

## UN MODELLO OMOGENEIZZATO PER L'ANALISI DINAMICA DI STRUTTURE CON PERIODICITÀ ROTAZIONALE

*P. Bisegna<sup>a</sup>, G. Caruso<sup>b\*</sup>*

<sup>a</sup>Università di Roma Tor Vergata - Dipartimento di Ingegneria Civile, 00133 Roma

<sup>b</sup>ITC-CNR, 00155 Roma

### Sommario

Si studia la risposta dinamica di strutture con periodicità rotazionale. In particolare, viene analizzata una struttura composta da pale angolarmente equispaziate, montate su di un anello flessibile. Se ne presenta un modello strutturale semplificato, ottenuto utilizzando la teoria dell'omogeneizzazione. Le frequenze ed i modi propri stimati applicando il semplice modello proposto sono confrontati con quelli forniti da un modello agli elementi finiti, computazionalmente più oneroso.

### Abstract

This paper deals with the dynamic analysis of rotationally periodic structures. In particular, a structure composed of angularly equally-spaced blades mounted on a flexible ring is considered. A simplified model of the dynamical behavior of the structure is obtained by employing a homogenization technique. The eigenfrequencies and eigenmodes evaluated by applying the proposed model are compared to the corresponding ones obtained via a finite-element approach.

**Parole chiave:** Strutture con periodicità rotazionale, omogeneizzazione, analisi dinamica

### 1. INTRODUZIONE

Una struttura con periodicità rotazionale è composta da  $N$  sottostrutture identiche, disposte periodicamente intorno ad un asse: pertanto, rotazioni di  $2\pi/N$  radianti intorno all'asse lasciano la struttura invariata. Le strutture con periodicità rotazionale trovano applicazione in moltissimi campi dell'ingegneria meccanica (rotori delle turbine), civile (torri di raffreddamento), elettrica (gruppi statore-rotore delle macchine elettriche), aerospaziale (antenne di satelliti), etc. Le principali problematiche inerenti al progetto di tali tipologie strutturali riguardano la riduzione delle vibrazioni, che sono causa di emissione di rumore e cedimenti strutturali dovuti alla fatica [1, 2]. In tale ambito, di notevole interesse è il fenomeno della localizzazione delle vibrazioni, dovuto alla presenza di irregolarità (mistuning) che deteriorano il carattere periodico della struttura; il mistuning determina un dannoso aumento dell'ampiezza delle vibrazioni in alcune zone della struttura [3, 4, 5, 6]. Per queste ragioni, negli ultimi decenni molti ricercatori si sono interessati alla dinamica di strutture con periodicità rotazionale, mettendo a punto diverse metodologie di analisi e progettando sistemi di smorzamento delle vibrazioni [7, 8].

\*Corresponding author: *Tel.*: +39 06 72597101; *Fax*: +39 06 72597005; *E-mail*: g.caruso@ing.uniroma2.it

Il metodo degli elementi finiti è il più utilizzato per l'analisi dinamica di strutture con periodicità rotazionale; è stato impiegato sia per analizzarne la sola risposta libera [1] che la risposta forzata [9], oppure per indagare l'effetto di localizzazione dovuto alla presenza di irregolarità [6].

Una notevole semplificazione nell'applicazione del metodo degli elementi finiti ad una struttura con periodicità rotazionale è ottenibile considerando la natura periodica di tale struttura; è infatti possibile studiare solamente una singola sottostruttura per conoscere il comportamento dinamico della struttura globale [1, 10, 11]. Risulta che in ogni modo di vibrazione tutte le sottostrutture presentano la stessa deformata modale, con una certa differenza di fase tra ogni sottostruttura e la successiva; inoltre la dinamica della struttura è caratterizzata dalla presenza di coppie di modi degeneri a frequenza coincidente [1].

