica, che il modello matematico della Meccanica Quantistica sia descritto completamente, e infine che tale modello matematico sia uno tra quelli atti a descrivere una teoria statistica.

Tutte queste affermazioni sono ben lungi dall'essere evidenti, anzi, come vedremo più oltre (cf. no. 4.2) la stessa affermazione secondo cui la teoria quantistica è una particolare teoria statistica, oggi generalmente accettata, non potrebbe essere sostenuta a pieno diritto se ci si limitasse alle descrizioni assiomatiche classiche di questa teoria. In realtà lo stabilire queste affermazioni è stato il frutto di una attività lunga e intensa nella quale l'interazione tra i mondi della fisica e della matematica ha raggiunto le punte più alte, in questo secolo, sia come intensità che come ricchezza di conseguenze. Cosicché, anche alla luce dell'esperienza degli ultimi venti anni e della situazione attuale risulta pienamente giustificata l'affermazione di I.M. Gelfand al Congresso internazionale dei matematici di Amsterdam (1954): "... the study of mathematical problems connected with quantum mechanics was a turning point in the development of functional analysis itself and at the present time, to a great extent it determines the main paths for its development".

Tuttavia, paradossalmente, lo sviluppo della meccanica quantistica offre nello stesso tempo un esempio sia della fecondità del rapporto fisica–matematica sia delle conseguenze negative della assenza di comunicazione tra i diversi rami delle attività scientifiche. Infatti, quasi contemporaneamente al sorgere della teoria quantistica si affermava, come disciplina matematica indipendente, la teoria della Probabilità. Ora, si è già ripetutamente affermato che la meccanica quantistica è una teoria statistica (e ciò sarà illustrato più completamente nel seguito); nella meccanica quantistica sorgono questioni profondissime che coinvolgono in maniera essenziale concetti probabilistici; lo stesso concetto di probabilità in meccanica quantistica appare in un modo e con un formalismo completamente diverso da quello classico. Ma, nonostante l'esistenza di tutti questi stimoli, l'interazione tra studiosi di teoria delle probabilità e di teoria quantistica è stata (a livello di strutture) quasi inesistente. A livello individuale si possono riscontrare numerosi tentativi di stabilire un collegamento tra le due discipline (basti ricordare le diverse proposte, in questa direzione, di Feynmann, Koopman, Fenyes, Segal,...) ma tutte queste sono rimaste a lungo voci isolate, e bisogna attendere gli anni '70 per assistere al sorgere di una vere e propria corrente di pensiero che opera in maniera esplicita (pur differenziandosi all'interno in quanto a tecniche, obiettivi, punti di vista) nel comune intento di portare a contatto metodi e concetti di queste discipline. Una tale operazione di sintesi che oggi si può considerare ai suoi albori ha già portato numerosi nuovi risultati nella teoria quantistica sia non–relativista che relativistica e un conseguente forte stimolo a proseguire in questa direzione. Tali risultati e prospettive saranno analizzati nel seguito. Per ora cominceremo ad analizzare la tappa precedente a questa, e cioè quel processo che ha condotto all'elaborazione di una *Meccanica Quantistica Analitica*, in modo analogo a ciò che è accaduto quando, con i lavori di Lagrange, Laplace, Hamilton, Jacobi e tanti altri le elaborazioni teoriche provenienti dall'astronomia, dalla meccanica dei fluidi, dall'ingegneria, sono state sintetizzate nel corpo organico della *Meccanica Analitica*.

Il processo di fondazione della "Meccanica Quantistica Analitica" si è svolto lungo due direttive principali:

Una basata sull'assunto che la teoria quantistica corrisponde ad una *teoria statistica di tipo diverso*; e mirante a formulare gli assiomi e a descrivere tale teoria nel modo più dettagliato possibile e, nello stesso tempo a separare nettamente i presupposti classici della teoria da quelli tipicamente quantistici. Punti di riferimento classici per questa linea di pensiero sono le monografie di J. von Neumann (43), H. Weyl (49), I.E. Segal (35) (cap. I) e G.W. Mackey (29). Un'altra, basata sull'assunto che le affermazioni sperimentali della Meccanica Quanatistica soddisfano un *calcolo proposizionale di tipo diverso* dal calcolo booleano della logica classica e mirante a fondare tale calcolo su richieste di carattere puramente fisico. Questa linea di ricerca è stata originata da un articolo di G. Birkhoff e J. von Neumann (10) ed il principale punto di riferimento per essa è la ben nota monografia di J.M. Jauch (27). Accanto a queste linee di ricerca occorre ricordare la teoria di R.P. Feynmann, matematicamente euristica, ma importante per la sua ricchezza concettuale, per il fatto di essere particolarmente comoda per alcuni tipi di calcoli, e per la connessione esplicita che essa propone tra concetti propri del formalismo classico come la funzione d'azione, e concetti propri del formalismo quantistico, come la funzione d'onda (cf. (20)).

Infine, in direzione e simmetrica rispetto a quella tracciata dal problema enunciato sopra, va ricordata quella linea di ricerca, iniziata dai lavori di Medelung e de Broglie e mirante a costruire modelli matematici di sistemi classici associati alle funzioni d'onda dei sistemi quantistici. Questa linea di ricerca ha trovato la sua formulazione matematica più completa ed elegante nel lavoro di E. Nelson (34), che è stato esteso a sistemi lagrangiani generali da F. Guerra e P. Ruggiero (25).

Al fine di descrivere come si presenta la situazione attuale in queste linee di ricerche, alla luce di alcuni progressi effettuati recentemente, cercherò di illustrare brevemente i programmi, le idee, la articolazione interna di ciascuna di esse tentando di mettere in risalto non tanto i singoli risultati tecnici quanto le grandi linee della problematica concettuale.

4.) *Le assiomatiche di tipo von Neumann–Segal–Mackey.*

4.0) Le linee di ricerca di cui esporrò i punti principali in quanto segue fanno uso, in modo essenziale, del *metodo assiomatico*. Ai giorni nostri tale metodo non è più una tecnica di sistematizzazione di una schienza deduttiva, ma è diventato un potente strumento di ricerca induttiva, applicabile tanto alla matematica quanto alla fisica, alla chimica, ecc...

Il metodo assiomatico è lo strumento matematico attraverso il quale si manifesta nel modo più chiaro il nuovo ruolo del rigore all'interno delle scienze fisiche. Il rapporto rigore–intuizione che è stato alla base della ricerca matematica e fisica fino a tempi recentissimi è analizzato esplicitamente già nella descrizione data da Archimede del proprio metodo di dimostrazione: dapprima convincersi della validitá di una affermazione in base a considerazioni intuitive, poi stabilire la validitá di questa in modo matematicamente rigoroso. In questo rapporto, ancora oggi valido in molte situazioni, l'intuizione diviene guida, momento preliminare, per la dimostrazione rigorosa.

Tuttavia, con l'apparire delle geometrie non euclidee, della teoria della relatività, della teoria quantistica,..., si sono presentate all'interno delle stesse scienze fisiche, situazioni per le quali non c'è nessuna rappresentazione intuitiva. (Per esempio noi non abbiamo nessuna rappresentazione intuitiva, cioè basata esplicitamente o implicitamente sull'esperienza, delle proprietà dello spazio nei dintorni di un buco nero). In tali situazioni il rapporto rigore–intuizione si capovolge, rispetto a quello descritto sopra, ed il rigore matematico diventa l'unica aguida possibile per la formazione di una nuova intuizione. Questo nuovo ruolo del rigore matematico nelle scienze fisiche si manifesta in un numero di casi sempre maggiore (esso è stato illustrato, per esempio, nella relazione di dell'Antonio nel caso della teoria dei campi).

Lo strumento matematico attraverso il quale si realizza questo nuovo rapporto tra rigore e intuizione è il metodo assiomatico.

Una qualsiasi teoria è specificata dall'insieme delle sue affermazioni e dall'insieme degli oggetti intorno ai quali queste affermazioni vengono effettuate. Il modo in cui, all'interno di una singola teoria, si realizza la interazione tra rigore e intuizione, alla quale si è accennato sopra, può essere schematicamente descritto come segue: **(i)** Si isolano alcune affermazioni della teoria e si dimostra che tutte le affermazioni della teoria possono essere dedotte da queste. **(ii)** Si determinano tutte le realizzazioni della teoria cioè (a meno di isomorfismi) tutti i modelli matematici che soddisfano gli assiomi elencati. **(iii)** All'interno di questi modelli si determinano quelle proprietà che sono specifiche della teoria iniziale, cioè quelle proprietà che tra tutti i possibili modelli matematici della teoria individuano quello della teoria iniziale. **(iv)** Queste proprietà vengono *interpretate*: cioè si analizza il significato di tali proprietà all'interno della teoria iniziale e la loro necessità intrinseca. **(v)** Si analizza l'immersione della teoria iniziale all'interno di una teoria più vasta ottenuta tralasciando alcune di quelle proprietà specifiche (cf. (iii)) e si cerca di interpretare gli elementi nuovi ottenuti in questo modo in termini della teoria iniziale.

Quindi il risultato dell'analisi assiomatica di una teoria è innanzitutto *l'individuazione* di quelle proprietà specifiche che caratterizzano questa teoria all'interno di una classe di teorie ad essa simili. Poi, eventualmente, la determinazione di "elementi nuovi" rispetto alla teoria iniziale i quali tuttavia sono interpretabili all'interno di essa. Ed è come conseguenza di quest'ultimo passo di un procedimento puramente formale che l'intuizione relativa alla teoria iniziale viene arricchita e stimolata. La analisi che segue delle diverse assiomatizzazioni della teoria quantistica illustrerà, in un esempio concreto, questo procedimento.

