Università degli studi di Roma
"La Sapienza"
Università degli studi di Roma II

Tesi di dottorato
in Matematica

Rappresentazioni indotte di gruppi di cammini e trasporti paralleli

Paolo Gibilisco

Relatore: Prof.Luigi Accardi

Indice

Introduzione

Lo scopo della teoria della rappresentazione indotta è quello di produrre un metodo generale per ottenere rappresentazioni di un gruppo G da rappresentazioni di sottogruppi $K \subseteq G$. Il primo passo in questa direzione fu fatto da Frobenius nel 1898 per i gruppi finiti. Nonostante gli importanti risultati prodotti per alcune classi di gruppi da Nakayama, Weil e Wigner si deve aspettare fino al lavoro di Mackey del 1949 per trovare una generalizzazione di questa teoria per una vasta classe di gruppi topologici, cioè per i gruppi localmente compatti. Sotto l'influenza dei lavori di Segal, Gelfand e Naimark si iniziò a generalizzare la teoria della rappresentazione indotta. Questo significa quanto segue: ogni gruppo localmente compatto G ha associata l'algebra del gruppo cioè $\mathcal{L}^1(G)$ e le rappresentazioni unitarie di G sono strettamente in relazione con le $*$-rappresentazioni di $\mathcal{L}^1(G)$. Questo ha motivato numerosi tentativi di generalizzare i principali risultati della teoria della rappresentazione indotta (per esempio il teorema di imprimitività in ambiente algebrico (Rieffel [45], Fell [17]). Tuttavia queste generalizzazioni non vanno, per quanto riguarda i gruppi al di là del caso localmente compatto. Lo scopo di questa tesi è quello di generalizzare la teoria della rappresentazione indotta per certe classi di gruppi non localmente compatti che si presentano in modo naturale nella teoria delle connessioni. Considereremo soprattutto gruppi di curve (più precisamente gruppi formati da classi di equivalenza di curve) su di un gruppo topologico. In alcuni casi importanti i sottogruppi inducenti saranno gruppi di lacci (cioè di curve chiuse). Diamo ora le idee di base e i risultati principali. Sia G un gruppo localmente compatto, K un sottogruppo chiuso di G, $L : K \to Un(H)$ una rappresentazione unitaria di K nello spazio di Hilbert H, and $X := G/K$. Lo spazio della rappresentazione indotta U^L di G è uno spazio di Hilbert H^L che può vedersi in due modi. H^L e' uno spazio di funzioni a valori in H, a quadrato sommabile. Queste funzioni possono vedersi come funzioni con dominio in G o in $X = G/K$ (questo dipende da un lemma di selezione boreliana dovuto a Mackey). Quando consideriamo H^L come uno spazio di Hilbert di funzioni il cui dominio è X usiamo il fatto che $X(= G/K)$ possiede una misura G-quasiinvariante μ: infatti si ha $H^L \cong \mathcal{L}^2(X, \mu; H)$. L'osservazione chiave è la seguente. È ben noto che esistono gruppi topologici G non localmente compatti che agiscono transitivamente su spazi che hanno una misura G-quasiinvariante. Per esempio sia M una varietà liscia compatta, orientabile, finito-dimensionale e ω una fissata forma di volume M. Se poniamo $G = \mathrm{Diff}(M)$ allora G è un gruppo di Lie infinito-dimensionale (e percio' non localmente compatto) che agisce su M. Inoltre la misura μ associata ad ω è G-quasiinvariante. Possiamo porre le seguenti questioni. i) Esistono esempi interessanti di rappresentazioni indotte per gruppi non localmente compatti? ii) Se la risposta a i) è si allora quali risultati dalla teoria di Mackey possono estendersi a questa situazione più generale? Bisogna sottolineare che nel presente lavoro non stiamo ricercando la massima generalità di per se stessa. Piuttosto si è, in un certo senso, costretti a studiare le rappresentazioni indotte dei gruppi infinito-dimensionali perchè queste rappresentazioni si presentano in modo naturale nella teoria dei trasporti paralleli sui fibrati. Vediamo come. Se X è uno spazio topologico lo spazio dei cammini $P'(X)$ è lo spazio delle curve continue su X. In $P'(X)$ diciamo che due curve sono equivalenti se una si ottiene dall'altra cambiando parametrizzazione e/o inserendo o cancellando appendici (cioè tratti di curva percorsi avanti e indietro). Denotiamo con $\hat{P}(X)$ il gruppoide dei cammini cioè lo spazio dei cammini $P'(X)$ quozientato rispetto a questa relazione di equivalenza. L'operazione di gruppoide è la composizione naturale di curve. Se $X = G$ è un gruppo topologico possiamo considerare un'altra relazione di equivalenza dichiarando equivalenti due curve in $\hat{P}(G)$ se è possibile ottenere l'una dall'altra per traslazione nel gruppo G. Il quoziente $P(G) = \hat{P}(G)/\sim$ possiede ora una struttura di gruppo poichè due qualsiasi classi di equivalenza possono essere moltiplicate. $P(G)$ è il gruppo dei cammini di G. La sua introduzione e' dovuta al fisico russo Mensky. Supponiamo ora di avere un fibrato hilbertiano E con spazio di base una varietà orientabile M sulla quale si sia fissato un elemento di volume. Supponiamo inoltre di avere un trasporto parallelo unitario su E e un gruppo transitivo di diffeomorfismi di M che chiameremo G. In questa situazione è possibile definire una rappresentazione indotta unitaria del gruppo (gruppoide) dei cammini $P(G)$ ($\hat{P}(G)$) nello spazio di Hilbert delle sezioni L^2 del fibrato E. Se $M = G$ il gruppo che induce è il gruppo dei lacci $L(G)$ e la rappresentazione inducente è data dal gruppo di olonomia della connessione. Questa osservazione e' stata fatta da Mensky (per $M = G = \mathbf{R}^4$ e in modo informale) in [35] e più in generale (per il gruppoide) da Accardi in [1]. Entrambi gli autori portano argomenti in favore di un ruolo importante per $P(G)$ (o per il parente stretto $\hat{P}(G)$) come gruppo di simmetria per le teorie di gauge. Il fatto che le connessioni (i trasporti paralleli) siano caratterizzate dalle rappresentazioni del gruppo dei lacci è implicito in [13] dove Driver mostra come ricostruire una coppia fibrato-connessione su una varietà M a partire da una rappresentazione di $L(M)$. Bisogna notare che, in un certo senso, la rappresentazione del gruppo dei cammini di cui sopra realizza una rappresentazione di Schrödinger in ambiente curvo. A questo riguardo Accardi ha sottolineato l'approccio di Mackey alla Meccanica Quantistica: le osservabili sono generatori di rappresentazioni di gruppi di simmetrie spaziali. In relazione a questo approccio si deve anche ricordare l'osservazione fondamentale di Wightman secondo la quale in Meccanica Quantistica "...lo strumento matematico naturale per l'analisi della localizzabilità ... è la teoria delle rappresentazioni imprimitive ..." dei gruppi di simmetria e cioè delle rappresentazioni indotte (come dimostra il teorema di imprimitività per i gruppi localmente compatti). Tenendo presente queste motivazioni provenienti dalla fisica matematica abbiamo tentato di rispondere alle seguenti questioni:

a) quali risultati della teoria della rappresentazione indotta possono generalizzarsi in modo da renderli applicabili alle rappresentazioni indotte di gruppi di cammini costruite tramite trasporti paralleli?

b) È possibile identificare i generatori di queste rappresentazioni? Questi generatori sono interessanti per le teorie di gauge? Per quello che riguarda questi problemi nella presente tesi abbiamo ottenuto i seguenti risultati.

1) Viene definito il "gruppo dei cammini" in un ambiente algebrico astratto partendo da un gruppoide con un opportuno gruppo di automorfismi. Si mostra come costruire questo tipo di gruppoidi a partire da intervalli di certi insiemi parzialmente ordinati e da "curve" in un gruppo parametrizzate da tali intervalli. Il gruppo dei cammini delle curve continue su di un gruppo topologico è un caso particolare di questa costruzione.

2) Si dimostra che se G è un gruppo polacco allora $P(G)$ e $L(G)$ (il gruppo dei lacci) sono gruppi polacchi. Questo risultato è interessante come qualsiasi risultato di "stabilità" che mostri come $P(G)$ erediti una proprietà di G. Infatti ogni risultato di questo tipo ha come conseguenza immediata il fatto che una proprietà di G venga ereditata dal gruppo $P^n(G) := P(P^{n-1}(G))$. Mensky ad esempio congettura che il gruppo $P^2(\mathbf{R}^4)$ possa svolgere un ruolo nella teoria delle stringhe. Si noti anche che un risultato di Ancel dice che se X è uno spazio metrico localmente compatto e separabile allora il gruppo Homeo(X) è polacco mostrando così la grande generalità di questo risultato. Inoltre i gruppi di diffeomorfismi sono anch'essi, in generale, gruppi polacchi.

3) Usando il risultato 2) si ottengono due teoremi di selezione boreliana per le coppie $(P(G), P(G,K))$ dove $P(G,K)$ è il sottogruppo dei cammini che finiscono nel sottogruppo $K \subseteq G$. Il primo teorema vale nel caso K sia chiuso ed è una conseguenza di un teorema di selezione dovuto a Burgess. Il secondo teorema richiede la normalità di K e si basa su di un classico teorema di selezione di Dixmier.

4) Si dimostra che il classico risultato che mette in relazione l'irriducibilità di un sistema di imprimitività (U^L, P^L) con l'irriducibilità della rappresentazione inducente L vale in un ambiente più generale di quello dei gruppi localmente compatti. Infatti le condizioni necessarie sono quelle riguardanti la finitezza e regolarità per la misura G-quasiinvariante sullo spazio $X = G/K$ e l'esistenza della proprietà di selezione per la coppia (G, K)

5) Sia M una varietà orientabile con un fissato elemento di volume ω. Dato un trasporto parallelo su di un fibrato hilbertiano $E \xrightarrow{\pi} M$ e un gruppo G di diffeomorfismi di M si mostra come costruire una rappresentazione indotta unitaria del gruppo dei cammini $P(G)$. Se G agisce transitivamente su M e K un gruppo di isotropia per questa azione allora il sottogruppo inducente è $P(G,K)$ In particolare se $G = M$ otteniamo il gruppo dei lacci $P(G,e) = L(G)$. (il caso di Mensky). Viene mostrato (usando il teorema di selezione 3)) che il teorema di irriducibilità (si veda 4) sopra) si applica a questo caso.

6) Si mostra in generale come associare ai gruppi a un parametro di un gruppo topologico G dei gruppi a un parametro di $P(G)$. Questo ci permette di usare il teorema di Stone per dimostrare l'esistenza dei generatori per la rappresentazione indotta del punto 5). In questo caso i sottogruppi a un parametro di G sono esattamente i flussi dei campi vettoriali completi su M. Se la misura su M è G-invariante si dimostra che i generatori sono esattamente le derivate covarianti lungo questi campi vettoriali. Questa è una generalizzazione al caso non piatto del fatto ben noto che la derivata ordinaria è il generatore delle traslazioni.

7) La discussione del punto 6) viene generalizzata al caso in cui la misura su M non è G-invariante. Risulta che bisogna aggiungere una correzione di volume (una divergenza) alla derivata covariante per ottenere i generatori.

Va fatta un'ultima osservazione. Il teorema fondamentale della teoria della rappresentazione indotta per i gruppi localmente compatti è il teorema di imprimitività. Viste le considerazioni fatte sopra è naturale chiedersi se questo teorema possa avere una validità più generale. Nel paragrafo 3.5 viene abbozzata una linea di dimostrazione (nel caso generale) che fa uso di classici risultati della teoria della decomposizione integrale degli spazi di Hilbert.

Ringraziamenti

È un piacere ringraziare la Professoressa M.Welleda Baldoni per avermi mostrato una utilissima referenza bibliografica. Voglio ringraziare in modo particolare il mio relatore, il Professor Luigi Accardi. Di fatto il contenuto di questa tesi non è niente di più e niente di meno che la dimostrazione di alcune sue congetture. Bisogna sottolineare che il Professor Accardi ha lavorato con me giorno per giorno aiutandomi a chiarificare e a comprendere praticamente tutti gli aspetti tecnici e concettuali di questa tesi. Senza la sua determinazione questo lavoro non sarebbe mai stato completato. Voglio anche ringraziare il Prof.Accardi come Direttore del Centro "Vito Volterra" per avermi aiutato materialmente in molti modi durante la stesura di questa tesi.

CAPITOLO 1 Nozioni preliminari

(1.1) Gruppoidi

Richiamiamo alcune notazioni da [1]. Una categoria si dice **piccola** se la famiglia dei suoi oggetti è un insieme. Un **gruppoide** G è una categoria piccola nella quale ogni morfismo è un isomorfismo. Se M è l'insieme degli oggetti di G e Ω è la famiglia dei suoi morfismi scriviamo $G = (M, \Omega)$. Sia $G = (M, \Omega)$ un gruppoide. Per ogni coppia di oggetti $x, y \in M$ denoteremo indifferentemente con

$$\Omega_{x,y} = Hom(x, y) = Iso(x, y)$$

La famiglia di tutti i morfismi da x a y. Se $\omega \in \Omega_{x,y}$ useremo la notazione

$$\imath(\omega) = x \qquad ; \qquad \varphi(\omega) = y$$

e chiameremo x il **punto iniziale** (o lo stato iniziale,l'origine , ...) di ω e y il **punto finale** (o lo stato finale,l'obiettivo, ...) di ω . La composizione tra due morfismi $\omega, \omega' \in \Omega$ sarà denotata da $\omega \circ \omega'$. L'operazione $\circ$ è associativa ma non è definita ovunque: $\omega \circ \omega'$ è definita se e solo se per qualche $x, y, z \in M$ si ha $\omega' \in \Omega_{x,y}$, $\omega \in \Omega_{y,z}$. Si noti che l'insieme degli oggetti M può essere identificato con l'insieme di tutti i morfismi $\omega \in \Omega$ tali che $\omega \circ \omega = \omega$ nel senso che il termine sinistro è ben definito e vale l'uguaglianza. Per questa ragione, quando non può sorgere nessuna confusione, scriveremo semplicemente Ω per $G = (M, \Omega)$. Per ogni $x \in M$ l'insieme di tutti i morfismi da x a se stesso, indicato indifferentemente da

$$Aut_\Omega(x) = Aut(x) = Loop_\Omega(x) = Loop(x)$$

è un gruppo, detto il **gruppo dei lacci** su x. L'identità di questo gruppo sarà denotata da $\imath_x$.

DEFINIZIONE (1.1.1) Un gruppoide $G = (M, \Omega)$ è detto **transitivo** (o connesso) se per ogni $x, y \in M$

$$\Omega_{x,y} \neq \emptyset$$

LEMMA (1.1.1) In un gruppoide transitivo tutti i gruppi di lacci sono isomorfi (di fatto coniugati).

Dimostrazione. Sia $x, y \in M$. Per la transitività esiste un $\omega_{xy} \in Iso(x,y)$. La funzione

$$\omega \in Loop_\Omega(x) \mapsto \omega_{xy} \circ \omega \circ \omega_{xy}^{-1} \in Loop_\Omega(y) \qquad (*)$$

è chiaramente un omomorfismo. Inoltre, se $\omega' \in Loop_\Omega(y)$ allora $\omega = \omega_{xy}^{-1} \circ \omega' \circ \omega_{xy} \in Loop_\Omega(x)$ and $\omega' = \omega_{xy} \circ \omega \circ \omega_{xy}^{-1}$. Perciò (*) è suriettiva. In ultimo se $\omega_{xy} \circ \omega \circ \omega_{xy}^{-1} = \imath_y$ è l'identità in $Loop_\Omega(y)$, allora

$$\omega = \omega_{xy}^{-1} \circ \imath_y \circ \omega_{xy} = \omega_{xy}^{-1} \circ \omega_{xy} = \imath_x$$

perciò la funzione (*) è un isomorfismo.

DEFINIZIONE (1.1.2) Sia $G = (M, \Omega)$ un gruppoide transitivo. Il gruppo $Loop(\Omega)$ (unico a meno di isomorfismi)con la proprietà che per ogni $x \in M$

$$Loop_\Omega(x) \cong Loop(\Omega)$$

è detto il **gruppo dei lacci** del gruppoide.

Osservazione. Se $\Omega_{x,y} = 0 \; \forall x, y \in M$ allora G si riduce ad un insieme M senza alcuna struttura. Se M contiene solo un oggetto G può essere identificato con il gruppo Loop(Ω).

1.2 Gruppoidi di curve su uno spazio topologico

Sia M uno spazio topologico. Una *curva parametrizzata* su M è una coppia $(\gamma, [a,b])$ dove:

i) $[s,t]$ è un intervallo chiuso e limitato in $\mathbf{R}$, detto il *dominio della curva*;

ii) $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ è una funzione continua.

Useremo la notazione $(\gamma, [a,b]) = \gamma_{[a,b]}$ e, quando non possa esserci ambiguità, semplicemente γ.

Se $\delta : [b,c] \longrightarrow M$ è una curva parametrizzata tale che $\delta(b) = \gamma(b)$ definiamo la curva prodotto $((\delta \circ \gamma), [a,c])$ come segue:

$$(\delta \circ \gamma)t = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \delta(t) & \text{se } t \in [b,c] \end{cases} \qquad (*)$$

*Osservazione.*Si noti che, con la nostra convenzione (*) la curva $\delta \circ \gamma$ è percorsa **da destra a sinistra**: cioè prima γ e poi δ.

Una C^0*-riparametrizzazione* tra due intervalli $I = [a,b]$ e $I'[a',b']$ è un omeomorfismo $T : [a,b] \longrightarrow [a',b']$ tale che $T(a) = a'$. Analogamenta si definiscono riparametrizzazioni C^∞-, analitiche, ...

PROPOSIZIONE(1.2.1). Se $T : [a,b] \longrightarrow [a',b']$ è una riparametrizzazione allora $T(b) = b'$.

Dimostrazione. Supponiamo che $T(b) = y \neq b'$. Allora T (ristretta) dovrebbe essere un omeomorfismo tra $[a,b)$ e l'insieme sconnesso $[a',b']/\{y\}$ il che è impossibile.

Denotiamo l'insieme degli intervalli chiusi di $\mathbf{R}$ con Int $[\mathbf{R}]$ e con $R_{I,I'}$ l'insieme di tutte le riparametrizzazioni tra I, e I'.

DEFINIZIONE(1.2.1). Sia Γ una famiglia di curve parametrizzate. Una *famiglia di riparametrizzazioni* di Γ è un gruppoide transitivo $\mathcal{F}$ i cui oggetti sono i domini delle curve parametrizzate in Γ e tale che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I, I') \subset R_{I,I'}$.

DEFINIZIONE(1.2.2). Sia M uno spazio topologico, Γ una famiglia di curve parametrizzate su M, e $\mathcal{F}$ una famiglia di riparametrizzazioni. Se $(\gamma, [a,b]), (\delta, [a',b']) \in \Gamma$ diciamo che γ è $\mathcal{F}$–equivalente a δ, e scriviamo

$$(\gamma, [a,b]) \underset{\mathcal{F}}{\sim} (\delta, [a',b'])$$

se esiste un $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}([a',b'],[a,b])$ tale che $\delta = \gamma \circ T$.

PROPOSIZIONE(1.2.2). $\tilde{\mathcal{F}}$ è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. È una facile conseguenza del fatto che le riparametrizzazioni sono un gruppoide transitivo.

DEFINIZIONE(1.2.3). Con le notazioni di cui sopra una *curva* è un elemento dell'insieme quoziente $\Gamma/\tilde{\mathcal{F}}$. La classe di equivalenza di $(\gamma, [a,b]) \in \Gamma$ sarà denotata da $[(\gamma, [a,b])]$ o semplicemente da $[\gamma]$.

Si noti che a causa della Proposizione (1.2.1) per ogni $\gamma \in \Gamma$, $i(\gamma)$ e $\varphi(\gamma)$ dipendono solo dalla classe di $\tilde{\mathcal{F}}$–equivalenza di γ.

Definiamo una legge di composizione in $\Gamma/\tilde{\mathcal{F}}$ tramite:
DEFINIZIONE(1.2.4). Siano ω, ω' curve tali che $\varphi(\omega') = i(\omega)$.

$$\omega' \circ \omega := [(\delta \circ \gamma), [a,c]) \qquad (*)$$

Poichè $\mathcal{F}$ è un gruppoide transitivo possiamo suppore l'esistenza di due curve parametrizzate $(\gamma, [a,b]), (\delta, [b,c])$ tali che $\omega = [(\gamma, [a,b])]$, $\omega' = [(\delta, [b,c])]$.
È facile controllare la seguente

PROPOSIZIONE(1.2.3). La coppia $(M, \Gamma/\tilde{\mathcal{F}})$ è un gruppoide transitivo rispetto alla legge di composizione $(*)$. È transitivo se Γ è transitivo.

Dimostrazione.

Banale.

Sia Γ una famiglia di curve parametrizzate e sia $(\gamma, [a,b])$, $(\delta, [a',b']) \in \Gamma$. Diciamo che $(\gamma, [a,b]) \subseteq (\delta, [a',b'])$ se $[a,b] \subseteq [a',b']$ e la restrizione di δ su $[a,b]$ è uguale a γ. Questa definizione dà un ordinamento parziale su Γ. Una *curva parametrizzata massimale* in Γ è un elemento massimale in questo ordinamento.

Definizione (1.2.5). Un **gruppoide di curve** è una tripla

$$\mathcal{G} = (M, \Gamma, \mathcal{F})$$

dove

i) M è uno spazio topologico;
ii) Γ è una famiglia di curve parametrizzate su M;
iii) $\mathcal{F}$ è una famiglia di riparametrizzazioni su Γ.

Gli oggetti di $\mathcal{G}$ sono i punti di M, i morfismi sono le classi di equivalenza $\Gamma/\mathcal{F}$, cioè le curve, nel senso della Definizione (1.2.3).

1.3 Gruppoidi e propagatori

Sia X un insieme e sia G un gruppo. Possiamo dare una struttura di gruppoide a $X \times G \times X$ nel modo seguente (si veda [23]).

DEFINIZIONE (1.3.1).

$$(x,g,y) \cdot (y,\tilde{g},z) := (x,g\tilde{g},z) \quad x,y,z \in X \; ; \; g,\tilde{g} \in G \; .$$

Naturalmente $i(x,g,y) = x$ e $\varphi(x,g,y) = y$.
Se $X = \{x\}$ allora $X \times G \times X$ è isomorfo al gruppo G.
Se $G = \{1\}$ allora $X \times G \times X$ è isomorfo al gruppoide $X \times X$ dove il prodotto è definito da

$$(x,y) \cdot (y,z) := (x,z) \qquad x,y,z \in X \; .$$

DEFINIZIONE (1.3.2.). *Un (G,X)-propagatore è una funzione $U : X \times X \to G$, dove X è un insieme e G è un gruppo, tale che*

i) $U_{p,q}U_{q,r} = U_{p,r}\ \forall p,q,r \in X$
In altre parole un (G,X)-propagatore è un morfismo dal gruppoide $X \times X$ al gruppoide (gruppo) G.

Osservazione.

$$U_{p,p}U_{p,p} = U_{p,p} \Rightarrow U_{p,p} = 1_G \qquad \forall p \in X$$

$$U_{p,q}U_{q,p} = U_{p,p} = 1_G \Rightarrow U_{p,q} = U_{q,p}^{-1} \qquad \forall p,q \in X\ .$$

ESEMPIO. (Il propagatore canonico) Sia $f : X \to G$ una funzione qualsiasi. Si definisca $U_{p,q} = f(p)f(q)^{-1}$. Allora

$$U_{p,q} \cdot U_{q,r} = f(p)f(q)^{-1}f(q)f(r)^{-1} = f(p)f(r)^{-1} = U_{p,r}\ .$$

PROPOSIZIONE (1.3.1). *Ogni propagatore è canonico.*

Dimostrazione. Sia $U_{(\cdot,\cdot)}$ un (G,X)-propagatore. Si scelga $p_0 \in X$. Definiamo $f(p) := U_{p,p_0}$. Si ottiene

$$U_{p,q} = U_{p,p_0}U_{p_0,q} = U_{p,p_0}U_{q,p_0}^{-1} = f(p)f(q)^{-1}\ .$$

1.4 Integrazione su varietà

Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale e sia

$$\Lambda^n V := \{f : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n-\text{volte}} \to \mathbf{R} : f \text{ è multilineare e antisimmetrica } \} =$$
$$= \{ \text{ tensori antisimmetrici di tipo } \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \}$$

Sia M una varietà n-dimensionale e $T_p(M)$ lo spazio tangente a M in p. Definiamo $\Lambda^n(T(M)| = \bigcup \Lambda(T_p(M))$. $\Lambda^n(T(M))$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale sullo spazio base M. Una **n-forma** è una sezione C^∞ di $\Lambda^n(T(M))$. Un **elemento di volume** è una n-forma sempre differente da 0. Il seguente risultato è ben noto [49]

TEOREMA (1.4.1). M è orientabile se e solo se M ha un elemento di volume.

Sia $f : M \to M$ liscia. Il differenziale di f è per definizione la trasformazione lineare $f_{*p} : T_p(M) \to T_{f(p)}M$ tale che se v è il vettore tangente alla curva c in p allora $f_{*p}(v)$ è il vettore tangente alla curva $f \circ c$ in $f(p)$. Se ω è una n-forma e $g \in C^\infty(M)$ definiamo

$$(f^*\omega)_p(v_i) := \omega_{f(p)}(f_{*p}v_i) \quad \text{e} \quad f^*g := g \circ f$$

dove $v = (v_i) = (v_i)_{i=1}^n = (v_1, \ldots, v_n) \in (T_p(M))^n$

PROPOSIZIONE (1.4.1). Per ogni n-forma ω e per ogni funzione liscia g, si ha:

$$f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$$

Dimostrazione.

$$(f^*(g\omega))_p(v_i) = (g\omega)_{f(p)}(f_{*p}v_i) = (g(f(p))\omega_{f(p)})(f_{*p}v_i) =$$
$$= (f^*(g))(p)\omega_{f(p)}(f_{*p}v_i) = ((f^*(g))(p)(f^*(\omega))_p(v_i)$$

Ora sia $g \in \operatorname{Diff}(M)$. Poichè $\Lambda^n(T_p(M))$ è 1-dimensionale per ogni $p \in M$, allora per ogni n-forma ω, esiste $c(g,\cdot) \in C^\infty(M)$ tale che, per ogni $x \in M$:

$$(g^*\omega)_x = c(g,x)\omega_x$$

PROPOSIZIONE (1.4.2). Sia $g_1, g_2 \in \operatorname{Diff}(M)$. Allora per ogni $x \in M$

$$c(g_1g_2, x) = c(g_1, g_2x)c(g_2, x)$$

Dimostrazione.

$$c(g_1g_2,x)\omega_x = ((g_2g_2)^*\omega)_x = (g_2^*g_1^*\omega)_x = (g_2^*c(g_1,\cdot)\omega)_x =$$
$$= (g_2^*(c(g_1,\cdot)))_x(g_2^*\omega)_x = c(g_1,g_2x)c(g_2,x)\omega_x$$

Sia M una varietà orientabile. Vogliamo definire $\int_M \omega$ per una data n-forma ω. Cominciamo con il caso quando supp $(\omega) \subset U$ dove (U,ϕ) è una carta orientata positivamente. Allora, se $p \in U \mapsto (x^1(p),\cdot,\cdot,\cdot,x^n(p)) \in \mathbf{R}^n$ sono le coordinate locali associate alla carta (U,ϕ), il fatto che $\Lambda^n(T(M))$ è 1-dimensionale implica che deve esistere una funzione h tale che

$$\omega = h\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \quad .$$

Diremo che ω è misurabile se la funzione $h \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbf{R}$ è misurabile e porremo

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (h \circ \phi^{-1}) dm$$

dove m è la misura di Lebesgue.

