Università degli Studi di Roma
"La Sapienza"

Dottorato di Ricerca in Matematica

VII ciclo

Quantizzazione di gruppi di Poisson

Tesi
per il conseguimento del titolo di
Dottore di Ricerca
in Matematica

Candidato

Fabio GAVARINI

Ringraziamenti

Desidero esprimere un profondo ringraziamento al Prof. Claudio Procesi, per la costante pazienza con cui mi ha seguito e la fiducia che mi ha più volte dimostrato nel sostenere il mio lavoro di ricerca; l'entusiasmo e l'ampiezza di vedute che caratterizzano la sua ricerca e il suo insegnamento sono sempre stati un esempio prezioso.

Sono anche grato al Prof. Corrado De Concini, per la grande disponibilità con cui mi ha dato i suoi consigli.

Infine voglio ringraziare il Dott. Mauro Costantini e la Dott.ssa Michela Varagnolo per le spiegazioni e i chiarimenti relativi ai loro lavori; sono inoltre in debito con la Dott.ssa Ilaria Damiani per le numerose e fruttuose discussioni tenute insieme.

INDICE

INTRODUZIONE

"Dualitas dualitatum
et omnia dualitas"
N. Barbecue, "Scholia"

Il presente lavoro tratta il problema della quantizzazione dei gruppi di Poisson, presentando una costruzione esplicita di una quantizzazione infinitesimale per una vasta classe di gruppi di Poisson algebrici affini; tale costruzione e i risultati ottenuti gettano nuova luce sulla relazione tra dualità di Hopf e dualità di Poisson, e forniscono nuove dimostrazioni di alcuni risultati già noti.

Nel seguito per *dualità di Hopf* intendiamo la dualità che intercorre tra le due algebre di Hopf (quella delle funzioni regolari $F[G]$ e quella inviluppante universale $U(\mathfrak{g})$) associate ad un gruppo algebrico (eventualmente di Poisson) G, mentre per *dualità di Poisson* intendiamo la dualità che intercorre tra un gruppo (algebrico) di Poisson G e il suo gruppo di Poisson duale G^*.

Ricordiamo che, dato un gruppo algebrico G, esistono due oggetti algebrici associati ad esso, cioè la sua algebra delle funzioni regolari $F[G]$ e la sua algebra inviluppante universale $U(\mathfrak{g})$, quando la caratteristica del campo base k sia zero (che è il caso che considereremo) e $\mathfrak{g} := Lie(G)$ è l'algebra di Lie tangente a G, o la sua iperalgebra $Hy(G)$, quando la caratteristica del campo base k sia positiva: queste sono entrambe algebre di Hopf su k, con un accoppiamento di Hopf naturale non degenere $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$ tra loro, così che $F[G]$ e $U(\mathfrak{g})$ possono essere pensate come algebre di Hopf *duali* l'una dell'altra. Inoltre, invece di $F[G]$ si può considerare l'algebra delle funzioni $F^\infty[G]$ del germe di gruppo associato a G (o, in breve, "il gruppo formale $F^\infty[G]$"), che è un'algebra di Hopf formale (cfr. §1.1 per la definizione) che estende $F[G]$, e l'accoppiamento $F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$ di algebre di Hopf formali che estende $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$ (in effetti $F^\infty[G] = U(\mathfrak{g})^*$).