4.1) Le assiomatiche di tipo von Neumann–Segal–Mackey hanno la seguente importante caratteristica comune: in tutte il punto di partenza consiste nell'analisi del concetto di "teoria statistica" nel senso più generale possibile. Una volta definito in termini precisi (e cioè assiomatici) questo concetto, il programma consiste nella determinazione di tutti i modelli matematici di una teoria statistica e nella dimostrazione del fatto che i formalismi della teoria quantistica e della teoria classica delle probabilità corrispondono a particolari modelli matematici di una teoria statistica. La distinzione tra questi due momenti è più esplicita in von Neumann che in Mackey il quale assume come punto di riferimento esplicito la Meccanica Analitica e la Meccanica Statistica classica piuttosto che una teoria statistica generale. Soltanto dopo aver stabilito la struttura della teoria quantistica in quanto particolare modello di teoria statistica, si passa al processo di "quantizzazione" che consiste nella determinazione, all'interno di questo modello degli oggetti matematici corrispondenti alle più importanti osservabili classiche energia, posizione, momento, momento angolare,... e delle loro relazioni funzionali. È a questo punto che la teoria delle rappresentazioni dei gruppi, in particolare la teoria delle rappresentazioni indotte, interviene come parte integrante della teoria quantistica (cf. (29), (30), (31)). La nostra analisi sarà concentrata sulla descrizione di una teoria quantistica generale, e non sul processo concreto di quantizzazione.

4.2) Accanto alla fondamentale somiglianza, richiamata sopra, tra queste teorie, ce n'è un'altra, che consiste in una loro insufficienza comune e cioè: in esse vengono analizzate *teorie statistiche a tempi fissi*. Le affermazioni di queste teorie riguardano osservabili o stati ad un istante di tempo arbitrario, ma fissato una volta per tutte. Inoltre, all'interno di tali teorie statistiche, la legge che determina la evoluzione temporale degli stati o delle osservabili, viene introdotta mediante un postulato di carattere puramente deterministico (cf. (29), pag. 81). E tale legge permette soltanto di dedurre da affermazioni statistiche a un certo istante di tempo, affermazioni relative ad un qualsiasi, fissato, istante di tempo successivo.

Il motivo per cui la limitazione ai singoli istanti di tempo è da considerarsi una insufficienza della teoria sta nel fatto che, attualmente in teoria classica delle probabilità, il più generale modello matematico di un sistema è determinato da un "processo stocastico", e, per la specificazione di un processo stocastico associato a un sistema che si evolve nel tempo, non è affatto sufficiente assegnare le attese di osservabili (cioè le affermazioni della teoria) a tempi fissi, ma è necessario assegnare le cosiddette "attese congiunte", e cioè affermazioni statistiche che riguardano istanti di tempo diversi e in un numero finito (almeno nel caso di processi discreti) (cfr. (17) pag. 46). Un esempio tipico di attesa congiunta è dato dalla affermazione che esprime la probabilità che al tempo t_1 una certa particella si trovi in una zona dello spazio e al tempo t_2 in un'altra zona.

È per questo motivo che precedentemente ho affermato (cf. N. 3) che la affermazione secondo la quale la teoria quantistica è un particolare modello di teoria statistica non può considerarsi pienamente fondata, se si rimane nell'ambito delle assiomatiche consuete. Queste infatti, limitando le affermazioni della teoria ai singoli istanti di tempo, descrivono una teoria che, in quanto teoria statistica è incompleta.

Si è discusso a lungo e tuttora si discute se la meccanica quantistica sia una descrizione *completa* di un sistema fisico. Ma finora non è stato rilevato il fatto che anche da un punto di vista puramente statistico il consueto modello matematico della meccanica quantistica fornisce una descrizione incompleta in quanto non assegna le probabilità congiunte.

È interessante a questo proposito il seguente passo di una lettera di Schrödinger a Planck[1] (4 luglio 1927):

".... What seems most questionable to me in Born's probability interpretation is that when it is carried out in more detail (by its adherents) the most remarkable things come forth naturally: the probability of events that a naive interpretation would consider to be independent do not simply multiply when combined, but instead the probability amplitude interfere in a completely misterious way (namely just like my wave amplitude, of course)".

I concetti di dipendenza o indipendenza statistica di eventi sono affermazioni che riguardano, appunto, le probabilità congiunte e quindi la radice della difficoltà sollevata da Schrödinger, anche se in modo tutt'altro che chiaro, si può far risalire proprio alla assenza di una teoria quantistica delle probabilità congiunte.

4.3) Il problema delle probabilità (o attese) congiunte in meccanica quantistica è stato ampiamente dibattuto a partire dai primi tentativi di Wigner (1932) (cf. (40) per una rassegna più recente di questi primi tentativi) fino al risultato di von Neumann (cf. (43) pg. 163) che è stato da molti considerato una soluzione completa e negativa della questione. Il teorema menzionato di von Neumann afferma che dato un insieme finito di osservabili quantistiche, una distribuzione statistica congiunta per tutte le osservabili dell'insieme esiste se e solo se queste osservabili commutano mutuamente. È ben noto che la maggior parte delle osservabili quantistiche non commutano mutuamente, e perciò il teorema di von Neumann ha causato una diffusa sfiducia sulla possibilità di utilizzare, in un contesto quantistico, le probabilità congiunte. Nel seguito vedremo come questa sfiducia risulti alla luce di un'analisi più approfondita, priva di fondamento. È opportuno tuttavia sottolineare fin d'ora che, come si è già detto, la descrizione statistica di un sistema fisico che si evolve temporalmente si effettua, nella teoria classica dei processi stocastici assegnando le probabilità congiunte *a tempi diversi*. Questa osservazione va tenuta presente poiché il principio d'indeterminazione di Heisenberg, che è il fondamento fisico della non–commutatività delle osservabili nel modello quantistico, impone una limitazione sulla misurabilità di posizione e momento di un sistema (e quindi sulla commutatività delle osservabili quantistiche corrispondenti) soltanto in uno stesso tempo.

[1] Letters on Wave Mechanics (cd. by K. Priybram) Vision Press Limited (Saxone House, 74A Regent Street London W1), pg. 19.

Come vedremo in seguito (cf. N. 5) è da questa osservazione che nasce la possibilità di ristabilire l'affermazione che la Meccanica Quantistica è una teoria statistica *completa*, e cioè che esssa permette di calcolare non soltanto le attese a tempi fissi, ma anche le attese congiunte.

4.4) Riassumendo, quindi, il fattore comune nella impostazione delle assiomatiche di tipo von Neumann–Segal–Mackey sta nel fatto che queste partono dall'analisi del concetto di teoria statistica; la loro comune insufficienza sta nel fatto che le teorie da essi considerate non corrispondono a ciò che nella teoria classica delle probabilità si intende per descrizione statistica completa di un sistema.

Le differenze tra l'impostazione di von Neumann e quella di Segal sono essenzialmente di carattere tecnico, e perciò non sostanziali. Come vedremo nel seguito (cf. N. (4.13)) la impostazione di Segal può essere considerata una generalizzazione della teoria di von Neumann. Invece le differenze tra queste due impostazioni e quella di Mackey sono a livello più profondo e coinvolgono la maniera stessa di questi autori, di porsi rispetto alla teoria delle probabilità poiché riguardano quelle affermazioni che debbono intendersi proprie di una teoria statistica.

Come si è già detto (cf. N. (4.0)) ogni teoria fisica è specificata dai suoi oggetti e dal tipo di affermazioni su di essi proprie di tale teoria. Gli oggetti di una fisica sono i sistemi dinamici, i loro stati, le osservabili ad essi connesse ecc.... (Il problema di formulare una definizione precisa di questi concetti, indipendentemente dal particolare modello matematico, è molto interessante ma non sarà affrontato in questa sede). Sia gli approcci di von Neumann–Segal che quello di Mackey assumono come dati gli insiemi delle osservabili e degli stati e questi vengono considerati comuni a tutti i sistemi dinamici descritti dalla teoria.

Secondo von Neumann le affermazioni proprie di una teoria statistica sono quelle che determinano i valori medi (o valori d'attesa) di un'osservabile in uno stato. In quest'approccio concetti come probabilità o misura di probabilità non vengono considerati come primitivi, ma le probabilità vengono definite come valori medi di particolari osservabili e le misure di probabilità come restrizioni di funzioni di aspettazione su particolari insiemi di osservabili. La definizione di "valore di attesa" (o valor medio) data da von Neumann è assiomatica, quindi evita il circolo vizioso per cui le medie, che vengono usate per definire il concetto di probabilità, sono esse stesse definite in termini di probabilità. Tale problema però può risollevrasi a livello interpretativo (cf. (47)). La concezione della probabilità soggiacente all'approccio di von Neumann è quella di Gibbs – von Mises; l'apparato matematico funzionale a questa è essenzialmente algebrico (Segal, parlerà di "Teoria algebrica dell'integrazione" (36)).

L'approccio di Mackey si ricollega invece alla concezione di probabilità espressa dalla assiomatica di Kolmogorov, nella quale i concetti fondamentali sono quelli di evento, misura di probabilità, funzione (o misura) di distribuzione associata ad una osservabile e ad una misura di probabilità. In questa impostazione il concetto di valor medio diventa concetto derivato e le affermazioni proprie di una teoria statistica vengono individuate in quelle che specificano la probabilità che la misura di una osservabile in uno stato fornisca dei valori in un certo intervallo (o, più in generale, insieme di Borel) di numeri reali.

Una volta definito il concetto generale di teoria statistica il modello matematico di una particolare teoria si costruisce assegnando, mediante ulteriori assiomi o deducendo da quelli dati, i corrispondenti matematici per le osservabili, gli stati le affermazioni della teoria, e specificando le relazioni tra queste.

Pertanto è chiaro come due teorie profondamente diverse, come quelle menzionate sopra, possano dare luogo a modelli equivalenti una volta specificate mediante ulteriori assiomi. Questo è appunto il caso del modello matematico della teoria quantistica così come esso risulta univocamente specificato dagli assiomi di von Neumann o da quelli di Mackey. Gli assiomi di Segal (cf. (35), (39)) invece non determinano univocamente il modello e, come vedremo in seguito, questa maggiore generalità sarà uno strumento essenziale nel problema della determinazione delle probabilità congiunte in una teoria statistica generale.

Come si è già detto prima (cf. (4.0)), lo scopo di una teoria assiomatica non è solo quello di determinare univocamente, mediante certe richieste, un particolare modello matematico, sia pure molto importante, ma soprattutto quello di chiarire i fondamenti concettuali di tale modello e di stimolare generalizzazioni feconde e connessioni con altre discipline.