TEOREMA(1.4.1). La definizione di cui sopra è ben posta, cioè è indipendente dalla scelta della carta (U,ϕ). Usando una partizione dell'unità è possibile estendere la definizione ad una qualsiasi n-forma.

PROPOSIZIONE(1.4.3). Se $\varphi \in$ Diff (M) e φ conserva l'orientamento allora

$$\int_M \varphi^*\omega = \int_M \omega$$

Da questo risultato deduciamo che, per ogni $\varphi \in$ Diff (M) che conserva l'orientamento e per ogni funzione liscia f:

$$\int_M f\omega = \int_M \varphi^*(f\omega) = \int_M \varphi^*(f)\varphi^*(\omega) = \int_M (f\circ\varphi)(\varphi^*\omega)$$

Supponiamo ora che M sia orientabile e che ω sia un fissato elemento di volume. Usando il teorema di Riesz–Markov possiamo dire che esiste un unica misura di Borel μ su M tale che

$$\int_M f(x)\ d\mu(x) = \int_M f\omega$$

Supponiamo che φ sia un diffeomorfismo che conserva l'orientamento. Allora, nella notazione di cui sopra,

$$\int_M f(\varphi(x))c(\varphi,x)\ d\mu(x) = \int_M f(\varphi(\cdot))c(\varphi,\cdot)\omega = \int_M (f\circ\varphi)(\varphi^*\omega) =$$
$$= \int_M f\omega = \int_M f(x)\ d\mu(x)$$

Perciò per un arbitrario $\varphi \in$ Diff (M) abbiamo la seguente formula per il cambiamento di variabili

$$\int_M f(\varphi(x))|c(\varphi,x)|d\mu(x) = \int_M f(x)\ d\mu(x)$$

1.5 Gruppi di omeomorfismi e diffeomorfismi.

Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato finito-dimensionale e si supponga di avere un trasporto parallelo classico su E cioè un trasporto parallelo definito sulle curve lisce a tratti su M. Più in là vedremo che se G è un gruppo di Lie (magari infinito-dimensionale come Diff(M)) che agisce su M allora si può costruire una rappresentazione indotta di $P(G)$ il gruppo dei cammini di G.

L'esistenza del trasporto parallelo stocastico (si veda [16]) implica che si possono avere trasporti paralleli su gruppoidi di curve *continue*. Perciò è naturale chiedere se la costruzione di cui sopra della rappresentazione indotta si applica a gruppi di cammini *continui* associati ai gruppi di omeomorfismi di varietà.

In questa sezione esporremo risultati dovuti a Arens [5] e ad Ancel [3]. In particolare vedremo che sotto deboli ipotesi per uno spazio topologico X possiamo trattare $Homeo(X)$ (il gruppo degli omeomorfismi di X) come un gruppo topologico ragionevole e inoltre possiamo applicare i risultati della sezione (2.8) al suo gruppo dei cammini.
Sia X uno spazio topologico. L'azione naturale di Homeo (X) su X è definita dalla formula $(h,x) \xrightarrow{\varphi} h(x)$, φ:Homeo$(X) \times X \to X$.

DEFINIZIONE(1.5.1). *Una topologia su Homeo (X) é ammissibile se rispetto a tale topologia Homeo (X) è un gruppo topologico e inoltre l'azione naturale di Homeo(X) su X è continua.*
Supponiamo che X e Y siano spazi di Hausdorff, e supponiamo che $\mathcal{M}$ sia un insieme di funzioni da X a Y. Per $K \subseteq X$ e $U \subseteq Y$, sia $\langle K,U\rangle = \{f \in \mathcal{M} : f(K) \subseteq U\}$. Ricordiamo che la topologia compatto-aperta ha una sottobase consistente di tutti gli insiemi della forma $\langle K,U\rangle$ dove K è un sottoinseme compatto di X e U è un sottoinsieme aperto di Y.

DEFINIZIONE (1.5.2). *La topologia compatto-aperta complementata su $\mathcal{M}$ è la topologia che ha come sottobase la famiglia di tutti gli insiemi della forma $\langle K,U\rangle$ dove K è un sottoinsieme compatto di X e U é un sottoinsieme aperto di Y, o della forma $\langle X-V, Y-L\rangle$ dove V è un sottoinsieme aperto di X ed L è un sottoinsieme compatto di Y.*

Osservazione. Si noti che se X è compatto allora la topologia compatto-aperta su $\mathcal{M}$ e la topologia compatto-aperta complementata su $\mathcal{M}$ coincidono.
L'ammissibilità della topologia compatto-aperta complementata è stata studiata in [5]. In particolare, il Teorema 3 di [5] ci dice che se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora la topologia compatto-aperta complementata su Homeo(X) è ammissibile. Quando X non è localmente compatto, la suddetta topologia su Homeo(X) può non essere ammissibile. Tuttavia, per ogni spazio di Hausdorff X, la topologia compatto-aperta complementata su Homeo(X) è un limite inferiore per tutte le topologie ammissibili su Homeo(X). In altre parole, quando X è di Hausdorff, ogni topologia ammissibile su Homeo(X) contiene la topologia compatto-aperta complementata.
Il risultato fondamentale è il seguente.

TEOREMA (1.5.1). (Ancel) *Sia X uno spazio metrico localmente compatto e separabile, e si supponga che Homeo(X) sia dotato con la topologia compatto-aperta complementata. Allora sia X che Homeo(X) sono spazi metrici completi e separabili.*

Dimostrazione (si veda [3]). Con $X^* = X \cup \{\infty\}$ denotiamo la compattificazione di Alexandrov di X, e supponiamo di dare ad Homeo(X^*) la topologia compatto-aperta. Allora X^* è uno spazio metrico compatto, e X è un sottoinsieme aperto di X^*.
Applicando il teorema di Mazurkiewicz ([14] p. 308) si può concludere che X è uno spazio metrico completo e separabile.
È ben noto che Homeo(X^*) è uno spazio metrico completo e separabile. Infatti se ρ è una metrica su X^*, allora una metrica completa σ su Homeo(X^*) è definita dalla formula

$$\sigma(g,h) = \sup\{\rho(g(x),h(x)) : x \in X^*\} + \sup\{\rho(g^{-1}(x),h^{-1}(x)) : x \in X^*\}$$

per $g,h \in$Homeo(X^*). Homeo(X^*) è separabile per il teorema 5.2 di [14], p. 265.
Il Lemma 8 di [3] si applica qui con Homeo(X) per $\mathcal{M}$ e Homeo(X^*) per $\mathcal{N}$ rispettivamente. Questo lemma implica che (dato che X è σ-compatto) Homeo(X) è omeomorfo ad un sottoinsieme G_δ di Homeo(X^*). Applicando di nuovo il teorema di Mazurkiewicz otteniamo che Homeo(X) è uno spazio metrico completo e separabile.

Daremo ora una traccia di come si dimostra che i gruppi di diffeomorfismi sono gruppi polacchi. Per maggiori particolari si veda [52] e i riferimenti bibliografici ivi citati. Se M è una varietà differenziale finito dimensionale definiamo

$$Diff^r(M) = \{f : M \to M, \quad f \text{ è un diffeomorfismo di classe } C^r\}$$

dove $1 \leq r \leq \infty$. Se B è uno spazio di Banach separabile denoteremo con $C^r(M,B)$ lo spazio delle funzioni $f : M \to B$ di classe C^r. Su questo spazio considereremo la topologia compatto-aperta cioè la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Questa topologia è metrizzabile tramite una metrica d rispetto alla quale $C^r(M,B)$ diventa uno spazio metrico, separabile e completo [52]. Se N è un'altra varietà è noto (teorema di Withney) che N può essere immersa come sottovarietà chiusa in R^k per un certo k. In questo modo si può identificare $C^r(M,N)$ con un sottospazio di $C^r(M,R^k)$. La topologia che $C^r(M,N)$ eredita in questo modo non dipende dalla immersione di N. Inoltre $C^r(M,N)$ risulta separabile e completo rispetto alla metrica d di $C^r(M,R^k)$. Abbiamo quindi una topologia su $Diff^r(M) \subset C^r(M,M)$. Si dimostra che $Diff^r(M)$ equipaggiato con tale topologia è un gruppo topologico. Sia ora d la metrica completa su $C^r(M,M)$. Se poniamo (analogamente a quanto fatto per gli omomorfismi)

$$d'(f,g) := d(f,g) + d(f^{-1},g^{-1}) \qquad f,g \in Diff^r(M)$$

otteniamo una metrica completa per $Diff^r(M)$ (la quale induce ancora la topologia compatto-aperta). Infatti se $\{f_n\} \subset Diff^r(M)$ è una successione di Cauchy per d' allora f_n e ${f_n}^{-1}$ sono successioni di Cauchy per d in $C^r(M,M)$. Supponiamo che $f_n \to f$ e ${f_n}^{-1} \to f'$ in $C^r(M,M)$ rispetto a d. Allora per la continuità della composizione

$$1_M = f_n {f_n}^{-1} \to ff'$$

cioè $f' = f^{-1}$. Quindi

$$d'(f_n,f) = (d(f_n,f) + d({f_n}^{-1},f^{-1})) \to 0$$

cioè d' è completa.

1.6 Curve in Diff (M) e campi vettoriali dipendenti dal tempo

Sia M una varietà differenziale. Sia $\gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{Diff}\,(\mathrm{M})$ una curva parametrizzata regolare.

DEFINIZIONE(1.6.1). Sia $x \in M$, $t \in \mathbf{R}$. Definiamo

$$v_\gamma(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t} (\gamma(s)\gamma(t)^{-1}x)$$

$v_\gamma(\cdot,\cdot)$ è il campo vettoriale dipendente dal tempo associato alla curva γ.

PROPOSIZIONE(1.6.1). Supponiamo che $\alpha : \mathbf{R} \to \mathrm{Diff}\,(\mathrm{M})$ sia un gruppo a un parametro cioè $\alpha(0) = 1_{\mathrm{Diff}\,(\mathrm{M})}$; $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$. Allora $v_\alpha(\cdot,\cdot)$ è un campo vettoriale indipendente dal tempo il cui flusso è esattamente α.

Dimostrazione. Si ottiene

$$v_\alpha(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t} (\alpha(s)\alpha(t)^{-1}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t} (\alpha(s-t)x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=0} (\alpha(r)x) = (\alpha(0)x)^{\cdot}$$

L'ultimo vettore dipende solo da x e α cioè il campo vettoriale $v_\alpha(\cdot,\cdot)$ non dipende dal tempo. È facile vedere che il flusso di questo campo vettoriale è dato proprio da α.
La proposizione di cui sopra giustifica la seguente

DEFINIZIONE(1.6.2). Un campo vettoriale dipendente dal tempo $v(x,t)$ viene detto completo se esiste una curva parametrizzata regolare $\gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{Diff}\,(\mathrm{M})$ tale che

$$v(x,t) = v_\gamma(x,t)$$

1.7 Campi vettoriali e simmetrie

Le osservabili naturali di un sistema quantistico sono in relazione alle rappresentazioni unitarie del gruppo delle simmetrie naturali del sistema. Per esempio, se lo spazio delle configurazioni del sistema è $\mathbf{R}^n$ e si considera come gruppo di simmetrie del sistema il gruppo Euclideo n-dimensionale G, allora i generatori della rappresentazione unitaria di G su $L^2(\mathbf{R}^n, dx; \mathbf{C})$ definita da:

$$(U_g f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad ; \qquad x \in \mathbf{R}^n \ , \ g \in G$$

sono osservabili naturali della teoria. Per esempio se $v \in \mathbf{R}^n$ allora

$$f(x+tv) = (e^{it\,p\cdot v} f)(x)$$

dà il momento nella direzione v e se $R_\vartheta(a)$ denota la rotazione di ϑ intorno ad un asse $a \in \mathbf{R}^N$ con una data orientazione allora

$$f(R_\vartheta(a)x) = \left(e^{-i\vartheta J\cdot a} f\right)(x) = (e^{-i\vartheta(x\wedge p)\cdot a} f)(x)$$

dà il momento angolare lungo l'asse $a \in \mathbf{R}^n$. L'analisi di Mackey generalizza l'esempio di cui sopra come segue: è dato uno spazio misurabile M, una misura μ su M, un gruppo localmente compatto G che agisce su M tramite una trasformazione misurabile per la quale μ è quasi-invariante, un moltiplicatore di G, cioè una funzione $\sigma : G \times G \to C$ che soddisfa

$$\sigma(g, g_1 g_2)\sigma(g_1, g_2) = \sigma(g, g_1)\sigma(g g_1, g_2)$$

uno spazio di Hilbert H e una funzione $A : G \times M \to Un(H)$ da $G \times M$ al gruppo di tutti gli operatori unitari su H (qui non considereremo rappresentazioni antiunitarie), soddisfacenti:

$$A(g, g_1 x)A(g_1, x) = \sigma(g g_1)A(g g_1, x) \qquad \forall g, g_1 \in G,$$

e μ-quasi ovunque per $x \in M$. A questi oggetti si associa la rappresentazione unitaria U di G, che agisce su $L^2(M, d\mu; H)$, definita da:

$$(U_g f)(x) = [\frac{d\mu}{d\mu \circ g}(g^{-1}x)]^{1/2} A(g, g^{-1}x) f(g^{-1}x)$$

I generatori dei sottogruppi a un parametro di questa rappresentazione sono le osservabili cinematiche di base del sistema.
Il problema che ci porremo è quello di applicare questa strategia nel caso dei fibrati e in particolar modo dei fibrati vettoriali.

CAPITOLO
2
Il gruppo dei cammini

2.1 Il gruppo dei cammini

Sia M uno spazio topologico. Definiamo una relazione di equivalenza ponendo

$$xRy \iff \exists\, \gamma : [a,b] \to M \text{ continue, tali che } \gamma(a) = x \qquad \gamma(b) = y$$

La classe di equivalenza di x verrà denotata da M_x.

Sia G un gruppo topologico con identità e.

PROPOSIZIONE(2.1.1). G_e è un sottogruppo normale di G.
Dimostrazione. Se $g, h \in G_e$, allora esistono γ, δ tali che $i(\gamma) = i(\delta) = e$, $\varphi(\gamma) = g$, $\varphi(\delta) = h$. Consideriamo la curva

$$\begin{cases} \gamma(t) & \text{(che va da } e \text{ a } g) \\ g(\delta(t)^{-1}) & \text{(che va da } g \text{ a } gh^{-1}) \end{cases}$$

Questa curva è continua e connette e con gh^{-1}. Perciò G_e è un sottogruppo. Inoltre se $n \in G_e$ allora esiste una curva γ tale che $i(\gamma) = e$, $\varphi(\gamma) = n$. Ora, per ogni $g \in G$, la curva $\omega(t) = g\gamma(t)g^{-1}$ è tale che $i(\omega) = e$, $\varphi(\omega) = gng^{-1}$. Perciò G_e è normale.

Denotiamo con $\Gamma(G)$ l'insieme di tutte le curve continue su G e definiamo una funzione $\sim: \Gamma(G) \to \Gamma(G_e)$ tramite

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)\varphi(\gamma)^{-1} \qquad (*)$$

DEFINIZIONE(2.1.1). Si definisca la relazione R su $\Gamma(G)$ tramite

$$\omega R\gamma \Leftrightarrow \tilde{\omega} = \tilde{\gamma} \quad ; \quad \omega, \gamma \in \Gamma(G) \qquad (**)$$

PROPOSIZIONE(2.1.2). R è una relazione di equivalenza e $\omega R\hat{\omega}$ se e solo se $\omega(t) = \gamma(t)g$ per qualche $g \in G$.

Dimostrazione. Supponiamo $\omega R\hat{\gamma}$. Si ha $\omega(t)\varphi(\omega)^{-1} = \tilde{\omega}(t) = \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)\varphi(\gamma)^{-1}$. Quindi $\gamma(t) = \hat{\omega}(t)(i(\gamma)^{-1}\varphi(\gamma))$. Viceversa:

$$(\widetilde{\gamma(t)g}) = \gamma(t)g((\varphi(\gamma)g)^{-1}) = \gamma(t)gg^{-1}\varphi(\gamma)^{-1} = \gamma(t)\varphi(\gamma)^{-1} = \tilde{\gamma}(t)$$

Denoteremo con $[\gamma]$ la classe di equivalenza di γ.

PROPOSIZIONE(2.1.3). Per ogni γ, δ esiste δ' tale che

$$\tilde{\delta} = \tilde{\delta'} \text{ e } \gamma \circ \delta' \text{ ha significato.}$$

Dimostrazione. Si definisca $\delta'(t) := \delta(t)\varphi(\delta)^{-1}i(\gamma)$. Allora $\tilde{\delta'} = \tilde{\delta}$ e $\varphi(\delta') = \varphi(\delta)\varphi(\delta)^{-1}i(\gamma) = i(\gamma)$.

PROPOSIZIONE(2.1.4). Supponiamo che $\gamma \sim \hat{\gamma}$, $\delta \sim \hat{\delta}$, e che $\gamma \circ \delta$, $\hat{\gamma} \circ \hat{\delta}$ abbia senso. Allora $[\gamma \circ \delta] = [\hat{\gamma} \circ \hat{\delta}]$ (cioè $(\gamma \circ \delta) \sim (\hat{\gamma} \circ \hat{\delta})$).

Dimostrazione. L'ipotesi implica $\varphi(\delta) = i(\gamma)$ e $\varphi(\hat{\delta}) = i(\hat{\gamma})$. Inoltre per la Proposizione (2.1.2), esiste $g, k \in G$ tale che $\gamma(t) = \hat{\gamma}(t)g$ e $\delta(t) = \hat{\delta}(t)k$. Si noti che

$$\varphi(\delta)k^{-1} = \varphi(\hat{\delta}) = i(\hat{\gamma}) = i(\gamma)g^{-1} = \varphi(\delta)g^{-1}$$

perciò $g = k$. Ora

$$(\gamma \circ \delta)(t) = \begin{cases} \delta(t) \\ \gamma(t) \end{cases} \qquad (\hat{\gamma} \circ \hat{\delta})(t) = \begin{cases} \hat{\delta}(t) = \delta(t)k^{-1} = \delta(t)g^{-1} \\ \hat{\gamma}(t) = \gamma(t)g^{-1} \end{cases}$$

Quindi $(\hat{\gamma} \circ \hat{\delta})(t)g^{-1} = (\gamma \circ \delta)t$ da cui segue la conclusione.

Riassumendo :

TEOREMA. Sia G un gruppo topologico e Γ un gruppoide di curve continue su G con la proprietà che per ogni $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ e per ogni $g \in G$ anche $\gamma(\cdot)g \in \Gamma$. Allora il quoziente Γ/R del gruppoide Γ secondo la relazione di equivalenza R, definita da $(**)$, è un gruppo.

Osservazione Bisogna sottolineare che in questa tesi le parole "gruppo dei cammini" e "gruppo dei lacci" non vengono usate con lo stesso significato di [4],[43]. Infatti i suddetti autori definiscono le operazioni punto per punto mentre nel nostro caso la moltiplicazione è simile alla moltiplicazione nel gruppo fondamentale di uno spazio topologico. La seguente osservazione fa risaltare la differenza. Se G è un gruppo commutativo allora il gruppo dei cammini di G nel senso di [4] è commutativo mentre il gruppo dei cammini con cui stiamo lavorando ha centro banale (a meno che G non abbia dimensione uno).

2.2 Sottogruppi del gruppo dei cammini

Sia G un gruppo topologico, $P(G)$ il suo gruppo dei cammini e $\Delta : P(G) \to G$ la proiezione standard (si veda [39]). Quando $P(G)$ è considerato come gruppo topologico allora la sua topologia sarà sempre ammissibile nel seguente senso. Sia $\mathcal{C}([0,1], G)$ lo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ a G considerato con la topologia compatto-aperta. $\mathcal{C}([0,1], G, \{0\}, e)$ è il sottospazio degli elementi in $\mathcal{C}([0,1], G)$ tali che $\gamma(0) = e \in G$. L'insieme $P(G)$ uò essere visto come il quoziente $\mathcal{C}([0,1], G, \{0\}, e)/\sim$ dove la relazione di equivalenza è data da riparametrizzazione e cancellazione di appendici. Abbiamo perciò un proiezione $\pi : \mathcal{C}([0,1], G, \{0\}, e) \to P(G)$ dove $\pi(\gamma) = [\gamma] \in P(G)$. Inoltre abbiamo la proiezione $\tilde{\pi} : P(G) \to G$ che porta $[\gamma]$ in $\Delta(\gamma) = \varphi(\gamma) =$ il punto finale di γ.

Diciamo che una topologia su $P(G)$ è *ammissibile* se $P(G)$ (munito di questa topologia) è un gruppo topologico, $L(G)$ è un sottogruppo chiuso di $P(G)$ e le proiezioni

$$\mathcal{C}([0,1], G, \{0\}, e) \xrightarrow{\pi} P(G) \xrightarrow{\tilde{\pi}} G$$

sono continue.

DEFINIZIONE (2.2.1). *Sia K un insieme $K \subseteq G$. Allora*

$$P(G, K) := \Delta^{-1}(K) .$$

PROPOSIZIONE (2.2.1).

i) *K è un sottogruppo di $G \Rightarrow P(G, K)$ è un sottogruppo di $P(G)$*

ii) *K è un sottogruppo normale di $G \Rightarrow P(G, K)$ è un sottogruppo normale di $P(G)$*

iii) *K è un sottogruppo chiuso di $G \Rightarrow P(G, K)$ è un sottogruppo chiuso di $P(G)$.*

Dimostrazione. i) e ii) segue dal fatto che Δ è un omomorfismo di gruppi. iii) segue poichè Δ è continua.

COROLLARIO (2.2.1). Se K è normale abbiamo il seguente isomorfismo

$$P(G)/P(G, K) \cong G/K .$$

Osservazione. Si noti che $L(G) = P(G, e)$ dove e è l'identità di G.
Supponiamo ora che G sia un gruppo polacco cioè un gruppo topologico separabile, metrizzabile, completo. Vedremo come definire una metrica su $P(G)$ che dia a $P(G)$ una topologia ammissibile insieme con la struttura di gruppo polacco. In ciò che segue supporremo che $P(G)$ sia dotato della metrica di cui sopra.

PROPOSIZIONE (2.2.1). *Se G è un gruppo polacco e $K \subseteq G$ è un sottogruppo chiuso allora $P(G, K)$ è un sottogruppo polacco di $P(G)$.*

Dimostrazione. $P(G, K)$ è metrizzabile come sottoinsieme di $P(G)$. Inoltre $P(G, K)$ è chiuso come conseguenza della proposizione (2.2.1). Poichè $P(G)$ è uno spazio metrico separabile allora $P(G)$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità ([14] p. 187) e perciò ognuno dei suoi sottospazi è separabile ([14] p. 176). Questo implica che $P(G, K)$ è separabile.

2.3 Sottogruppi a un parametro di $P(G)$

PROPOSIZIONE (2.3.1)([14] p. 218). *Sia X uno spazio che soddisfa il primo assioma di numerabilità (cioè X ha una base numerabile per ogni punto), e sia Y un qualsiasi spazio topologico. Una funzione $f : X \to Y$ è continua a x_0 se e solo se $f(x_n) \to f(x_0)$ per ogni successione $x_n \to x_0$.*

DEFINIZIONE (2.3.1). *Sia $(G, \cdot)$ un gruppo topologico. Un sottogruppo a un parametro di G è un omomorfismo continuo $g_{(\cdot)} : (\mathbf{R}, +) \to (G, \cdot)$.*

Sia $T = \{t_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$. Definiamo $\mathbf{Z}T = \left\{ \sum_{i=1}^{N} m_i t_{k_i} | m_i \in \mathbf{Z},\ t_{k_i} \in T \right\}$.

LEMMA (2.3.1). Se $t_n > 0$ e $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$ allora $\mathbf{Z}T$ è denso in $\mathbf{R}$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$. Si scelga t_{n_0} in modo che $0 < t_{n_0} < 2\varepsilon$. Allora per ogni $m \in \mathbf{Z} | m t_{n_0} - (m+1) t_{n_0}| = t_{n_0} < 2\varepsilon$. Se $B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ allora esiste un m_0 tale che $m_0 t_{n_0} \in B(x_0, \varepsilon)$ e perciò il lemma è dimostrato.
Supponiamo che $g_{(\cdot)}$ non sia iniettiva e che $\alpha := \inf\{t > 0 : g_t = e\}$ dove e è l'identità di G.

PROPOSIZIONE (2.3.2).

$$\alpha = 0 \Rightarrow g_t = e \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Dimostrazione. Per ipotesi è possibile trovare una successione $t_n \in \mathbf{R}$ tale che $t_n > 0\ \forall n$ e $t_n \to 0$ con $g_{t_n} = e\ \forall n \in \mathbf{N}$. Il Lemma (2.3.1) implica che per ogni $t \in \mathbf{R}$ possiamo costruire un'altra successione β_n tale che $\beta_n \to t$ e β_n è una combinazione lineare (a coefficienti interi) degli elementi della successione t_n. Supponiamo

$$\beta_n = \Sigma m_i t_{k_i}$$

Allora

$$g_{\beta_n} = g_{\Sigma m_i t_{k_i}} = \pi g_{g_{k_i}}^{m_i} = e$$

Poichè $\beta_n \to t$ otteniamo $e = g_{\beta_n} \to g_t$ e perciò

$$g_t = e \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

■

Ora supponiamo che $0 < t_1 \leq t_2 < \alpha$ e $g_{t_1} = g_{t_2}$. Otteniamo $g_{t_2 - t_1} = g_{t_2} g_{t_1}^{-1} = e$ e questo implica $t_2 = t_1$ (poichè $(t_2 - t_1) < \alpha$). Ricapitoliamo le considerazioni di cui sopra.

PROPOSIZIONE (2.3.3). *Un gruppo a un parametro $g_{(\cdot)}$ è*

i) iniettivo o

ii) una successione di lacci iniettivi.

Questo implica in particolare che non ci sono appendici nell'origine e perciò (per traslazione) nessuna appendice per l'intero $g_{(\cdot)}$.