Quando G è un gruppo algebrico di Poisson, l'algebra di Lie $\mathfrak{g} := Lie(G)$ ha una struttura di bialgebra di Lie: inoltre esiste un altro gruppo algebrico di Poisson H, detto "(il) gruppo di Poisson duale di G", con $\mathfrak{h} := Lie(H) \cong \mathfrak{g}^*$ come spazi vettoriali su k; in aggiunta si ha un accoppiamento non degenere di bialgebre di Lie $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to k$, così che $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ possono essere viste come bialgebre di Lie *duali* l'una dell'altra. Infine, la struttura di Poisson di G, risp. H, si riflette in una struttura di algebra di Hopf Poisson su $F[G]$, risp. $F[H]$, e in una struttura di coalgebra di Hopf Poisson su $U(\mathfrak{g})$, risp. $U(\mathfrak{h})$ (e in effetti è equivalente al dato di una di queste ulteriori strutture algebriche): allora l'accoppiamento di Hopf $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$, risp. $F[H] \otimes U(\mathfrak{h}) \to k$, è anche compatibile con queste ulteriori strutture di Poisson e co-Poisson; una situazione analoga si verifica anche quando si ha a che fare con $F^\infty[G]$, risp. $F^\infty[H]$, invece di $F[G]$, risp. $F[H]$. Così piuttosto che col singolo gruppo di Poisson G si ha a che fare con la coppia (G, H) di gruppi di Poisson duali l'uno dell'altro, descritta in termini algebrici dalla quaterna $(F[G], U(\mathfrak{g}), F[H], U(\mathfrak{h}))$; perciò in un certo senso i tre accoppiamenti $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$, $F[H] \otimes U(\mathfrak{h}) \to k$ e $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to k$ descrivono completamente la "configurazione di Poisson", perchè codificano interamente le relazioni di dualità — di Hopf o di Poisson — tra gli oggetti algebrici associati alla quaterna $(F[G], U(\mathfrak{g}), F[H], U(\mathfrak{h}))$.

Per quantizzazione di G si intende una deformazione ad un parametro (anche quando parleremo di "gruppi quantici multiparametrici") di una delle suddette strutture algebriche associate a G, cioè o di $U(\mathfrak{g})$ (come coalgebra di Hopf Poisson) oppure di $F[G]$ (come algebra di Hopf Poisson).

Per quanto riguarda il problema generale di costruire una quantizzazione di un qualunque gruppo di Poisson G, esistono due approcci, quello *locale* e quello *globale*.

Il primo approccio consiste nel cercare di quantizzare soltanto il dato *locale* di G, cioè la sua bialgebra di Lie tangente $\mathfrak{g}$; in tal caso il problema generale è stato risolto recentemente — nel Luglio 1995, quando la presente tesi era già compiuta — da Etingof e Kazhdan in [E-K1]; tuttavia la costruzione che essi sviluppano è del tutto formale e pertanto non aiuta a risolvere ulteriori problemi: in particolare non consente di operare specializzazioni alle radici dell'unità, che sono invece particolarmente interessanti perchè legano la teoria dei gruppi quantici alla teoria dei gruppi algebrici in caratteristica positiva.

Una soluzione esplicita è stata ottenuta per le algebre di Lie semisemplici, dotate di una ben nota struttura di bialgebra di Lie (detta "di Sklyanin-Drinfel'd"), mediante una costruzione *ad hoc* introdotta da Drinfel'd, cfr. [Dr3], e — separatamente — da Jimbo, cfr. [Ji], prendendo spunto dalla presentazione di Serre di $U(\mathfrak{g})$; in pratica si definisce un'algebra di Hopf $U_q^Q(\mathfrak{g})$ su $k(q)$ (dove q è una incognita) per generatori e relazioni, poi si introduce una opportuna $k\left[q, q^{-1}\right]$–forma (cioè "forma intera su $k\left[q, q^{-1}\right]$") $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ di $U_q^Q(\mathfrak{g})$, e infine si dimostra che questa è una deformazione di $U(\mathfrak{g})$ come coalgebra di Hopf Poisson. Tale costruzione è stata poi estesa da Reshetikin (cfr. [R]) e da Costantini e Varagnolo (cfr. [C-V1]) fino ad includere una vasta famiglia di strutture di bialgebra di Lie (sulle stesse algebre di Lie semisemplici), ottenendo gruppi quantici multiparametrici $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$.