Benché accurato, il metodo degli elementi finiti richiede tempi di calcolo piuttosto importanti e non è utile per una comprensione profonda del comportamento fisico della struttura in esame. Per tale ragione, in letteratura sono stati proposti modelli semplificati sia di tipo continuo [2], che di tipo discreto con un numero ridotto di gradi di libertà [12, 7]. Il modello proposto in [2] si applica allo studio delle vibrazioni trasversali di un disco con pale raggruppate; l'elasticità delle pale è modellata con molle distribuite, il disco è considerato rigido e si introducono molle discrete tra gruppi adiacenti di pale per simulare l'accoppiamento tra pale dovuto al disco che nella realtà è flessibile. In [12] la dinamica di un rotore palettato è studiata con un modello discreto costituito da masse puntiformi e molle; le masse puntiformi tengono in conto le masse delle pale e del rotore e le molle servono per modellare sia l'elasticità delle pale che del rotore. Anche in [7] si utilizzano molle discrete applicate tra coppie di pale adiacenti per portare in conto l'accoppiamento dovuto al disco, che è considerato rigido nel modello. Tali modelli sono semplici, consentono una buona comprensione dei meccanismi che regolano la risposta dinamica della struttura in esame e possono essere utilmente impiegati per effettuare analisi parametriche, preziose in fase progettuale; non consentono però un calcolo accurato dei modi di vibrazione e delle frequenze proprie della struttura. La mancanza di accuratezza è essenzialmente dovuta alla modellazione alquanto semplificata dell'effetto dinamico del disco flessibile sulle pale, che risulta accettabile quando il disco è sufficientemente rigido (scarso accoppiamento tra le pale) ma non è più soddisfacente quando il disco è invece relativamente flessibile (elevato accoppiamento tra le pale).

In questo lavoro si presenta un modello per l'analisi delle vibrazioni, nel piano, di un anello flessibile sul quale sono calettate pale equispaziate tra loro, anch'esse flessibili. Si assume l'ipotesi che l'anello e le pale siano assialmente indeformabili e si costruisce un modello del comportamento dinamico della struttura basato sulla teoria di Eulero-Bernoulli. Successivamente si applica la teoria dell'omogeneizzazione per ottenere un modello semplificato; in tale modello le vibrazioni delle pale omogeneizzate sono descritte dall'equazione della trave vibrante, accoppiata ad opportune condizioni al contorno che tengono conto dell'effetto dinamico dell'anello sulle pale.

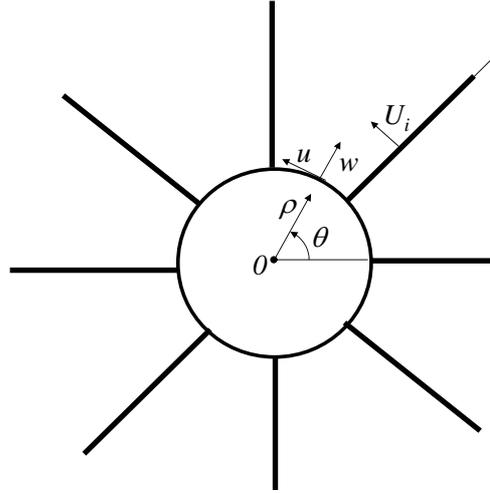
Il modello proposto è utilizzato per l'analisi dinamica di una struttura con periodicità rotazionale costituita da otto pale calettate su di un anello. I risultati ottenuti sono confrontati con quelli forniti da un modello accurato agli elementi finiti della struttura in esame, ottenendo un accordo molto soddisfacente.

Il modello omogeneizzato è quindi utilizzato per effettuare un'analisi parametrica, volta a valutare l'influenza dello spessore dell'anello sul comportamento dinamico della struttura.

Si presenta infine un'analisi parametrica al variare del numero di pale della struttura, mantenendo costante il valore dei parametri di massa e rigidità per unità d'angolo delle pale, allo scopo di individuare il minimo numero di pale per il quale risultano soddisfacenti i risultati forniti dal modello omogeneizzato.

## 2. MODELLO ALLA EULERO-BERNOULLI

In questo paragrafo si riporta un modello di una struttura con periodicità rotazionale basato sulla teoria di trave di Eulero-Bernoulli. La struttura, rappresentata schematicamente in figura 1, è costituita da  $N$