DEFINIZIONE (2.3.2). *Sia $\gamma_t : [0, t] \to G$ definita da $\gamma_t(s) = g_s \; \forall s \in [0, t]$.*

PROPOSIZIONE (2.3.4).

$$s \neq t \Rightarrow [\gamma_t] \neq [\gamma_s]$$

Dimostrazione. Supponiamo $[\gamma_t] = [\gamma_s]$. Poichè sia γ_t che, γ_s iniziano nell'identità del gruppo e e poichè esse non hanno appendici otteniamo che hanno la stessa immagine e lo stesso punto finale. Quindi se sono equivalenti significa che differiscono solo per un cambio di parametrizzazione. Inoltre se $p \in$ range $\gamma_t =$ range γ_s otteniamo che

$$\# \gamma_t^{-1}(p) = \# \gamma_s^{-1}(p)$$

Ora abbiamo due casi:

i) $g_{(\cdot)} : \mathbf{R} \to G$ è iniettivo. Ricordiamo che noi indichiamo con $\varphi(\gamma) = \Delta(\gamma)$ il punto finale di una curva γ. Allora se $s \neq t$ otteniamo

$$\varphi(\gamma_t) = \gamma_t(t) = g_t \neq g_s = \gamma_s(s) = \varphi(\gamma_s)$$

e questo implica $[\gamma_t] \neq [\gamma_s]$.

ii) $g_{(\cdot)} : \mathbf{R} \to G$ non è iniettivo. Supponiamo che s, $t > 0$ poichè gli altri casi seguono da questo. Sia $\alpha := \inf\{x > 0 : g_x = e\}$. Si noti che $g_\alpha = e$. Ora possiamo scrivere che

$$t = k\alpha + r \qquad 0 \leq r, \tilde{r} < \alpha \qquad k, \tilde{k} \in \mathbf{N}$$
$$s = \tilde{k}\alpha + \tilde{r}$$

Suppose $[\gamma_t] = [\gamma_s]$. Otteniamo

$$g_r = g_{k\alpha + r} = g_t = \gamma_t(t) = \varphi(\gamma_t) = \varphi(\gamma_s) = g_s = g_{\tilde{k}\alpha + \tilde{r}} = g_{\tilde{r}}$$

Perciò $g_r = g_{\tilde{r}}$ (since $0 \leq r, \tilde{r} < \alpha$). Inoltre

$$k = \#(\gamma_g^{-1}(e)) = \#(\gamma_s^{-1}(e)) = \tilde{k}$$

Cioè

$$t = k\alpha + r = \tilde{k}\alpha + \tilde{r} = s$$

DEFINIZIONE (2.3.3).

$$P_t := [\gamma_t]$$

La definizione è ben posta come conseguenza della proposizione precedente.

PROPOSIZIONE (2.3.5).

$$P_t P_s = P_{t+s} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Dimostrazione. Sia $P_t = [\gamma_t]$, $P_s = [\gamma_s]$, $P_{t+s} = [\gamma_{t+s}]$. Sia $\delta : [t, t+s] \to G$ definito da $\delta(r) := g_{r-t}$ $r \in [t, t+s]$.

Data la riparametrizzazione $f : [0,s] \to [t, t+s]$, $f(r) = t + r$, $r \in [0,s]$ otteniamo

$$\delta(f(r)) = \delta(r+t) = g_{(r+t)-t} = g_r = \gamma_s(r)$$

Questo implica che $\delta(\cdot) \sim \gamma_s(\cdot)$.
Perciò $g_t\delta(\cdot) \sim \gamma_s(\cdot)$. Si noti che $g_t\delta(r) = g_r$, $r \in [t, t+s]$. Otteniamo che

$$\gamma_t(\cdot) \circ (g_t\delta(\cdot)) = \gamma_{t+s}(\cdot)$$

così

$$P_tP_s = [\gamma_t][\gamma_s] = [\gamma_t(\cdot) \cdot (g_t\delta(\cdot))] = [\gamma_{t+s}] = P_{t+s}$$

PROPOSIZIONE (2.3.6). *Se $P(G)$ è dotato di una topologia ammissibile la funzione $P_{(\cdot)} : \mathbf{R} \to P(G)$, $t \mapsto P_t$ è continua.*

Dimostrazione.
La funzione $t \mapsto P_t$ è uguale alla composizione $t \xrightarrow{\gamma(\cdot)} \gamma_t \xrightarrow{\bar{\pi}} [\gamma_t] = P_t$ (vedi la sezione precedente). Poichè sia $\gamma_{(\cdot)}$ che $\bar{\pi}$ sono continue lo stesso può dirsi di $P_{(\cdot)}$.
La procedura di questo paragrafo ci permette di associare un gruppo a un parametro di $P(G)$ ad ogni gruppo a un parametro di G.

2.4 Omomorfismi di gruppoidi, gruppoidi G-ammissibili e gruppi di cammini astratti

Siano (M,Ω), (M',Ω') due gruppoidi dove M, M' sono le famiglie degli oggetti e Ω, Ω' sono le famiglie delle frecce.

DEFINIZIONE (2.4.1). *Un omomorfismo di gruppoidi è un funtore covariante $\psi : (M,\Omega) \to (M',\Omega')$. Più esplicitamente abbiamo due funzioni (che denotiamo con la stessa lettera) $\psi : M \to M'$ $\psi : \Omega \to \Omega'$ tali che per ogni γ, $\delta \in \Omega$*

i) $\psi(\gamma)\psi(\delta) = \psi(\gamma\delta)$;
i)) $\psi(i(\gamma)) = i(\psi(\gamma))$, $\psi(\varphi(\gamma)) = \varphi(\psi(\gamma))$ *dove $i(\gamma)$ e $\varphi(\gamma)$ sono il punto iniziale e finale di γ.*

Si noti che se 1_x è l'identità a $x \in M$ otteniamo

$$\psi(1_x)\psi(1_x) = \psi(1_x \cdot 1_x) = \psi(1_x) = \psi(1_x)1_{\psi(x)}$$

Così $\psi(1_x) = 1_{\psi(x)}$. Perciò se $i(\gamma) = x$

$$\psi(\gamma^{-1})\psi(\gamma) = \psi(\gamma^{-1} \cdot \gamma) = \psi(1_x) = 1_{\psi(x)}$$

Questo implica $\psi(\gamma^{-1}) = \psi(\gamma)^{-1}$.

DEFINIZIONE (2.4.2).
i) Hom $((M,\Omega), (M',\Omega')) :=$ *l'insieme degli omomorfismi da (M,Ω) a (M',Ω);*
ii) Iso $((M,\Omega), (M',\Omega')) =$ *l'insieme degli isomorfismi da (M,Ω) a (M',Ω');*
iii) Aut $(M,\Omega) =$ *Iso* $((M,\Omega), (M,\Omega))$.

Aut (M,Ω) ha un struttura di gruppo naturale data dalla composizione di funtori.

DEFINIZIONE (2.4.3). *Se G è un sottogruppo di Aut (M,Ω) diciamo che (M,Ω) è G-ammissibile.*

Facciamo la seguente ipotesi:
i) (M,Ω) è G-ammissibile;
ii) G agisce fedelemente e transitivamente su M. Inoltre abbiamo fissato una "origine" $x_0 \in M$ così che G si identifica con M.

Se $\gamma \in \Omega$ si indichi con $[\gamma]$ l'orbita di γ sotto l'azione di G e si scriva Ω/G per l'insieme di queste orbite.

PROPOSIZIONE (2.4.1). *Si definisca $[\gamma] \cdot [\delta] := [(\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma) \cdot \delta]$. Questa definizione è ben posta e Ω/G acquista (con la operazione di cui sopra) la struttura di gruppo.*

Dimostrazione Si noti che $\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma$ è una freccia che parte da $\varphi(\delta)$ così che la composizione $(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\delta$ ha significato. Supponiamo ora che $\gamma\sim\gamma'$ e $\delta\sim\delta'$. Questo significa $\delta'=g_1\delta$, $\gamma'=g_2\gamma$ per qualche g_1, $g_2\in G$. Allora

$$\begin{aligned}\varphi(\delta')i(\gamma')^{-1}\gamma'\cdot\delta' &= \varphi(g_1\delta)i(g_2\gamma)^{-1}g_2\gamma g_1\delta = \\ &= g_1\varphi(\delta)(g_2 i(\gamma))^{-1})g_2\gamma g_1\delta = g_1\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma g_1\delta = \\ &= g_1(\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma\cdot\delta)\end{aligned}$$

Cioè

$$[\gamma]=[\gamma'] \quad \text{e} \quad [\delta]=[\delta'] \Rightarrow [\gamma\cdot\delta]=[\gamma'\cdot\delta']$$

Abbiamo dimostrato che la definizione è ben posta

Ora mostriamo che esiste un elemento neutro. Se x, $y\in M(=G)$ sono arbitrari allora abbiamo un $g\in G$ tale che $gx=y$. Questo implica $g(1_x)=1_{gx}=1_y$ così $[1_x]=[1_y]$ $\forall x,y\in M$. Ora sia $\gamma\in\Omega$ e sia $e=[1_x]$. Abbiamo

$$\begin{aligned}[\gamma]\cdot e &= [\gamma][1_{i(\gamma)}]=[(\varphi(1_{i(\gamma)})i(\gamma)^{-1}\gamma)1_{i(\gamma)}]= \\ &= [(i(\gamma)i(\gamma)^{-1}\gamma)1_{i(\gamma)}]=[\gamma\cdot 1_{i(\gamma)}]=[\gamma] \\ e\cdot[\gamma] &= [1_{\varphi(\gamma)}][\gamma]=[(\varphi(\gamma)i(1_{\varphi(\gamma)})^{-1}1_{\varphi(\gamma)})\cdot\gamma]= \\ &= [(\varphi(\gamma)\varphi(\gamma)^{-1}1_{\varphi(\gamma)})\cdot\gamma]=[1_{\varphi(\gamma)}\cdot\gamma]=[\gamma]\end{aligned}$$

Inoltre cerchiamo un'inversa per un arbitraria $[\gamma]\in\Omega/G$. Abbiamo

$$\begin{aligned}[\gamma]\cdot[\gamma^{-1}] &= [(\varphi(\gamma^{-1})i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\gamma^{-1}]=[(i(\gamma)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\gamma^{-1}]=[\gamma\cdot\gamma^{-1}]= \\ &= [1_{\varphi(\gamma)}]=e \\ [\gamma^{-1}]\cdot[\gamma] &= [(\varphi(\gamma)i(\gamma^{-1})^{-1}\gamma^{-1})\cdot\gamma]=[(i(\gamma^{-1})i(\gamma^{-1})^{-1}\gamma^{-1})\gamma]=[\gamma^{-1}\cdot\gamma]= \\ &= [1_{i(\gamma)}]=e\end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'associatività. Sia γ, δ, $n\in\Omega$.

Sia $\xi:=(\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\delta$ e $\xi'=\varphi(n)i(\delta)^{-1}\delta$. Ne segue $i(\xi)=i(\delta)$ e

$$\varphi(\xi'\eta)=\varphi(\xi')=\varphi(\eta)i(\delta)^{-1}\varphi(\delta)$$

Perciò

$$\begin{aligned}([\gamma]\cdot[\delta])\cdot[\eta] &= [(\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\delta]\cdot[\eta]=[\xi]\cdot[\eta]= \\ &= [(\varphi(\eta)i(\xi)^{-1}\xi)\cdot\eta]= \\ &= [(\varphi(\eta)i(\delta)^{-1}((\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\delta))\cdot\eta] \\ [\gamma]\cdot([\delta]\cdot[\eta]) &= [\gamma]\cdot[(\varphi(\eta)i(\delta)^{-1}\delta)\eta]=[\gamma]\cdot[\xi'\cdot\eta]= \\ &= [(\varphi(\xi'\cdot\eta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot(\xi'\cdot\eta))]= \\ &= [(\varphi(\eta)i(\delta)^{-1}\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot(\varphi(\eta)i(\delta)^{-1}\delta)\cdot\eta]= \\ &= [(\varphi(\eta)i(\delta)^{-1}((\varphi(\delta)i(\gamma)^{-1}\gamma)\cdot\delta))\cdot\eta]\end{aligned}$$

E abbiamo ottenuto la conclusione desiderata.

Diciamo che Ω/G è il gruppo dei cammini associato con il gruppoide G-ammissibile (M,Ω) (si ricordi che G deve agire fedelmente e transitivamente su M).

2.5 Insieme totalmente ordinati e gruppoidi G-ammissibili

Mostreremo come ottenere gruppoidi G-ammissibili a partire da certe classi di insiemi totalmente ordinati.

Sia X un insieme totalmente ordinato. Si definisca $[a,b]=\{a\leq x\leq b,\ x\in X\}$. Diciamo che $I=[a,b]$ è un intervallo chiuso. $I(X)$ è l'insieme degli intervalli di X. Diciamo che I è adiacente a I' se $I=a,b$ e $I'=b,c$ dove a, b, $c\in X$. Un automorfismo di $(X,\leq)$ è una funzione biunivoca che conserva l'ordine $\psi: X\to X$. Sia Aut $(X,\leq)$ il gruppo degli automorfismi di X. Se B è un sottogruppo di Aut $(X,\leq)$ diciamo che $(X,\leq)$ è B-omogeneo se B agisce transitivamente su X.

Sia I un intervallo chiuso. Un inversione per I è una funzione $\psi : I \to I$ tale che $\psi^2 = Id_I$ e $x \leq y \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(y)$. (Si noti che ψ è biunivoca e $\psi(x) \leq \psi(y) \Rightarrow \psi^2(x) \geq \psi^2(y) \Rightarrow x \geq y$).

Ora sia $(X, \leq)$ un insieme totalmente ordinato B-omogeneo $\mathcal{F} = \{\psi_I\}_{I \in I(X)}$ una famiglia di inversioni e Y un insieme arbitrario

Una *curva parametrizzata* è una funzione $\gamma : [a,b] \to Y$, $a, b \in X$.

Se $\delta : [b,c] \to y$ e $\gamma(b) = \delta(b)$ definiamo il prodotto $\delta \cdot \gamma : [a,c] \to y$ tramite

$$(\delta \cdot \gamma)(t) = \gamma(t) \qquad t \in [a,b]$$
$$(\delta \cdot \gamma)(t) = \delta(t) \qquad t \in [b,c]$$

L'inversa di una curva è $\gamma^{-1} := \gamma \cdot \varphi_I$. Diremo che due curve parametrizzate sono equivalenti ($\sim$) se vale una delle seguenti condizioni:

i) $\gamma \sim \gamma'$ se $\gamma = \gamma' \circ \varphi \qquad \varphi \in B$

ii) $\gamma \sim \eta \cdot \xi$ if $\gamma = \eta \cdot \delta \cdot \delta^{-1} \cdot \xi$.

Una *curva* è una classe di equivalenza di curve parametrizzate. Se γ è una curva allora denoteremo con $[\gamma]$ la sua classe di equivalenza.

Il prodotto di cue curve è definito tramite i rappresentanti

$$[\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma \cdot \delta]$$

DEFINIZIONE (2.5.1). *Il gruppoide dei cammini $\hat{P}(X,Y)$ è l'insieme di curve definito sopra con l'operazione di composizione di curve. I suoi oggetti sono gli elementi di Y e le frecce sono le curve. Ora supponiamo che $Y = G$ dove G è un gruppo. Abbiamo che G agisce su se stesso per traslazione sinistra e su $\hat{P}(X,G)$ nel seguente modo Se $\gamma : I \to G$ si definisca $g\gamma : I \to G$ tramite $(g\gamma)(t) = g\gamma(t)$. Poniamo $g[\gamma] := [g\gamma]$. E' facile vedere che la definizione è ben posta e che $(\hat{P}(X,G), G)$ è un gruppoide G-ammissibile. Inoltre G agisce su se stesso fedelemente e transitivamente.*

ESEMPIO. Si consideri il caso $X = \mathbb{Z}$ con l'ordinamento totale solito. Sia $B = \{\varphi_k | \in \mathbb{Z}\}$ dove $\varphi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\varphi_k(n) = n + k$. B è un gruppo di automorfismi di $(\mathbb{Z}, \leq)$. Se I è un intervallo (of $\mathbb{Z}$) ψ_I è definita nel seguente modo. Sia $I = \{n, n+1, \ldots, n+m\}$. Allora $\psi_I(n+k) = n + m - k$ $0 \leq k \leq m$. Naturalmente ψ_I è una famiglia di inversioni. Se G è un qualsiasi gruppo possiamo costruire il gruppoide G-ammissibile $\hat{P}(\mathbb{Z}, G)$ e da questo otteniamo un gruppo dei cammini seguendo la procedura della sezione (2.4).

Osservazione 1). Si noti che in questa sezione e nella sezione (2.4) la continuità non svolge alcun ruolo.

Osservazione 2). E' possibile generalizzare le considerazioni della presente sezione. Il solo cambiamento importante è la nozione di intervallo.

DEFINIZIONE (2.5.2). *Se $(X, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato un intervallo I è un sottoinsieme di x tale che*

i) I è totalmente ordinato;

ii) I ha un massimo b e un minimo a;

iii) I è massimale cioè se $I \subseteq I'$ e I' è un insieme totalmente ordinato con massimo b e minimo a allora $I = I'$.

Osservazione 3). La nostra definizione di intervallo non è quella usuale dove se a, $b \in X$ $[a,b] := \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ Tuttavia si noti che usando la definizione standard l'unione di due intervalli adiacenti non è un intervallo. Questo problema non riguarda la nostra definizione di intervallo.

2.6 La decomposizione di Mackey per gruppi di cammini

Sia G un gruppo topologico e sia K un sottogruppo chiuso.

DEFINIZIONE (2.6.1). Diremo che la coppia (G, K) ha una decomposizione di Mackey se esiste un sottoinsieme boreliano $S \subset G$ tale che ogni elemento $g \in G$ può essere scritto in modo unico nella forma

$$g = ks \qquad k \in K \qquad s \in S$$

PROPOSIZIONE (2.6.1). (Mackey)
Se G gruppo localmente compatto separabile e K è un sottogruppo chiuso allora la coppia (G, K) ha la decomposizione di Mackey. Vogliamo provare quanto segue.

PROPOSIZIONE (2.6.2). Se G è un gruppo polacco allora il gruppo $P(G)$ definito nella Sezione (2.1) è un gruppo topologico, il gruppo dei lacci $L(G)$ è un sottogruppo chiuso e la coppia $(P(G),\ L(G))$ ha una decomposizione di Mackey.

Per dimostrare la proposizione di cui sopra abbiamo bisogno di numerosi lemmi.

LEMMA (2.6.1). Se G è un gruppo polacco $P(G)$ è un gruppo polacco.

LEMMA (2.6.2). Se G è un gruppo polacco $L(G)$ è un sottogruppo chiuso e separabile di $P(G)$. Questo implica che $L(G)$ è un gruppo polacco.

LEMMA (2.6.3). $L(G)$ agisce su $P(G)$ per moltiplicazione destra. La relazione di equivalenza indotta da tale azione è numerabilmente separata.

In ciò che segue dimostreremo le proposizioni di cui sopra e in ultimo mostreremo come applicare un Teorema di J.P. Burgess per ottenere la dcomposizione di Mackey per $(P(G), L(G))$.

PROPOSIZIONE (2.6.3). Sia $\gamma : [a, b] \to X$ un laccio minimale non banale. Supponiamo che $\#(\gamma^{-1}(p)) < +\infty$ per ogni $p \in \gamma([a, b])$. Allora

$$\#(\gamma^{-1}(p)) = \#(\gamma^{-1}(q)) \qquad \forall p, q \# \gamma(a) = \gamma(b)$$

Dimostrazione Sia $\gamma^{-1}(p) = \{t_1, \ldots, t_k\}$, $\gamma^{-1}(q) = \{s_1, \ldots, s_m\}$ con $k < m$. Allora $[s_i, s_{i+1}] \cap \gamma^{-1}(p) = \emptyset$ deve valere per qualche $1 \leq i \leq m$. Questo implica che $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ è un laccio con punto base q la cui immagine è contenuta in $\gamma[a, b]/\{p\}$. Questo implica che $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ è un'appendice contraddicendo l'assunzione di minimalità.

DEFINIZIONE (2.6.2). Sia $\gamma : [a, b] \to X$ un laccio tale che $\#(\gamma^{-1}(p)) < +\infty$ per ogni $p \in \gamma([a, b])$. Definiamo il *numero di avvolgimenti* di γ come $\#(\gamma^{-1}(p))$ dove $p \in \gamma([a, b])/\{\gamma(a), \gamma(b)\}$. Un $n-$*laccio* è un laccio con numero di avvolgimenti n.

Osservazione. La definizione di cui sopra è ben posta a causa della Proposizione (20.2). Inoltre è indipendente dalla classe di equivalenza γ in $P(G)$ poichè le traslazioni in G o il cambiamento di parametro non alterano il numero di avvolgimenti $\#(\gamma^{-1}(p))$. Cosi possiamo parlare del numero di avvolgimenti di $[\gamma]$.

DEFINIZIONE (2.6.3). Sia X uno spazio topologico. Una curva parametrizzata $\gamma : [a, b] \to X$ è semplice se

$$t_1 \neq t_2\,, \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = a\,, \quad t_2 = b$$

Una curva parametrizzata è *semplice a tratti* se è il prodotto di un numero finito di curve semplici (cioè di curve iniettive o di 1-lacci). In quel che segue considereremo solo curve semplici a tratti.

2.7 Un esempio di curva continua non semplice a tratti

Sia $f_0 : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ definita come segue

$$f_0(t) = \begin{cases} (5t, 0) & t \in [0, \frac{1}{20}] \\ (\frac{1}{4}, 5\,(t - \frac{1}{20})) & t \in [\frac{1}{20}, \frac{2}{20}] \\ (\frac{1}{4} - 5\,(t - \frac{2}{20}), \frac{1}{4}) & t \in [\frac{2}{20}, \frac{3}{20}] \\ (0, \frac{1}{4} - 5\,(t - \frac{3}{20})) & t \in [\frac{3}{20}, \frac{4}{20}] \\ (5\,(t - \frac{4}{20}), 0) & t \in [\frac{4}{20}, \frac{5}{20}] \\ (t, 0) & t \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

Poniamo

$$f_0(t) := (x(t), y(t)) \qquad t \in [0, 1]$$

Si definisca $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ tramite

$$f_n(t) := \left(\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}x(t),\ \frac{1}{2^n}y(t)\right) \qquad t \in [0,1]$$

Sia $\delta_n : \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right] \to [0,1]$ definita da

$$\delta_n(t) := 2^n(t-1) + 1$$

Si ponga $g_n : \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right] \to \mathbf{R}^2$

$$g_n(t) := f_n(\delta_n(t))$$

Inoltre definiamo $h_n : [0,1] \to \mathbf{R}^2$

$$h_n(t) = \begin{cases} g_0(t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \vdots & \\ g_k(t) & t \in \left[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right] \\ \vdots & \\ g_n(t) & t \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right] \end{cases}$$

Ovviamente

$$g_n\left(\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]\right) \subset B\left((1,0), \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

perciò

$$\operatorname{diam} g_n\left(\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]\right) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

inoltre abbiamo che

$$h_{n+m}(t) = h_m(t) \quad \forall t \in \left[0, 1 - \frac{1}{2^n}\right] \quad \forall m$$

Perciò

$$d'(h_{n+m}, h_n) = \sup_{t[0,1]} d(h_{n+m}(t), h_n(t)) = \sup_{t \in \left[0, 1 - \frac{1}{2^n}\right]} d(h_{m+m}(t), h_n(t)) \leq$$
$$\leq \operatorname{diam} g_n\left(\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]\right) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

Questo implica che h_n è una successione di Cauchy nello spazio metrico completo $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}^2)$. Perciò abbiamo dimostrato l'esistenza di una curva continua $h := \lim_n h_n$. Poichè h ha un numero infinito di pezzi disgiunti percorsi due volte, h non può scriversi come prodotto di un numero finito di curve iniettive.
Sia X uno spazio topologico e $\gamma : [a,b] \to X$ una curva continua.

DEFINIZIONE (2.7.1). Un punto $p \in \gamma([a,b])$ si dice *regolare* se esiste un intorno V di p e un insieme finito di punti $a \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq b$ tale che

$$V \cap \gamma([a,b]) = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma([t_i, t_{i+1}])$$

Una curva si dice *regolare* se uno qualsiasi dei suoi punti è regolare.

Esempio. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ la curva definita nell'Esempio (2.7). Il punto $\gamma(1)$ non è regolare.

2.8 Una metrica sul gruppo $P(G)$

Nella Sezione (2.1) abbiamo definito il gruppo $P(G)$ delle classi di equivalenza delle curve continue parametrizzate (semplici a tratti) su di un gruppo topologico G. Due curve parametrizzate $\gamma : [a,b] \to G$, $\delta : [c,d] \to G$ sono equivalenti se si possono ottenere l'una dall'altra tramite una successione delle seguenti operazioni:

1) taglio di appendici;
2) riparametrizzazioni;
3) traslazione per un elemento di G.

Ora vogliamo mostrare che se G è un gruppo polacco allora è possibile definire una metrica su $P(G)$ in modo da renderlo un gruppo topologico. Uno spazio polacco è uno spazio topologico metrizzabile separabile e completo.
DEFINIZIONE. Se Z e Y sono spazi topologici si definisca

$$\mathcal{C}(Y,Z) := \{f : Y \to Z \ , \ f \quad \text{è continua } \}$$

$$C(Y,Z,x_0,y_0) = \{f : f \in C(Y,Z) \ , \ f(x_0) = y_0\}$$

$\mathcal{C}(Y,Z)$ è uno spazio topologico con la topologia compatto-aperta.
Sia ora (Z,d) uno spazio metrico.

DEFINIZIONE.

$$\mathcal{C}(Y,Z,d) := \{f \in \mathcal{C}(Y,Z) : \ \text{diam}\ (f(Y)) < +\infty\}$$

TEOREMA ([14] p. 270). Se Y è compatto, allora per ogni spazio metrico (Z,d) abbiamo

i) $\mathcal{C}(Y,Z,d) = \mathcal{C}(Y,Z)$
ii) la topologia indotta dalla metrica del "sup" è un invariante topologico congiunto degli spazi Z e Y e coincide con la topologia compatto-aperta.

È ben noto che se Z è completo allora $C(Y,Z)$ è uno spazio metrico completo con la metrica

$$d'(f,g) := \sup_{x \in Y} d(f(x),g(x)) \qquad f,g \in C(Y,Z)$$

Supponiamo ora che $f_n \to f$ in $C(Y,Z)$ e $f_n \in C(Y,Z,x_0,y_0)$. Allora $f_n \to f$ punto per punto così che $f \in C(Y,Z,x_0,y_0)$. In particolare $C(Y,Z,x_0,y_0)$ è chiuso e perciò è uno spazio metrico completo.
Dato $p \in P(G)$ si definisca

$$A_p := \{\gamma : \gamma \in B := C([0,1],G\{0\},\{e\}) \ , \ [\gamma] = p\}$$

Dove e è l'identità di G.
Così $\gamma \in A_p$ significa che γ è una curva parametrizzata da $[0,1]$ che parte dall'identità e la cui classe di equivalenza è data da p.