In altre direzioni, sono state trovate soluzioni specifiche per vari altri casi particolari — in particolare per le bialgebre di Lie di vari gruppi di Poisson di simmetrie particolarmente interessanti in fisica, quali il gruppo di Lorentz, il gruppo di Galilei, il gruppo euclideo, il gruppo di Heisenberg, il gruppo di Newton-Hooke, il gruppo di De Sitter e anti-De Sitter, ecc. — con diversi metodi: o come casi limite della situazione delle algebre di Lie semisemplici (con tecniche di contrazione, cfr. ad esempio [C-G-S-T]) oppure con presentazioni per generatori e relazioni, imitando il caso semisemplice.

Il secondo approccio consiste nel cercare di quantizzare il dato *globale* di G, cioè la sua algebra di Hopf Poisson $F[G]$; tale problema è risolto in [E-K2] utilizzando i risultati e le tecniche in [E-K1], pertanto però si ritrovano tutti gli svantaggi di quel primo lavoro, in particolare la scarsa "concretezza" di una tale soluzione e l'impossibilità di trattare altre questioni, come la specializzazione dei gruppi quantici alle radici dell'unità; il vantaggio della massima generalità si paga dunque con la perdita di praticità.

Al contrario, una soluzione esplicita si può ottenere nel caso dei gruppi connessi semplicemente connessi e semisemplici (con la struttura di Poisson indotta da quella di bialgebra di Lie di $\mathfrak{g}$ di cui sopra): il problema infatti è risolto con un trucco che utilizza la dualità di Hopf tra $F[G]$ e $U(\mathfrak{g})$, sia nel caso uniparametrico che in quello multiparametrico (cfr. tra gli altri [Dr3], [So], [Lu3], [A-P-W], [Jo], [H-L], [D-L], [C-V2], [H-L-T], etc.), dunque basandosi sulla quantizzazione infinitesimale di cui sopra; in effetti si costruisce, tramite un "trucco assiomatico" alla Peter-Weyl, un'algebra di Hopf $F_q^P[G]$ (su $k(q)$) di coefficienti matriciali di $U_q^Q(\mathfrak{g})$, insieme con un accoppiamento di Hopf naturale non degenere $F_q^P[G] \otimes U_q^Q(\mathfrak{g}) \to k(q)$; poi si definisce una opportuna $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma $\mathfrak{F}_P[G]$ di $F_q^P[G]$, che in effetti risulta essere nient'altro che la sottoalgebra di Hopf in $F_q^P[G]$ delle "funzioni" che assumono valori in $k\big[q,q^{-1}\big]$ quando "valutate" su (cioè accoppiate con) $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$: in una parola, queste sono le funzioni $k\big[q,q^{-1}\big]$–intere su $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$; infine si dimostra che $\mathfrak{F}_P[G]$ è una deformazione di $F[G]$ come algebra di Hopf Poisson sfruttando il fatto che $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ sia una deformazione di $U(\mathfrak{g})$ come coalgebra di Hopf Poisson. Questo procedimento si estende poi (cfr. [C-V2]) ai gruppi quantici multiparametrici.

Per i gruppi classici lo stesso risultato è stato ottenuto anche con un altro metodo *ad hoc*, indipendente dall'esistenza di una quantizzazione infinitesimale, e precisamente tramite una presentazione esplicita per generatori e relazioni (cfr. [F-R-T] ed altri) che sfrutta la realizzazione di tali gruppi come gruppi di matrici. Un altro approccio è stato sviluppato per i gruppi classici e altri gruppi di simmetrie particolarmente interessanti in fisica da Woronowicz e altri, cfr. ad esempio [Po-Wo], mentre [Pa-Wa] affronta la quantizzazione dei gruppi lineari.