**Figura 1:** Rotore composto da pale calettate su un anello

pale flessibili equispaziate di lunghezza  $l_b$  montate su un anello flessibile di raggio  $R$ . Con riferimento al sistema di coordinate polari  $(O, \rho, \theta)$  rappresentato in figura 1, siano  $u(\theta)$  e  $w(\theta)$  lo spostamento tangenziale e radiale, rispettivamente, di un punto dell'anello, e siano  $U_i(\rho)$  e  $W_i(\rho)$  lo spostamento tangenziale e radiale, rispettivamente, della pala di indice  $i$ . Inoltre sia  $\theta_i$  la coordinata angolare dell'asse della pala di indice  $i$ . La deformazione assiale  $\varepsilon$  e la rotazione  $\varphi$  delle sezioni rette dell'anello sono espresse dalle ben note formule

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), \quad \varphi = \frac{1}{R} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

Nell'ipotesi di indeformabilità assiale delle pale e dell'anello, e assumendo inoltre che le pale siano perfettamente incastrate all'anello, il comportamento dinamico della struttura in esame può essere descritto tramite il seguente funzionale di Hamilton

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EB} = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_r \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_R^{R+l_b} \sigma_b \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\rho \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EI_r}{R^4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 R d\theta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_R^{R+l_b} EI_b \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2} \right)^2 d\rho \quad (2) \end{aligned}$$

soggetto alle seguenti equazioni di vincolo

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) = 0 \text{ per } \theta \in (0, 2\pi); \quad \frac{\partial W_i}{\partial \rho} = 0 \text{ per } \rho \in (R, R+l_b), \quad i = 1 \dots N; \\ W_i = w, \quad U_i = u, \quad \frac{\partial U_i}{\partial \rho} - \frac{1}{R} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ per } \rho = R, \quad \theta = \theta_i, \quad i = 1 \dots N \quad (3) \end{aligned}$$

In (2) la variabile  $t$  indica il tempo,  $\sigma_r$  e  $\sigma_b$  sono, rispettivamente, la densità lineare dell'anello e delle pale mentre  $EI_r$  e  $EI_b$  sono, rispettivamente, la rigidezza flessionale dell'anello e delle pale. Le equazioni di equilibrio dinamico della struttura possono essere facilmente ottenute come condizioni di stazionarietà del funzionale (2), e non sono qui riportate per esigenze di brevità.

Si applica dapprima il metodo degli elementi finiti per eseguire un'analisi dinamica della struttura, basata sul funzionale di Hamilton (2). A tale scopo, la struttura in figura 1 è discretizzata tramite elementi di tipo Hermite a due nodi. Il modello discreto ottenuto è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (4)$$

dove  $M$  è la matrice delle masse e  $K$  è la matrice di rigidità. Avendo la struttura in esame una periodicità rotazionale, le matrici  $M$  e  $K$  possono essere partizionate in blocchi circolanti aventi dimensione  $J \times J$ , essendo  $J$  il numero di gradi di libertà relativi ad ogni sottostruttura; applicando una trasformata  $U$  [10] la soluzione del sistema discreto (4), di dimensione pari a  $JN \times JN$ , si riconduce alla soluzione di un problema analogo inerente a una singola sottostruttura di dimensione ridotta pari a  $J \times J$ . I modi di vibrazione dell'intera struttura risultano così divisi in  $N/2 + 1$  gruppi, (se  $N$  è pari), o in  $(N - 1)/2 + 1$  gruppi (se  $N$  è dispari); ciascun modo appartenente ad un fissato gruppo presenta una certa ampiezza uguale su ogni sottostruttura ma con una differenza di fase, caratteristica del gruppo, tra ogni sottostruttura e la successiva [1]. In particolare, essendo la struttura periodica, le differenze di fase ammissibili sono  $(2\pi/N)k$ , con  $k = 0 \dots N/2$  se  $N$  è pari e  $k = 0 \dots (N - 1)/2$  se  $N$  è dispari.

I risultati ottenuti utilizzando il modello omogeneizzato proposto nel presente lavoro sono più oltre posti a confronto con quelli forniti dal modello semplificato di Tang & Wang [7, 5], qui brevemente richiamato. Il citato modello è basato sull'ipotesi che l'anello sia rigido; l'accoppiamento tra le pale, che nella realtà è dovuto proprio alla presenza dell'anello flessibile, è modellato tramite molle discrete agenti tra ogni pala e quelle adiacenti. Pertanto, il funzionale che governa la dinamica della struttura assume la forma:

$$\mathcal{H}_{TW} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_R^{R+l_b} \sigma_b \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 d\rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_R^{R+l_b} EI_b \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2} \right)^2 d\rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_m [U_{i+1}(\rho_m) - U_i(\rho_m)]^2 \quad (5)$$

essendo  $k_m$  la costante elastica delle molle e  $\rho_m$  la coordinata radiale in corrispondenza della quale le molle sono applicate alle pale; in (5) si intende  $U_{N+1} \equiv U_1$ . Anche tale funzionale è discretizzato tramite il metodo degli elementi finiti, analogamente a quanto indicato sopra.