DEFINIZIONE (2.8.1). Se $p,q \in P(G)$ definiamo

$$d''(p,q) := \inf_{\substack{\gamma \in A_p \\ \gamma \in A_q}} d'(\gamma,\delta)$$

TEOREMA (2.8.1). d'' è una metrica su $P(G)$ che lo rende un gruppo topologico. La dimostrazione del teorema di cui sopra necessita alcuni lemmi preliminari.

LEMMA (2.8.1). Sia $p,q \in P(G)$. Fissiamo $\gamma_0 \in A_p$. Allora per ogni coppia $\gamma \in A_p$, $\delta \in A_q$ esiste un $\hat{\delta} \in A_q$ tale che

$$d'(\gamma,\delta) = d'(\gamma_0,\hat{\delta}) \ .$$

Dimostrazione. Fissiamo γ_0 in A_p. Poichè γ_0 e γ sono entrambi in A_p esiste $f_\gamma \in$ Homeo $([0,1])$ tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e

$$\gamma(t) = \gamma_0(f(t)) \qquad \forall, t \in [0,1]$$

Definiamo $\hat{\delta}(t) := (\delta_0 f^{-1})(t)$. Per definizione $\hat{\delta} \in A_q$. Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} d'(\gamma,\delta) &= \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma(t),\ \delta(t)) \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma_0(f(t)),\ \delta(t)) = \\ &= \sup_{s \in [0,1]} d(\gamma_0(s),\ (\delta_0(f^{-1}(s)) = d'(\gamma_0.\hat{\delta}) \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione.

LEMMA (2.8.2). Sia $p, q \in \Gamma(G)$. Allora per ogni coppia $\gamma_0 \in A_p$, $\delta_0 \in A_q$, si ha

$$d''(p,q) = \inf_{\substack{\gamma \in A_p \\ \delta \in A_q}} d'(\gamma, \delta) = \inf_{\delta \in A_q} d'(\gamma_0, \delta) = \inf_{\gamma \in A_p} d'(\gamma, \delta_0)$$

Dimostrazione . Facile conseguenza del lemma precedente.

PROPOSIZIONE (2.8.1). d'' soddisfa la disuguaglianza triangolare cioè

$$d''(p,q) \leq d''(p,r) + d''(r,q) \qquad \forall p, r, q \in P(G) \tag{$*$}$$

Dimostrazione. Per ogni $\gamma_0 \in A_p$, $\delta \in A_q$, $r \in P(G)$, $\delta_0 \in A_q$ e $\eta \in A_r$ si ha:

$$d''(p,q) = \inf_{\substack{\gamma \in A_p \\ \delta \in A_q}} d'(\gamma, \delta) \leq d'(\gamma, \delta_0) \leq d'(\gamma_0, \eta) + d'(\eta, \delta_0)$$

Perciò per ogni $\eta_0 \in A_r$ si ha

$$d''(p,q) - d'(\gamma, \eta_0) \leq d'(\eta_0, \delta) \qquad \forall \gamma \in A_p \,, \quad \forall \delta \in A_q$$

quindi

$$d''(p,q) - d'(\gamma, \eta_0) \leq \inf_{\gamma \in A_q} d'(\eta_0, \delta) = d''(r,q) \quad \forall \gamma \in A_p$$

Questo implica

$$d''(p,q) - d''(r,q) \leq d'(\gamma, \eta_0) \qquad \forall \gamma \in A_p$$

e perciò

$$d''(p,q) - d''(r,q) \leq \inf_{\gamma \in A_p} d'(\gamma, \eta_0) = d''(p,r)$$

e questo dimostra $(*)$.

PROPOSIZIONE (2.8.2). Sia $\gamma : [0,1] \to G$ un 1-laccio con un punto regolare. Allora esiste un $\alpha > 0$ tale che per ogni 2-laccio δ che verifica

$$\delta([0,1]) = \gamma([0,1]) \quad \text{e} \quad \delta(0) = \delta(1) = \gamma(0) = \gamma(1)$$

abbiamo

$$d'(\gamma, \delta) := \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma(t), \delta(t)) > \alpha > 0$$

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che il punto regolare di γ sia $\gamma(0) = \gamma(1)$. Allora possiamo trovare $r > 0$ e $p \in \gamma([0,1])$ tali che

$$B(\gamma(1), r) \cap \gamma([0,1] = \gamma([t_0, 1])$$

(per un certo $t_0 < 1$) e

$$d(p, \gamma(1)) > 3r$$

Per definizione

$$B(\gamma(1), r) := \{g \in G : d(g, \gamma(1)) < r\}$$

Sia ora δ un 2-laccio soddisfacente l'ipotesi. Abbiamo $p \in \delta([t_0, 1])$. Sia $p = \delta(\hat{t})$ dove $\hat{t} \in [t_0, 1]$. Abbiamo

$$d(\delta(\hat{t}), \gamma(\hat{t})) = d(p, \gamma(\hat{t})) \geq 2r$$

Così se scegliamo $\alpha = r$ otteniamo la conclusione desiderata.

Usando la stessa tecnica possiamo dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE (2.8.3). Se $[\gamma]$ è un n-laccio $[\delta]$ è un m-laccio allora

$$d''([\gamma],[\delta]) > 0 \Leftrightarrow m = n$$

DEFINIZIONE (2.8.2). Una curva si dice minimale se non ha appendici.

Osservazione. Chiaramente, se γ_a è un curva ottenuta aggiungendo un appendice ad una curva γ nel modo descritto nella Sezione (2.1) allora per ogni altra curva δ

$$d'(\gamma,\delta) \leq d'(\gamma_a,\delta)$$

perciò nella Definizione (2.8.1) della distanza d'', l' "inf" può essere preso sulle curve senza appendici.

DEFINIZIONE (2.8.3). Se $p \in P(G)$ si definisca

$$\text{range }(p) := \text{ range }(\gamma) := \gamma([0,1])$$

dove $\gamma \in A_p$ e γ è minimale.

PROPOSIZIONE (2.8.4). Per ogni $p,q \in P(G)$

$$d''(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$$

Dimostrazione. Il fatto che $p = q$ implica $d''(p,q) = 0$ è ovvio. Ora supponiamo $d''(p,q) = 0$. Allora range (p) = range (q). Infatti se range $(p) \neq$ range (q) allora esiste $g \in$ range $(p)/$ range (q). Per un tale g si ha $\alpha := d(g, range(q)) > 0$. Infatti range (q) è una immagine continua di un insieme compatto e perciò è un sottoinsieme compatto dello spazio di Hausdorff G e quindi chiuso. Ma G è metrico così un insieme $X \subset G$ è chiuso se e solo se

$$x \in X \Longleftrightarrow d(x,X) = 0$$

Perciò se $\gamma \in A_p$, $\delta \in A_q$ e $t_0 \in [0,1]$ è tale che $\gamma(t_0) = g$, allora otteniamo

$$d'(\gamma,\delta) = \sup_{t\in[0,1]} d(\gamma(t),\delta(t)) \geq d(\gamma(t_0),\delta(t_0)) \geq \alpha > 0$$

Questo implica

$$d''(p,q) = \inf_{\substack{\gamma\in A_p \\ \delta\in A_q}} d'(\gamma,\delta) \geq \alpha > 0$$

contro l'ipotesi. Perciò range (p) = range (q). Inoltre i punti iniziale e finale di p e q devono essere gli stessi altrimenti avremmo che

$$d'(\gamma,\delta) \geq \max(d(\gamma(0),\delta(0)),\, d(\gamma(1),\delta(1))) =: r > 0 \quad \forall\gamma \in A_p,\ \forall\delta \in A_q$$

così

$$d(p,q) = \inf_{\substack{\gamma\in A_p \\ \delta\in A_q}} d'(\gamma,\delta) \geq r > 0$$

contro l'ipotesi.

Ora dobbiamo dimostrare che le due classi di equivalenza p e q sono le stesse. A questo scopo distinguiamo tre casi.

Primo caso: esistono $\gamma \in A_p$, $\delta \in A_q$ tali che γ e δ sono iniettive.

Poichè $[0,1]$ è compatto e G è di Hausdorff allora γ è un omeomorfismo tra $[0,1]$ e $\gamma([0,1]) \subset G$. La stessa cosa vale per δ. Così $f := \delta^{-1} \circ \gamma$ è un omeomorfismo di $[0,1]$ tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Per definizione abbiamo $\delta \circ f = \gamma$ e così $\gamma \sim \delta$ cioè

$$p = [\gamma] = [\delta] = q$$

Secondo caso: esiste $\gamma \in A_p$, $\delta \in A_q$ tale che γ e δ sono 1-lacci. Questo caso può essere trattato come il primo caso. Infatti γ e δ sono omeomorfismi quando ristretti a $(0,1)$ e quindi

$$f := (\delta|_{(0,1)})^{-1} \circ (\delta|_{(0,1)}) : (0,1) \to (0,1)$$

è un omeomorfismo crescente monotono. Se definiamo $f(0) := 0$ e $f(1) := 1$ possiamo estendere f a un omeomorfismo di $[0,1]$ tale che $\delta \circ f = \gamma$.

Terzo caso: caso generale .

Abbiamo dimostrato che $d''(p,q) = 0$ implica che due rappresentanti minimali di p e q devono avere immagini e punti finali coincidenti. Facendo un cambiamento di parametri possiamo trovare γ e δ tali che $\gamma \in A_p$, $\delta \in A_q$ e inoltre

1) $$a_0 = 0 \quad a_{i+1} = b_i \quad b_n = 1 \quad i = 0,1,\ldots,n$$

2) $$\gamma_i, \delta_i : [a_i, b_i] \to G \qquad \forall i$$

3) $$\text{range}\,(\gamma_i) = \text{range}\,(\delta_i) \qquad \forall i$$

4) $$\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_n$$

5) $$\delta = \delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n$$

6) γ_i, δ_i sono entrambi iniettive o k-lacci (magari con k differenti).

Supponiamo ora che per qualche i_0 γ_{i_0} sia un k_1-laccio e δ_{i_0} sia un k_2-laccio con $k_1 \neq k_2$. Allora per la proposizione (2.8.3) otteniamo che $d''(p,q) > 0$ contro l'ipotesi. Questo implica che il numero di avvolgimenti è lo stesso per lacci corrispondenti nella decomposizione di γ e δ. Un'applicazione ripetuta del primo e del secondo caso a γ_i e δ_i per ogni i ci permette di ottenere una riparametrizzazione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $\gamma = \delta \circ f$ e quindi $p = [\gamma] = [\delta] = q$. □

2.9 Completezza di $P(G)$ e $L(G)$

LEMMA (2.9.1). Se p_n è una successione di Cauchy in uno spazio metrico allora esiste una sottosuccessione p_{k_n} tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(p_{k_n}, p_{k_{n+1}}) < +\infty$$

Dimostrazione Poichè p_n è una successione di Cauchy abbiamo che

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists \nu_n \in \mathbf{N} \quad \text{tale che } m,l > \nu_n \Rightarrow d(p_m, p_l) < 1/2^n$$

Selezioniamo ora una successione di numeri naturali secondo la seguente regola

$$\nu_1 < k_1 < k_2$$
$$\max(\nu_2, k_2) < k_3 < k_4$$
$$\vdots$$
$$\max(\nu_{n-1}, k_{2(n-2)}) < k_{2(n-1)-1} < k_{2(n-1)}$$
$$\max(\nu_n, k_{2(n-1)}) < k_{2n-1} < k_{2n}$$
$$\vdots$$

Da questo otteniamo che per ogni $n \geq 1$

$$d(p_{k_{2n-1}}, p_{k_{2n}}) < 1/2^n$$
$$d(p_{k_{2n}}, p_{k_{2n+1}}) < 1/2^n$$

Perciò

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(p_{k_n}, p_{k_{n+1}}) = \sum_{n=1}^{\infty} d(p_{k_{2n-1}}, p_{k_{2n}}) + \sum_{n=1}^{\infty} d(p_{k_{2n}}, p_{k_{2n+1}}) \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 < +\infty$$

□

PROPOSIZIONE (2.9.1). Il gruppo $P(G)$ con la metrica d'' è completo.

Dimostrazione. Si consideri una successione di Cauchy $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P(G)$. Per noi è sufficiente trovare una sottosuccessione di Cauchy di rappresentanti cioè una successione di Cauchy $\{\gamma_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([0,1],G,\{0\},e)$ tale che $p_{k_n} = [\gamma_{k_n}]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Infatti, poichè $\mathcal{C}([0,1],G,\{0\},e)$ è completo, allora esiste $\lim\limits_n \gamma_{k_n} = \gamma$.
Si denoti con $p := [\gamma]$. Abbiamo

$$d''(p_{k_n},p) = \inf_{\substack{[\delta_{k_n}]=p_{k_n}\\ [\delta]=p}} d'(\delta_{km},\delta) \leq d'(\gamma_{k_m},\gamma) \rightarrow 0$$

Poichè $p_{k_n} \rightarrow p$ e p_n è di Cauchy abbiamo che $p_n \rightarrow p$ e quindi $P(G)$ è completo.
Così dobbiamo solo mostrare l'esistenza di una sottosuccessione di Cauchy di rappresentanti.
Supponiamo che ε_n sia una successione decrescente di numeri positivi tali che $\varepsilon_n \rightarrow 0$.
Si fissi una sottosuccessione p_{k_n} tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d''(p_{k_m},p_{k_{n+1}}) < +\infty$$

L'esistenza di tale sottosuccessione è garantita dal precedente lemma.
Scegliamo ora γ_{k_1} e γ_{k_2} in modo che

$$d'(\gamma_{k_1},\gamma_{k_2}) \leq d''(p_{k_1},p_{k_2}) + \varepsilon_1/2$$

Per induzione possiamo trovare una successione γ_{k_n} tale che

$$d'(\gamma_{k_n},\gamma_{k_{n+1}}) \leq d''(p_{k_n},p_{k_{n+1}}) + \varepsilon_n/2^n$$

Perciò per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} d'(\gamma_{k_n},\gamma_{k_{n+m}}) &\leq \sum_{J=0}^{m-1} d'(\gamma_{k_{n+J}},\gamma_{K_{n+J+1}}) \leq \\ &\leq \sum_{J=0}^{m-1} d''(p_{k_{n+J}},p_{k_{n+J+1}}) + \sum_{J=0}^{k-1} \varepsilon_{n+J}/2^{n+J} \leq \\ &\leq \sum_{J=0}^{\infty} d''(p_{k_{n+J}},p_{k_{n+J+1}}) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Questo dimostra che γ_{k_n} è una successione di Cauchy il che conclude la dimostrazione.

LEMMA (2.9.2). Sia $\delta : [0,1] \rightarrow G$ una curva parametrizzata tale che $d(\delta(0),\delta(1)) = \alpha > 0$. Sia $\gamma : [0,1] \rightarrow G$ un qualsiasi laccio parametrizzato (cioè una curva parametrizzata tale che $\gamma(0) = \gamma(1)$). Allora abbiamo che

$$d'(\delta,\gamma) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\sup_{t\in[0,1]} d(\delta(t),\gamma(t)) = d'(\delta,\gamma) < \frac{\alpha}{2}$$

allora

$$\begin{aligned} \alpha = d(\delta(0),\delta(1)) &\leq d(\delta(0),\gamma(0)) + d(\gamma(0),\delta(1)) \leq \\ &\leq d(\delta(0),\gamma(0)) + d(\gamma(1),\delta(1)) \leq \\ &\leq d'(\delta,\gamma) + d'(\delta,\gamma) \leq \\ &\leq 2d'(\delta,\gamma) < 2\cdot\frac{\alpha}{2} < \alpha \end{aligned}$$

Questa contraddizione dimostra il lemma.

PROPOSIZIONE (2.9.2). $L(G)$ è un sottogruppo chiuso di $P(G)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $q = [\delta] \in P(G) \backslash L(G)$ (il complementare di $L(G)$). δ deve essere una curva aperta cioè

$$d(\delta(0), \delta(1)) = \alpha > 0$$

Si noti che se scegliamo una qualsiasi δ' tale che $[\delta'] = [\delta]$ e $\delta'(0) = e$ allora $d(\delta'(0), \delta'(1)) = d(\delta(0), \delta(1))$. Questo significa che α è indipendente dal rappresentante.
Ora se $l = [\gamma]$ è un laccio arbitrario abbiamo che

$$d''(q, l) = \inf_{\substack{\delta \in A_q \\ \gamma \in A_l}} d'(\delta, \gamma) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

Questo implica che $P(G) \backslash L(G)$ è aperto cioè che $L(G)$ è chiuso.

2.10 Separabilità di $P(G)$ e di $L(G)$

PROPOSIZIONE (2.10.1). Il gruppo dei cammini $P(G)$ e il gruppo dei lacci $L(G)$ sono separabili. Per la dimostrazione abbiamo bisogno di risultati noti che elenchiamo di seguito per comodità del lettore.

TEOREMA (2.10.1)([14] p. 265). Se Z, Y soddisfano il secondo assioma di numerabilità allora anche $\mathcal{C}(Y, Z)$ lo soddisfa.

Osservazione . Uno spazio soddisfa il secondo assioma di numerabilità se e solo se ha una base numerabile.

TEOREMA (2.10.2)([14] p. 176). Se Z è a base numerabile allora ogni suo sottospazio è separabile.

TEOREMA (2.10.3)([14] p. 187). Se X è uno spazio metrico , le seguenti asserzioni sono equivalenti

i) X è separabile;
ii) X è a base numerabile;
iii) X è di Lindelof.

PROPOSIZIONE (2.10.2). Se G è un gruppo polacco allora $\mathcal{C}([0,1], G, \{0\}, e)$ e $\mathcal{C}([0,1], G, \{0,1\}, e)$ sono separabili.

Dimostrazione . Poichè G è metrico e separabile G è a base numerabile. Inoltre $[0,1]$ è a base numerabile. Per il Teorema (2.10.2) $\mathcal{C}([0,1], G)$ è a base numerabile. Applicando ora il teorema (2.10.3) otteniamo che ogni sottospazio di $\mathcal{C}([0,1], G)$ è separabile.

PROPOSIZIONE (2.10.3). Se G è un gruppo polacco allora $P(G)$ e $L(G)$ sono separabili.

Dimostrazione . Sia (γ_n) una successione densa in $\mathcal{C}([0,1], G, \{0\}, e)$. Poniamo $q_n := [\gamma_n] \in P(G)$ per ogni n. Per ogni $p := [\delta] \in P(G)$ otteniamo

$$d''(p, q_n) = \inf_f d'(\delta, \gamma_n \circ f) \leq d'(\delta, \gamma_n)$$

Perciò (q_n) è denso in $P(G)$.
Si scelga ora un insieme numerabile denso di lacci parametrizzati in $\mathcal{C}([0,1], G, \{0,1\}, e)$. Ripetendo lo stesso tipo di argomentazione otteniamo una successione densa di lacci in $L(G)$.

PROPOSIZIONE (2.10.4). *Se X è uno spazio metrico localmente compatto e separabile allora esiste una topologia ammissibile e metrizzable sul gruppo dei cammini $P(Homeo(X))$ tale che $P(Homeo(X))$ è un gruppo polacco. Analogamente se M è una varietà finito-dimensionale $P(Diff^r(M))$ risulta un gruppo polacco per $1 \leq r \leq \infty$.*

Dimostrazione. Questo è semplicemente un corollario dei risultati della sezione 1.5 e del lemma (2.6.1) il quale dice che se G è polacco allora il gruppo dei cammini $P(G)$ è polacco.

2.11 Il teorema di selezione

Sia X uno spazio polacco e sia H un gruppo polacco che agisce in modo continuo su X. L'azione di H induce un relazione di equivalenza E su X : xEy se e solo se $hx = y$ per qualche $h \in H$. $W \subseteq X$ è invariante se $hW = W$ per tutti gli $h \in H$. Un insieme transversale o di selezione per una relazione di equivalenza è un insieme composto da esattamente un rappresentante per ogni classe di equivalenza. Una relazione di equivalenza E è separata numerabilmente se e solo se esiste una successione di insiemi boreliani invarianti $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, \subseteq X$ tali che per tutti $x, y \in X$

$$xEy \Leftrightarrow \forall n(x \in Z_n \Leftrightarrow y \in Z_n)$$

TEOREMA(2.11.1) (Burgess). Se X è uno spazio polacco, H un gruppo polacco che agisce in modo continuo su X inducendovi una relazione di equivalenza numerabilmente separata E allora esiste un insieme trasversale boreliano per E.

Dimostrazione. Si veda [8].

Supponiamo ora che G sia un gruppo polacco e che H sia un sottogruppo chiuso polacco di G. Si consideri l'azione di H su G data dalla moltiplicazione destra. Le orbite di questa azione sono i laterali gH, $g \in G$. Sia d la metrica di G. Supponiamo che

$$xH \neq yH \Rightarrow d(xH, yH) > 0$$

PROPOSIZIONE (2.11.1). Se G e H hanno le proprietà di cui sopra allora la relazione di equivalenza data dalla moltiplicazione destra di H è numerabilmente separata.

Prima di dimostrare la proposizione abbiamo bisogno del seguente

LEMMA (2.11.1). Sia

$$B(g_0, r) := \{g \in G : d(g, g_0) < r\} \quad r > 0 \quad g_0 \in G$$

$$B(g_0, r)H := \{gh : g \in B(g_0, r), h \in H\}$$

Allora $B(g_0, r) \cdot H$ è un insieme Boreliano di G $\forall g_0 \in G$, $\forall r > 0$.

Dimostrazione . La moltiplicazione per un elemento del gruppo G è un omeomorfismo di G. Perciò $B(g_0, r) \cdot h$ è aperto $\forall h \in H$. Così

$$B(g_0, r) \cdot H = \bigcup_{h \in H} B(g_0, r) \cdot h$$

è aperto e perciò boreliano.

Dimostrazione della proposizione (2.11.1). Sia g_n un insieme denso di G. Si consideri la successione di insiemi boreliani invarianti $\{B(g_n, r_n) \cdot H\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ r_m \in \mathbb{Q}}} = \{A_{n,m}\}$. Vogliamo dimostrare che questa successione è separante per la relazione di equivalenza data dall'azione destra di H su G. Si noti che x è in relazione con y se e solo se $xH = yH$.

Perciò vogliamo dimostrare che

$$(xH = yH) \Leftrightarrow (x \in A_{n,m} \Leftrightarrow y \in A_{n,m}) \ \forall n, m \in \mathbf{N}$$

<u>Prima implicazione</u> ($\Rightarrow$)

Supponiamo $xH = yH$. Se $x \in A_{n,m} = B(g_n, r_m) \cdot H$ allora esiste $g \in B(g_n, r_m)$, $h \in H$ tale che $x = gh$. Ma $x \in xH = yH$ perciò esiste $h' \in H$ tale che $x = yh'$. Perciò $gh = yh'$ così $y = g(h \cdot (h')^{-1}) \in B(g_n, r_m) \cdot H = A_{n,m}$. Questo dimostra l'implicazione $\Rightarrow$.

<u>Seconda implicazione</u> ($\Leftarrow$)

Supponiamo $xH \neq yH$. Vogliamo mostrare che esiste un A_{n_0,m_0} tale che $x \in A_{n_0,m_0}$ e $y \notin A_{n_0,m_0}$. Supponiamo che questo non sia vero. Dovremmo avere

$$x \in A_{n,m} \Rightarrow y \in A_{n,m}$$

Scegliamo ora una successione (g_n) tale che $x \in B(g_n, 1/n)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Otteniamo

$$x \in xH \subseteq B(g_n, 1/n)H \qquad \forall n$$

Perciò

$$y \in B(g_n, 1/n) \cdot H \qquad \forall n$$

Questo implica che $y = g_0 h$ per qualche $y_0 \in B(g_n, 1/n)$, $h \in H$. Ma $y = g_0 h$ significa che $yH = g_0 H$. Ne segue che

$$d(xH, yH) = d(xH, g_0 H) \leq d(x, g_0) \leq 2 \cdot 1/n \qquad \forall n$$

Così otteniamo che $d(xH, yH) = 0$ cioè $xH = yH$ contro l'ipotesi. Questa contraddizione dimostra la proposizione.

PROPOSIZIONE(2.11.2). Sia G un gruppo polacco, $P(G)$ il gruppo dei cammini di G e $L(G)$ il gruppo dei lacci di G. Si ha che laterali differenti hanno distanza positiva cioé

$$[\gamma]L(G) \neq [\delta]L(G) \Rightarrow \quad d''([\gamma]L(G), [\delta]L(G)) > 0$$

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che $P(G)$ ha una metrica (d'') rispetto alla quale è un gruppo polacco. Ovviamente stiamo ancora considerando quella metrica.
Consideriamo ora due laterali differenti $[\gamma]L(G)$, $[\delta]L(G)$. Possiamo supporre di aver scelto due rappresentanti γ e δ con punto di partenza uguale e punto di arrivo diverso.
Infatti $[\gamma]$ e $[\delta]$ sono nello stesso laterale se e solo se partono e arrivano dagli stessi punti.
Sia ora $\alpha := d(\gamma(1), \delta(1))$. Abbiamo che

$$d''([\gamma], [\delta]) \geq d(\gamma(1), \delta(1)) = \alpha > 0$$

Ovviamente se moltiplichiamo γ e δ per due qualsiasi lacci l_1, l_2 allora otteniamo gli stessi punti finali

$$d''([\gamma l_1], [\delta l_2]) \geq d(\gamma(1), \delta(1)) = \alpha > 0$$

Perciò

$$d''([\gamma]L(G), [\delta]L(G)) = \inf_{[l_1],[l_2] \in L(G)} d''([\gamma] \circ [l_1], [\delta_1] \circ [l_2]) \geq \alpha > 0 \qquad \square$$

2.12 Il teorema di selezione di Dixmier applicato ai gruppi di cammini

Vogliamo dare un teorema di selezione per i gruppi di cammini diverso dal teorema (2.11.1) della sezione (2.11). Useremo il seguente

TEOREMA (2.12.1). (Dixmier) *Se G è un gruppo polacco, K un sottogruppo chiuso e normale di G, e $\pi : G \to G/K$ la proiezione canonica allora esiste una sezione di Borel per π, cioè una funzione boreliana $s : G/K \to G$ tale che $\pi(s(x)) = x$ per tutti gli $x \in G/K$.*

Dimostrazione . Si veda [11].
Ora siamo pronti a dimostrare il seguente risultato

TEOREMA (2.12.2). *Se G un gruppo polacco, k un sottogruppo chiuso e normale di G allora esiste una sezione boreliana $s : P(G, K) \to P(G)$ per la proiezione canonica $\pi' : P(G) \to P(G, K)$.*

Dimostrazione. La Proposizione (2.2.1) implica che $P(G, K)$ è un sottogruppo chiuso normale di $P(G)$. Così la conclusione segue direttamente dal teorema di Dixmier.