In quanto segue cercherò di illustrare, molto brevemente, i punti di vista dei singoli autori menzionati sopra nel tentativo di mettere in luce i punti di vista nuovi con cui ciascuno di essi ha arricchito la nostra comprensione del formalismo quantistico e le connessioni tra questi e con altri approcci allo stesso problema.

4.5) L'impostazione di Mackey

Nella impostazione di Mackey occorre distinguere tre gruppi di assiomi: un primo gruppo che specifica i caratteri di una generale teoria statistica; un secondo gruppo che isola una classe di teorie statistiche comode da trattarsi da un punto di vista matematico; un terzo gruppo che, all'interno di questa classe di teorie specifica il modello della teoria quantistica.

Secondo Mackey le affermazioni proprie di una teoria statistica relative a un qualsiasi prefissato istante di tempo sono del tipo:

$$\begin{cases} p(A,\alpha,E) = & \text{probabilità che la misura della osservabile } A \text{ nello stato } \alpha \text{ conduca} \\ & \text{ad un valore giacente nel sotto–insieme (di Borel) } E \text{ dei numeri} \\ & \text{reali.} \end{cases}$$

Gli assiomi del primo gruppo riguardano le affermazioni della teoria (a un istante di tempo fissato arbitrariamente) sono:

Assioma I: $\forall\, A \in \mathcal{O}$; $\forall\, \alpha \in \mathcal{S}$; l'applicazione $E \mapsto p(A,\alpha,E)$ è una misura di probabilità sugli insiemi di Borel di $\mathbb{R}$.

Assioma II: si divide in due affermazioni:

II.1 Se: $p(A,\alpha,E) = p(A',\alpha,E)$; $\forall\, \alpha \in \mathcal{S}$; $\forall\, E \subseteq \mathbb{R}$ allora: $A = A'$

II.2 Se: $p(A,\alpha,E) = p(A,\alpha',E)$; $\forall\, A \in \mathcal{O}$; $\forall\, E \subseteq \mathbb{R}$ allora $\alpha = \alpha'$

Assioma III: $\forall\, A \in \mathcal{O}$; $\forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di Borel; esiste $B \in \mathcal{O}$ tale che:

$$p(B,\alpha,E) = p(A,\alpha,f^{-1}(E))$$

Assioma IV: Se (α_J) è una successione di stati; (t_J) successione di numeri reali tali che $t_J \geq 0$; $\sum_J t_J = 1$. Allora esiste $\alpha \in \mathcal{S}$, tale che:

$$p(A,\alpha,E) = \sum t_J p(A,\alpha_J,E)$$

L'assioma I esprime semplicemente in modo rigoroso il significato dell'affermazione $p(A,\alpha,E)$.

L'Assioma (II.1) esprime il fatto che due osservabili sono diverse solo se è possibile effettuare su di esse una stessa misura che conduca a risultati diversi. Se una teoria statistica non soddisfa l'assioma (II.1) allora una osservabile A può essere identificata con tutte le osservabili A' tali che

$$p(A,\alpha,E) = p(A',\alpha,E) \ ; \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{S} \ ; \quad \forall\, E \subseteq \mathbb{R}$$

(principio di identità degli indiscernibili) e perciò dall'insieme $\mathcal{O}$ se ne può ottenere un altro $\mathcal{O}'$ da esso indistinguibile operativamente, all'interno della teoria, e che soddisfa (II.1). Considerazioni analoghe valgono per l'Assioma (II.2).

L'Assioma III corrisponde al concetto intuitivo di funzione di una osservabile. Questo può essere definito operativamente come segue: siano A una osservabile ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione; l'osservabile $f(A)$ è l'osservabile caratterizzata dalla proprietà che se una misura di A nello stato α dà il valore λ allora la misura di $f(A)$ nello stato α da il valore $f(\lambda)$. Poiché un'osservabile è completamente specificata dall'insieme delle misure effettuabili su di essa, la definizione precedente determina un'unica osservabile. Ora $f(\lambda) \in E$ se e solo se $\lambda \in f^{-1}E$; perciò (grazie all'Assioma II.1), se $B = f(A)$ la probabilità che una misura di B nello stato α dia un risultato in E è uguale alla probabilità che una misura di A in α dia un risultato in $f^{-1}(E)$.

L'assioma IV specifica il carattere *propriamente statistico* della teoria. Vale a dire: è facile verificare che una qualsiasi teoria classica non statistica – o "esatta" come diremo in seguito servendoci di una terminologia euristica (per esempio la Meccanica Aanalitica) può essere immersa in una teoria statistica in modo tale che gli assiomi I, II, III risultino soddisfatti[2]All'interno delle teorie statistiche le teorie "esatte" possono essere caratterizzate come quelle a cui sono associate soltanto misure di probabilità banali. In altri termini, nelle notazioni precedenti, una teoria statistica si dice esatta se per ogni osservabile A ogni stato α, e ogni insieme E (di Borel) di numeri reali, risulta $p(A, \alpha, E) = 0$ oppure 1. Usiamo il termine "esatto" poiché il termine "deterministico" sarà utilizzato per descrivere una proprietà delle *evoluzioni temporali* dei sistemi della teoria..

Ma in una teoria "esatta" l'Assioma IV non può mai esere soddisfatto. Questo esprime il fatto che lo stato α è una miscela degli stati α_J, e in una teoria "esatta" nessuno stato può essere miscela di altri stati.

L'immersione di una teoria "esatta" in una teoria statistica può sempre essere effettuata e corrisponde fisicamente all'analisi statistica di un sistema classico. Per esempio, da un punto di vista concettuale, il passaggio dalla Meccanica classica alla Meccanica Statistica classica costituisce un esempio di tale immersione (nel quale tuttavia, l'assioma IV và lievemente rafforzato).

4.6) Avendo definito il concetto di teoria statistica mediante gli assiomi I–

[2](1)

IV, che collegano gli oggetti (cioè osservabili e stati) con le affermazioni della teoria, si pone il problema di *determinare* tutti i possibili modelli matematici di una teoria statistica.

È a questo punto che interviene quello che ritengo il contributo concettuale più interessante dell'analisi di Mackey. Egli infatti dimostra che a una teoria statistica definita dagli assiomi I–IV (più l'assioma V che è di carattere tecnico; (cf. (29), pag. 65) è naturalmente associato un insieme parzialmente ordinato ortocomplementato[3]Un insieme $\mathcal{I}$ viene detto parzialmente ordinato se tra i suoi elementi è definita una relazione d'ordine binaria $\leq$ con le seguenti proprietà:

$$a \leq a; \ a \leq b \ \text{ e } \ b \leq a \Rightarrow a = b \quad ; \quad a \leq b \quad ; \quad b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

Per la definizione di "ortocomplementazione" cf. (29), pg. 68. di osservabili con la proprietà che le affermazioni della teoria relative a tali osservabili non hanno un carattere probabilistico ma esatto.

In altre parole: le affermazioni di una teoria "esatta" specificano la verità o la falsità di possibili risultati di operazioni di misura; mentre le affermazioni proprie di una teoria statistica concernono solo la probabilità dei risultati di operazioni di misura.

Si è già visto che una teoria "esatta" può sempre essere immersa in una teoria statistica in modo che ad affermazioni vere corrispondano eventi di probabilità 1 e ad affermazioni false eventi di probabilità 0. In questo modo ogni teoria esatta determina univocamente la più piccola teoria statistica (nel senso di Mackey) nella quale essa è immersa.

L'interesse dell'analisi di Mackey sta nel fatto che egli riesce a dimostrare che anche il procedimento inverso è possibile, cioè: data una teoria statistica ad essa è possibile associare un insieme di osservabili tali che le affermazioni della teoria, una volta limitate a tali osservabili risultino di carattere *esatto*, e cioè esprimenti la verità o la falsità di un evento e non la sua probabilità. Inoltre la corrispondenza è tale che questo insieme di osservabili e le affermazioni della teoria (statistica) che lo riguardano determinano in modo univoco (grazie all'assioma VI, (29), pg. 66 anche esso di carattere tecnico) l'intera teoria statistica. Le osservabili di questo insieme vengono dette anche domande o proposizioni elementari, o esperimenti si–no in forza del fatto che le affermazioni della teoria relative ad esse possono essere soltanto vere o false.

[3](2)

Occorre tener ben presente che queste "proposizioni" sono soltanto un sotto–insieme dalle proposizioni o affermazioni della meccanica quantistica in quanto teoria statistica. Seguendo una distinzione sottolineata da von Neumann ((43), pg. 297) possiamo dire che le prime sono asserzioni riguardanti un sistema quantistico; le seconde, un sistema quantistico in un determinato stato. Per esempio, l'affermazione "una particella si trova nella regione E dello spazio fisico" è del primo tipo; l'affermazione "la probabilità che la particella ξ nello stato α si trovi nella regione E dello spazio fisico è $p(\xi, \alpha, E)$" è del secondo tipo.

Gli assiomi I–IV (più gli assiomi tecnici V, VI) e l'analisi a questi connessa riguardano una teoria statistica assolutamente generale; in essi non interviene nessuna affermazione che caratterizza la teoria quantistica all'interno delle teorie statistiche di tipo classico. In particolare, all'interno delle teorie descritte da questi assiomi, si può dare una caratterizzazione matematica molto semplice sia delle teorie statistiche classiche sia delle teorie esatte classiche. Le prime vengono caratterizzate della proprietà che l'insieme parzialmente ordinato di osservabili ad esse naturalmente associato è un σ–reticolo booleano; le seconde come quelle teorie statistiche classiche a cui sono associate solo misure di probabilità banali (cf. la nota alla fine del no. (4.5)).

Nel numero seguente questa corrispondenza sarà brevemente descritta allo scopo di illustrare le analogie e le differenze tra la situazione classica e quella quantistica.

4.7) Calcolo proposizionale associato alla Meccanica Classica

In una teoria formalizzata è possibile elencare a priori, in modo implicito o esplicito, tutte le sue affermazioni. Per esempio, i primi quattro assiomi di Mackey (cf. (4.5)) elencano in modo implicito tutte le affermazioni di una teoria statistica. L'insieme delle affermazioni dii una teoria è, per così dire, immerso nell'insieme di tutte le affermazioni del "linguaggio comune"[4]Usiamo qui questa espressione in senso puramente euristico.. Perciò affermazioni di una teoria, considerate come affermazioni del linguaggio comune, sono applicabili i consueti connettivi della logica classica (congiunzione, disgiunzione, negazione).