### 3. MODELLO OMOGENEIZZATO

In questo paragrafo si deduce un modello omogeneizzato della struttura con periodicità rotazionale considerata, a partire dal modello alla Eulero-Bernoulli descritto dal funzionale (2).

#### 3.1. Formulazione variazionale

Al fine di calcolare il limite di omogeneizzazione, si assume che, variando il numero di pale che compongono la struttura, la rigidità flessionale delle pale  $EI_b$  riscalci come  $EI_b = \overline{EI}_b \Delta\theta$ , essendo  $\Delta\theta$  l'angolo formato dagli assi di due pale adiacenti ed essendo la grandezza  $\overline{EI}_b$  indipendente dal numero di pale. Allo stesso modo si assume che variando il numero di pale la densità lineare  $\sigma_b$  delle pale riscalci come  $\sigma_b = \overline{\sigma}_b \Delta\theta$ . Sostituendo tali posizioni in (2), si ottiene il seguente funzionale:

$$\mathcal{H}_{\Delta\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_r \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_R^{R+l_b} \overline{\sigma}_b \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_i}{\partial t} \right)^2 \right] \Delta\theta d\rho - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EI_r}{R^4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 R d\theta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_R^{R+l_b} \overline{EI}_b \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2} \right)^2 \Delta\theta d\rho \quad (6)$$

soggetto ai vincoli essenziali (3). Passando al limite  $N \rightarrow \infty$  si assume che le funzioni  $U_i$  e  $W_i$ , estese in tutta la regione anulare  $\mathcal{A} = (\rho, \rho + l_b) \times (0, 2\pi)$ , convergono con le loro derivate alle funzioni  $U(\rho, \theta)$  e  $W(\rho, \theta)$ , rispettivamente. Il funzionale (6) perciò converge al funzionale omogeneizzato:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{hom} = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_r \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^{R+l_b} \bar{\sigma}_b \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] d\rho d\theta \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EI_r}{R^4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 R d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^{R+l_b} \overline{EI}_b \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)^2 d\rho d\theta \quad (7)
 \end{aligned}$$

soggetto ai seguenti vincoli essenziali, derivati da (3) nel limite di omogeneizzazione

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) = 0 \text{ per } \theta \in (0, 2\pi); \quad \frac{\partial W}{\partial \rho} = 0 \text{ per } (\rho, \theta) \in \mathcal{A}; \\
 W = w, \quad U = u, \quad \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{1}{R} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ per } \rho = R, \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Imponendo a-priori i vincoli essenziali (8)<sub>1-4</sub> ed in forma lagrangiana il vincolo (8)<sub>5</sub> nel funzionale (7), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{hom} = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_r \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( -\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial t} \right)^2 \right]_{\rho=R} R d\theta + \frac{1}{2} \int_R^{R+l_b} \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_b \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 d\theta d\rho \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_b l_b \left[ -\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial t} \right]_{\rho=R}^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EI_r}{R^4} \left[ \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} \right]_{\rho=R}^2 R d\theta \\
 & - \frac{1}{2} \int_R^{R+l_b} \int_0^{2\pi} \overline{EI}_b \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)^2 d\theta d\rho + \int_0^{2\pi} \mathcal{M} \left[ \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{1}{R} \left( U + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) \right]_{\rho=R} d\theta \quad (9)
 \end{aligned}$$

essendo  $\mathcal{M}$  il moltiplicatore di Lagrange introdotto per imporre il vincolo (8)<sub>5</sub>.

### 3.2. Equazioni dinamiche

Le equazioni omogeneizzate che descrivono il comportamento dinamico della struttura in esame si ottengono come condizioni di stazionarietà del funzionale omogeneizzato (9).