Osservazione. Si noti che il teorema di selezione della sezione (2.11) (derivato dal teorema di Burgess) si applica ai sottogruppi *chiusi* mentre il teorema di Dixmier richiede, in aggiunta, la normalità.

CAPITOLO

3

La rappresentaziona indotta

3.1 Funzioni covarianti e G–fibrati

In questa sezione dimostriamo l'equivalenza tra l'approccio tramite i G–fibrati e il più tradizionale approccio alla rappresentazione indotta tramite le funzioni covarianti.

Supponiamo di avere un gruppo H e due H-spazi destri P e V. Questo significa che abbiamo due azioni destre di H su P e su V, che denotiamo rispettivamente $r_1(h)p = ph$, $r_2(h)v = vh$ per $h \in H$, $p \in P$, $v \in V$. Inoltre supponiamo che H agisca liberamente su P.

Osservazione. Ogni azione destra può essere vista come un'azione sinistra e viceversa. Infatti data una azione destra di H su un insieme X possiamo definire una azione sinistra ponendo

$$hx := l(h)x := r(h^{-1})x = xh^{-1}$$

PROPOSIZIONE(3.1.1). $P \times V$ è un H-spazio se si definisce

$$(p,v)h := ((r_1 \times r_2)(h))(p,v) := (r_1(h)p, r_2(h)v) = (ph, vh)$$

Dimostrazione . Ovvia.

Se X è un H-spazio denotiamo con X/H lo spazio delle orbite e con $\pi : P \to P/H$ la proiezione canonica. Definiamo $\hat{\pi} : (P \times V)/H \to P/H$ tramite

$$\hat{\pi}[(u,v)] = \pi(u) \qquad (***)$$

dove $u \in P$, $v \in V$ e $[(u,v)]$ denota l'orbita di (u,v) sotto l'azione di H.
A causa di $(*)$, $\hat{\pi}$ è ben definita.

DEFINIZIONE(3.1.1). Una funzione $f : P \to V$ si dice H-covariante se

$$f(uh) = f(u)h \quad ; \quad \forall u \in P \quad , \quad \forall h \in H$$

La classe di queste funzioni verrà denotata da $\mathcal{F}_H(P,V)$.

DEFINIZIONE(3.1.2). Una funzione $S : P/H \to (P \times V)/H$ è una sezione se

$$\hat{\pi} \cdot S = Id_{P/H}$$

La classe di queste funzioni verrà denotata con $S(P/H, P \times V/H)$.

PROPOSIZIONE(3.1.2). Definiamo

$$E_{\pi(u)} := \hat{\pi}^{-1}(\pi(u)) \qquad (*v)$$

dove $u \in P$. Definiamo $\tilde{u} : V \to E_{\pi(u)}$ tramite

$$\tilde{u}(v) := [(u,v)] \qquad (**)$$

Allora $\tilde{u}$ è una biiezione e

$$\widetilde{(uh)} = \tilde{u} \cdot r_2(h^{-1})$$

Dimostrazione. Supponiamo $\tilde{u}(v) = \tilde{u}(w)$. Allora a causa di $(**)$ $[(u,v)] = [(u,w)]$ cioè le H–orbite di (u,v) e di (u,w) coincidono. Poichè H agisce liberamente su P questo implica che $v = w$. Così $\tilde{u}$ è iniettiva. Scegliamo ora un qualsiasi $[(uh,v)] \in E_{\pi(u)}$. Dato che valgono $(**)$ e $(*)$ $\tilde{u}(vh^{-1}) = [(u,vh^{-1})] = [(uh,v)]$ perciò $\tilde{u}$ è suriettiva.

Si noti che

$$\widetilde{(uh)}(v) = [(uh,v)] = [(u,vh^{-1})] = [(u, r_2(h^{-1})v)] = (\tilde{u} \cdot r_2(h^{-1}))v$$

i.e.

$$(uh)^{\sim} = \tilde{u} \cdot r_2(h^{-1}) \qquad (****)$$

TEOREMA(3.1.1). Esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra $\mathcal{F}_H(P,V)$ e $S(P/H, P\times V/H)$.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{F}_H(P,V)$ e $x \in P/H$. Definiamo $S_f(x) = [(u, f(u))]$ dove $u \in P/H$ e $u \in \pi^{-1}(x)$. La definizione è ben posta. Infatti se $v \in \pi^{-1}(x)$ allora $[(v, f(v))] = [(uh, f(v))]$ per qualche $h \in H$. Questo implica

$$[(v, f(v))] = [(uh, f(v))] = [(u, f(v)h^{-1})] = [(u, f(vh^{-1})] = [(u, f(u))]$$

Chiaramente

$$\hat{\pi}\cdot S_f(\pi(u)) = \hat{\pi}[(u, f(u))] = \pi(u)$$

quindi $S_f \in S(P/H, P\times V/H)$.
Ora sia $s \in S(P/H, P\times V/H)$. Definiamo $f_s : P \longrightarrow V$ tramite

$$f_s(u) = \tilde{u}^{-1}s(\pi(u))$$

per $u \in P$. Allora a causa di $(****)$

$$f_s(uh) = (\widetilde{uh})^{-1}s(\pi(uh)) = (\tilde{u}\cdot r_2(h^{-1}))^{-1}s(\pi(u)) = r_2(h)\tilde{u}^{-1}s(\pi(u)) = f_s(u)h$$

Perciò $f_s \in \mathcal{F}_H(P,V)$. Che le funzioni $f \mapsto S_f$, $s \mapsto f_s$ siano inverse l'una dell'altra, segue dalle seguenti identità (facili da dimostrare).

$$S_{f_s} = s \quad ; \quad f_{s_f} = s$$

Esempio. Sia $P = G \supset H$ cioè : G è un gruppo, H è un sottogruppo e l'azione destra di H è data dalla moltiplicazione destra (si noti che H agisce liberamente su G). V è un qualsiasi H-spazio destro. Le azioni sinistre di G su $(G\times V)/H$ e G/H sono definite da

$$g_G[(g,v)] := [(g_Gg, v)] \quad ; \quad g_G(gH) := (g_Gg)H \quad ; \quad g_G\,,\, g\in G \quad ; \quad v \in V$$

con queste notazioni si ha:

$$gE_x = E_{gx} \qquad \forall g \in G \qquad \forall x \in G/K$$

Osservazione. Si noti che G agisce transitivamente su G/H.

3.2 Strutture G-ammissibili

DEFINIZIONE(3.2.1). Una **struttura** G**–ammissibile** è una tripla (A, B, π) dove:
- A è un G-spazio;
- B è un G-spazio transitivo;
- $\pi : A \longrightarrow B$ è suriettiva e se $A_b := \pi^{-1}(b)$, $b \in B$ Allora

$$gA_b = A_{gb} \qquad \forall b \in B\ ,\ \forall g \in G \tag{$*$}$$

DEFINIZIONE(3.2.2). Un **isomorfismo** tra due strutture G-ammissibili (A, B, π) e (A', B', π') è una coppia di funzioni biunivoche $\varphi : A \to A'$, $\psi : B \to B'$ tali che i seguenti diagrammi sono commutativi (le frecce verticali sono date dalle azioni del gruppo):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ B & \xrightarrow[\psi]{} & B' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G\times A & \xrightarrow{(Id,\varphi)} & G\times A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & A' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G\times B & \xrightarrow{(Id,\psi)} & G\times B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\psi]{} & B' \end{array} \qquad \blacksquare$$

DEFINIZIONE(3.2.3). Una **struttura** G**-ammissibile canonica** è data dalla procedura dell'Esempio nella sezione (3.1). Denoteremo una tale struttura con $(G\times V)/H, G/H, \hat{\pi})$.

TEOREMA(3.2.1).Ogni struttura G-ammissibile (A, B, π) è isomorfa ad una struttura canonica.

Dimostrazione. Si fissi $x \in B$. Definiamo $H_x = \{g \in G | gx = x\}$. È ben noto che H_x è un sottogruppo di G e che H_x è coniugato a H_y per ogni $y \in B$. Si definisca $H = H_x$. In modo standard possiamo identificare B con G/H cioè, se $z = gx$ associamo z a gH_x. Definiamo $V := A_x$. Se $h \in H = H_x$ allora, a cusa di $(*)$, $hA_x = A_{hx} = A_x$. Così V è un H-spazio. Perciò possiamo costruire la struttura G-ammissibile $(G \times V/H, G/H, \tilde{\pi})$. Definiamo

$$\varphi : G \times V/H \to A \quad \text{by} \quad \varphi[(g, v)] = gv \quad (\text{dato che } v \in A_x \subseteq A)$$
$$\varphi : G/H \to B \text{by} \quad \psi[(gH)] = gx \quad (\text{dato che } H = H_x).$$

È facile vedere che φ e ψ sono ben definite e che la coppia (φ, ψ) è un isomorfismo.

3.3 Funzioni covarianti misurabili, sezioni e teoremi di selezione

Nelle sezioni precedenti abbiamo fatto solo considerazioni per così dire "insiemistiche". Adesso ci occuperemo invece delle condizioni di misurabilità. Sia G un gruppo topologico, K un sottogruppo chiuso di G e $X = K \backslash G = \{Kg,\ g \in G\}$ lo spazio omogeneo dei K-laterali destri. Supponiamo che su X ci sia una misura Boreliana G-quasinvariante μ e che X sia uno spazio localmente compatto. Inoltre supponiamo che la misura μ sia localmente finita cioè che esista un ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X tale che $U \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(U) < +\infty$.
Sia L_k una rappresentazione unitaria di k in uno spazio di Hilbert separabile.

DEFINIZIONE (3.3.1). *Sia $\mathcal{M}(X, H)$ lo spazio delle funzioni misurabili boreliane $S : X \to H$.*
Sia $\mathcal{M}_L(G, H)$ lo spazio delle funzioni misurabili boreliane $f : G \to H$ tali che

$$f(kg) = L_k f(g) \qquad \forall k \in K\ , \quad \forall g \in G$$

Osservazione. Per uno spazio di Hilbert separabile la nozione di funzione misurabile boreliana coincide con la nozione di misurabilità forte o debole ([44] vol.I, p. 116).
A volte denoteremo con $\dot{g}$ il laterale Kg.

Ricordiamo che una coppia (G, K) ha una decomposizione di Mackey se esiste un insieme boreliano $S \subset G$ tale che ogni elemento $g \in G$ può essere rappresentato in modo unico nella forma

$$g = ks \qquad k \in K \qquad s \in S$$

In ciò che segue supporemo che (G, K) abbia una fissata decomposizione di Mackey. Scriviamo (poichè k e s sono determinati in modo unico da g)

$$g = k_g s_g$$

Si noti che se $\tilde{k} \in K$ otteniamo

$$\tilde{k}g = \tilde{k}k_g s_g$$

così per l'unicità

$$k_{\tilde{k}g} = \tilde{k}k_g$$

PROPOSIZIONE (3.3.1). *data una decomposizione di Mackey per (G, K) esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{M}(X, H)$ e $\mathcal{M}_L(G, H)$ (dove L è una rappresentazione di K) data da*

$$f \in \mathcal{M}_L(G, H) \mapsto \alpha_f(\dot{g}) := L_{k_g}^{-1} f(g) \in \mathcal{M}(X, H)$$
$$\alpha \in \mathcal{M}(X, H) \mapsto f_\alpha(g) := L_{k_g} \alpha(\dot{g}) \in \mathcal{M}_L(G, H)$$

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{M}_L(G, H)$. Prima di tutto mostriamo che α_f è ben definita. Supponiamo $\dot{g}_2 = \dot{g}_2$. Questo significa che esiste $\tilde{k} \in K$ tale che $\tilde{k}g_1 = g_2$. perciò $k_{g_2} = k_{\tilde{k}g_1} = \tilde{k}k_{g_1}$. Questo implica

$$\alpha_f(\dot{g}_2) = f(k_{g_2}^{-1} g_2) = f((\tilde{k}k_{g_1})^{-1}\tilde{k}_{g_1}) = f(k_{g_1}^{-1} g_1) =$$
$$= L_{k_{g_1}^{-1}} f(g_1) = L_{k_{g_1}}^{-1} f(g_1) = \alpha_f(\dot{g}_1)$$

Perciò $\alpha_f \in \mathcal{M}(X, H)$.
Supponiamo ora $\alpha \in \mathcal{M}(X, H)$. Per ogni $\tilde{k} \in K$ otteniamo

$$f_\alpha(\tilde{k}g) = L_{k_{\tilde{k}g}}\alpha((\dot{\tilde{k}g})) = L_{\tilde{k}k_g}\alpha(\dot{g}) = L_{\tilde{k}}L_{k_g}\alpha(\dot{g}) = L_{\tilde{k}}f_\alpha(g)$$

Cioè $f_\alpha \in \mathcal{M}_L(G, H)$.
Inoltre abbiamo

$$\alpha_{f_\alpha}(\dot{g}) = L_{k_g}^{-1}f_\alpha(g) = L_{k_g}^{-1}L_{k_g}\alpha(\dot{g}) = \alpha(\dot{g})$$
$$f_{\alpha_f}(g) = L_{k_g}\alpha_f(\dot{g}) = L_{k_g}L_{k_g}^{-1}f(g) = f(g)$$

3.4 La rappresentazione indotta e i sistemi di imprimitività

Sia X uno spazio topologico; denotiamo con $Borel(X)$ la famiglia degli insiemi boreliani di X e con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ lo spazio degli operatori limitati sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

DEFINIZIONE(3.4.1) Una misura a valori $\mathcal{H}$-proiezioni su X è una funzione $P : Borel(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che:

1) $P_\varphi = 0$, $P_X = I$;
2) $P_B^* = P_B$;
3) $P_{B_1 \cap B_2} = P_{B_1} \cdot P_{B_2}$;
4) $P_{(\cdot)}$ è numerabilmente additiva nella topologia forte degli operatori di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Osservazione. 2) e 3) implicano che P_B è una proizione ortogonale $\forall B \in Borel(X)$.

DEFINIZIONE(3.4.2). Sia X uno G-spazio topologico, dove G è un gruppo localmente compatto e separabile. Un **sistema di imprimitività** per G basato su X è una tripla $(U, P, \mathcal{H})$ tale che $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert e

1) U è una rappresentazione unitaria di G in $\mathcal{H}$;
2) P è una misura a valori $\mathcal{H}$-proiezioni X;
3) $U_g P_B = P_{gB} U_g \quad \forall g \in G, \quad \forall B \in Borel(X)$.

Se G agisce transitivamente su X diciamo che $(U, P, \mathcal{H})$ è un sistema transitivo.

DEFINIZIONE(3.4.3). Due sistemi di imprimitività $(U^1, P^1, \mathcal{H}^1)$, $(U^2, P^2, \mathcal{H}^2)$ per G basati su X si dicono **unitariamente equivalenti** se esiste un operatore unitario $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^2$ tale che

$$VU_g^1 = U_g^2 V \quad VP_B^1 = P_B^2 V \quad \forall g \in G\,,\ \forall B \in Borel(X)$$

Mostriamo come costruire sistemi di imprimitività. Supponiamo quanto segue:

i) G è un gruppo topologico e $K \subseteq G$ è un sottogruppo chiuso. Quindi G agisce transitivamente su $M = G/K$.
ii) Su M c'è una misura m che è G-quasiinvariante.
ii) $E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato hilbertiano G-ammissibile dove G agisce unitariamente cioè $g : E_x \to E_{gx}$ è un operatore unitario per ogni $x \in M$.

Come abbiamo visto un G-fibrato (unitario) su M è sempre associato ad una rappresentazione (unitaria) L di K. Lo spazio delle sezioni a quadrato sommabile sarà denotato da

$$\mathcal{H}^L := \mathcal{L}^2(M, m; E)$$

Se $f \in \mathcal{H}^L$ la rappresentazione indotta V^L è definita da

$$(V_g^L f)(x) := \left(\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)\right)^{1/2} gf(g^{-1}x)$$

dove $\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)$ è la derivata di Radon-Nykodim. Se $\psi \in \mathcal{L}^\infty(M, dm)$ e $f \in \mathcal{H}^L$ definiamo

$$(P^L(\psi)f)(x) := \psi(x)f(x)$$

Un facile calcolo dà

$$V_g^L P^L(\psi) = P^L(\psi^g) V_g^L \qquad g \in G, \quad \psi \in C_o(M)$$

Abbiamo quindi costruito un sistema di imprimitività $(V^L, P^L, \mathcal{H}^L)$.

DEFINIZIONE(3.4.4). Un **sistema canonico di imprimitività** è il sistema di imprimitività definito sopra associato ad un fibrato hilbertiano G-ammissibile.

3.5 Il teorema di imprimitività

Il teorema fondamentale della teoria della rappresentazione indotta per i gruppi localmente compatti è il teorema di imprimitività. Sia dunque G localmente compatto, K un sottogruppo chiuso di G, $M = G/K$. Su M esiste una misura G-quasiinvariante ν. Tutte le misure G-quasiinvarianti su M sono equivalenti (si veda [50]). Con $C_o(M)$ denoteremo lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto su M. Se $\psi(\cdot) \in C_o(M)$ allora $\psi^g(\cdot)$ denoterà la funzione $\psi(g^{-1}(\cdot))$. Data una rappresentazione unitaria L di K abbiamo visto nei paragrafi precedenti come costruire (usando la misura G-quasiinvariante) un sistema di imprimitività (V^L, P^L) cioè una rappresentazione V^L di G in $Un(\mathcal{H}^L)$ e uno $*$-omomorfismo $P^L : C_o(M) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^L)$ tali che

$$V_g^L P^L(\psi) = P^L(\psi^g) V_g^L \qquad g \in G, \quad \psi \in C_o(M)$$

Bisogna sottolineare che gli ingredienti sostanziali di questa costruzione sono la rappresentazione L e la misura G-quasiinvariante ν (e non la compattezza locale).

Teorema di imprimitività (Mackey)

Sia G localmente compatto, $K \subseteq G$ un sottogruppo chiuso e $M = G/K$. Se V è una rappresentazione unitaria di G nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, $P : C_o(M) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è uno $*$-omomorfismo tale che $P(C_o(M)\mathcal{H}$ è denso in $\mathcal{H}$ e

$$V_g P(\psi) = P(\psi^g) V_g \qquad g \in G, \quad \psi \in C_o(M)$$

allora esiste una rappresentazione unitaria L di K in uno spazio di Hilbert (e una misura G-quasinvariante ν) tale che

$$(V, P, \mathcal{H}) \quad \sim \quad (V^L, P^L, \mathcal{H}^L)$$

Dimostrazione.

Per una dimostrazione particolarmente semplice ed elegante si veda [56].

Dato che la costruzione della rappresentazione indotta si può fare anche per gruppi non localmente compatti è naturale chiedersi se il teorema di imprimitività abbia una validità più generale. In quel che segue faremo un tentativo di dimostrazione nel caso più generale. Per semplicità porremo una restrizione sul quoziente $M = G/K$ e precisamente supporremo che M sia compatto mentre nessuna ipotesi simile sarà fatta su G o su K. Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ verrà supposto separabile. Supponiamo ora di avere una rappresentazione unitaria V di G in $\mathcal{H}$ e una $*$-rappresentazione P di $C_o(M) = C(M)$ per cui valga

$$V_g P(\psi) = P(\psi^g) V_g \qquad g \in G, \quad \psi \in C(M)$$

Vogliamo dimostrare l'esistenza di una rappresentazione L di K (e di una misura G-quasiinvariante su M) tali che

$$(V, P, \mathcal{H}) \quad \sim \quad (V^L, P^L, \mathcal{H}^L)$$

Come abbiamo già visto questo è equivalente alla costruzione di un fibrato hilbertiano G-ammissibile sullo spazio M.

1) Sia E un sottoinsieme chiuso di M. Allora $I_E := \{f \in C(M) : f(x) = 0 \text{ se } x \in E\}$ è un ideale chiuso di $C(M)$. Si dimostra (si veda [58]) che tutti gli ideali chiusi sono di questo tipo.

2) Sia $I \subseteq C(M)$ un ideale chiuso invariante per traslazioni. Supponiamo cioè che $\psi \in I$ implichi $\psi^g \in I$ (dove G agisce transitivamente). Allora $I = \{0\}$. Infatti per quanto detto sopra $I = I_E$ per un certo sottoinsieme chiuso

$E \subseteq M$. Sia $x \in M$ arbitrario. Data $\psi \in I_E$ scegliamo $y \in E, g \in G$ tali che $x = g^{-1}y$. Questo implica che $\psi(x) = \psi(g^{-1}y) = \psi^g(y) = 0$ in quanto $\psi^g \in I_E$. Dunque $\psi = 0$.

3) Se $V_g P(\psi) = P(\psi^g)V_g$ allora $Ker(P)$ è un ideale invariante per traslazioni e quindi è l'ideale nullo. Perciò P è un isomorfismo.

4) Due C^*-algebre commutative $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfe se e solo se i rispettivi spazi spettrali $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ sono omeomorfi (si veda [59] p.417). Quindi lo spazio spettrale dell'algebra $P(C(M))$ si può identificare con lo spazio spettrale di $C(M)$ cioè con M ([59], p.409).

5) Per i teoremi di decomposizione integrale ([53] p.233 e seguenti) abbiamo che esiste una misura m su M e un campo (fibrato) $\{\mathcal{H}_x\}$ di spazi di Hilbert su M tali che $\mathcal{H}$ si può identificare con

$$\int_M^{\oplus} \mathcal{H}_x dm(x)$$

e $P(\psi)$ con l'operatore $f(\cdot) \rightarrow \psi(\cdot)f(\cdot)$.

6) La misura m è G-quasiinvariante. Infatti se $E \subseteq M$ abbiamo che

$$0 = m(E) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = P(\chi_E) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = V_g P(\chi_E) V_g^{-1} = P(\chi_E^g) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P(\chi_{gE}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(gE) = 0$$

7) Definiamo $\mathcal{H}_x^{g^{-1}} := \mathcal{H}_{g^{-1}x}$ e $\mathcal{H}^{g^{-1}} := \int_M^{\oplus} \mathcal{H}_x^{g^{-1}} dm(x)$. Inoltre $T_{g^{-1}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{g^{-1}}$ sarà definito da

$$(T_{g^{-1}}f)(x) := \left(\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)\right)^{1/2} f(g^{-1}x)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|T_{g^{-1}}f\|_{\mathcal{H}^{g^{-1}}}^2 &= \int_M \|(T_{g^{-1}}f)(x)\|_{\mathcal{H}_x^{g^{-1}}}^2 dm(x) = \\
&= \int_M \left\| \left(\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)\right)^{1/2} f(g^{-1}x)\right\|_{\mathcal{H}_{g^{-1}x}}^2 dm(x) = \\
&= \int_M \|f(g^{-1}x)\|_{\mathcal{H}_{g^{-1}x}}^2 \frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x) dm(x) = \\
&= \int_M \|f(x)\|_{\mathcal{H}_x}^2 dm(x) = \|f\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

Quindi $T_{g^{-1}}$ è un'isometria. Se si definisce $T'_g : \mathcal{H}^{g^{-1}} \rightarrow \mathcal{H}$ tramite

$$(T'_g s)(x) := \left(\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)\right)^{-1/2} s(gx)$$

si vede che T'_g è un inverso di $T_{g^{-1}}$. Quest'ultimo risulta suriettivo e perciò unitario. Denoteremo con $P'(\psi)$ l'operatore

$$f(\cdot) \in \mathcal{H}^{g^{-1}} \rightarrow \psi(\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{H}^{g^{-1}}$$

Sia $h \in G$. Allora

$$\begin{aligned}
(T_{g^{-1}}P(\psi^h)f)(x) &= (T_{g^{-1}}(\psi(h^{-1}\cdot)f(\cdot))(x) = \\
&= \left(\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)\right)^{1/2} \psi(h^{-1}g^{-1}x)f(g^{-1}x) = \\
&= \psi((gh)^{-1}x)(T_{g^{-1}}f)(x) = \psi^{gh}(x)(T_{g^{-1}}f)(x) = \\
&= ((P'(\psi^{gh})T_{g^{-1}})f)(x)
\end{aligned}$$

cioè

$$T_{g^{-1}}P(\psi^h) = P'(\psi^{gh})T_{g^{-1}} \qquad \forall h \in G$$

Definiamo

$$A_h := T_{g^{-1}} V_h \qquad h \in G$$

Allora

$$A_h P(\psi) = T_{g^{-1}} V_h P(\psi) = T_{g^{-1}} P(\psi^h) V_h = P'(\psi^{gh}) T_{g^{-1}} V_h = P'(\psi^{gh}) A_h$$

Questo implica

$$A_{g^{-1}} P(\psi) = P'(\psi) A_{g^{-1}}$$

Un operatore unitario che soddisfa questa condizione è decomponibile (si veda [Dixmier] p.187). Questo significa che

$$A_{g^{-1}} = \int_M^{\oplus} A^x_{g^{-1}} dm(x)$$

dove gli

$$A^x_{g^{-1}} : \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_x^{g^{-1}} = \mathcal{H}_{g^{-1}x}$$

sono operatori unitari ([Dixmier] p.183). Quindi

$$A_{g^{-1}}{}^{-1} = \int_M^{\oplus} \left(A^x_{g^{-1}}\right)^{-1} dm(x)$$

dove

$$\left(A^x_{g^{-1}}\right)^{-1} : \mathcal{H}_x^{g^{-1}} = \mathcal{H}_{g^{-1}x} \to \mathcal{H}_x$$

Poniamo

$$gv := \left(A^x_{g^{-1}}\right)^{-1} v \qquad v \in \mathcal{H}_{g^{-1}x}$$

Il fibrato

$$\mathcal{H} = \int_M^{\oplus} \mathcal{H}_x dm(x)$$

diventa G-ammissibile e inoltre dato che $V_g = A^{-1}_{g^{-1}} T_{g^{-1}}$ otteniamo

$$(V_g f)(x) = \left(\frac{dm^{g^{-1}}}{dm}(x)\right)^{1/2} g f(g^{-1}x)$$

che è la forma canonica della rappresentazione indotta. Sebbene si sia sorvolato su molti dettagli questo tipo di " dimostrazione" mostra come si possa congetturare la validità del teorema di imprimitività anche per gruppi non localmente compatti.

3.6 Equivalenza e irriducibilità di sistemi di imprimitività: I

Sia G un gruppo topologico che agisce transitivamente su di uno spazio topologico X. Supponiamo che X abbia una misura G-quasi-invariante μ. Identifichiamo X con lo spazio dei laterali destri $K\backslash G$ dove K è il gruppo di isotropia di un punto fissato $x_0 \in X$. Date due rappresentazioni unitarie L, L' di K sullo spazio di Hilbert H, H', possiamo costruire le rappresentazioni indotte e i sistemi canonici di imprimitività (U^L, P^L, H^L), $(U^L, P^{L'}, H^{L'})$.