D'altra parte, nel caso già citato di un gruppo G semisemplice De Concini, Kac e Procesi (cfr. [D-K-P], [D-P]) hanno dimostrato che la soluzione del problema *locale* per G fornisce anche una soluzione del problema *globale* per il gruppo di Poisson H *duale* di G (cfr. [D-P], ch. 4), dunque (al variare di G) per una vasta classe di gruppi, sottoclasse della classe dei gruppi risolubili: in effetti si comincia col definire una versione "semplicemente connessa" di $U_q^Q(\mathfrak{g})$ — che qui indichiamo con $U_q^P(\mathfrak{g})$ — e se ne costruisce una opportuna $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$, per poi dimostrare che $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ è una deformazione di $F[H]$ come algebra di Hopf Poisson. Anche tale risultato si estende al caso dei gruppi quantici multiparametrici.

A questo punto dobbiamo sottolineare l'insorgenza di un nuovo fenomeno, e cioè un "intreccio di dualità" (la dualità di Hopf e la dualità di Poisson): un oggetto quantico del tipo dell'*algebra inviluppante* associata ad un gruppo di Poisson fornisce una quantizzazione dell'*algebra delle funzioni* del gruppo di Poisson *duale*: ciò fa balenare l'esistenza, a livello quantistico, di una interrelazione tra dualità di Hopf e dualità di Poisson che "codifichi" in qualche modo la stretta dipendenza che intercorre tra due gruppi di Poisson duali l'uno dell'altro: tale legame di interdipendenza è stato osservato anche, in una certa misura, da Drinfel'd (cfr. [Dr3], §7) e da Majid (cfr. [Ma2], [Ma3]); in effetti poiché un gruppo di Poisson non "vive" da solo ma "in coppia" con il suo duale appare ragionevole pensare che non si debba quantizzare un gruppo di Poisson isolatamente ma piuttosto una coppia di gruppi di Poisson duali, e che dalla quantizzazione ci si possa aspettare una più profonda comprensione della dualità di Poisson.

Alla luce delle osservazioni precedenti è immediato congetturare un risultato duale a quello di [D-P], e cioè che una certa algebra quantica di funzioni $F_q^Q[G]$ associata a G fornisca una quantizzazione (come coalgebra di Hopf Poisson) dell'algebra inviluppante $U(\mathfrak{h})$ associata ad H ; un risultato di questo tipo completerebbe la quantizzazione della coppia di gruppi di Poisson duali (G,H), perché avremmo quantizzato tutte e quattro le algebre di Hopf $(F[G],U(\mathfrak{g}),F[H],U(\mathfrak{h}))$ associate a questa coppia. Rifacendoci al risultato di [D-P], consideriamo l'algebra quantica di funzioni $F_q^Q[G]$ duale di $U_q^P(\mathfrak{g})$ (secondo la dualità di Hopf), e prendiamo in esame il "duale" di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ dentro $F_q^Q[G]$, che chiamiamo

$\mathcal{F}_Q[G]$, definito come l'algebra di Hopf delle funzioni $k\big[q,q^{-1}\big]$–intere su $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$: la corretta formulazione della congettura allora è che $\mathcal{F}_Q[G]$ sia una quantizzazione della coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h})$, e un analogo enunciato per il caso multiparametrico. Osserviamo anche che un risultato più debole collegabile a questa congettura è dimostrato in [F-G], ma soltanto per il caso $G = SL(2,k)$.