Può accadere che l'applicazione di questi connettivi ad affermazioni (del "linguaggio comune") corrispondenti ad affermazioni della teoria conduca sempre ad un'altra affermazione di questo tipo. Se ciò accade diremo che la

[4](3)

teoria in questione è classica. In altre parole, una teoria viene detta classica se l'immersione delle sue affermazioni nel "linguaggio comune" è chiusa per i connettivi booleani. Si può dare una caratterizzazione intrinseca di una teoria classica mediante la proprieà che l'insieme delle sue affermazioni forma un reticolo booleano. La definizione di teoria classica data sopra pur facendo uso del termine euristico "linguaggio comune" non solo richiede che l'insieme delle proposizioni sia un reticolo booleano, ma richiede anche che le operazioni del reticolo corrispondano, attraverso questa immersione, ai connettivi della logica classica.

Inoltre l'immersione nel linguaggio comune mette in risalto il fatto che, per alcune teorie, l'applicazione di un connettivo logico classico può condurre ad una affermazione che è perfettamente sensata nel "linguaggio comune" ma che non ha senso nella teoria iniziale. Questo è appunto il caso della teoria quantistica le cui affermazioni:

– la posizione della particella A al tempo t è q

– il momento della particella A al tempo t e p

sono tali che la loro congiunzione ha senso come affermazione del "linguaggio comune" ma non ha senso all'interno della teoria quantistica (cioè non appartiene all'insieme delle sue affermazioni).

4.7.1) Accade che, per alcune teorie, questa immersione dell'insieme delle affermazioni nel "linguaggio comune" possa essere costruita esplicitamente. Questo è il caso della meccanica analitica classica e, più in generale, della descrizione classica ("esatta") di un sistema fisico.

In una tale descrizione uno "stato" di un sistema fisico viene rappresentato, nel modello matematico, mediante un punto di uno spazio S (detto spazio delle fasi del sistema) ed una osservabaile mediante una funzione (continua, o misurabile, o differenziabile,...) su tale spazio. Le affermazioni della teoria sono del tipo:

(i) il valore dell'osservabile f nello stato s è λ (cioè $f(s) = \lambda$), ovvero più in generale:

(ii) il valore dell'osservabile f nello stato s giace nell'intervallo (o, più in generale, nell'insieme di Borel) I dei numeri reali (cioè $f(s) \in I$).

Facendo corrispondere all'affermazione (ii) il sottoinsieme di S:

$$f^{-1}(I) = \{\text{l'insieme degli } s \text{ in } S \text{ tali che } f(s) \in I\}$$

si ottiene una corrispondenza univoca tra affermazioni della teoria e sottoinsiemi dell'insieme S. Si possono allora trasportare le operazioni su affermazioni determinate dai connettivi logici (congiunzione, disgiunzione, negazione) in operazioni su sottoinsiemi di S e si dimostra senza difficoltà che a tali operazioni corrispondono le consuete operazioni insiemistiche di intersezione, unione, complemento. In questo modo si deduce che in una teoria esatta classica l'immersione delle affermazioni nel "linguaggio comune" è chiuso per i connettivi classici; e viene costruito esplicitamente un isomorfismo tra l'insieme delle affermazioni della teoria e un particolare reticolo booleano.

Il fatto che tale reticolo sia in effetti un σ–reticolo, cosa a priori non ovvia, viene stabilito come conseguenza di questa costruzione.

4.7.2) Se si considera la meccanica statistica classica o, più in generale, la descrizione statistica di un sistema classico, i modelli matematici per le osservabili sono sostanzialmente gli stessi; mentre gli stati sono rappresentati, nel modello matematico, da misure di probabilità sullo spazio S con particolari proprietà (per es. l'essere assolutamente continue rispetto ad una misura privilegiata, oppure il godere di particolari proprietà di invarianza rispetto a certi gruppi di trasformazioni). Se consideriamo la descrizione statistica di un sistema classico una teoria statistica nel senso descritto degli assiomi di Mackey (cf. N. (4.5)) allora le affermazioni della teoria sono del tipo[5]Vedremo in seguito che le affermazioni di una teoria statistica classica nel senso di von Neumann–Segal, pur essendo effettuate sugli stessi oggetti sono di tipo diverso.:

$$p(f, \alpha, E) = \alpha(f^{-1}(E))$$

e le proprietà richieste dalle misure di probabilità (α) sono tali che gli assiomi I–IV (cf. (4.5)) sono verificati dalle espressioni $\alpha(f^{-1}E)$.

Ora dai risultati generali enunciati al n. (4.6) per una qualsiasi teoria statistica, segue che anche a questo particolare modello matematico sarà associato un insieme parzialmente ordinato ortocomplementato. È naturale allora chiedersi: se $\mathcal{L}_c$ è il σ–reticolo booleano associato alla descrizione classica esatta di un sistema fisico secondo il N. (4.7.1) ed $\mathcal{L}_s$ è l'insieme parzialmente ordinato ortocomplementato associato (nel modo enunciato sopra) ad una descrizione statistica classica dello stesso sistema, quale relazione ci sarà tra $\mathcal{L}_c$ ed $\mathcal{L}_s$?

Si può dimostrare che la risposta a questa domanda è la seguente: anche $\mathcal{L}_s$ è σ–reticolo booleano; $\mathcal{L}_s$ si può costruire facilmente a partire da $\mathcal{L}_c$ e

5(4)

dalla famiglia (α) di misure di probabilità[6]In generale $\mathcal{L}_s$ sarà il quoziente di $\mathcal{L}_c$ per uno suo sotto–σ–reticolo dipendente dalla famiglia (α).; in particolare, se la teoria statistica (cioè la famiglia (α) di misure di probabilità su S) è scelta in modo tale che la teoria classica corrispondente possa essere immersa in essa[7]Ciò accade per esempio se (α) è la famiglia di *tutte* le misure di probabilità su S. allora $\mathcal{L}_s$ ed $\mathcal{L}_c$ *coincidono.*

Il fatto che $\mathcal{L}_s$ sia un quoziente di $\mathcal{L}_c$ per un suo σ–ideale significa che, in generale, una teoria classica esatta può distinguere affermazioni che sono indistinguibili all'interno di una teoria statistica. Per esempio, la ben nota affermazione di Birkhoff e von Neumann (10) secondo cui non avrebbe senso in un contesto di meccani classica l'affermazione che il momento angolare della luna è un dato istante un numero razionale, và intesa nel senso che nel contesto della meccanica statistica classica questa affermazione è indistinguibile da tutte le affermazioni del tipo; "il momento angolare della luna all'istante t è un numero appartenente all'insieme N" dove N è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue. Ciò accade perché la famiglia (α) delle misure di probabilità che caratterizzano la meccanica statistica classica è la famiglia delle misure di probabilità che sono assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue e perciò non è possible immergere la teoria esatta classica in tale teoria statistica.

Il reticolo $\mathcal{L}_s$ generalizza il reticolo $\mathcal{L}_c$ nel senso che i suoi elementi non sono le affermazioni della teoria esatta, ma le classi di tutte quelle affermazioni esatte tra loro indistinguibili all'interno della teoria statitsica in questione. In questo senso il reticolo $\mathcal{L}_s$ viene chiamato il reticolo delle "proposizioni" della teoria. È importante osservare, per quello che si dirà in seguito, che le "proposizioni" di $\mathcal{L}_s$ pur essendo (classi di) affermazioni della teoria esatta in generale non corrispondono ad affermazioni della teoria statistica. Perciò anche nel caso estremo in cui $\mathcal{L}_s$ ed $\mathcal{L}_c$ coincidono c'è una profonda differenza nel ruolo di questi reticoli all'interno delle corrispondenti teorie: il primo è una realizzazione concreta del reticolo di *tutte* le affermazioni della teoria; il secondo è un particolare insieme di osservabili che, attraverso un processo matematico applicabile ad una particolare classe di teorie (e cioè quelle definite dagli assiomi I–IV di Mackey), permette di ricostruire l'insieme delle affermazioni della teoria. Il primo è un modello matematico del calcolo proposizionale associato a una teoria esatta classica; il secondo *non è* un

6(5)

7(6)

calcolo proposizionale sulle affermazioni di una teoria statistica classica ma solo un calcolo proposizionale su classi di affermazioni della teoria esatta ad essa associata.

4.7.3) La relazione tra teorie statistiche e i "reticoli delle proposizioni" ad esse corrispondenti è espressa dal seguente teorema dovuto a G.W. Mackey ((29) pg. 68):

Teorema 1 *Ad ogni terna* ($\mathcal{O}$, $\mathcal{S}$, $\{p(A,\alpha,E)\}$) *soddisfacente gli assiomi* I–VI *(cf. N.* (4.5)*) è associata una coppia* $\{\mathcal{L},\mathcal{F}\}$ *tale che:* **(R.1)** $\mathcal{L}$ *è insieme parzialmente ordinato da una realzione* $\prec$. **(R.2)** *Su* $\mathcal{L}$ *è definito un antiautomorfismo involutorio* $a < b \Rightarrow a' > b'$*).* **(R.3)** *L'antiautomorfismo* $a \mapsto a'$ *è una ortocomplementazione (cf. (29)).* **(M1).** *Ogni* $m \in \mathcal{F}$ *è una misura di probabilità su* $\mathcal{L}$ *(cfr. (29), pg. 66).* **(M2).** *Per ogni* $a, b \in \mathcal{L}$ *risulta*

$$a < b \Longleftrightarrow m(a) \leq m(b) \ ; \quad \forall\, m \in \mathcal{F}$$

(M3). *Per ogni successione* (t_J) *di numeri reali positivi tali che* $\sum_J t_J = 1$, *e per ogni successione* (m_J) *in* $\mathcal{F}$*, risulta:* $\sum_J t_J m_J \in \mathcal{F}$.