- equazione di campo definita su  $\mathcal{A}$ :

$$\bar{\sigma}_b \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \overline{EI}_b \frac{\partial^4 U}{\partial \rho^4} = 0 \quad (10)$$

- condizioni al contorno a  $\rho = R$ , per  $\theta \in (0, 2\pi)$ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{EI_r}{R^3} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^6 U}{\partial \theta^6} \right) + \overline{EI}_b \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + \frac{1}{R} \left( \mathcal{M} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \theta^2} \right) \\
 + \sigma_r R \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (\sigma_r R + \bar{\sigma}_b l_b) \frac{\partial^4 U}{\partial \theta^2 \partial t^2} = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{1}{R} \left( U + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (12)$$

$$-\overline{EI}_b \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \mathcal{M} = 0 \quad (13)$$

Tabella 1: Frequenze modali [Hz]

	Prima frequenza modale		Seconda frequenza modale	
	OM	EB-AF	OM	EB-AF
$k=0$	18.74	18.69	75.09	74.80
$k=1$	11.36	11.31	67.37	67.12
$k=2$	10.32	10.27	59.43	59.42
$k=3$	10.37	10.31	65.11	64.81
$k=4$	10.40	10.32	65.21	64.84

- condizioni al contorno a  $\rho = R + l_b$ , per  $\theta \in (0, 2\pi)$ :

$$\overline{EI}_b \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = 0, \quad -\overline{EI}_b \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} = 0 \quad (14)$$

#### 4. ANALISI DINAMICA

In questo paragrafo si effettua l'analisi dinamica della struttura in esame, utilizzando:

- il modello alla Eulero-Bernoulli con pale ed Anello Flessibili, descritto dal funzionale (2) ed indicato con l'acronimo EB-AF;
- il modello alla Eulero-Bernoulli con pale flessibili, Anello Indeformabile e molle di accoppiamento fra le pale, descritto dal funzionale (5) ed indicato con l'acronimo EB-AI;
- il modello OMogeneizzato, descritto dal funzionale (9) ed indicato con l'acronimo OM.

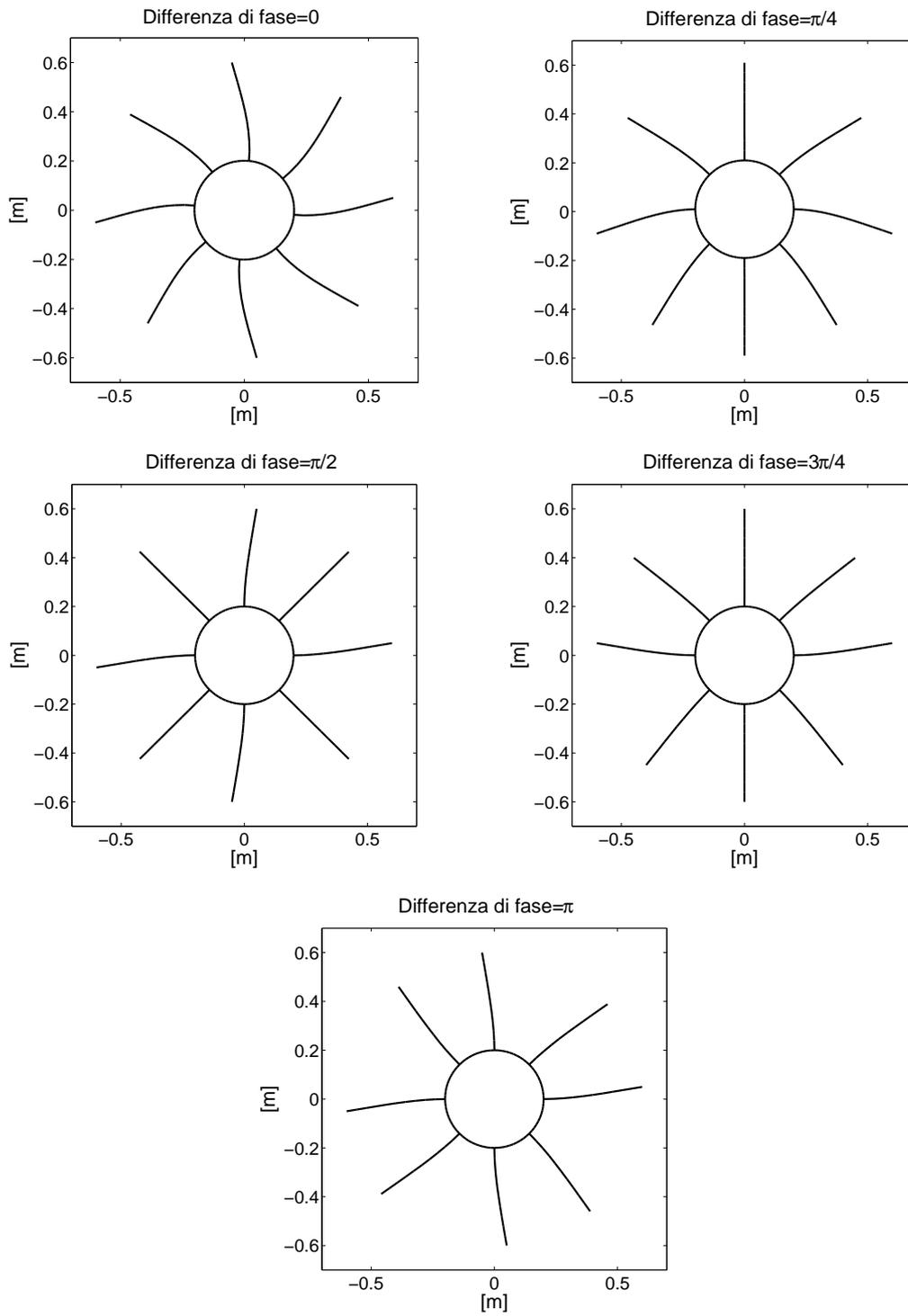
In particolare, sono poste a confronto le frequenze proprie di vibrazione predette dai modelli citati.