L'obiettivo iniziale del presente lavoro era ottenere lo scopo ora espresso, cioè costruire $F_q^Q[G]$ e la sua $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma $\mathcal{F}_Q[G]$ e dimostrare la precedente congettura: tale scopo è raggiunto con successo (cfr. Teorema 9.5) sviluppando una opportuna dualizzazione del cosiddetto "quantum double" di Drinfel'd. Ma oltre alla congettura già formulata il metodo sviluppato ci dà vari altri risultati, primo fra tutti la costruzione di *nuovi gruppi quantici*, che chiamiamo $U_q^M(\mathfrak{h})$, che stanno ad $U(\mathfrak{h})$ come $U_q^M(\mathfrak{g})$ sta ad $U(\mathfrak{g})$; in particolare abbiamo una forma intera (su $k\big[q,q^{-1}\big]$) $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ che è una quantizzazione di $U(\mathfrak{h})$ (cfr. Teorema 9.2), e una forma intera $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ che è una quantizzazione di $F^\infty[G]$ (cfr. Teorema 9.7). Inoltre esiste un accoppiamento di Hopf tra $U_q^M(\mathfrak{h})$ e $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$, che chiamiamo *accoppiamento di Poisson quantico*, che è un analogo quantico degli accoppiamenti di Hopf $F[H] \otimes U(\mathfrak{h}) \to k$ e $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$, $F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$ e dell'accoppiamento di bialgebre di Lie $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to k$, e che estende l'accoppiamento (di Hopf) quantico già noto $F_q^P[G] \otimes U_q^Q(\mathfrak{g}) \to k(q)$; in aggiunta, a livello classico esso fornisce per specializzazione dei *nuovi* interessanti accoppiamenti $F[G] \times F[H] \to k$, $F^\infty[G] \times F[H] \to k$ che rispettano le strutture di Poisson. Come corollario otteniamo una nuova dimostrazione, molto semplice, del risultato di [D-K-P], [D-P], già citato, la cui dimostrazione originale invece è estremamente lunga e complicata (cfr. Teorema 9.3). Infine siamo in grado di estendere tutto questo al contesto generale dei gruppi quantici multiparametrici.

Cambiando punto di vista, ricordiamo che la teoria dei gruppi quantici alle radici dell'unità è strettamente legata a quella dei gruppi algebrici in caratteristica positiva associati a G; questo fatto è una delle cause di maggior interesse per i gruppi quantici, ed è stato osservato inizialmente da Lusztig (cfr. [Lu1] e [Lu2]), ma emerge anche da [D-K], [D-K-P], [D-P]. Così Lusztig ha introdotto tra l'altro un analogo quantico del morfismo di Frobenius; una costruzione parallela viene fatta anche in [D-P] per il gruppo di Poisson duale H. Nel presente lavoro ci occupiamo anche di questi aspetti, e costruiamo esplicitamente *nuovi morfismi di Frobenius quantici* che sono "in dualità" con quelli già noti rispetto all'accoppiamento di Poisson quantico.

Come abbiamo già detto, i metodi che utilizziamo sono ugualmente efficaci nel caso dei gruppi quantici uniparametrici e di quelli multiparametrici: pertanto i risultati che otteniamo sono validi per tutta la famiglia di coppie di gruppi di Poisson (G^τ, H^τ) che si ottengono modificando la struttura di Sklyanin-Drinfel'd con l'introduzione del parametro τ (cfr. [Re], [C-V1], [C-V2], e [D-K-P], §7.7(c)); in particolare quindi diamo una soluzione del "problema locale" per una vasta classe di gruppi di Poisson risolubili (i gruppi H^τ appunto). Per una maggior chiarezza di esposizione sviluppiamo prima il caso uniparametrico, per il quale il macchinario tecnico da utilizzare è un po' meno pesante; in seguito estendiamo tutto al caso multiparametrico, indicando brevementee le modifiche da apportare al procedimento già visto, che sono poche e non sostanziali.

Spieghiamo ora brevemente la strategia seguita in questo lavoro. L'idea fondamentale è studiare il duale lineare $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})^*$ di $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$; poiché $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$ è quoziente del Drinfel'd's double $D\left(U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-), U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi\right)$, il suo duale è immerso in $D\left(U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-), U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi\right)^*$; dato che $D\left(U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-), U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi\right)$ è isomorfo ad un prodotto tensoriale di algebre di Borel quantiche, $D\left(U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-), U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi\right) \cong U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+) \otimes U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-)$, per il duale si ha $D\left(U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-), U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi\right)^* \cong U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_+)^* \widehat{\otimes}\, U^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{b}_-)^*$; ora, l'esistenza di accoppiamenti di Hopf perfetti tra algebre di Borel quantiche di segno opposto consente di identificare i duali lineari di tali algebre con opportuni completamenti delle algebre con segno opposto: questo ci consente di trovare una presentazione di $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})^*$ per generatori e relazioni — analoga a quella esistente per $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$ — che ci induce a *definire* $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{h}) := U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})^*$ (dove M' dipende da M) e ci consente di ottenere tutti i risultati annunciati; in ragione della loro costruzione chiamiamo i nuovi oggetti — gli $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{h})$ — *gruppi formali quantici (multiparametrici)*.