Inversamente ogni coppia $\{\mathcal{L},\mathcal{F}\}$ *con le proprietà elencate sopra definisce una terna* $(\mathcal{O},\mathcal{S},\{p(A,\alpha,E)\})$ *che soddisfa gli assiomi* I–VI *e tale che, detta* $\{\mathcal{L}',\mathcal{F}'\}$ *la coppia associata a tale terna secondo la prima parte del teorema, esiste un isomorfismo (di insiemi parzialmente ordinati, ortocomplentati) tra* $\mathcal{L}$ *ed* $\mathcal{L}'$ *che induce una corrispondenza biunivoca tra* $\mathcal{F}$ *ed* $\mathcal{F}'$.

Questo teorema dimostra che l'assegnazione di una teoria statistica generale (così come definita dagli assiomi I–VI) è equivalente all'assegnazione di una coppia $\{\mathcal{L},\mathcal{F}\}$ con le proprietà sopra–elencatae.

Per motivi storici (cf. (29), pg. 68) l'insieme $\mathcal{L}$ viene spesso chiamato "logica", o "insieme delle proposizioni", sul sistema descritto dalla teoria statistica in questione. L'insieme $\mathcal{F}$ viene detto insieme degli *stati* del sistema. L'analisi effettuata nel N. precedente mostra come l'uso di tale terminologia possa condurre, anche nel caso di teorie classiche, ad ambiguità come, cper esempio, la confusione tra i ruoli dell'insieme $\mathcal{L}$ in una teoria classica esatta, dove questo è effettivamente un modello matematico del reticolo delle proposizioni della teoria, ed in una teoria classica statistica dove non lo è.

4.8) *Il modello quantistico (secondo Mackey)*

Il teorema di Mackey, enunciato nel N. precedente, fornisce una classificazione di tutti i modelli matematici di una teoria statistica generale (così come definita dagli assiomi I–VI) in termini di coppie di insiemi parzialmente ordinati ortocomplementati e di famiglie di misure di probabilità su tali insiemi. In particolare quindi il modello matematico della teoria quantistica, sarà caratterizzato in quanto teoria statistica a tempi fissi, dalla proprietà di una siffatta coppia $\{\mathcal{L}, \mathcal{F}\}$. Tali proprietà sono espresse dal seguente assioma:

Assioma VII: $\mathcal{L}$ è isomorfo, in quanto insieme parzialmente ordinato ortocomplentato, all'insieme di tutti i proiettori su uno spazio di Hilbert complesso separabile a infinite dimensioni, con l'ordine e l'ortocomplementazione naturali.

Una volta determinato il modello detta teoria quantistica "statica" cioè indipendente dal tempo, le caratteristiche dinamiche della teoria saranno specificate dal seguente assioma:

Assioma VIII: L'evoluzione temporale di un sistema quantistico è descritta da un gruppo a un parametro di automorfismi (V_t) dell'insieme $\mathcal{F}$ degli stati.

Il procedimento mediante il quale dall'analisi di questi due assiomi si perviene alla determinazione completa del modello quantistico è descritto nella monografia di Mackey (29). Ciò che, ai fini della resente analisi, importa sottolineare è il carattere del tutto ad hoc di questi due assiomi. Questa arbitrarietà, giustificata soltanto a posteriori dal fatto che il formalismo conduca a molti risultati importanti, è una caratteristica che appare in un modo o nell'altro in tutte le descrizioni del formalismo quantistico (cf. anche più oltre): la sua presenza sta a testimoniare l'insufficienza degli attuali fondamenti teorici del formalismo quantistico.

A differenza dell'Assioma VII, l'assioma VIII esprime due richieste fisicamente molto ben precise: il determinismo e la reversibilità dell'evoluzione temporale del sistema. Il fatto che in una teoria statistica, così come è stata caratterizzata la teoria quantistica da tutti gli assiomi precedenti, il postulato che definisce l'evoluzione temporale sia di carattere puramente deterministico è una caratteristica insoddisfacente di quest'assioma; un'altra deriva dal fatto che con questo approccio i sistemi in cui l'energia totale è una costante del moto e quelli in cui ciò non è vero possono essere trattati sullo stesso piano soltanto a prezzo di una notevole artificiosità matematica. Nonostante le insufficienze elencate sopra, l'avere ridotto l'intera formulazione della teoria quantistica[8] a questi otto assiomi, l'aver dimostrato che tutta una serie di affermazioni alle quali per lungo tempo è stato attribuito un carattere fondamentale e indipendente si ottengono come conseguenze di queste (per esempio il principio d'indeterminazione di Heisenberg, l'equazione di Schrödinger la quantizzazione dello spettro dell'energia) ha rappresentato un successo indiscutibile e la base concettuale e tecnica per ogni successivo sviluppo.

4.9) Sull'analisi dell'assioma VII o di uina sua formulazione equivalente si è concentrata una gran parte dei lavori scientifici sui fondamenti della meccanica quantistica.

In quest'analisi occorre distinguere due linee di pensiero principali: una che accetta la validità del modello descritto dagli otto assiomi enunciati sopra (o loro equivalenti), parte dell'assunto che tale modello matematico non appaia per caso, ma sia l'espressione di alcune richieste di carattere fisico, e cerca di individuare un insieme di tali richieste. Un'altra, che rifiuta la necessità di un siffatto modello, parte dall'assunto che un modello matematico della meccanica quantistica possa essere costruito in termini puramente classici, e cerca di costruire esplicitamente un tale modello. All'interno di ciascuna di queste due linee esistono varie differenziazioni; ciascuna di esse è l'espressione di una esigenza valida e profonda: la prima esprime la convinzione che un formalismo matematico che è stato la base della comprensione di tanti importanti fenomeni naturali non può essere il frutto di un artificio ingegnoso, ma dev'essere l'espressione di proprietà concettualmente semplici e profonde, e l'esigenza di individuare queste proprietà. La seconda esprime la convinzione che un formalismo, così strettamente connesso con la teoria della probabilità, in cui i tradizionali concetti probabilistici sono sottoposti ad una analisi profonda e sottile e in cui il consueto formalismo probabilistico mostra delle inaspettate insufficienze, non possa essere completamente disgiunto dalla teoria classica delle probabilità; tanto più poi tenendo conto del fatto che tutte le affermazioni dedotte da questo formalismo sono espresse in termini di probabilità (o di attese) puramente classiche. L'esigenza alla base di questa seconda linea di pensiero è quella di ricongiungere la teoria classica delle probabilità con la teoria quantistica[9].

[8] Cf. nota a pg. 27.

[9] Come si è già detto per ottenere la descrizione completa della meccanica quantistica occorre aggiungere a questi otto assiomi un altro, che definisce il gruppo di simmetrie del sistema e la sua rappresentazione matematica. Si può dire che questi otto assiomi

In molti casi da parte dei sostenitori di queste linee si è adottata una posizione di tipo estremo, o accettando senz'altro il carattere di totale autonomia della teoria quantistica dalla teoria delle probabilità, ovvero affermando la equivalenza della teoria quantistica con una teoria probabilistica di tipo completamente classico. Il programma al quale sto lavorando è quello di dimostrare che il formalismo quantistico (decritto dagli assiomi di Mackey o loro equivalenti) può essere dedotto in un contesto in cui, attraverso un'analisi puramente classica, si deduca un sostanziale arricchimento del consueto formalismo probabilistico il quale arrivi così a includere il formalismo quantistico; cioè: il consueto formalismo quanatistico non viene rifiutato o sostituito, ma si dimostra che esso è l'espressione naturale di richieste di tipo classico. Alcuni risultati sono già stati ottenuti in questa direzione (5), (6), (7), (8), tuttavia di questi, così come di quelli relativi alle due linee di pensiero delineate sopra, non discuterò nel presente lavoro, poiché attualmente nessuna di queste linee di ricerca riesce a fornire una soluzione del problema di dare un fondamento teorico all'assioma VII (o uno ad esso equivalente), che sia completa e che, nello stesso tempo, presenti quelle caratteristiche di profondità e semplicità concettuale che occorre pretendere dalla soluzione di un tale problema.

Vedremo invece nel seguito (cfr. N. (5.)) come una soluzione del problema analogo, per quanto riguarda l'Assioma VIII (Postulato Dinamico) sia invece possibile.

4.10) Il teorema di Mackey, enunciato al No. 4.8) costituisce il punto di collegamento tra le due linee di ricerca sui fondamenti della meccanica quantistica a cui si è accennato nel N. 3.) Esso infatti dimostra che ad una teoria statistica (definita dagli assiomi I–VI) è associato un "calcolo proposizionale" definito su un insieme parzialmente ordinato ortocomplementato $\mathcal{L}$ e questo, a sua volta determina la teoria statistica. Il programma di caratterizzare il modello matematico della meccanica quantistica in termini del calcolo proposizionale ad esso associato, è stato formulato per la prima volta nell'articolo (10) di G. Birkhoff e J. von Neumann ed è stato realizzato attraverso i contributi di molti autori tra cui J. Jauch (27), C. Piron, V.S. Vadarajan (41) (cf. (9) per una discussione dettagliata della situazione attuale in questa linea di ricerca). Va notato che il punto di partenza di questi autori è completamente diverso da quello di Mackey. Questi parte dall'analisi di una teoria statistica

definiscano una teoria quantistica "astratta".

generale e *deduce* la equivalenza di questa con l'assegnazione di un calcolo proposizionale. Per quelli invece il punto di partenza è lo stesso calcolo di proposizionale. Per esempio Jauch considera il calcolo proposizionale una caratteristica intrinseca della teoria e le sue regole espressioni di proprietà fisiche obiettivamente date:

'.... The calculus introduced here has an entirely different meaning from the calculus used in formal logic. Our calculus is the formalization of a set of *empirical* relation which are obtained by making measurements on a physical system. It expresses an objectively given property of the physical world. It is thus the formalization of empirical facts, inductively arrived at an subject to the uncertainty of any such fact" ((27) pg. 77).

Mackey assume senz'altro (Assioma VII) che l'insieme $\mathcal{L}$ delle proposizioni sia isomorfo (come insieme parzialmente ordinato ortocomplementato) all'insieme dei proiettori di uno spazio di Hilbert separabile complesso a infinite dimensioni, con ordine e ortocomplementazione naturali. Uno dei punti centrali di quest'altra linea di ricerca è invece la caratterizzazione di proprietà intrinseche di $\mathcal{L}$ che garantiscano quest'isomorfismo e il programma consiste nel giustificare, in base a considerazioni fisiche queste proprietà.