DEFINIZIONE (3.6.1). Nella notazione di cui sopra, definiamo gli insiemi degli operatori di intreccio:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}(L, L') = \{V \in \mathcal{B}(H, H') : L'_h V = V L_h \quad \forall h \in K\} \\ \mathcal{I} &= \mathcal{I}((U^L, P^L), (U^{L'}, P^{L'})) = \{V \in \mathcal{B}(H^L, H^{L'}) : U^{L'}_g V = V U^L_g \\ &\qquad \forall g \in G, \ P^{L'}_B V = V P^L_B \quad \forall B \in \text{Borel}(X)\} \end{aligned}$$

TEOREMA (3.6.1).
$\mathcal{I}_0$ e $\mathcal{I}$ sono isomorfi .

Dimostrazione.

A causa della Proposizione (3.3.1), H^L può essere identificato con lo spazio delle funzioni $f : G \to H$ tali che

i) $f(kg) = L_k f(g) \quad \forall k \in K, \forall g \in G$;

ii) $\int_X \|f(g)\|^2 \, d\mu(\dot{g}) < +\infty$

A causa di (ii) $\|f(g)\|^2$ può essere considerata come una funzione su X. Con $\dot{g}$ denotiamo la classe di equivalenza di g in $X = K\backslash G$. Ora sia $R \in \mathcal{I}(L, L')$. Definiamo

$$(\varphi(R)f)(g) := R(f(g)) \qquad \forall g \in G, \forall f \in H^L$$

$\varphi(R)$ è ovviamente lineare e

$$\varphi(R)f(kg) = R(f(kg)) = RL_k(f(g)) = L'_k R(f(g)) = L'_k((\varphi(R)f)(g))$$

$$\int_X \|(\varphi(R)f)(g)\|^2 \, d\mu(\dot{g}) = \int_X \|R(f(g))\|^2 \, d\mu(\dot{g}) \leq \|R\|^2 \int_X \|f(g)\|^2 \, d\mu(\dot{g}) < +\infty$$

Inoltre $\|\varphi(R)f\| \leq \|R\|\|f\|$ così $\|\varphi(R)\| \leq \|R\|$. Perciò $\varphi(R) \in \mathcal{B}(H^L, H^{L'})$.
Ora vogliamo mostrare che $\varphi(R) \in \mathcal{I}$, $\forall R \in \mathcal{I}_0$. Sia $c_{g_0}(g) = d\mu(\dot{g}g_0)\backslash d\mu(\dot{g})$ la derivata di Radon-Nykodim. Ricordiamo che se $f \in H^L$ allora $U^L_{g_0}$ è definita da

$$(U^L_{g_0} f)(g) = (c_{g_0}(g))^{1/2} f(gg_0)$$

Ora

$$\begin{aligned}(U^{L'}_{g_0}\varphi(R)f)(g) &= (c_{g_0}(g))^{1/2}(\varphi(R)f)(gg_0) = (c_{g_0}(g))^{1/2} R(f(gg_0)) = \\ &= R(c_{g_0}(g))^{1/2} f(gg_0) = R(U^L_{g_0}f)(g) = (\varphi(R)U^L_{g_0}f)(g) \quad \forall g_0 \in G\end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned}(P^{L'}_B \varphi(R)f)(g) &= \mathcal{X}_B(\dot{g})(\varphi(R)f)(g) = \mathcal{X}_B(\dot{g})R(f(g)) = R(\mathcal{X}_B(\dot{g})f(g)) = \\ &= R(P^L_B f)(g) = (\varphi(R)P^L_B f)(g) \qquad \forall B \in \text{Borel }(X)\end{aligned}$$

Così φ porta $\mathcal{I}_0$ in $\mathcal{I}$.
Dobbiamo mostrare che φ è iniettiva e suriettiva.
Supponiamo che $\varphi(R) = \varphi(V)$ allora:

$$\begin{aligned}\varphi(R)f &= \varphi(V)f && \forall f \in H^L \\ (\varphi(R)f)(g) &= (\varphi(V)f)(g) && \forall f \in H^L, \forall g \in G \\ R(f(g)) &= V(f(g)) && \forall f \in H^L, \forall g \in G\end{aligned}$$

l'iniettività è una conseguenza del seguente

LEMMA (3.6.1).
Dato $x \in H$ esiste $f \in H^L$, $g \in G$ tale che f è continua e e $f(g) = x$.

Dimostrazione .
Si veda [50]

Suriettività
Per dimostrare la suriettività di φ usiamo l'identificazione di $H^L, H^{L'}$, con $\mathcal{L}^2(X, d\mu, G \times_L H)$, $\mathcal{L}^2(X, d\mu, G \times_L H)$ rispettivamente [si veda la sezione (3.2)]. Definiamo $E := G \times_L H$, $E' : G \times_{L'} H'$. Localmente il fibrato $E \xrightarrow{\pi} X$ è omeomorfo $U \times H$ perciò localmente possiamo identificare H^L to $\mathcal{L}^2(U, d\mu, H) \cong \mathcal{L}^2(U, d\mu) \otimes H$. Ovviamente lo stesso vale per $H'^{L'}$.
Supponiamo ora che $V \in \mathcal{I}$. Vogliamo trovare $R \in \mathcal{I}(L, L')$ tale che $\varphi(R) = V$. Prima di tutto osserviamo che se $U \subset X$ è un qualsiasi insieme di Borel allora

$$\begin{aligned}V(\mathcal{L}^2(U, d\mu; H)) &= VP^L_U \mathcal{L}^2(X, d\mu, E) = P^{L'}_U V \mathcal{L}^2(X, d\mu, E) = P^{L'}_U \mathcal{L}^2(X, d\mu, E') = \\ &= \mathcal{L}^2(U, d\mu, H')\end{aligned}$$

Perciò localmente

$$V : \mathcal{L}^2(U, \mathrm{d}\mu) \otimes H \to \mathcal{L}^2(U, \mathrm{d}\mu) \otimes H'$$

Supponiamo ora di poter trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ tale che

$$U \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(U) < +\infty \quad \text{(la misura } \mu \text{ (è localmente finita)}$$

Questo implica $\chi_U \in \mathcal{L}^2(U, \mathrm{d}\mu)$.
Perciò $\forall h \in H$ abbiamo $(\mathcal{X}_U \otimes h) \in \mathcal{L}^2(U, \mathrm{d}\mu) \otimes H$. Si definisca $F_u := V(\mathcal{X}_U \otimes h)$. Vogliamo mostrare che F_U è costante. Prima di tutto notiamo che se U_0 è un qualsiasi insieme misurabile allora

$$P^{L'}_{U_0} F_U = P^{L'}_{U_0} V(\mathcal{X}_U \otimes h) = V P^{L}_{U_0}(\mathcal{X}_U \otimes h) = V(\mathcal{X}_{U_0 \cap U} \otimes h) = F_{U_0 \cap U}$$

Perciò se $x \in U \cap U_0$ otteniamo

$$F_U(x) = (P^{L'}_{U_0} F_U)(x) = F_{U \cap U_0}(x) = (P^{L'}_{U} F_{U_0})(x) = F_{U_0}(x)$$

Sia ora $g \in G$ e sia $X_0 = U \cup Ug^{-1}$. Inoltre sia $x \in U$ e $y = xg$. Otteniamo

$$\begin{aligned} c_g(x)^{1/2} F_U(y) &= c_g(x) F_U(xg) = (U^{L'}_g F)(x) = (U^{L'}_g V(\mathcal{X}_U \otimes h))(x) = \\ &= (U^{L'}_g V P^{L}_{U}(\mathcal{X}_{X_0} \otimes h))(x) = (V U^{L}_g P^{L}_{U}(1_{X_0} \otimes h)) = (x) = \\ &= (V P^{L}_{Ug^{-1}}(c_g(\cdot)^{1/2}(1_{X_0} \otimes h)))(x) = c_g(x)^{1/2}(V(1_{Ug^{-1}} \otimes h))(x) = \\ &= c_g(x)^{1/2} F_{Ug^{-1}}(x) \end{aligned}$$

Poichè $c_g(x) \neq 0$ otteniamo

$$F_U(xg) = F_{Ug^{-1}}(x) \qquad \forall x \in X,\ \forall g \in G \tag{$*$}$$

Fissiamo ora arbitrariamente $x, y \in V$. Allora esiste $g \in G$ tale che $y = xg$.
Perciò applicando $(*)$ otteniamo

$$F_U(y) = F_U(xg) = F_{Ug^{-1}}(x) = F_{Ug^{-1}}(x) = F_U(x) \qquad \forall x, y \in U$$

cioè F_U è costante. Questo implica che abbiamo un'applicazione $R_U : H \to H'$ tale che

$$V(\mathcal{X}_U \otimes h) = F_U = \mathcal{X}_U \otimes h' = \mathcal{X}_U \otimes R_U(h)$$

Inoltre R_U è lineare (poichè V è lineare) e limitata perchè

$$||R_U(h)||||\mathcal{X}_U|| = ||\mathcal{X}_U \otimes R_U(h)|| = ||V(\mathcal{X}_U \otimes h)|| \leq ||V||\mathcal{X}_U \otimes h|| = ||V||||\mathcal{X}_U||||h||$$

Così che $||R_U|| \leq ||V||$.

Osservazione.
R intreccia L_k, L'_k poichè V intreccia (U^L, P^L), $(U^{L'}, P^{L'})$.
Poichè V intreccia i proiettori $P^{L'}_U$, P^{L}_U abbiamo che $VM_f - M'_f V$ dove M_f è la moltiplicazione per una funzione $f \in \mathcal{L}^\infty(U, \mathrm{d}\mu)$.
Perciò se $f \in \mathcal{L}^\infty(U, \mathrm{d}\mu)$

$$V(f \otimes h) = VM_f(\chi_U \otimes h) = M'_f V(\chi_U \otimes h) = M'_f(\chi_U \otimes R_U h) = f \otimes R_U h$$

Inoltre

$$\varphi(R_U)(f \otimes h) = f \otimes R_U h = V(f \otimes h)$$

Poichè l'uguaglianza $\varphi(R_U) = V$ vale su un sottoinsieme denso $\mathcal{L}^\infty(U, \mathrm{d}\mu, H)$ vale sull'intero spazio $\mathcal{L}^2(U, \mathrm{d}\mu, H)$.

Ora se $x \in U \cap U_0$ allora

$$(\chi_U \otimes R_U(h))(x) = F_U(x) = F_{U \cap U_0}(x) = F_{U_0}(x) = (X_{U_0} \otimes R_{U_0}(h))(x)$$

Così che $R_U(h) = R_{U_0}(h)$. Perciò la seguente definizione è ben posta

$$R(h) := R_U(h) \qquad R : H \to H'$$

Possiamo scrivere

$$V = \varphi(R_U) = \varphi(R)$$

e la suriettività è dimostrata.

3.7 Equivalenza e irriducibilità di sistemi di imprimitività: II

Ricordiamo il nostro problema. Supponiamo di aver due rappresentazioni indotte U^L, $U^{L'}$ con le associate m.v.p. canoniche P^L, $P^{L'}$. Vogliamo mostrare che lo spazio vettoriale degli operatori di intreccio di (L, L') denotato con $\mathcal{I}_0$ è isomorfo a a quello di $((U^L, P^L), (U^{L'}, P^{L'}))$, denotato con $\mathcal{I}$.
Se $f \in H^L(\cong \mathcal{L}^2(X, \mathrm{d}\mu; H))$ e R intreccia L e L' abbiamo mostrato, nella sezione(3.6), che $\varphi(R) : H^L \to H^{L'}$ (definita da $(\varphi(R)f)(g) = R(f(g))$, intreccia $((U^L, P^L), (U^{L'}, P^{L'}))$. Vogliamo mostrare che la funzione φ è suriettiva. Così sia V contenuto in $\mathcal{I}$. Vogliamo trovare $R \in \mathcal{I}$ tale che $\varphi(R) = V$. Se $f \in H^L$ e $A \subset$ Borel (X), allora

$$\int_A \|(Vf)(x)\|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = \|(P_A^L Vf)\|^2 = \|VP_A^{L'} f\|^2 \leq \|V\|^2 \|P_A^{L'} f\|^2 \leq$$
$$\leq \|V\|^2 \int_A \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Poichè l'uguaglianza

$$\int_A \|(Vf)(x)\|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \|V\|^2 \int_A \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}\mu(x)$$

vale per ogni insieme boreliano $A \subset X$ otteniamo

$$\|(Vf)(x)\| \leq \|V\| \cdot \|f(x)\| \quad , \quad \mu - \forall x \in X \quad , \quad \forall f \in H^L$$

A questo punto abbiamo bisogno di un lemma tecnico.

LEMMA (3.7.1). Esiste una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenuta in $\mathcal{L}^2(X, \mathrm{d}\mu; H)$ tale che

$$\mu(\{x : \overline{\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}} = H\}) > 0$$

Dimostrazione. Poichè H è separabile allora esiste una successione di vettori h_n tale che $\overline{\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = H_-$. Scegliamo ora $A \in$ Borel(x) tale che $0 < \mu(A) < +\infty$. Si definisca $f_n : X \to H$ tramite $f_n(x) := \chi_A(x)h_n$. Ovviamente $f_n \in \mathcal{L}^2(X, \mathrm{d}\mu; H)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$\forall x \in A \qquad f_n(x) = \mathcal{X}_A(x)h_n = h_n$$
$$\forall x \notin A \qquad f_n(x) = 0$$

Questo implica che

$$\mu(\{x : \overline{\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}} = H\}) = \mu(A) > 0$$

Così abbiamo finito la dimostrazione del lemma.
Si definisca per $f \in H^L$

$$B_f := \{x : \|(Vf)(x)\| > \|V\|\|f(x)\|\}$$

Sappiamo che $\mu(B_f) = 0$ $\forall f \in H^L$. Questo implica che per qualsiasi successione di funzioni f_n otteniamo $\mu(B) = 0$ dove $B := \bigcup_n B_{f_n}$.

Supponiamo ora che f_n sia una successione in H^L che verifica le ipotesi del Lemma (3.7.1). Si ha che $\mu(A-B)=0$ dove

$$(A-B)=\{x:\|(Vf_n)(x)\|\le\|V\|\|f_n(x)\|\ \forall_n\quad;\quad \text{and } \overline{\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}}=H\}$$

Questo significa che, comunque scegliamo il rappresentante per la successione f_n, possiamo trovare $x_0\in X$ tale che

i) $\|(Vf_n)(x_0)\|\le\|V\|\|f_n(x_0)\|\ \forall n$;

ii) $\overline{\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}}=H$.

Questo implica che esiste una trasformazione lineare continua $R:H\to H'$ tale che

$$(Vf_n)(x_0)=R(f_n(x_0))$$

Ora vogliamo mostrare che R intreccia le rappresentazioni L e L'. Prima di tutto ricordiamo che possiamo considerare le funzioni di H^L come funzioni K-covarianti sul gruppo G.
A questo scopo sia $g_0\in G$ nel laterale di $x_0\in G/K$. Inoltre sia $(\rho_{g_1}(g_2))^{1/2}$ il fattore di normalizzazione. Allora

$$\begin{aligned}(Vf_n)(g)&=(Vf_n)(g_0g_0^{-1}g)=\left(\rho_{g_0^{-1}g}(g_0)\right)^{-1/2}(U^{L'}_{g_0^{-1}g}Vf_n)(g_0)=\\&=(\rho_{g_0^{-1}g}(g_0))^{-1/2}(VU^L_{g_0^{-1}g}f_n)(g_0)=(\rho_{g_0^{-1}g}(g_0))^{-1/2}(RU^L_{g_0^{-1}g}f_n)(g_0)=\\&=R(f_n(g))\qquad\forall g\in G\quad\forall n\end{aligned}\tag{$*$}$$

Perciò

$$L'_kR(f_n(g_0))=L'_k(Vf_n)(g_0)=(Vf_n)(kg_0)=R(f_n(k_{g_0}))=RL_k(f_n(g_0))\quad\forall n$$

Poichè $\{f_n(g_0)\}$ è denso in H, questo implica che:

$$L'_kR=RL_k$$

Dall'uguaglianza $(*)$ segue che $\varphi(R)=V$ e questo conclude la dimostrazione.

3.8 Equivalenza e irriducibilità di sistemi di imprimitività: III

In questa sezione ci restringiamo al caso $L=L'$. Per dimostrare la suriettività di φ usiamo l'identificazione di H^L con $\mathcal{L}^2(X,\,d\mu;E)$ dove E è il fibrato della sezione (3.1). Localmente abbiamo che il fibrato $E\xrightarrow{\pi}X$ è omeomorfo a $U\times H$ perciò localmente possiamo identificare H^L a $\mathcal{L}^2(U,\,d\mu;H)=\mathcal{L}^2(U,\,d\mu)\otimes H$. Supponiamo ora $V\in\mathcal{I}$. Vogliamo trovare $R\in R(L,L)$ tale che $\varphi(R)=V$. Prima di tutto osserviamo che se $U\subseteq X$ è un qualsiasi insieme boreliano allora

$$\begin{aligned}V(\mathcal{L}^2(U,\,d\mu;H))=VP^L_U(\mathcal{L}^2(s,\,d\mu;E))=P^L_UV(\mathcal{L}^2(s,\,d\mu;E))\subset\\ \subset P^L_U(\mathcal{L}^2(s,\,d\mu;E))=\mathcal{L}^2(U,\,d\mu;H)\ .\end{aligned}$$

Perciò

$$V\in\mathcal{B}(\mathcal{L}^2(U,\,d\mu;H))\cong\mathcal{B}(\mathcal{L}^2(U,\,d\mu))\otimes\mathcal{B}(H)\ .$$

Supponiamo che $B\subset U$, B sia un qualsiasi insieme di Borel. L'operatore P^L_B ha la forma $\mathcal{K}_B\otimes Id_H$. Poichè $V\in\mathcal{I}$ allora V commuta con P^L_B $\forall B\subseteq U$. Perciò

$$V\in(\mathcal{L}^\infty(U,\,d\mu)\otimes I_H)'\cong(\mathcal{L}^\infty(U,\,d\mu))'\otimes(I_H)'\cong L^\infty(U,\,d\mu)\otimes\mathcal{B}(H)\cong L^\infty(U,\,d\mu,\mathcal{B}(H))$$

(abbiamo usato il Teorema 1.22.13 di [46] (p. 68) e il fatto che $(A\otimes B)'\cong A'\otimes B')$). Questo significa che esiste una funzione $R_U:U\to\mathcal{B}(H)$ tale che se $\operatorname{supp}(f)\subseteq U$ allora

$$(Vf)(x)=R_U(x)f(x)\ .$$

Supponiamo ora che $\tilde U$ sia un'altra carta e che $\operatorname{supp}(f)\subseteq(\tilde U\cap U)$. Si ha

$$R_U(x)f(x)=(Vf)(x)=R_{\tilde U}(x)f(x)\ .$$

Poichè f e x sono arbitrari

$$R_{\tilde{U}} = R_U \quad \text{on} \quad \tilde{U} \cap U \ .$$

Sia ora $\mathcal{P}$ un ricoprimento aperto di X e si definisca per ogni $x \in X$

$$R(x) = R_U(x)$$

dove $U \in \mathcal{P}$ è una carta contenente x. A causa di (*), $R(x)$ non dipende da U e la funzione $R : X \to \mathcal{B}(H)$ è ben definita e non dipende dalla scelta del ricoprimento $\mathcal{P}$. Per costruzione

$$(Vf)(x) = R(x)(f(x)) \ .$$

Ora ci spostiamo al punto di vista delle funzioni K-covarianti.
Abbiamo che $\forall g, g' \in G$, $\forall f \in H^L$

$$\begin{aligned} R(g')f(g') &= (Vf)(g') = (U_g^L V U_{g^{-1}}^L f)(g') = (V U_{g^{-1}} f)(g'g) = \\ &= R(g'g)(U_{g^{-1}}^L f)(g'g) = R(g'g)b(g') \ . \end{aligned}$$

Perciò

$$R(g'g) = R(g) \qquad \forall g, g' \in G$$

cioè

$$R(g) = R = \text{constante}$$

si ottiene

$$(Vf)(g) = R(b(g)) \ .$$

Questo implica $V = \varphi(R)$ se siamo capaci di mostrare che R intreccia L_k $\forall k \in K$. Infatti questo è vero poichè

$$L_k R(f(g)) = L_k(Vf)(g) = (Vf)(kg) = Rf(kg) = RL_k(f(g)) \quad \forall f \in H^L, \quad \forall g \in G \ .$$

CAPITOLO

4

Rappresentazioni indotte di gruppi di cammini e trasporti paralleli

4.1 Fibrati

Sia $\mathcal{F}$ una categoria i cui oggetti sono spazi topologici.

DEFINIZIONE(4.1.1). Un **fibrato** su M con fibra $F \in Obj(\mathcal{F})$ è una quadrupla $(Y, p, M, \{U, e_U\}_{U \in \mathcal{A}}\}$ tale che:

i) M e Y sono spazi topologici;
ii) $p : Y \to M$ è continua e suriettiva;
iii) per ogni $U \in \mathcal{A}$, $x \in M$, $F_x := p^{-1}(x) \in \mathcal{F}$ (F_x è detta la *fibra su* x).
iv) $\{U\}_{U \in \mathcal{A}}$ è un ricoprimento aperto su M;
v) $e_U(\cdot, \cdot) : U \times F \to p^{-1}(U)$ è un omeomorfismo;
vi) $e_U(x, \cdot) : F \to F_x$ è un isomorfismo e $U \in \mathcal{A}$ $x \in U$.

La famiglia $\{(U, e_U)\}_{U \in \mathcal{A}}$ è detta una **banalizzazione locale** del fibrato.

DEFINIZIONE(4.1.2) Usando la notazione di cui sopra diciamo che una *sezione* di un fibrato è una funzione $f : M \to Y$ tale che $p(f(x)) = x$, per ogni $x \in M$. Denotiamo con $S(M, Y)$ l'insieme di tutte le sezioni.
Denotiamo con $\mathcal{G}$ la σ-algebra dei boreliani su M. Allora $(M, \mathcal{G})$ è uno spazio misurabile. Diremo che una sezione f è *misurabile* se e solo se $f^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ per ogni insieme aperto $A \subseteq Y$. L'insieme di tutte le sezioni misurabili $f : M \to Y$ sarà denotato con $\mathcal{M}(M, Y)$.

4.2 Rappresentazioni di gruppoidi e trasporti paralleli

Sia $G = (M, \Omega)$ un gruppoide.

DEFINIZIONE(4.2.1). Una *rappresentazione* di G è un funtore covariante U da G ad un'altra categoria $\mathcal{C}$. Se gli oggetti della categoria $\mathcal{C}$ sono spazi vettoriali e gli isomorfismi di $\mathcal{C}$ sono gli isomorfismi lineari tra tali spazi la rappresentazione si dice *lineare*. Se gli oggetti della categoria sono spazi di Hilbert (reali o complessi) e gli isomorfismi sono operatori unitari la rappresentazione è detta *unitaria*. Se $\mathcal{C}$ agisce su un insieme M, allora ogni rappresentazione di G su $\mathcal{C}$ dà un'azione di G su M.

DEFINIZIONE(4.2.2). Se $G = (M, \Gamma)$ è un gruppoide transitivo tutti i gruppi $U(\mathrm{Loop}_G(x))$ $(x \in M)$ sono isomorfi ad un unico gruppo indipendente da $x \in M$ (cf. Lemma (2.2). L'immagine di questo gruppo tramite la rappresentazione è il **gruppo di olonomia** della rappresentazione U. Questo gruppo viene indicato con Hol (U).

Dato un fibrato (Z, p, M, β) con fibra $F \in \mathcal{F}$ consideriamo il gruppoide $\mathcal{C}$ definito come segue:

- Obj $(\mathcal{C}) = \{F_x : x \in M\}$ = le fibre di$Z$.
- Iso $(F_x, F_y) = \{T_{x,y} : (U, e_v), (V, e_V) \in \beta\}$ dove $T_{x,y}^{V,V} := e_V(y, \cdot) e_U(x, \cdot)^{-1} : F_x \to F_y$.

DEFINIZIONE(4.2.3). Sia G un gruppoide di curve su M. Un trasporto parallelo lungo le curve di G è una rappresentazione di G.

4.3 Rappresentazioni indotte di gruppoidi di curve

Sia M uno spazio topologico. Sia Homeo (M) il gruppo degli omeomorfismi di M. Una *topologia ammissibile* su su Homeo (M) è una topologia tale che

- Homeo (M) è un gruppo topologico;
- la funzione $(h, x) \mapsto hx$ che va da Homeo $(M) \times M$ a M è continua.

Supporremo che Homeo(M) (o un suo fissato sottogruppo) sia sempre dotato di una topologia ammissibile. Esempi di tali topologie sono stati dati nella sezione (1.5).

Data una curva parametrizzata $\gamma : [a, b] \to$ Homeo(M) definiamo

- $\tilde{\gamma} : [a, b] \to$ Homeo (M) tramite la seguente uguaglianza

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t)\gamma(b)^{-1} = \gamma(t)\varphi(\gamma)^{-1}$$

- $I_\gamma := \gamma(a)\gamma(b)^{-1} = i(\gamma)\varphi(\gamma)^{-1}$ cioè, $\tilde{\gamma}$ si ottiene traslando γ in modo da farla terminare all'identità di Homeo (M) .I_γ è il punto di partenza di $\tilde{\gamma}$.
- $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)} : [a, b] \to M \quad , \quad \tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}(t) := \tilde{\gamma}(t)x$.

Perciò $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ è una curva su M che parte da $I_\gamma(x)$ al tempo a e arriva a x al tempo b. Questa curva è una *proiezione* su M della curva $\tilde{\gamma}$ su Homeo (M).

Per un sottogruppo L di Homeo (M) definiamo

$$\Gamma_L := \{\gamma : [a, b] \to L : \gamma \text{ è continua e } \tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)} \in \Gamma \text{ per ogni } x \in M\}$$

Cioè , Γ_L è la famiglia di curve continue su $L \subseteq$ Homeo (M) che si proiettano, nel senso descritto sopra, su curve di Γ (su M).

Osservazione . Non viene richiesto che la curva γ sia nella componente connessa dell'identità in Homeo (M). Questo però vale per la curva $\tilde{\gamma}$. Altre scelte sarebbero state possibili, per esempio $(\gamma(b)^{-1}\gamma(t)$, $\gamma(t)\gamma(a)^{-1}$, $\gamma(a)^{-1}\gamma(t)$.

PROPOSIZIONE(4.3.1).Sia $\gamma, \delta \in \Gamma_L$. Se γ è $\mathcal{F}$–equivalente a δ in Γ_L, allora $I_\gamma = I_\delta$ e $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ è $\mathcal{F}$–equivalente a $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ in Γ.

Dimostrazione. Siano $\gamma : [a, b] \to L$, $\delta : [a'b'] \to L$ le due curve parametrizzate. Poichè sono equivalenti deve esistere $T : [a', b'] \to [a, b]$, $T \in R_{[a',b'],[a,b]}$ tale che $\gamma \circ T = \delta$. Perciò

$$i(\gamma) = i(\delta) \quad , \quad \varphi(\gamma) = \varphi(\gamma) \quad , \quad I_\gamma = i(\gamma)\varphi(\gamma)^{-1} = i(\delta)\varphi(\delta)^{-1} = I_\delta$$

Inoltre $\forall t \in [a', b']$, $\forall u \in M$

$$\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}(T(t)) = \tilde{\gamma}(T(t))x = (\widetilde{\gamma \cdot T})x = \tilde{\delta}(t)x = \tilde{\delta}^x_{I_\gamma(x)}(t)$$

cioè $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ è equivalente a $\tilde{\delta}^x_{I_\gamma(x)}$.