In alternativa alla strategia ora delineata presentiamo anche un altro approccio, in termini di altri *nuovi* oggetti — indicati con $F^{M,\infty}_{q,\varphi}[G]$ — che chiamiamo *gruppi quantici (multiparametrici) formali*; la terminologia *simile* ma *differente* manifesta il fatto che $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{h})$ e $F^{M,\infty}_{q,\varphi}[G]$ forniscono due quantizzazioni *diverse* dei *medesimi* oggetti classici $U(\mathfrak{h}^\tau)$ e $F^\infty[G^\tau]$, le quali prendono spunto da due diversi modi di realizzare $F^\infty[G^\tau]$. In effetti anche questo secondo approccio dà risultati interessanti: precisamente sviluppiamo un modo alternativo di costruire quantizzazioni di $F^\infty[G^\tau]$ e $U(\mathfrak{h}^\tau)$, *diverse* da quelle ottenute per mezzo dei gruppi formali quantici (multiparametrici). Questo risultato e la sua intrinseca "naturalezza" rendono interessante anche il metodo dei gruppi quantici (multiparametrici) formali, sebbene sia più debole — per varie ragioni — di quello dei gruppi formali quantici (multiparametrici); così presentiamo tale metodo alternativo sia per maggior completezza sia anche per favorire, per contrasto, una più profonda comprensione del metodo principale, quello dei gruppi formali quantici (multiparametrici).

Diamo infine una breve "guida alla lettura".

Il Capitolo I è dedicato a introdurre le nozioni classiche: nel §1 definiamo le strutture algebriche e geometriche di cui parliamo *in generale*, mentre nel §2 definiamo i gruppi di Poisson *particolari* che vogliamo quantizzare.

Il Capitolo II tratta la quantizzazione uniparametrica. I paragrafi da 3 a 6 sono una raccolta di risultati noti, principalmente tratti da [D-L] (non di meno, intervengono alcune modifiche — lievi nella sostanza, ma significative dal punto di vista tecnico — necessarie per presentare in forma coerente risultati tratti da fonti diverse). Nel §3 definiamo le sottoalgebre di Borel quantiche, le loro forme intere, e i ben noti accoppiamenti tra di esse (che qui chiamiamo accoppiamenti DRT); il §4 è dedicato al "quantum double" di Drinfel'd, la cui costruzione è presa da [D-L], §4; nel §5 introduciamo le algebre inviluppanti universali quantiche (o quantizzate) $U^M_q(\mathfrak{g})$, seguendo [D-L] e [D-P], e richiamiamo i risultati sulla specializzazione delle loro forme intere e l'esistenza di morfismi di Frobenius quantici; nel §6 trattiamo le algebre quantiche di funzioni, traendo definizioni e risultati su $F^M_q[B_\pm]$ e $F^M_q[G]$ da [D-L].