La formulazione dei principali risultati di questa linea di ricerca è impossibile senza addentrarsi in una terminologia tecnica che trascende gli scopi e il linguaggio della presente relazione[10].

4.11) L'impostazione di von Neumann–Segal.

Come si è già detto (cf. N. (4.4)) le impostazioni di von–Neumann e Segal differiscono da quelle di Mackey per le diverse concezioni, ad esse soggiacenti, della teoria delle probabilità. La concezione della teoria delle probabilità espotsa da von Neumann (cf. (44)) per un verso si ricollega alla teoria dei collettivi di von Mises (42), in quanto pone alla base della descrizione statistica di un sistema $\mathfrak{S}$ una famiglia $\{\mathfrak{S}_i\}$ di "copie" di questo sistema; per un altro verso si distacca da quella poiché in essa la descrizione statistica di un sistema non viene effettuata mediante i concetti di probabilità o evento, ma associando a questo l'insieme $(\overline{a})$ di tutte le grandezze fisiche osservabili del sistema e stabilendo l'equivalenza tra una descrizione statistica del sistema e l'assegnazione di un "valaore d'attesa" sull'insieme di osservabili ad esso associato: "... Jeder "Kenntnis" über $\mathfrak{S}^i$, d.h. jeder Gesamtheit $\{\mathfrak{S}'_i\}$, entspricht eine Zuordnung eines Erwartungs wertes zu Jeder Grösse $\overline{a}$ (d.h.

[10]Rimandiamo per questa, al già citato articolo di rassegna (9), di E. Beltrametti e G. Cassinelli.

des Mittelwertes der bei $\{\mathfrak{S}'_i\}$ auftretenden Verteilung seiner Werte). Und umgekehrt ist die "Kenntnis" über $\mathfrak{S}'$, d.h. di statistiche Zusammensetzung von $\{\mathfrak{S}'_i\}$ vollkommen beschrieben, wenn die Zuordnung

$$\overline{a} \longleftrightarrow \text{Erwartungsert von } \overline{a} = E(\overline{a})$$

für *alle* Grössen $\overline{a}$ gegeben its" (cf. (44), pg. 211).

La descrizione di una teoria statistica si effettua dunque, nello schema di von Neumann, assegnando gli assiomi che specificano le proprietà delle osservabili e delle funzioni di aspettazione associate al sistema. Nel lavoro citato di von Neumann, questa specificazione, pur essendo molto chiara non è del tutto formalizzata; cioè non è enunciata compattamente sotto forma di teora assiomatica (occorre tener presente che il nucleo centrale del lavoro di von Neumann alla teoria delle probabilità è rimasto in questi anni sconosciuto, o almeno inutilizzato[11] dalla massima parte degli specialisti in teoria delle probabilità. Eppure l'interesse di questo approccio è notevole poiché esso, come vedremo permette di unificare, in un linguaggio unico la teoria classica delle probabilità e le teorie quantistiche e di presentare queste due non come teorie statistiche completamente diverse, ma come diverse realizzazioni matematiche di una stessa, generale, teoria statistica.

Nell'analisi di von Neumann occorre distinguere due momenti: uno, nel quale vengono elencate le proprietà intrinseche delle osservabili e dei "valori di aspettazione associati a un sistema (cioè quelle proprietà di tali oggetti che non dipendono dal particolare modello matematico scelto per rappresentarli). Un altro, nel quale il modello della meccanica quantistica viene determinato assegnando delle realizzazioni matematiche concrete per le osservabili (i.e. operatori heermitiani su uno spazio di Hilbert) e deducendo la forma del più generale "valore di aspettazione" dalle proprietà di questo e dalla forma concreta delle osservabili. L'analisi di von Neumann cioè, a differenza di quella di Mackey, non segue neppure parzialmente lo svolgimento di una teoria assiomatica così come esso è stato schematicamente delineato nel n. 4.0), cioè in essa non si tenta neppure di classificare tutte le possibili realizzazioni matematiche della teoria statistica. Il problema di realizzare questo procedimento, a partire dall'analisi di von Neumann presenta difficoltà matematiche notevoli; esso è stato parzialmente analizzato da I.E. Segal ((35), cap. I) e

[11] È sufficiente consultare le annate di una qualsiasi rivista di probabilità (fino agli anni '70 e oltre) per rendersi conto di questo fatto.

sarà discusso dall'autore in un successivo lavoro. In questo, ci limiteremo a riportare la definizione del concetto di teoria statistica generale, secondo von Neumann, e ad elencare (senza dedurli) i possibili modelli matematici di tale teoria seguendo, in quest'ultimo punto, l'impostazione di Segal (39) che è una generalizzazione di quella di von Neumann.

4.12) Sia $\mathfrak{S}$ un sistema; $\mathcal{O}$ l'insieme delle sue osservabili fisiche (denoteremo $\overline{a}$ il generico elemento di $\mathcal{O}$). Supporremo che sugli elementi di $\mathcal{O}$ è possibile definire

01) *un concetto di positività*: $\overline{a} \in \mathcal{O}$ è possibile se ogni misura della grandezza $\overline{a}$ da per risultato un numero positivo.

02) *La moltiplicazione per un numero reale*: se $a \in \mathcal{O}$, $\lambda\overline{a}$ è quella grandezza tale che se una misura su $\overline{a}$ dà il risultato α la "stessa misura" su λa dà il risultato $\lambda\alpha$.

03) *La somma (eventualmente infinita)*: se $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}, \ldots$ sono elementi di $\mathcal{O}$ allora $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots$ è quell'elemento di $\mathcal{O}$ con la proprietà che se una misura di $\overline{a}$ (risp. $\overline{b}$, $\overline{c}, \ldots$) dà il risultato α (risp. $\beta, \gamma, \ldots$) la "stessa misura" di $\overline{s}$ darà il risultato $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ (nel caso di somma infinita si richiede la convergenza della somma).

Una *funzione d'aspettazione* (valore di attesa, valor medio) è una funzione Exp: $\mathcal{O} \to \mathbb{R}$ con le proprietà:
(I) Se $\overline{a} \in \mathcal{O}$ è positiva, allora Exp $(\overline{a}) \geq 0$.
(IJ) Se $a, b, c, \ldots, \in \mathcal{O}$; α, β, γ allora

$$\text{Exp } (\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \ldots) = \alpha \text{ Exp } (\overline{a}) + \beta \text{ Exp } (\overline{b}) + \gamma \text{ Exp } (\overline{c}) + \ldots$$

Perciò una teoria statistica secondo von Neumann è determinata da una famiglia $\mathcal{O}$ di osservabili con le proprietà 01), 02), 03), e da una famiglia $\{\text{Exp}_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{S}}$ di funzioni di aspettazione su $\mathcal{O}$, parametrizzata da un insieme $\mathcal{S}$. Gli elementi di $\mathcal{S}$ vengono detti "stati del sistema" e il numero $\text{Exp}_\varphi(\overline{a})$ è detto valore di attesa della osservabile $\overline{a}$ nello stato φ (in queto contesto stiamo prescindendo dai fattori di normalizzazione per i val ori d'attesa).

4.13) Nella impostazione di Segal si introduce, nell'insieme delle osservabili l'ulteriore definizione

04) *concetto di limitatezza*: un'osservabile $\overline{a}$ viene detta limitata se ogni sua misura dà come risultato un numero minore, in valore assoluto, di un certo numero positivo $K(\overline{a})$.

Si postula inoltre quello che Segal chiama il "Principio fenomenologico fondamentale" cioè (35), cap. I):

"Ogni sistema fisico è definito in tutti i suoi aspetti fisicamente osservabili, dall'insieme di tutte le sue osservabili limitate".

Una volta premesso ciò, i modelli matematici di una teoria statistica vengono definiti mediante i seguenti assiomi:

(I.) Le osservabili limitate sono (in ogni istante di tempo) in corrispondenza biunivoca (che conserva, somme, positività, moltiplicazione scalare) con gli operatori hermitiani di una C^*–algebra A.

(II.) Gli stati fisici (cioè $\mathcal{S}$, cf. N. 4.12)) sono (in ogni istante di tempo) in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme degli stati della C^*–algebra A.

(III.) Se all'osservabile $\overline{a}$ corrisponde l'operatore hermitiano $a \in A$, e allo stato φ lo stato Φ di A, allora $\mathrm{Exp}_{\varphi}(\overline{a}) = \Phi(a)$.

Si può dimostrare che, se l'algebra A è commutativa, allora le osservabili possono essere identificate a funzioni continue e gli stati a misure di probabilità. Se l'algebra A è l'algebra di tutti gli operatori limitati su uno spazio di Hilbert (complesso, separabile, a infinite dimensioni) e l'insieme degli stati è l'insieme degli stati normali[12]Per la terminologia di teoria delle C^*–algebre o algebre di von Neumann cf. (16). su A, allora il modello matematico corrispondente coincide con quello consueto della meccanica quantistica. Ciò dimostra che l'impostazione di von Neumann–Segal della teoria delle probabilità permette di presentare il formalismo statistico classico e quello quantistico non come teorie estranee l'uno all'altra, ma come due realizzazioni matematiche diverse della stessa teoria statistica generale.

5.) *La teoria di Markof non commutativa*

5.0) L'analisi svolta al N. 4), pur nella sua schematicità ha permesso di illustrare l'aspetto concettuale di alcuni risultati importanti. Innanzitutto le teorie di von Neumann–Segal–Mackey permettonodi precisare il problema dei fondamenti teorici della meccanica quantistica, enunciato al N. 3.), suddividendo nei due seguenti problemi:**(A')** Dedurre, da considerazioni fisicamente plausibili, il fatto che in un particolare modello di teoria statistica le osservabili fisiche (limitate) vengono rappresentate mediante operatori hermitiani diuna certa C^*–algebra (Assioma I del N. (4.13)); o, equivalentemente, che l'insieme delle "proposizioni" associato alla teoria quantistica

12(11)

sia isomorfo (come insieme parzialmente ordinato ortocomplementato) all'insieme dei proiettori su uno spazio di Hilbert[13] (Assioma VII di Mackey, cf. (4.5)). **(A")** Dedurre, da considerazioni fisicamente plausibili, il fatto che in una teoria statistica come risulta essere la meccanica quantistica, l'evoluzione temporale dei sitsemi sia deterministica.