Se $\Gamma_L \neq \emptyset$ la Proposizione di cui sopra ci permette di definire il gruppoide

$$G_L = (L, \Gamma_L, \mathcal{F})$$

delle curve su $L \subseteq$ Homeo (M).

In quel che segue saremo interessati principalmente al caso in cui M è una varietà e $L =$ Diff (M).

PROPOSIZIONE(4.3.2). Se $\gamma : [a, b] \to L$ e $\delta : [b, c] \to L$ allora,nella notazione di cui sopra

- $I_\gamma \cdot I_\delta = I_{\delta \cdot \gamma}$
- $\tilde{\gamma}^x_{I_\delta(x)} \cdot \tilde{\delta}^{I_\gamma(x)}_{I_\gamma(I_\delta(x))} = (\widetilde{\delta \cdot \gamma})^x_{I_{\delta \cdot \gamma}(x)}$

Dimostrazione.

$$I_\gamma \cdot I_\delta = i(\gamma)\varphi(\gamma)^{-1} i(\delta)\varphi(\delta)^{-1} = i(\gamma)\varphi(\delta)^{-1} = i(\delta \cdot \gamma)\varphi(\delta \cdot \gamma)^{-1} = I_{\delta \cdot \gamma}$$

Supponiamo ora $t \in [a, b]$. Allora

$$\tilde{\gamma}^x_{I_\delta(x)} \tilde{\delta}^{I_\delta(x)}_{I_\gamma(I_\delta(x))}(t) = \tilde{\gamma}^{I_\delta(x)}_{I_\gamma(I_\delta(x))}(t) = \tilde{\gamma}(t) I_\delta(x) = \gamma(t)\varphi(\gamma)^{-1} i(\delta)\varphi(\delta)^{-1} x =$$
$$= \gamma(t)\varphi(\delta)^{-1} x = (\delta \cdot \gamma)(t)\varphi(\delta \circ \gamma)^{-1} x = (\widetilde{\delta \cdot \gamma})^x_{I_{\delta \cdot \gamma}(x)}(t)$$

Un calcolo simile vale se $t \in [b, c]$.

DEFINIZIONE(4.3.1). Dato un gruppoide $G = (M, \Gamma, \mathcal{F})$ e un sottogruppo $L \subset$ Homeo (M) diciamo che $(I, \sim)$ è una **coppia inducente** se valgono le seguenti proprietà:

1) $I : \Gamma_L \to L$ è una funzione tale che $I_\gamma I_\delta = I_{\delta \cdot \gamma}$ quando $\delta \circ \gamma$ è definito.

2) $\sim : (\gamma, x) \in \Gamma_L \times M \to \tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)} \in G$ è una funzione tale che $\sim (\gamma, x) := \tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ è una curva da $I_\gamma(x)$ a x.

3) $\tilde{\gamma}^x_{I_\delta(x)} \tilde{\gamma}^{I_\delta(x)}_{I_\gamma(I_\delta(x))} = (\widetilde{\delta \circ \gamma})^x_{I_{\delta\circ\gamma}(x)}$.

DEFINIZIONE(4.3.2). Dato un gruppoide topologico G e una azione (sinistra) $(\alpha, x) \in G \times M \to \alpha x \in M$ di G su M, **un cociclo** sinistro per questa azione è una funzione continua $c : G \times M \to G'$, da $G \times M$ a un gruppoide G' tale che $\forall \alpha, \beta \in G$, i quali possano essere moltiplicati e per ogni $x \in M$

$$c(\alpha\beta, x) = c(\alpha, \beta x) c(\beta, x)$$

Se c soddisfa

$$c(\alpha, \beta x) = c(\alpha, x) c(\beta, \alpha x)$$

allora parliamo di cociclo destro.

Osservazione . Se $G' = \mathbf{R}$ e $c(\cdot, \cdot)$ è un cociclo la funzione $|c(\cdot, \cdot)|^{1/2}$ è anch'essa un cociclo.

Osservazione . Un cociclo a valori in $\mathbf{C}$ o in $\mathbf{R}$ sarà anche detto un cociclo scalare. Esempi standard di cocicli scalari sono dati dalle derivate di Radon-Nikodym rispetto all'azione di gruppi che ammettono una misura quasiinvariante (cf. Sezione (1.4)).

Supponiamo ora che

i) $(I, \sim)$ sia una coppia inducente per $G = (M, \Gamma, \mathcal{F})$ e $L \subset$ Homeo (M);

ii) $c(\cdot, \cdot)$ sia un cociclo a valori in $\mathbf{R}$;

iii) (Y, p, M) sia un fibrato;

iv) U un trasporto parallelo lungo le curve di G.

TEOREMA(4.3.1). Sia $f \in S(M, Z)$ e $\gamma, \delta \in G_L$. Se definiamo

$$(V_\gamma f)(x) := c(I_\gamma, x)(U_\gamma f)(x) := c(I_\gamma, x)U_{\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}} f(I_\gamma(x))$$

allora V_γ porta $S(M, Z)$ in se stesso cioè sezioni in sezioni e

$$V_\delta \circ V_\gamma = V_{\delta \circ \gamma}$$

Dimostrazione. Il fatto che $(V_\gamma f)$ è una sezione segue dalla definizione di trasporto parallelo. Inoltre

$$\begin{aligned}
(V_\delta(V_\gamma f))(x) &= c(I_\delta, x)U_{\tilde{\delta}^x_{I_\delta(x)}}(V_\gamma f)(I_\delta(x)) = \\
&= c(I_\delta, x)U_{\tilde{\delta}^x_{I_\delta(x)}} c(I_\gamma, I_\delta x)U_{\tilde{\gamma}^{I^x_\delta}_{I_\gamma(I_\delta(x))}} f(I_\gamma(I_\gamma(x)) \\
&= c(I_\gamma, I_\delta x)c(I_\delta, x)U_{\tilde{\gamma}^x_{I_\delta(x)}} \tilde{\gamma}^{I_\delta(x)}_{I_\gamma(I_\delta(x))} f(I_{\delta\circ\gamma}(x)) = \\
&= c(I_{\delta\circ\gamma, x})U_{(\widetilde{\delta\circ\gamma})^x_{I_{\delta\circ\gamma}(x)}} f(I_{\delta\circ\gamma}(r)) = (V_{\delta\circ\gamma} f)(x)
\end{aligned}$$

Osservazione . Si noti che non si richiede che $Y \xrightarrow{p} M$ sia un fibrato vettoriale.

4.4 Fibrati hilbertiani e rappresentazioni indotte unitarie

Sia M una varietà differenziale. Una **curva parametrizzata liscia** è una funzione C^∞ $\gamma : [a, b] \to M$. Una curva parametrizzata è **liscia a tratti** se $[a, b]$ è decomponibile in un numero finito di intervalli contigui tali in ogni intervallo la curva sia liscia. Ovviamente possiamo parlare di **riparametrizzazioni che siano lisce a tratti**. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte queste riparametrizzazioni. Denoteremo con

$$\Gamma(M) = \{ \quad \text{l'insieme di tutte le curve parametrizzate lisce a tratti}(\gamma, [a, b]) \text{ in } M\}$$

e con

$$G(M) = (M, \Gamma(M),\ \mathcal{F})$$

il gruppoide delle classi di equivalenza (per le riparametrizzazioni lisce a tratti) delle curve lisce a tratti di M con la legge di composizione definita da $(*)$.
Sia Diff (M) il gruppo dei diffeomorfismi di M su cui sia data una topologia ammissibile. Sia $\gamma : [a, b] \to$ Diff (M) una curva parametrizzata. Definiamo $\tilde{\gamma}$, I_γ and $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ come nella precedente sezione.

DEFINIZIONE(4.4.1). Nella notazione di cui sopra γ è detta liscia a tratti in Diff (M) if $\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}$ è liscia a tratti per ogni $x \in M$. Useremo la notazione:

$$\Gamma(\text{Diff }(M)) = \{\gamma : \gamma \text{ è liscia a tratti in Diff }(M)\}$$

Osservazione. Se $\gamma \in \Gamma(\text{Diff }(M))$ e γ è $\mathcal{F}$-equivalente a δ allora $\delta \in \Gamma(Diff(M))$. Infatti una riparametrizzazione liscia a tratti di una curva liscia a tratti è liscia a tratti.
Considerando classi di equivalenza (sempre tramite riparametrizzazioni lisce a tratti) di curve lisce a tratti su Diff (M), otteniamo il gruppoide la cui legge di composizione è ancora data da $(*)$.

$$G(\text{Diff }(M)) := (\text{Diff }(M),\ \Gamma(\text{Diff }(M)),\ \mathcal{F})$$

Ovviamente $(I, \sim)$ è una coppia inducente per $G(M)$ e Diff (M).

Supponiamo ora che M sia orientabile. Sia ω un fissato elemento di volume e denotiamo con $\mu = \mu_\omega$ la misura di Borel associata su M e $c(\cdot, \cdot) = c_\omega(\cdot, \cdot)$ il cociclo associato con ω (si veda la sezione (1.4)). Sia $H \xrightarrow{p} M$ un fibrato hilbertiano con fibra H_0 e U un trasporto parallelo lungo le curva di $G(M)$.

Poniamo

$$\mathcal{H} = L^2(M, \mu, H) = \{f \in \mathcal{M}(M, H) : \int_M \|f(x)\|^2 \, d\mu(x) < +\infty\}$$

TEOREMA(4.4.1). Definendo $\forall f, g \in \mathcal{H}$

$$\langle f, g \rangle = \int_M \langle f(x), g(x) \rangle_{H_x} \, d\mu(x)$$

otteniamo che $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Si veda [49].

TEOREMA(4.4.2). Se definiamo

$$(V_\gamma f)(x) = |c(I_\gamma, x)|^{1/2} U_{\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}} f(I_\gamma(x))$$

allora V è una rappresentazione unitaria di $G(\mathrm{Diff}\,(M))$ su $\mathcal{H} = L^2(M, \mu, H)$.

Dimostrazione. V_γ è lineare poichè U è lineare. Inoltre abbiamo che V_γ è una isometria. Infatti

$$\int_M \|(V_\gamma f)(x)\|^2 d\mu(x) = \int_M |c(I_\gamma, x)| \cdot \|U_{\tilde{\gamma}^x_{I_\gamma(x)}} f(I_\gamma(x)\|^2 d\mu(x) =$$
$$= \int_M (c(I_\gamma, x)| \, \|f(I_\gamma(x))\|^2 d\mu(x) = \int_M \|f(x)\|^2 d\mu(x)$$

Poichè V_γ è lineare e conserva le norme, per l'identità di polarizzazione fa la stessa cosa con i prodotti scalari.
Inoltre

$$f = V_{\gamma\gamma^{-1}} f = V_\gamma(V_{\gamma^{-1}} f)$$

perciò V_γ è suriettiva.
Questo implica che V_γ è un operatore unitario. A questo punto la tesi segue dal Teorema (4.3.1).

DEFINIZIONE. La rappresentazione V_γ, definita da (*), è detta la **rappresentazione indotta** del gruppoide $G(\mathrm{Diff}(M))$ con coppia inducente (U, I) e cociclo c.

4.5 Il fibrato banale $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ e le relazioni di Weyl

In questa sezione dimostreremo che quando la nostra costruzione viene applicata al fibrato banale $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$, si ottiene la rappresentazione di Schrödinger delle relazioni di commutazione di Heisenberg nella forma di Weyl.
Consideriamo il fibrato banale $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ con un dato trasporto parallelo U.

LEMMA(4.5.1). Hol(U) è banale.

Dimostrazione. È ovvia perchè il gruppo dei lacci $L(\mathbf{R})$ è banale.
La banalità di Hol (U),implica che per ogni curva $\gamma_{x,y}$ si ha $U_{\gamma_{x,y}} = U_{x,y}$. Cioè:il trasporto parallelo lungo una curva dipende solo dai punti iniziali e finali. Poichè $U_{x,y}$ deve essere un operatore unitario tra le fibre $\mathbf{C}_x = \{x\} \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{C}_y = \{y\} \times \mathbf{C}$ otteniamo che $U_{x,y}$ deve essere uguale alla moltiplicazione per un numero complesso di modulo uno. Perciò otteniamo

$$U_{x,y} = e^{i\theta(x,y)}$$

dove $\theta : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, e θ è regolare. Ma poichè

$$U_{x,y} U_{y,z} = U_{x,z} \qquad U_{x,x} = \text{identità}$$

Otteniamo

$$\theta(x, y) + \theta(y, z) = \theta(x, z) \qquad \theta(x, x) = 0 \ ; \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

Questo implica

$$\theta(x, 0) + \theta(0, x) = \theta(x, x) = 0 \ ; \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

Definendo $\alpha(x) = \theta(0,x) \in [0,2\pi)$ otteniamo

$$\theta(x,y) = \theta(x,0) + \theta(0,x) = -\theta(0,x) + \theta(0,y) = \alpha(y) - \alpha(x)$$

Viceversa data una funzione regolare $\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ possiamo definire un trasporto parallelo ponendo

$$U_{x,y} = e^{i(\alpha(y)-\alpha(x))}$$

Abbiamo così stabilito una corrispondenza biunivoca tra trasporti paralleli e funzioni regolari.
Scriviamo la rappresentazione della sezione (4.4) mostrando esplicitamente la dipendenza da U (e perciò da α nel caso presente). Consideriamo $\mathbf{R}$ come gruppo che agisce per traslazione su se stesso (lo spazio base). Rappresenteremo quindi curve in $\mathbf{R}$ con operatori unitari in $L^2(\mathbf{R})$. Poichè la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni il termine di cociclo non è necessario. Perciò se f è una sezione L^2, e $g_\gamma = t \in \mathbf{R}$

$$(V_\gamma f)(x) = (V_\gamma(U)f)(x) = U_{g_g^{-1}(x),x} f(g_\gamma^{-1}(x)) = e^{i(-\alpha(x-t)+\alpha(x))} f(x-t)$$

Così possiamo scrivere

$$((V_\gamma(\alpha))f)(x) = e^{i(-\alpha(x-t)+\alpha(x))} f(x-t)$$

Supponiamo di restringerci a trasporti paralleli dati da funzioni della forma $\alpha(x) = sx$. Otteniamo

$$(V_\gamma(\alpha)f)(x) = (V_\gamma(s)f)(x) = e^{i(-s(x-t)+sx)} f(x-t) = e^{ist} f(x-t)$$

Se poniamo $V_\gamma(s) = V_{g_\gamma}(s) = V(t,s)$ otteniamo

$$(V(t,s)f)x = e^{ist} f(x-t)$$

Si osservi che

$$(V(t,s)f)x = (W(s,-x)f)(-t)$$

dove per definizione $(W(\alpha,\beta)f)(t) := e^{i\alpha t} f(t-\beta)$.
Denotando rispettivamente con Q e P gli operatori posizione e momento su $L^2(\mathbf{R})$:

$$(Qf)(t) = tf(t) \; ; \; Pf(t) = \frac{1}{i}\frac{df(t)}{dt}$$

si ottiene

$$W(\alpha,\beta) = e^{i\alpha Q} e^{i\beta P} = e^{i\alpha\beta} e^{i(\alpha Q + \beta P)}$$

ed è ben noto che gli operatori $W(\alpha,\beta)$ sono i cosiddetti operatori di Weyl i quali realizzano la rappresentazione di Schrödinger delle relazioni di commutazione di Heisenberg nella forma di Weyl (si veda [57]).

4.6 Trasporti paralleli piatti

In questa sezione dimostriamo che se il trasporto parallelo è piatto allora la rappresentazione indotta definita nella Sezione (4.4) si riduce ad una rappresentazione indotta in senso classico. In questa sezione supponiamo che tutti i gruppi e i gruppoidi agiscono transitivamente. Sia $Y \xrightarrow{p} M$ un fibrato con fibra F, $G = (M,\Gamma,\mathcal{F})$ un gruppoide di curve sullo spazio base M, $L \subset$ Homeo(M) un sottogruppo , $G_L = (L,\Gamma_L,\mathcal{F})$ il gruppoide di curve associato su L e U un trasporto parallelo lungo le curve di G. Definiamo $g_\gamma = I_\gamma^{-1} = i_\gamma \varphi_\gamma^{-1}$ così la rappresentazione indotta prende la forma

$$(V_\gamma f)(x) = c(I_{\gamma,x}) U_{\tilde{\gamma}_{I_\gamma(x)},x} f(I_\gamma(x)) = c(g_\gamma^{-1},x) U_{\tilde{\gamma}_{g_\gamma^{-1}(x)},x} f(g_\gamma^{-1}(x)) \qquad (*)$$

Poichè G agisce transitivamente su M il sottogruppo Hol (U) $\subseteq$ Aut F è ben definito e isomorfo alla U-rappresentazione del gruppo dei lacci di Γ in un qualsiasi punto di $x \in M$.

PROPOSIZIONE (4.6.1). Le seguenti due condizioni sono equivalenti:
- Hol (U) è il gruppo banale;

- $U_{\gamma_{x,y}} = U_{\delta_{x,y}}$ $\quad \forall x, y \in X$ and $\forall \gamma, \delta \in \Gamma_L$.

Dimostrazione . (Banale).

DEFINIZIONE(4.6.1). Un trasporto parallelo si dice globalmente piatto se Hol(U) è il gruppo banale.

PROPOSIZIONE (4.6.2). Per ogni $\gamma, \delta \in G_L$ esiste $\delta' \in G_L$ tale che $g_\delta = g_{\delta'}$ and $\gamma \circ \delta'$ ha significato.

Dimostrazione. Si definisca $\delta'(t) = \delta(t)\varphi(\delta)^{-1}i(\gamma)$. Otteniamo $\varphi(\delta') = \varphi(\delta)\varphi(\delta)^{-1}i(\gamma) = i(\gamma)$ così $\gamma \circ \delta'$ ha significato. Inoltre $i(\delta') = i(\delta)\varphi(\delta)^{-1}i(\gamma) = I_\delta i(\gamma)$. Perciò,

$$g_{\delta'} = \varphi(\delta')i(\delta')^{-1} = i(\gamma)(I_\delta i(\gamma))^{-1} = I_\delta^{-1} = g_\delta$$

PROPOSIZIONE(4.6.3). Sia $g : \Gamma_L \to L \subseteq$ Homeo (M), la funzione definita sopra. Allora $g(G_L)$ è un sottogruppo di L.

Dimostrazione. Se $\gamma \in \Gamma_L$ è un laccio, allora $g_\gamma = 1_L$ a causa di (*). Inoltre $(g_\gamma)^{-1} = g_{\gamma^{-1}}$ qundi dobbiamo solo dimostrare che $g(\mathcal{G}_L)$ è chiuso per composizione. Supponiamo che g_γ, g_δ siano arbitrarie. Per la proposizione precedente esiste una δ' tale che $g_\delta = g_{\delta'}$ e $\gamma \circ \delta'$ ha significato. Ma se $\gamma \circ \delta$ ha significato allora

$$g_\gamma \circ g_\delta = I_\gamma^{-1} \circ I_\delta^{-1} = (I_\gamma \circ I_\delta)^{-1} = (I_{\gamma\circ\delta})^{-1} = g_{\gamma\circ\delta}$$

Così $g_\gamma \circ g_\delta = g_\gamma \cdot g_{\delta'} = g_{\gamma\circ\delta'}$.

In ciò che segue supporremo che U sia un trasporto parallelo piatto. Per la Proposizione (4.6.1), in questo caso ha senso scrivere

$$U_{\gamma_{x,y}} = U_{x,y} \qquad \forall x, y \in X$$

dove $\gamma_{x,y}$ è una curva arbitraria in Γ che parte da x e finisce in y.

DEFINIZIONE(4.6.2). Se $v \in F_x$ e $\gamma \in G_L$ definiamo

$$g_\gamma(v) = (U_{x,g_\gamma(x)})(v) \in F_{g_\gamma(x)} \qquad (*)$$

PROPOSIZIONE(4.6.4). L'azione (*) di $g(G_L)$ su Y induce su $Y \xrightarrow{p} M$ una struttura di $g(G_L)$-fibrato.

Nella notazione di cui sopra denotiamo con π la rappresentazione indotta dell'azione (*) del gruppo $L' := g(G_L)$, e denotiamo con V_γ la rappresentazione, su $S(M,Y)$, del gruppoide G_L. Se U è piatto allora

$$\pi(g_\gamma) = V_\gamma \qquad (**)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}(\pi(g_\gamma)f)(x) &= c(g_\gamma^{-1}, x)g_\gamma f(g_\gamma^{-1}x) = \\ &= c(g_\gamma^{-1}, x)U_{g_\gamma^{-1}(x),x} f(g_{\gamma(x)}^{-1}) = \\ &= c(g_\gamma^{-1}, x)U_{\bar{\gamma}_{g_\gamma^{-1}(x),x}} f(g_\gamma^{-1}, x) = (V_\gamma f)(x)\end{aligned}$$

4.7 Propagatori e trasporti paralleli piatti

In questa sezione dimostreremo che i trasporti paralleli piatti, introdotti nella Sezione (4.6) sono generalizzazioni naturali della nozione di *propagatore*. Inoltre dimostreremo che la rappresentazione indotta, associata ad un trasporto parallelo piatto come nella sezione (4.6), estende una costruzione nota usata per associare gruppi unitari a un parametro ai propagatori.

Sia H uno spazio di Hilbert e sia G un gruppo di Lie finito-dimensionale (quindi localmente compatto) con misura di Haar $d\mu$. Una famigli di operatori unitari (su H) $U(p,q)$, $p, q \in G$ la quale soddisfi

$$U(p,q)U(q,r) = U(p,r)$$

$$U(p,p) = \text{Identità}$$

è detta un ***propagatore unitario***.

Sia $G \times H \to G$ il fibrato banale con la proiezione $(x, h) \mapsto x$. Possiamo identificare le funzioni $f : G \to H$ con le sezioni $f : G \to G \times H$ tramite la seguente convenzione

$$f(t) = (t, f(t))$$

$G \times H$ ha una naturale struttura di G-fibrato descritta come segue:

1) G agisce su G per moltiplicazione sinistra

$$\sigma(x) := \sigma x \qquad \sigma, x \in G$$

2) G agisce su $G \times H$ nel modo seguente:

$$\sigma(x, h) := (\sigma x, U(\sigma x, x)h) \qquad (x, h) \in G \times H \qquad (*)$$

È ovvio che l'azione $(*)$ è compatibile con la struttura di fibrato di $G \times H$ e che la sua restrizione produce degli isomorfismi unitari. Supponiamo che f sia una sezione. La rappresentazione indotta agisce su di una sezione $f : G \to G \times H$ come segue:

$$(\pi(\sigma)f)(t) = \sigma f(\sigma^{-1}t) = U(\sigma(\sigma^{-1}t),\ \sigma^{-1}t)f(\sigma^{-1}t) = U(t, \sigma^{-1}t)f(\sigma^{-1}t)$$

Ristretta allo spazio

$$H_1 := L^2(G, d\mu, H) = L^2(G, d\mu, G \times H)$$

$\pi : G \to \mathrm{Un}(H_1)$ è una rappresentazione unitaria. Infatti

$$||\pi(\sigma)f||_2^2 = \int_G ||(\pi(\sigma)f)(t)||^2 d\mu(t) = \int_G ||U(t, \sigma^{-1}t)f(\sigma^{-1}t)||^2 d\mu(t) =$$
$$= \int_G ||f(\sigma^{-1}t)||^2 d\mu(t) = ||f||_2^2$$

Così $\pi(\sigma)$ è una isometria da L^2 in se stesso (poichè $\pi(\sigma)$ è lineare). Inoltre se $f \in L^2(G, d\mu, H)$ allora

$$\pi(\sigma)(\pi(\sigma^{-1}f) = \pi(\sigma \cdot \sigma^{-1})f = f$$

Così $\pi(\sigma)$ è suriettiva e perciò è un operatore unitario.
Applicando questa costruzione al caso $G = (\mathbf{R}, +)$, otteniamo un gruppo unitario a un parametro su $H_1 = L^2(\mathbf{R}, H)$. Questo caso speciale è stato studiato da Howland in [19].

4.8 Rappresentazioni indotte associate a fibrati principali

In questa sezione mostreremo come associare un G-fibrato hilbertiano ad una rappresentazione di un sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G. Sia G un gruppo di Lie. Sia P, M una varietà differenziabile e $\pi : P \to M$ una funzione C^∞, tale che (P, M, π) sia un fibrato liscio.

DEFINIZIONE(4.8.1). (P, M, π, G) è detto un G-fibrato principale (indicato anche con $P = P(M, G)$) se valgono le seguenti condizioni:

1) $\pi^{-1}(x)$ è diffeomorfo a G per ogni $x \in M$;
2) G agisce liberamente su P (a destra) e le orbite di questa azione sono le fibre, così che la funzione $\pi : P \to M$ può essere identificata con la proiezione $P \to P/G$;
3) Per ogni banalizzazione locale $\psi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$

$$\psi_x^{-1}(u_x g) = (\psi_x^{-1}(u_x))g \quad ; \quad \forall u_x \in \pi^{-1}(x)\ , \quad \forall g \in G$$

ESEMPIO(4.8.1). Sia $P = G$, $G = H$, $M = G/H$ dove $H \subset G$ sono gruppi di Lie e H è chiuso in G (così che M è una varietà per la topologia quoziente [49]). Se consideriamo la proiezione canonica $\pi : G \to G/H$ otteniamo un H-fibrato principale $(G, G/H, \pi, H)$. Infatti ovviamente $\pi^{-1}(x)$ è diffeomorfo a H per ogni $x \in G/H$. La azione destra di H su

G è data dalla moltiplicazione destra. La banalità locale di G rispetto alla proiezione π segue dall'esistenza di una sezione locale (si veda [21]).

PROPOSIZIONE(4.8.1). Sia $P(M,G)$ un fibrato principale e supponiamo che G agisca a sinistra su una varietà V. Consideriamo l'insieme $(P \times V)/G$ e la proiezione $\hat{\pi} : (P \times V)/G \to P/G \cong M$ definita nella Sezione (3.1). $(P \times V)/G$ è un fibrato su M con fibra V e proiezione $\hat{\pi}$.