I paragrafi da 7–10 (insieme ai §§12–15 che li estendono al caso multiparametrico) costituiscono la parte originale della presente tesi. Il §7 è il nócciolo del lavoro: usando il linguaggio dei gruppi formali quantici (che introduciamo appositamente), studiamo il duale di $U^{M'}_q(\mathfrak{g})$, immerso nel duale di un quantum double, e miglioriamo vari risultati di [D-L], preparando così il terreno per la parte sostanziale della tesi. Nel §8 assiomatizziamo i risultati del §7 introducendo le algebre inviluppanti universali quantiche (o quantizzate) $U_q^M(\mathfrak{h})$ e le loro forme intere. Il §9 è dedicato alla specializzazione alle radici dell'unità: in particolare per $q \to 1$ dimostriamo che i nuovi gruppi quantici $U_q^M(\mathfrak{h})$ forniscono una quantizzazione di $U(\mathfrak{h})$ e di $F^\infty[G]$, dimostriamo che $\mathcal{F}_Q[G]$ è una deformazione quantica di $U(\mathfrak{h})$, come congetturato, e proviamo anche che l'accoppiamento di Poisson quantico "quantizza" gli accoppiamenti classici (di Hopf e di Poisson) che caratterizzano una coppia di gruppi di Poisson (o gruppi di Poisson formali) duali l'uno dell'altro, e ne fornisce di nuovi; quando poi $q \to \varepsilon$ (dove ε è una radice ℓ–esima primitiva dell'unità, con ℓ dispari) costruiamo morfismi di Frobenius quantici $\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})$, $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$, $\mathcal{F}_\varepsilon^Q[G] \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1^Q[G]$ analoghi a quelli già noti introdotti in [Lu3], [D-L], [D-P], e di essi "duali" rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici. Infine nel §10 introduciamo i gruppi quantici formali: di essi diamo una presentazione per generatori e relazioni, li confrontiamo con i gruppi formali quantici, e infine dimostriamo vari risultati di specializzazione.

Aggiungiamo inoltre una Appendice che descrive in dettaglio il caso di $G = SL(2,k)$ come esempio illuminante.

Il Capitolo III infine tratta la quantizzazione multiparametrica, imitando procedure e dimostrazioni del Capitolo II: così richiamiamo rapidamente il materiale necessario sui gruppi quantici multiparametrici (tratto principalmente da [C-V1], [C-V2]) e poi adattiamo al caso generale le argomentazioni usate nel Capitolo II, estendendo così i risultati là esposti. Dunque nel §11 richiamiamo i risultati noti, e nei §§12–15 generalizziamo passo per passo le costruzioni e i risultati dei §§7–10.

CAPITOLO I
GLI OGGETTI CLASSICI

§ 1 Definizioni fondamentali

1.1 Strutture di Hopf. Sia R un anello commutativo con unità $1 \in R$.

Per definizione una R–**algebra** è un R–modulo A insieme con un morfismo di R–moduli $m: A \otimes_R A \longrightarrow A$, detto **moltiplicazione** o **prodotto** di A; si dice che A (oppure m) è **associativa** se $m \circ (id_A \otimes m) = m \circ (m \otimes id_A)$, cioè è commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R A \otimes_R A & \xrightarrow{id_A \otimes m} & A \otimes_R A \\ {\scriptstyle m \otimes id_A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle m} \\ A \otimes_R A & \xrightarrow[m]{} & A \end{array}$$

Infine si dice **unità** di A (se esiste) un morfismo di R–moduli $u: R \longrightarrow A$ (unico, se esiste) tale che $m \circ (id_A \otimes u) = j_d$, $m \circ (u \otimes id_A) = j_s$ (dove $j_d: A \otimes_R R \xrightarrow{\cong} A$, $j_s: R \otimes_R A \xrightarrow{\cong} A$), cioè siano commutativi i seguenti diagrammi

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R R & \xrightarrow{id_A \otimes u} & A \otimes_R A \\ {\scriptstyle j_d}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow[id_A]{} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R \otimes_R A & \xrightarrow{u \otimes id_A} & A \otimes_R A \\ {\scriptstyle j_s}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow[id_A]{} & A \end{array}$$

per abuso di notazione si dice anche unità di A l'elemento $u(1)$ di A, indicato ancora con 1.