Inoltre (cf. (4.2)) l'analisi di una teoria statistica effettuata da questi autori è incompleta poiché si limita alle affermazioni della teoria a tempi fissi e non fornisce informazioni sulle affermazioni statistiche a tempi diversi, cioè sulle probabilità congiunte.

Nel presente N. illustreremo brevemente come l'analisi di questi autori possa essere completata includendo in essa anche affermazioni statistiche a tempi diversi e come ciò permetta, con l'aiuto di tecniche matematiche sviluppate recentemente (1), (2), di fornire una soluzione soddisfacente del problema (A").

5.1) Innanzitutto occorre osservare come il carattere deterministico dell'evoluzione temporale degli stati di un sistema descritto da una teoria statistica, non sia in nessun modo una peculiarità della meccanaica quantistica. Questa proprietà è condivisa da una vasta e importante classe di processi descritti da una teoria statistica *classica* e cioè i cosiddetti "processi di Markof".

Alcune analogie tra i processi di Markof e i sistemi quantistici sono state osservate fin dagli anni '30. Per esempio l'analogia formale tra l'equazione di Schrödinger e l'equazione del calore (che descrive una particolare classe di processi di Markof; i processi di diffusione) fu rilevata gà da Fürth (19) nel '33 e ha dato origine a una serie di lavori (18), (48), miranti a costruire una classe di processi di diffusione mediante la quale descrive tutti i processi quantistici. Questa linea di ricerca è culminata nei lavori di Nelson (33), (34) nei quali viene costruita una classe di processi di Markof (classici) a ciascuno dei quali è associata una funzione d'onda quantistica in modo tale che, a tempi fissi, le affermazioni statistiche delle due teorie coincidono su tutte le osservabiili che sono funzione della posizione, inoltre Nelson dimostra che ogni funzione d'onda è associata a un siffatto processo di Markof. Anche l'approccio di Feynmann (20) è basato su un'analogia tra processi di Markof e sistemi quantistici, e precisamente la analogia tra distribuzione di probabilità

[13]Nel seguito per brevità, per spazio di Hilbert intenderemo uno spazio di Hilbert complesso, separabile a infinite dimensioni.

e operatore di transizione di un processo di Markof classico e ampiezza di probabilità (i.e. funzine d'onda) e operatore di Green associato all'equazione di Schrödinger del sistema quantistico. Questa analogia è stata ulteriormente precisata nei lavori di G.E. Montroll (32), (cf. anche (21)).

Nell'approccio di Feynmann, a differenza di quelli menzionati prima, non si cerca di formulare la teoria quantistica all'interno di una teoria statistica classica, ma si cerca di sviluppare un formalismo matematico il quale la funzione d'onda di un sistema quantistico venga espressa come funzione di una quantità associata al sistema classico corrispondente (cioè la funzione d'azione). Il formalismo di Feynmann così come la generalizzazione di questo dovuta a Montroll è euristico da un punto di vista matematico e non può essere espresso all'intern di una formulazione della teoria quantistica del tipo von Neumann–Segal–Mackey.

5.2) Al di là degli aspetti tecnici (esistenza di un operatore di transizione, equazione di diffusione,...) i processi di Markof sono caratterizzati da una proprietà fisica molto semplice e profonda che noi chiameremo, limitando la nostra attenzione ai soli processi parametrizzati dal tempo "*Principio di correlazione statistica locale*" e cioè:

P.) Per ogni istante di tempo t_0 le osservabili relative a un istante $t > t_0$ sono statisticamente correlate con le osservabili relative all'istante t_0 e non sono state statisticamente correlate con le osservabili a un qualsiasi istante $s < t_0$.

In altri termini il Principio di correlazione statistica locale afferma che la storia futura $(t > t_0)$ di un'osservabile è statisticamente correlata con quella presente $(t = t_0)$ ma non con quella passata $(t < t_0)$.

Nel caso di sistemi descritti da una teoria statistica classica, termini come "correlazione statistica", "ossevabile relativa ad un istante t" ammettono una definizione matematica molto precisa.

Nei N. seguenti mostreremo come sia possibile costruire un modello matematico di teoria statistica il quale, a tempi fissi, coincida con le teorie descritte dalle assiomatiche di tipo von Neumann–Segal–Mackey e all'interno del quale la proprietà (P.) possa essere espressa in modo matematicamente rigoroso.

Un tale modello matematico non potrà limitarsi a descrivere una teoria a tempi fissi, poiché nell'enunciato del Principio di correlazione statistica locale si considerano insieme osservabili a tempi diversi e perciò, se vogliamo che il modello matematico sia tale che nel caso di osservabili classiche, cioè algebre commutative, la formulazione (P.) si riduca alla consueta proprietà di Markof (principio di corrispondenza) occorre tener presente che nel caso classico osservabili relative a tempi diversi appartengono ad algebre diverse (cf. (5.3) e, di conseguenza, un modello matematico che esprime la proprietà (P.) e che rispetti il principio di corrispondenza non può essere formulato interamente all'interno delle teorie assiomatiche di tipo von Neumann–Segal–Mackey.

5.3) I modelli matematici di una teoria statistica classica generale sono i processi stocastici.

Euristicamente un processo stocastico può essere descritto come segue (cf. (17), cap. II per una definizione rigorosa): è dato uno spazio $\mathcal{S}$ e una famiglia (x_t) di funzioni $x_t : S \to \mathbb{R}$.

Noi ci limiteremo al caso in cui il parametro t è un numero reale positivo che sarà interpretato come tempo. Si può pensare ad S come allo spazio degli "stati" del sistema e alle x_t come a funzioni di posizione[14]; in questo caso:

$$x_t(s) = \text{ posizione all'istante } t \text{ del sistema nello stato } s$$

Un'osservabile relativa all'istante t è una funzione della posizione all'istante t, cioè una funzione del tipo $s \mapsto f(x_t(s))$, dove f è una funzione (di Baire) della retta reale in sé.

In modo analogo si definiscono le funzioni relative agli istanti $t_1, \ldots, t_n$, come funzioni delle posizioni relative a questi istanti: $s \mapsto g(x_{t_1}(s), \ldots, x_{t_n}(s))$. Se $E_{t_1}, \ldots, E_{t_n}$ sono insiemi di numeri reali la probabilità congiunta dell'evento $E_{t_1} \times \ldots \times E_{t_n}$ è un numero $p(E_{t_1}; \ldots; E_{t_n})$ compreso tra 0 e 1, che esprime la probabilità che la posizione del sistema all'istante t_1 giaccia nell'insieme E_{t_1} e all'istante t_J giaccia nell'insieme E_{t_J}; $J = 2, \ldots, n$. Un processo stocastico è completamente determinato (a meno di equivalenza) dalla assegnazione di tutte le probabilità congiunte $(p(E_{t_1}, \ldots, E_{t_n})$ per ogni scelta dei $t_1, \ldots, t_n$ e degli $E_{t_1}, \ldots, E_{t_n}$. In particolare, le probabilità a tempi fissi $(p(E_t))$ non determinano un processo stocastico generico, e perciò si è detto (cf. (4.2)) che una teoria che si limiti ad affermazioni a tempi fissi è, in quanto teoria statistica, incompleta.

Se per ogni insieme finito di numeri reali $t_1, \ldots, t_n$ si denota F l'insieme $\{t_1, \ldots, t_n\}$ ed $\mathcal{A}_{(F)}$ l'insieme di tutte le funzioni (di Baire) limitate, relative

[14]Le misure di posizione sono definite da un sol valore, quindi questo esempio descrive un sistema unidimensionale. Scegliendo le funzioni x_t a valori in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \ldots$ si ottengono le descrizioni statistiche di sistemi bidimensionali, tridimensionali,...

agli istanti $t_1, \ldots, t_n$ (cioè del tipo: $s \mapsto g(x_{t_1}(s), \ldots, x_{t_n}(s))$ si vede facilmente che $\mathcal{A}(F)$ è una C^*–algebra. Se F è contenuto in G, $\mathcal{F}(F)$ è contenuto in $\mathcal{A}(G)$ e, detta $\mathcal{A}$ la unione di tutti le $\mathcal{A}(F)$ si dimostra che le probabilità congiunte del processo definiscono uno stato su $\mathcal{A}$. Il risultato centrale dell'analisi brevemente delineata sopra è che l'assegnazione di un qualsiasi processo stocastico equivale alla assegnazine di una struttura di algebre locali (le $\mathcal{A}(F)$) e di uno stato sull'algebra $\mathcal{A}$ da esse generata. Si può *definire* un processo stocastico come una terna $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A}, (F)), \varphi\}$. Nel caso di processo stocastici classici queste algebre sono commutative; ma la formulazione algebrica data sopra permette di estendere la teoria al caso non commutativo. Se si considera la teoria a tempi fissi, cioè quando $F = \{t\}$, si ritrova la formulazione algebrica della teoria delle probabilità di von Neumann–Segal (cf. 4.13).

Pertanto la teoria algebrica dei processi stocastici è un'estensione della formulazione di von Neumann–Segal della teoria delle probabilità e, come questa, essa permette di considerare con un unico linguaggio la teoria commutativa e quella non commutativa dei processi stocastici.

5.4) All'interno della teoria dei processi stocastici non commutativi è possibile formulare in termini matematici il Principio di correlazione statistica locale. Questa formulazione è basata su tecniche di teoria di Markof non–commutative e non sarà descritto nel presente lavoro (cf. (3), (4) per un'analisi dettagliata).

Essa permette di isolare, all'interno dei processi stocastici non commutativi la sottoclasse formata da quei processi che soddisfano il principio di correlazione statistica locale; tali processi, in analogia con il caso classico verranno detti processi di Markof non commutativi. All'interno di tali processi, i sistemi quantistici tradizionali hanno una caratterizzazione matematica molto semplice. Infatti si dimostra che a tutti i processi di Markof non commutativi è associata una evoluzione temporale deterministica delle osservabili (o stati). Si può dimostrare che i processi quantistici sono *caratterizzati* come quei processi di Markov non commutativi a cui è associata una evoluzione temporale *reversibile*. Da ciò si deduce, come corollario, che *le attese congiunte di un processo quantistico si fattorizzano*.