Come caso di studio, si considera la struttura riportata in figura 1, costituita da un anello flessibile di raggio  $R = 0.2$  m, larghezza  $b_a = 0.05$  m e spessore  $h_a = 0.005$  m, sul quale sono montate 8 pale di lunghezza  $l_p = 0.4$  m, larghezza  $b_p = b_a$  e spessore  $h_p = 0.002$  m. Sia l'anello che le pale sono realizzate in acciaio, con modulo di Young  $E$  pari a 210 GPa.

Poiché la struttura in esame è costituita da 8 sottostrutture, i modi di vibrazione possono essere ripartiti in 5 diversi gruppi, indicizzati dal parametro  $k \in \{0 \dots 4\}$ , secondo quanto esposto nel paragrafo 2. Il gruppo  $k$ -esimo contiene i modi di vibrazione che presentano ampiezza uguale per ogni sottostruttura e differenza di fase tra sottostrutture adiacenti pari a  $(2\pi/8)k$ . In figura 2 sono riportati i modi di vibrazione corrispondenti al primo modo di ogni gruppo, calcolati con il modello EB-AF e coincidenti con quelli valutati in base al modello OM.

In tabella 1 sono riportate, per ogni valore di  $k$ , le frequenze dei primi due modi propri di vibrazione della struttura fornite dai modelli OM e EB-AF. I risultati evidenziano un soddisfacente accordo tra le previsioni del modello OM e quelle del modello EB-AF, confermando che il modello omogeneizzato proposto, benché semplificato, è in grado di descrivere in modo accurato il comportamento dinamico di strutture con periodicità rotazionale.

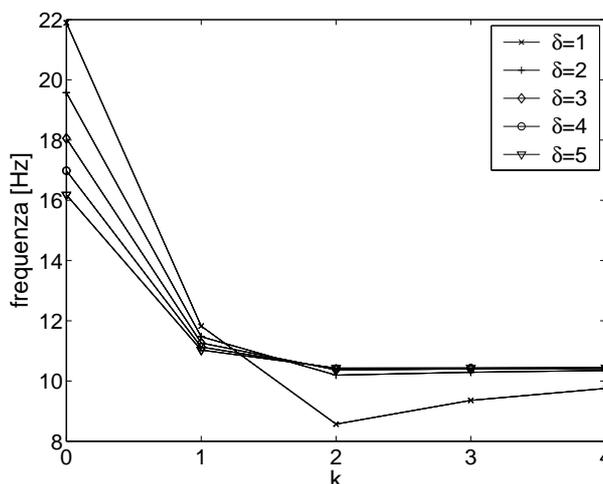
In tabella 2 sono riportati i valori delle frequenze proprie forniti dal modello semplificato EB-AI. Si utilizzano molle di rigidità  $k_m = EI_r/R^2$ , applicate agli estremi liberi delle pale ( $\rho_m = l_b$  in (5)). Dall'ipotesi di anello rigido e dall'aggiunta di molle discrete tra ciascuna coppia di pale adiacenti consegue che le frequenze proprie di vibrazione siano tutte superiori alle corrispondenti frequenze calcolate con i modelli OM e EB-AF e riportate in tabella 1. Per tale ragione i risultati forniti dal modello semplificato EB-AI possono essere confrontati solo qualitativamente con quelli forniti dagli altri due modelli. In