Dimostrazione. Denotiamo l'azione sinistra di G su V tramite $\tau(g)v$, $g \in G$, $v \in V$. Abbiamo bisogno di una banalizzazione locale di $(P \times V)/G$. Per la banalità locale $P(M,G)$, ogni punto $x \in M$ ha un intorno U tale che $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$. Questa identificazione e la $(*)$ ci permette di considerare l'azione di G su $\pi^{-1}(U) \times V$ come l'azione su $U \times G \times V$ data da

$$(x, g, v) \xrightarrow{g_0} (x, gg_0, \tau(g_0)^{-1}v)$$

Così l'identificazione $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$ induce l'identificazione $\hat{\pi}^{-1}(U) \cong (U \times G \times V)/G \cong U \times V$. Perciò la banalizzazione locale di $(P \times V)/G$ è

$$\hat{\pi}^{-1}(U) \cong (\pi^{-1}(U) \times V)/G \cong ((U \times G) \times V)/G \cong (U \times G \times V)/G \cong U \times V$$

Nel seguito il fibrato $((P \times V/G, M, \hat{\pi})$ sarà anche denotato con $E = E(M, V, \tau, P) = P \times_\tau V = (P \times V)/G$.

PROPOSIZIONE(4.8.2). Sia $P(M,G)$ un G-fibrato principale e $E = P \times_\tau V$ un fibrato associato. L'insieme delle funzioni G-covarianti $\mathcal{F}_G(P,V)$ può essere identificato con l'insieme delle sezioni di E, cioè con $S(M,E)$.

Dimostrazione . È semplicemente una versione liscia della Proposizione (3.2.1).

Esempio. Sia

$$E = E(G/H, \mathcal{H}(\tau), \tau, G) = G \times_\tau \mathcal{H}(\tau)$$

Supponiamo che G sia un gruppo di Lie, H un sottogruppo chiuso, τ una rappresentazione finito-dimensionale di H sullo spazio $\mathcal{H}(\tau)$. La costruzione precedente si applica e quindi si ottiene un fibrato vettoriale E sullo spazio base G/H con fibra tipica $\mathcal{H}(\tau)$. Inoltre l'azione destra di G su $G \times \mathcal{H}(\tau)$ data da $g_0(g, v) := (g_0 g, v)$ induce una azione di G su $G \times_\tau \mathcal{H}(\tau)$. In questo modo $E = G \times_\tau \mathcal{H}(\tau)$ acquista una struttura di G-fibrato vettoriale nel senso della sezione (3.1).Si possono quindi ripetere in questa circostanza le osservazioni di quella sezione.

4.9 I generatori dei gruppi a un parametro e la derivata covariante nel caso di misura invariante

Sia M una varietà e sia G un gruppo di diffeomorfismi M con una topologia ammissibile. Se $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un sottogruppo a un parametro di G possiamo associare a g_t il campo vettoriale completo v tale che $v_x := \left.\frac{dg_t(x)}{dt}\right|_{t=0}$ $\forall x \in M$. Abbiamo visto come associare a g_t il gruppo a un parametro di $P(G)$ definito da $P_t := [\gamma_t]$ dove

$$\gamma_t : [0,t] \to G \qquad \gamma(s) = g_s \quad \forall s \in [0, \tau]$$

Supponiamo ora che M sia orientabile e dotata di una forma di volume G-invariante ω (la cui misura associata si denota con $d\mu$) e supponiamo di avere un fibrato hilbertiano $H \xrightarrow{\pi} M$ con fibra tipica H_0 e un trasporto parallelo U. Abbiamo mostrato che H acquista la struttura si fibrato $P(G)$-ammissibile se l'azione di $q \in P(G)$ è definita da.

$$qx = \varphi(\gamma)x \qquad x \in M$$

$$qv = U_{\gamma_x}v \qquad v \in H_x$$

dove γ è una curva che parte dall'identità di G tale che $q = [\gamma]$ e $\gamma_x(t) = (\gamma(t))(x)$.
Nella sezione (4.4), per ogni sezione L^2 f abbiamo definito la rappresentazione V di $P(G)$ $q \in P(G)$, $x \in M$

$$(V_q f)(x) = qf(q^{-1}x)$$

Non è difficile vedere che prese comunque due sezioni a quadrato sommabile f, h si ha che $(V_{P_t} f, h)$ è misurabile. Allora il teorema di von Neumann implica che la rappresentazione è fortemente continua. Quindi per ogni sottogruppo a un parametro P_t di $P(G)$ il teorema di Stone garantisce l'esistenza di un operatore autoaggiunto A tale che $V_{P_t} = e^{itA}$. Sia D lo spazio delle sezioni lisce a supporto compatto. D è invariante per la rappresentazione V_q. Vogliamo mostrare che se P_t è un sottogruppo a un parametro $P(G)$ associato a g_t (che è un gruppo a un parametro di G) allora V_{P_t} è fortemente differenziabile. Così i^{-1} per la derivata forte V_{P_t} è essenzialmente autoaggiunto su D e la sua chiusura è il generatore infinitesimale di V_{P_t}.

Infatti

$$\begin{aligned}(V_{P_t} f)(x) &= P_t f P_t^{-1} x = U_{(\gamma_t)_{\varphi(\gamma_t)^{-1}x}}(f(\varphi(\gamma_t)^{-1} x)) = \\ &= U_{(\gamma_t)_{g_t^{-1}x}} f(g_t^{-1}(x))\end{aligned}$$

Si noti che $(\gamma_t)_{g_t^{-1}x}(s) = (\gamma_t(s))(g_t^{-1}x) = g_s g_t^{-1} x = g_{s-t} x$, $s \in [0, t]$.

Cioè: la curva $(\gamma_t)_{g_t^{-1}x}(s)$ va da $g_t^{-1}x$ a x.

Ricordiamo ora che, per la definizione di derivata covariante (si veda [21])

$$\begin{aligned}(\nabla_{-v} f)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_{(\gamma_t)_{g_t^{-1}x}} f(g_t^{-1}x) - f(x)) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f(P_t^{-1}x) - f(x)) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((V_{P_t} f)(x) - f(x))\end{aligned}$$

Perciò il generatore infinitesimale è $\frac{1}{i}\nabla_{-v}$ dove v è il campo vettoriale completo associato al gruppo a un parametro $\{g_t\}_{t\in\mathbf{R}} \subseteq G$, $\{P_t\}_{t\in\mathbf{R}} \subseteq P(G)$.

Osservazione

È bene sottolineare che il caso trattato in questo paragrafo non è semplicemente quello $M = G =$ gruppo di Lie finito-dimensionale e $d\mu =$ misura di Haar. Ad esempio si può considerare il gruppo (non localmente compatto) di tutti i diffeomorfismi che conservano la forma di volume ω sulla varietà compatta M. Tale gruppo si indica con $Diff_\omega(M)$ e la sua algebra di Lie (lo spazio tangente nell'identità) è data dai campi vettoriali a divergenza nulla su M (rispetto a ω). Per i principali risultati su tale gruppo e sul ruolo che esso svolge in fluidodinamica si veda [54].

4.10 La correzione di volume

Ripetiamo le considerazioni del paragrafo precedente senza l'ipotesi che la forma di volume ω sia G-invariante. Come si è mostrato nella sezione (1.4) c'è un cociclo $c(\cdot,\cdot)$ su $G \times M$ tale che

$$(g^*\omega)_x = c(g, x)\omega_x \qquad g \in G, \quad x \in M$$

PROPOSIZIONE (4.10.1). *Sia g_t un gruppo a un parametro di G. Allora:*

1) $c(g_0, x) = c(1_G, x) = 1\ \forall x \in M$;

2) $c(g_t, x) > 0\ \forall t \in \mathbf{R},\ \forall x \in M$;

3) $c(g_t^{-1}, x)^{1/2} \to 1$ *quando* $t \to 0$;

4) la funzione $t \mapsto c(g_t^{-1}, x)^{-1/2}$ *è differenziabile in zero* $\forall x \in M$.

Dimostrazione. Poichè ω è una forma di volume $\omega_x \neq 0\ \forall x \in M$. Poichè $g^*\omega$ è anch'essa una forma di volume (si veda [49]) e poichè $(g^*\omega)_x = c(g, x)\omega_x$ otteniamo che $c(g, x) \neq 0\ \forall g \in G,\ \forall x \in M$.

Da ciò segue che

$$c(g, x) = c(g 1_G, x) = c(g, 1_G x) c(1_G, x) = c(g, x) c(1_G, x)$$

$\forall g \in G,\ \forall x \in M$. Perciò $c(1_G, x) = 1\ \forall x \in M$. Così abbiamo dimostrato 1).

Si osservi che g_t è nella componente connessa per archi dell'identità.

Questo implica che $\forall t\ g_t$ è un diffeomorfismo che conserva l'orientamento così $c(g_t, x) > 0$ e questo dimostra 2). 3) segue dalla continuità della funzione $t \mapsto c(g_t^{-1}, x)^{1/2}$. La differenziabilità di $c(g_t^{-1}, x)^{-1/2}$ segue dalla differenziabilità di $c(\cdot,\cdot)$ e da 2).

DEFINIZIONE(4.10.1). *Definiamo*

$$h_{-v}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c(g_0^{-1},x)^{-1/2} - c(g_t^{-1},x)^{-1/2}) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1 - c(g_t^{-1},x)^{-1/2})$$

dove v è il campo vettoriale completo associato al gruppo a un parametro g_t.
Ricordiamo che in generale

$$(V_{P_t}f)(x) = |c(P_t^{-1},x)|^{1/2}P_tf(P_t^{-1}x)$$

dove $c(P_t,x) = c(g_t,x)$ (quì P_t è il gruppo a un parametro di $P(G)$ associato al gruppo a un parametro $g_t \in G$).
Otteniamo

$$\frac{1}{t}[(V_{P_t}f)(x) - f(x)] = \frac{1}{t}[|c(P_t^{-1},x)|^{1/2}P_tf(P_t^{-1}x) - f(x)] =$$
$$= \frac{1}{t}c(P_t^{-1},x)^{1/2}[P_tf(P_t^{-1}x) - f(x) + f(x) - c(P_t^{-1},x)^{-1/2}f(x)] =$$
$$= c(g_t^{-1},x)^{1/2}\left[\frac{1}{t}(P_tf(P_t^{-1}x) - f(x)) + \frac{1}{t}(1 - c(g_t^{-1},x)^{-1/2})f(x)\right]$$

Da questo si deduce facilmente che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(V_{P_t}f)(x) - f(x)] = ([\nabla_{-v} + h_{-v}(\cdot)]f)(x)$$

Questo significa che il generatore infinitesimale è,nel caso generale, $\frac{1}{i}[\nabla_{-v} + h_{-v}(\cdot)]$.

4.11 Derivata di Lie, divergenza e correzione di volume

Sia M una varietà differenziabile, n-dimensionale, orientabile e sia v un campo vettoriale completo su M tale che $g_t \in \text{Diff}\,(M)\forall t$ sia il flusso associato a v. Sia w un elemento di volume contenuto in $\Lambda^n(T(M))$. Si ricordi che (vedi Sezione 1.4) $g_t^* w$ è l'elemento di volume definito da

$$(g_t^* w)_p(v_1,\ldots,v_n) := w_{g_t(p)}((g_t)_{*p}(v_1),\ldots,(g_t)_{*p}(v_n))$$

dove $p \in M$.

DEFINIZIONE (4.11.1) *La derivata di Lie di w rispetto a v è definita da*

$$(L_v w)_p := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(g_t^* w)_p$$

Poichè $L_v w$ è una n-forma e $\Lambda^n(T_p(M))$ è uno dimensionale per ogni $p \in M$ possiamo dare la seguente

DEFINIZIONE (4.11.2). *La w-divergenza del campo vettoriale v è definita dalla seguente equazione*

$$L_v w = (\text{div}_w v)w$$

Nella sezione 1.4 abbiamo definito la funzione $c(g,\cdot) \in \mathcal{C}(M)$ tramite la seguente equazione

$$c(g,x)w_x = (g^* w)_x$$

dove $x \in M$, $g \in$ Diff (M).
In quel che segue v è un fissato campo vettoriale completo con flusso g_t e w è una fissata forma di volume.

PROPOSIZIONE (4.11.1).

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c(g_t,x) - 1) = (\text{div}\,_w v)_x \qquad \forall x \in M$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c(g_t,x)-1))w_x &=\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c(g_t,x)w_x - w_x) =\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((g_t^* w)_x - w_x) =\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g_t^* w)_x =\\ &= (L_v w)_x =\\ &= (\mathrm{div}_w v)_x w_x\end{aligned}$$

COROLLARIO (4.11.1).

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-c(g_t^{-1},x)^{-1/2}) = -\frac{1}{2}(\mathrm{div}_w v)_x$$

Dimostrazione. Sia $f(t)=c(g_t,x)$ e $u(t)=f(-t)^{-1/2}$. Otteniamo $f(0)=1$ and $f'(0)=(\mathrm{div}_w v)_x$. Inoltre

$$u'(t) = -\frac{1}{2}f(-t)^{-3/2}f'(-t)(-1) = \frac{1}{2}f(-t)^{-3/2}f'(t)$$

Perciò

$$u'(0) = \frac{1}{2}f(0)^{-3/2}f'(0) = \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2}(\mathrm{div}_w v)_x$$

Questo implica

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-c(g_t^{-1},x)^{-1/2}) &=\\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c(g_{-t},x)^{-1/2}-1) =\\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u(t)-u(0)) =\\ &= -u'(0) =\\ &= -\frac{1}{2}(\mathrm{div}_w v)_x \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Quando la forma di volume w è fissata scriviamo semplicemente div v. Dal risultato di cui sopra otteniamo che (si veda la sezione 4.10)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(V_{p_t}f)(x)-f(x)] = (\nabla_{-v}f)(x) - \frac{1}{2}(\mathrm{div}\ v)_x\cdot f(x) = \left[-\left(\nabla_v + \frac{1}{2}\mathrm{div}\ v\right)f\right](x)$$

Perciò il generatore infinitesimale è

$$\frac{1}{i}\left(-\left(\nabla_v + \frac{1}{2}\mathrm{div}\ v\right)\right) = i\left(\nabla_v + \frac{1}{2}\mathrm{div}\ v\right)$$

A questo punto è bene fare la seguente osservazione. I gruppi di diffeomorfismi differiscono dai gruppi di Lie finito dimensionali per molti aspetti. Uno dei problemi fondamentali è la relazione che c'è (localmente) tra i gruppi a un parametro e il gruppo stesso. Sia G un gruppo di Lie finito-dimensionale e sia $\mathcal{G}$ la sua algebra di Lie. È ben noto che la mappa esponenziale $\xi \longrightarrow exp\xi$ da $\mathcal{G}$ a G dà un omeomorfismo (locale) tra l'algebra $\mathcal{G}$ e il gruppo G. Questo significa che possiamo trovare un intorno U di 1_G tale che per ogni g contenuto in U esiste ed è unico un gruppo a un parametro $g(t)$ per cui valga $g(1)=g$. Questo non è vero per $Diff(M)$ neanche nel caso $M=S^1$ o $M=R$. Infatti ci possono essere diffeomorfismi arbitrariamente vicini all'identità che si trovano su più di un gruppo a un parametro e altri che non si trovano su nessun gruppo a un parametro. In questa discussione seguiremo [43] i quali a loro volta seguono [55].
Siano $x, y \in R$. Definiamo

$$T_y(x) := x + y$$

Diremo che $L \in Diff(R)$ è periodico di periodo $y > 0$ se

$$LT_y = T_y L$$

cioè se L è contenuto nel centralizzatore di T_y che chiameremo C_y.

Esempio. Sia $y > 0$. Poniamo

$$[x]_y := max\{yn : n \in Z, \quad yn \leq x\}$$

Ovviamente $0 \leq (x - [x]_y) \in [0, y]$. Se $L \in Diff([0, y])$, $L(0) = 0, \quad L(y) = y$ e $L^k(0) = L^k(y) \quad \forall k = 0, 1, 2, ...$ allora possiamo definire $L' \in Diff(R)$ tramite

$$L'(x) := [x]_y + L(x - [x]_y)$$

In tal caso si ottiene

$$\begin{aligned}(L'T_y)(x) &= L'(x + y) = [x + y]_y + L((x + y) - [x + y]_y) = \\ &= [x]_y + y + L(x + y - [x]_y - y) = [x]_y + y + L(x - [x]_y) = \\ &= L'(x) + y = (T_y L')(x).\end{aligned}$$

Sia ora L contenuto in C_y. Poniamo

$$g_t(y) := T_{ty} \qquad \text{e} \qquad g_t{}^L(y) := Lg_t(y)L^{-1}$$

Ovviamente

$$g_1{}^L(y) = Lg_1(y)L^{-1} = LT_yL^{-1} = T_y \qquad \forall L \in C_y$$

perciò T_y si trova su tutta la famiglia di gruppi a un parametro $g_{(\cdot)}{}^L(y)$. È facile vedere che questo tipo di fenomeno si verifica anche se sostituiamo R con la circonferenza S^1. Questo dimostra che non c'è nessun modo *naturale* di associare a un diffeomorfismo (arbitrariamente vicino all'identità) un gruppo a un parametro di diffeomorfismi. Come conseguenza si ottiene che non può esistere nessuna rappresentazione (globale) del gruppo dei diffeomorfismi la quale ristretta sui gruppi a un parametro abbia gli stessi generatori della rappresentazione del gruppo dei cammini (di $Diff(M)$) che abbiamo studiato.

4.12 Trasformazioni di gauge generalizzate e gruppi di cammini

Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato. Se $f \in \mathrm{Diff}(E)$ diciamo che f *copre* $f_M \in \mathrm{Diff}(M)$ se il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f_M} & M \end{array}$$

DEFINIZIONE (4.12.1) (Si veda [32]). *Il gruppo delle trasformazioni di gauge generalizzate* $\mathrm{Diff}_M(E)$ *è l'insieme di tutte le* $f \in \mathrm{Diff}(E)$ *tali che* f *copre qualche* $f_M \in \mathrm{Diff}(M)$. *Il gruppo delle trasformazioni di gauge* $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(E)$ *è il sottogruppo di* $\mathrm{Diff}_M(E)$ *definito da*

$$\mathcal{G} := \mathrm{Aut}(E) := \{f \in \mathrm{Diff}_M(E) : f_M = Id_M\} \ .$$

Osservazione . Come si vede facilmente $(\cdot)_M : \mathrm{Diff}_M(E) \to \mathrm{Diff}(M)$ è un omomorfismo con nucleo $\mathcal{G}$. Perciò $\mathcal{G}$ è normale in $\mathrm{Diff}_M(E)$.

Se i denota l'inclusione e j è definita da

$$j(b) = b_M \qquad \forall f \in \mathrm{Diff}_M(P)$$

abbiamo la seguente successione esatta

$$1 \to \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathrm{Diff}_M(E) \xrightarrow{j} \mathrm{Diff}(M) \to 1 \ .$$

Notiamo che "in numerose applicazioni si è interessati nello splitting della successione esatta di cui sopra o nel costruire una estensione di $\mathrm{Diff}(M)$ tramite $\mathcal{G}$. In particolare, spesso vogliamo sollevare l'azione di $\mathrm{Diff}(M)$ a qualche sottogruppo di $\mathrm{Diff}_M(E)$" (si veda [32]).

Supponiamo ora che G sia un gruppo di Lie (senza restrizioni sulla dimensione) che agisce su M, cioè supponiamo di avere un omomorfismo $\alpha : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Supponiamo inoltre di avere un trasporto parallelo U su $E \xrightarrow{\pi} M$. Se $P(G)$ è il gruppo dei cammini delle curve lisce a tratti G allora $P(G)$ ha una azione naturale su M data da $[\gamma](x) = \Delta(\gamma)(x)$ dove $x \in M$ e $\Delta(\gamma)$ è il punto finale del rappresentante di $[\gamma]$ che parte dall'identità. Abbiamo visto che Δ è un omomorfismo di gruppi. Perciò abbiamo una azione di $P(G)$ su M data da

$$P(G) \xrightarrow{\Delta} G \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Diff}(M) \ .$$

Ora costruiamo un sollevamento di questa azione dato dal trasporto parallelo. Definiamo

$$\varphi^U : P(G) \to \mathrm{Diff}_M(E)$$

tramite

$$(\varphi^U[\gamma])(v) := U_{\gamma_x} v \qquad v \in E_x$$

dove γ_x è la curva su M che parte da x associata a $[\gamma]$. φ^U è un omomorfismo di gruppi. Inoltre abbiamo

$$\varphi^U|_{L(G)} : L(G) \to \mathrm{Aut}(E) = \mathcal{G}$$

B I B L I O G R A F I A

[1] Accardi L. "The Weyl-Scrodinger representation on curved space and functional integrals on connections", Note non pubblicate (1986)Princeton

[2] Accardi L. "Problemi matematici delle teorie quantistiche" Convegno GNAFA-CNR, Rimini 1977

[3] Ancel F.D. "An alternative proof and applications of a theorem of E.G.Effros" Michigan Math.J 34,(1987),39-55

[4] Albeverio S.,Høegh-Krohn R.,Testard D.,Vershik A. "Factorial Representations of Path Groups" J.Funct.Anal.51,115-131(1983)

[5] Arens R. "Topologies for homemomorphisms groups" Amer.J.Math 68(1946),593-610

[6] Barut A.O.-Racka R. "Theory of group representations and applications" World scientific (1986)

[7] Bleuler K.-Werner M.(eds.) "Differential Geometrical methods in theoretical physics", Kluwer Academic Publishers (1988)

[8] Burgess J.P. "A selection theorem for group actions" Pacific J.Math vol.80 (1979), 333-336

[9] Curtis W.D.-Miller F.R. "Differential Manifolds and theoretical Physics", Academic press (1985)

[10] Dixmier J. "Dual et quasi-dual d'une algebre de Banach involutive" Trans.Amer.Math.Soc. 104 (1962), 278-283

[11] Dixmier J. "Le C^*-algebres et leurs representations" Gauthiers Villars, Paris, 1964

[12] Drechsler W.,Mayer M.E. "Fiber bundle techniques in gauge theories" Lect.Notes Phis.,67, Springer

[13] Driver B.K. "Classifications of bundle connection pairs by parallel traslation and lassos" J.Funct.Anal. 83,185-231 (1989)

[14] Dugundji J.,"Topology", Allyn and Bacon, Boston, (1966)

[15] Effros E.G. "Polish transformation groups and classification problems" in "General topology and modern analysis" Academic Press

[16] Elworthy K.D. "Stochastic differential equations on manifolds" Cambridge University Press (1982)

[17] Fell J.M.G.-Doran R.S. "Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles" Vol. 1-2, Academic Press (1988)

[18] Gross L. "A Poincarè lemma for connection forms" J.Funct.Anal.63,1-46,(1985)

[19] Howland J.S. "Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians" Math. Ann. 207, 315 - 335 (1974)

[20] Kac V.(Ed.) "Infinite dimensional groups with applications" Springer (1985)

[21] Kobayashi S.-Nomizu K. "Foundations of differential geometry" John Wiley & Sons, (1963)

[22] Mack G. "Physical principles, geometrical aspect and locality properties of

gauge field theories"

[23] Mackenzie K. "Lie groupoids and Lie algebroids in Differential Geometry" LMS Lecture Notes 124, Cambridge University Press

[24] Mackey G.W. "Induced representation of locally compact groups:I" Ann.of Math., 55(1952),101-139

[25] Mackey G.W. "Induced representations of locally compact groups:II" Ann.of Math.,58(1953),193-221

[26] Mackey G.W. "Borel structure in groups and their duals" Trans.Amer.Math.Soc.85,134-165,(1957)

[27] Mackey G.W. "Induced representations of groups and Quantum Mechanics", W.A.Benjamin, New Zork and Boringhieri, Torino (1968)

[28] Mackey G.W. "Unitary representations in Physics, Probability and number theory" The Bejamin-Cummings Publ.Comp.

[29] Mackey G.W. "Weyl program and modern physics" in [3], 11-36

[30] Mandelstam S."Quantum electrodynamics without potentials" Annals of Physics 19,1-24 (1962)

[31] Mandelstam S."Quantization of the gravitational field" Ann.of Phyis. 19,25-66(1962)

[32] Marathe K.B.-Martucci G. "The geometry of gauge fields" J.Geom. of Phys. Vol 6,n.1,(1989)

[33] Mayer E.M. "Groupoids and Lie Bigebras in gauge and string theories" in [3], 149-164

[34] Mensky M.B. "Feynman quantization and the S-matrix for spin particles in riemanniann spacetime" Theor.Math.Phys.18,136,(1974)

[35] Mensky M.B. "Method of induced representatios:Space-time and concept of particle" Nauka,Moscow(1976)(in Russian)

[36] Mensky M.B. "Group of parallel transports and description of particles in curved spacetime" Lett.Math.Phys. 2(1978),175-180

[37] Mensky M.B. "Application of the group of paths to the gauge theory and quarks" Lett.Math.Phys. 3(1979),513-520

[38] Mensky M.B. "The group of paths:Measurement,fields,particles" Nauka,Moscow(1983) (in Russian)

[39] Mensky M.B. "The path group and the interaction of quantum string" Sov.Phys.JETP 63(2) February 1986

[40] Mensky M.B. "Application of path group in gauge theory, Gravitation and String theory" in "Gauge theories of fundamental interaction" World Scientific, (1990)

[41] Oxtoby J.C. "Invariant measures in groups that are not locally compact" Trans.Amert.Math.Soc.60,215-237 (1946)

[42] Poulsen N.S. "On C^{∞}-vectors and Intertwining bilinear forms for representations of Lie groups" J.Funct.Anal.9,87-120(1972)

[43] Pressley A.-Segal G. "Loop Groups" Clarendon Press, Oxford, (1986)

[44] Reed M.-Simon B. "Methods of modern mathematical physics" vol.I-IV Academic Press (1980)

[45] Rieffel M.A. "Induced representations of C^*-algebras" Adv.Math.13, 176-257,(1974)

[46] Sakai S. "C^*-algebras and W^*-algebras" Springer, (1971)

[47] Trautman A. "Differential geometry for physicist" Bibliopolis, Napoli (1984)

[48] Varadarajan V.S. "Geometry of quantum theory" second edition Springer (1985)

[49] Wallach N.R. "Harmonic analysis on homogeneous space" Marcel Dekker, New york (1973)

[50] Warner G. "Harmonic analysis on semisimple Lie groups" vol.I, Springer, (1972)

[51] Wightman A.S. "On the localizability of quantum mechanical Systems" Rev.Modern Phys.34,845-872

[52] Baxendale P. "Brownian motions in the diffeomorphism group I" Compositio Math. 53, 19-50,(1984)

[53 Dixmier J. "Von Neumann Algebras" North-Holland Math.Lib.,vol.27,(1981)

[54] Ebin D.G. - Marsden J. "Group of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid", Ann.Math.,92,n.1,102-163 (1970)

[55] Omori H. "On the group of diffeomorphisms of a compact manifold" Proc.Symp.Pure Math.15,167-83,AMS,(1970)

[56] Ørsted B."Induced representation and a new proof of the imprimitivity theorem" Jour.Funct.Anal. 31, 355-359 (1979)

[57] Petz D. "An invitation to the algebra of canonical commutation relations" Leuven Notes Math.Theor.Phys., vol.2,(1989)

[58] Simmons G.F."Introduction to topology and modern analysis" Mc graw-Hill, New york,(1970)

[59] Taylor A.E.-Lay D.C. "Introduction to functional analysis" John Wiley and sons, New Zork, (1980)