Anche quest'ultima proprietà è un'ulteriore conferma del carattere "meccanico" dei sistemi quantistici tradizionali (cioè del principio di corrispondenza). Infatti ogni sistema deterministico classico (per esempio un sistema descritto dalla meccanica classica) può essere descritto come un processo di

Markof, e i processi di Markof che sorgono in tal modo sono esattamente quelli con evoluzione temporale reversibile le cui attese congiunte si dimostra che si fattorizzano.

In questi ultimi tempi si è andata intensificando, tra i fisici, una linea di ricerca intorno alle dinamiche quantistiche irreversibili. La teoria di Markof non–commutativa stabilisce una connessione tra irreversibilità delle evoluzioni temporali e non banalità delle probabilità congiunte. Essa inoltre, mediante la formulazione matematica del Principio di correlazione statistica locale (Proprietà di Markof) permette di dare una giustificazione teorica anche di alcune proprietà strettamente tecniche (come la completa positività degli operatori di evoluzione) che sono state individuate nella letteratura fisico–matematica (22), (23), (28) indipendentemente dalla teoria di Markof non commutativa e quasi contemporaneamente ad essa.

Infine và notato che, nella teoria di Markof non–commutativa, la stessa esistenza di una dinamica espressa da un semigruppo a un parametro, e cioè deterministica, viene *dedotta* da un proprietà di tipo statistico (la proprietà di Markof) che è la espressione matematica di un principio fisicamente plausibile (il Principio di correlazione statistica locale). La teoria di Markof non–commutativa realizza quindi, in modo matematicamente rigoroso le idee centrali del programma di Feynmann: realizzare l'operatore di Green dell'equazione di Schrödinger come l'analogo quantistico dell'operatore di transizione di un processo di Markof, dedurre la dinamica di un sistema quantistico dall'assegnazione di una misura su uno spazio funzionale (o, equivalentemente, di uno stato su una C^*–algebra). Da una parte la teoria di Markof non commutativa va oltre il programma di Feynmann, perché essa costituisce un potente strumento di estensione del formalismo quantistico ai sistemi irreversibili. D'altra parte va notato che la teoria di Markof non commutativa non fornisce una procedura, sia pure euristica, di quantizzazione.

5.5) In conclusione quindi la inclusione della teoria quantistica all'interno della teoria dei processi di Markof non commutativi e il teorema sulla fattorizzazione delle probabilità congiunte per i sistemi quantistici consueti dimostra che la meccanica quantistica tradizionale in quanto teoria statistica, è completa: cioè l'equazione di Schrödinger, contiene in sé tutte le informazioni non solo sulle attese dii osservabaili a un qualsiasi fissato istante di tempo ma anche sulle attese congiunte a tempi diversi. Ciò *non accade* nel caso di processi di Markof non commutativi di tipo non quantistico. Questa inclusione dimostra anche che, da un punto di vista matematico, i processi quantistici sono casi particolari di una classe di processi che è più vasta, ma nello stesso tempo non tanto vasta da essere vaga. Infatti i processi di questa classe hanno una struttura matematica molto ricca e ben definita; la loro evoluzione è irreversibile; le loro attese congiunte in generale non si fattorizzeranno; ed è semplice costruire esempi concreti di tali processi (cf. (3)). Infine l'aver dimostrato che la formulazione algebrica della teoria dei processi stocastici conduce naturalmente ad una struttura di algebre locali stabilisce un profondo collegamento tra la teoria dei processi stocastici, la meccanica quantistica non–relativistica, e la meccanica quantistica relativistica. Infatti nella teoria algebrica dei campi la struttura di algebre locali viene postulata (cf. (26)) in base a considerazioni fisiche, ma senza nessun collegamento con la teoria dei processi stocastici. La teoria di Markof non commutativa, dimostrando che anche la meccanica quantistica non relativistica è determinata da una struttura di algebre locali (localizzate nel tempo) unifica i due formalismi (finora praticamente disgiunti) della teoria quantistica relativistica e non relativistica all'interno della più grande teoria dei processi stocastici non commutativi.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Accardi, "On the commutative Markof property", *Functional analysis and its applications*, n. 1, (1975).

[2] L. Accardi, "Non commutative Markof chains", *Proceedings of the International Summer School in Mathematical Physics*, Camerino, October 1974.

[3] L. Accardi, *Non relativistic quantum mechanics as a non commutative Markof Process*, Preprint.

[4] L. Accardi, *La meccanica quantistica come processo di Markof non commutativo*, Seminario tenuto presso l'Università di Genova, Dicembre 1974. Note ciclostilate.

[5] L. Accardi, "On square roots of measures", *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", "C^*–algebras and their applications to statistical Mechanics and Quantum Field Theory"*, Varenna, 1973.

[6] L. Accardi, *On the connection between the Probabilistic and Hilbert–space description of Dynamical systems*, Lettere al Nuovo Cimento, sez. 2, vol. 8, 585–589 (1973).

[7] L. Accardi, "On the space of square roots of measures", *Dokl. Akad. Nank SSSR*, Tom 217 (1974), n. 5, (Tradotto in: Soviet Math. Dokl., vol. 15 (1974), n. 4, 1144–1148.

[8] L. Accardi, Tesi, Facoltà di Matematica, Università di Mosca, (1974).

[9] E. Beltrametti, G. Cassinelli, Rivista del Nuovo Cimento, da apparire.

[10] G. Birkhoff, J. von Neumann, "The logic of quantum mechanics", *Annals of Mathematics*, 37, (1936), 823–343.

[11] P. Caldirola, *Dalla microfisica alla macrofisica*, Bibl. Est., Mondadori, Milano (1974).

[12] U. Cerroni, "L'Unità", Mercoledì 25 giugno 1975, pag. 3.

[13] P.A.M. Dirac, *I principi della Meccanica quantistica*, Boringhieri (1958).

[14] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).

[15] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Field Theory*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1966).

[16] J. Diximier *Les algebres d'operateurs dans l'espace*, Hilbertien (Algebres de von Neumann), Gauthier–Villars (1969).

[17] M. Doob, *Stochastic processes*, J. Wiley & Sons Inc. (1967).

[18] I. Fényes, "Eine wahrscheinlichkeitsteoretische Begrundung und Interpretation der Quantenmechanik", *Zeitschrift fur Physik* 132, (1952), 81–106.

[19] D. Fürth, *Z. Physik*, 81, 143 (1933).

[20] R. Feynmann, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw Hill Book Company (1965).

[21] I.M. Gelfand, A.M. Yaglom, "Integration in function spaces and its applications in quantum physics", (in russo) *Uspechi Mat. Nauk.* Tom XI, N. 1 (1956).

[22] V. Gorini, A. Kossakowski, E.C.G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of n–level systems*, Preprint.

[23] V. Gorini, A. Kossakowski, *N–level system in contact with a singular reservoir*, Preprint.

[24] H.W. Gottinger, "Review of concepts and theories of probability", *Scientia*, vol. 109 (1974), 83–110.

[25] F. Guerra, P. Ruggiero, *A new interpretation of the Euclidean–Markof field in the framework of physical Minkowski spae time*, International School of Physics "Enrico Fermi" on "C^*–algebras and their applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory", Varenna (1973).

[26] R. Haag, D. Kastler, "An algebraic approach to Quantum Field Theory", *Journ. of Math. Phys.* 5 (1964), 848–861.

[27] J.M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1968).

[28] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Preprint.

[29] G.W. Mackey, *Mathematical foundations of Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin Inc. (1963).

[30] G.W. Mackey, *Induced representations of groups and Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin Inc., Boringhieri (1968).

[31] G.W. Mackey, *Group representations*, Preprint.

[32] E.W. Montroll, "Markof chains, Wiener integrals and quantum theory", *Comm. on pure and appl. Math.*, vol. V (1952), 415–453.

[33] E. Nelson, *Dynamical theories of Brownian Motion*, Princeton University Press (1967).

[34] E. Nelson, "Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian Mechanics", *Physical Review*, vol. 150, n. 4 (1966), 1079–1085.

[35] I.E. Segal, "Mathematical problems of relativistic physics", *Amer. Math. Soc.* Providence (1963).

[36] I.E. Segal, "Algebraic integration theory", *Bull. Amer. Math. Soc.* (1965) 419–489.

[37] I.E. Segal, "Abstract probability spaces and a theorem of Kolmogorof", *Amer. Journ. Math.* 76 (1954) 721–732.

[38] I.E. Segal, "Quantization of nonlinear systems", *J. Math. Phys.* I (1960), 468–488.

[39] I.E. Segal, "Postulates for general quantum mechanics", *Ann. of Math.* 48 (2), I 947, 930–948.

[40] P. Suppes, "Probability concepts in quantum mechanics", *The Phylosophy of science*, vol. 28, n. 4, (1961).

[41] V.S. Varadarajan, *Geometry of quantum theory*, vol. I, D. van Nostrand Company, Inc. (1968).

[42] R. von Mises, *Probability, statistics and truth*, London (1957).

[43] J. von Neumann, *Mathematical Foundation of quantum mechanics*, Princeton University Press (1955).

[44] J. von Neumann, "Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik", in: *John von Neumann*, collected workds Pergamon Press, vol. I, 208–235.

[45] J. von Neumann, "Thermodinamik quantenmechanisher gesamtheiten", in: *John von Neumann*, Collected Works, Pergamon Press, vol. I, 236–254.

[46] J. von Neumann, D. Hilbert, L. Nordheim, "Uber die Grundlagen der Quantenmechanik" in: *Collected Workds*, Pergamon Press, vol. I, 104–133.

[47] C.F. von Weizsacher, "Classical and Quantum description", in: *The Physicist's Conception of Nature*, ed. by J. Mehra D. Reidel Publishing Company (1973), 635–667.

[48] W. Weizel, "Ableitung der Quantentheorie eus einem klassichen, kausal determinierten model", *Zeitschrift fur Physik*, 134 (1953), 264–285; part II, 135 (1953), 270–273; Part. III, 136 (1954), 582–604.

[49] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover publications, Inc. (1950).