**Figura 2:** Modi di vibrazione

**Tabella 2:** Frequenze modali [Hz] calcolate secondo il modello EB-AI

	Prima frequenza modale	Seconda frequenza modale
$k=0$	10.44	65.45
$k=1$	12.54	67.16
$k=2$	15.94	71.22
$k=3$	18.16	75.16
$k=4$	18.87	76.75

**Figura 3:** Frequenze modali al variare del rapporto  $\delta = h_r/h_b$ 

particolare, risulta che le frequenze calcolate con il modello EB-AI sono distribuite in maniera diversa rispetto a quelle valutate con i modelli OM e EB-AF: infatti, i modi di vibrazione in tabella 2 presentano una frequenza che cresce col crescere del numero di gruppo  $k$ , come dedotto in [7] utilizzando un metodo di calcolo semplificato. Ciò è in disaccordo con i risultati in tabella 1, dove le frequenze dei gruppi  $k = 0$  e  $k = 1$  risultano maggiori rispetto alle corrispondenti frequenze appartenenti agli altri gruppi. Tale discrepanza dipende dal fatto che il modello EB-AI considera rigido l'anello e ne trascura la massa.

In figura 3 sono riportati i risultati relativi ad una analisi parametrica volta a studiare l'effetto dello spessore dell'anello sulla dinamica dell'intero sistema. A tale proposito si indica con  $\delta$  il rapporto tra spessore dell'anello e spessore delle pale  $e$ , in corrispondenza a vari valori di  $\delta$ , si riportano le curve ottenute unendo tra loro (al solo scopo di migliorare l'evidenza grafica) i valori della prima frequenza propria dei gruppi  $k = 0 \dots 4$ . I risultati evidenziano che all'aumentare dello spessore dell'anello, cioè all'aumentare sia della sua massa che della sua rigidezza, la frequenza dei modi per  $k = 0$  e  $k = 1$  diminuisce; si può infatti facilmente verificare sostituendo  $k = 0$  e  $k = 1$  nelle equazioni (10)-(14) che per tali valori di  $k$  le frequenze proprie dei modi corrispondenti dipendono solo dalla massa dell'anello e non dalla sua rigidezza. Andamento opposto è presentato dai modi corrispondenti a  $k = 2 \dots 4$ , la cui frequenza aumenta all'aumentare di  $\delta$ . In particolare per valori elevati di  $\delta$  l'anello diventa rigido e quindi l'accoppiamento tra le varie pale diventa esiguo; di conseguenza i modi di vibrazione relativi a  $k = 2 \dots 4$  tendono a quelli di una trave incastrata a un estremo e libera all'estremo opposto, come si evince sostituendo  $k = 2 \dots 4$  nelle equazioni (10)-(14) ed assumendo  $EI_r \rightarrow \infty$  e  $\sigma_r \rightarrow \infty$ .

Allo scopo di validare ulteriormente l'approccio di omogeneizzazione, è stato riportato in tabella 3 il limite di omogeneizzazione delle frequenze proprie di vibrazione, calcolato numericamente utilizzando il modello EB-AF, al variare del numero di pale  $N$ . I valori di rigidezza  $EI_b$  e densità  $\sigma_b$  adottati nel caso

**Tabella 3:** Frequenze modali [Hz]

	N=4	N=8	N=16	N=32	OM
$k=0$	18.55	18.69	18.73	18.74	18.74
$k=1$	11.18	11.31	11.35	11.36	11.36
$k=2$	10.11	10.27	10.30	10.31	10.32
$k=3$	/	10.31	10.35	10.36	10.37
$k=4$	/	10.32	10.38	10.39	10.40

$N=8$  sono quelli relativi alla struttura introdotta all'inizio di questo paragrafo; per i casi  $N = 4$ ,  $N = 16$  e  $N = 32$  tali valori sono stati riscaldati in modo da mantenere costante il prodotto  $EI_b N$  e  $\sigma_b N$ , come assunto nel paragrafo 3.1. I risultati mostrano come l'applicazione della teoria dell'omogeneizzazione allo studio della struttura con periodicità rotazionale considerata sia molto conveniente, in quanto per  $N = 32$  i valori di frequenza ottenuti sono praticamente coincidenti con quelli forniti dal modello omogeneizzato. In effetti, già per  $N = 4$  il modello proposto fornisce una stima delle frequenze proprie accettabile in molte applicazioni tecniche.

## 5. CONCLUSIONI

In questo lavoro è stata studiata la dinamica di una struttura con periodicità rotazionale, composta da pale angolarmente equispaziate, montate su di un anello flessibile. Ne è stato presentato un modello strutturale semplificato, ottenuto utilizzando la teoria dell'omogeneizzazione. Le frequenze ed i modi propri stimati applicando il modello proposto sono stati confrontati con quelli forniti da un modello agli elementi finiti, computazionalmente assai più oneroso. Ne è risultato un ottimo accordo. Il modello proposto si presenta quale naturale candidato per la progettazione di tecniche di controllo delle vibrazioni strutturali e per lo studio del fenomeno della localizzazione delle vibrazioni.

## RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare il professor Franco Maceri per i suggerimenti e le discussioni in merito al presente lavoro. Questa ricerca è stata condotta nell'ambito del Laboratorio Lagrange, un gruppo di ricerca Europeo composto da CNRS, CNR, Università di Roma "Tor Vergata", Università di Montpellier II, ENPC e LCPC.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Thomas, D.L., "Dynamics of Rotationally Periodic Structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 1979, pp. 81–102.
- [2] Wagner, L.F., and Griffin, J.H., "A Continuous Analog Model for Grouped-Blade Vibration," Journal of Sound and Vibration, Vol. 165, 1993, pp. 421–438.
- [3] Pierre, C. and Dowell, E.H., "Localization of Vibrations by Structural Irregularity," Journal of Sound and Vibration, Vol. 114, 1992, pp. 549–564.
- [4] Kim, M., Moon, J., and Wickert, J.A., "Spatial Modulation of Repeated Vibration Modes in Rotationally Periodic Structures," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, 2000, pp. 62–68.

- [5] Tang, J., and Wang, K.W., “Vibration Delocalization of Nearly Periodic Structures Using Coupled Piezoelectric Networks,” *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 125, 2003, pp. 95–108.
- [6] Lim, S.H., Pierre, C., and Castanier, M.P., “Mistuning Identification and Reduced-Order Model Updating for Bladed Disks Based on a Component Mode Mistuning Technique,” *Proceedings of the 9<sup>th</sup> National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference*, 2004, Pinehurst, NC.
- [7] Tang, J., and Wang, K.W., “Vibration Control of Rotationally Periodic Structures Using Passive Shunt Networks and Active Compensation,” *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, 1999, pp. 379–390.
- [8] Sanliturk, K.Y., Ewins, D.J., Elliott, R., and Green, J.S., “Friction Damper Optimization: Simulation of Rainbow Tests,” *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 123, 2001, pp. 930–939.
- [9] Fricker, A.J., and Potter, S., “Transient forced vibration of rotationally periodic structure,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp. 957–974.
- [10] Cai, C.W., Cheung, Y.K., and Chan, H.C., “Uncoupling of Dynamic Equations for Periodic Structures,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 139, 1990, pp. 253–263.
- [11] Shen, I.Y., “Vibration of Rotationally Periodic Structures,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, 1994, pp. 459–470.
- [12] Sinha, A., “Calculating the Statistics of Forced Response of a Mistuned Bladed Disk Assembly,” *AIAA Journal*, Vol. 24, 1986, pp. 1797–1801.