Indicheremo dunque un'**algebra (associativa) con unità**, o **unitaria**, con una terna (A, m, u), in cui m è il prodotto e u è l'unità: tali oggetti formano chiaramente una categoria.

In particolare si dice che A (oppure m) è **commutativa** se $m \circ \sigma = id_A \circ m$ (dove $\sigma: x \otimes y \mapsto y \otimes x$), cioè è commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R A & \xrightarrow{\sigma} & A \otimes_R A \\ {\scriptstyle m}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow[id_A]{} & A \end{array}$$

Le definizioni ora date possono essere dualizzate considerando la categoria duale: in pratica quindi le nozioni duali si ottengono invertendo le frecce nelle definizioni e nei diagrammi su scritti, e nella notazione un prefisso "co-" indicherà questo tipo di genesi.

Per definizione una R**–coalgebra** è un R–modulo C insieme con un morfismo di R–moduli $\Delta\colon C \longrightarrow C \otimes_R C$, detto **comoltiplicazione** o **coprodotto** di C; si dice che C (oppure Δ) è *coassociativa* se $(id_C \otimes \Delta)\circ\Delta = (\Delta \otimes id_C)\circ\Delta$, cioè è commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_R C \otimes_R C & C \otimes_R C \arrow[l, "id_C \otimes \Delta"'] \\
C \otimes_R C \arrow[u, "\Delta \otimes id_C"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Infine si dice **counità** di C (se esiste) un morfismo di R–moduli $\epsilon\colon C \longrightarrow R$ (unico, se esiste) tale che $(id_C \otimes \epsilon)\circ\Delta = j_d$, $(\epsilon \otimes id_C)\circ\Delta = j_s$ (dove $j_d\colon C \stackrel{\cong}{\longrightarrow} C \otimes_R R$, $j_s\colon C \stackrel{\cong}{\longrightarrow} R \otimes_R C$), cioè siano commutativi i seguenti diagrammi

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_R R & C \otimes_R C \arrow[l, "id_C \otimes \epsilon"'] \\
C \arrow[u, "j_d"] & C \arrow[l, "id_C"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \otimes_R C & C \otimes_R C \arrow[l, "\epsilon \otimes id_C"'] \\
C \arrow[u, "j_s"] & C \arrow[l, "id_C"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Indicheremo dunque una **coalgebra (coassociativa) con counità**, o **counitaria**, con una terna (C, Δ, ϵ), in cui Δ è il prodotto e Δ è l'unità: tali oggetti formano chiaramente una categoria.

In particolare si dice che C (oppure Δ) è **cocommutativa** se $\sigma\circ\Delta = \Delta\circ id_A$ (dove $\sigma\colon x \otimes y \mapsto y \otimes x$), cioè è commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_R C & C \otimes_R C \arrow[l, "\sigma"'] \\
C \arrow[u, "\Delta"] & C \arrow[l, "id_C"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Nota: Per convenzione i valori $\Delta(x)$, per $x \in C$, si indicano con la "notazione σ", cioè si scrive $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ $(\in C \otimes_R C)$; se Δ è coassociativa si ha $(\Delta \otimes id_C)\circ\Delta = (id_C \otimes \Delta)\circ\Delta$, e per induzione l'operazione ottenuta applicando successivamente Δ ad uno qualunque dei fattori tensoriali coinvolti ad ogni passo per un numero n di volte non dipende dalla scelta di tali fattori ma soltanto da $n \in \mathbb{N}$: in particolare tale operazione è uguale a $\prod_{k=0}^{n-1} \Delta \otimes ({id_C}^{\otimes k})$ (scegliendo ogni volta il primo fattore), dunque si pone

$$\Delta^{(n)} := \prod_{k=0}^{n-1} \Delta \otimes ({id_C}^{\otimes k}) = ((\cdots((\Delta \underbrace{\otimes id_C) \otimes id_C) \otimes \cdots \otimes id_C) \otimes id_C)}_{n-1} \circ$$

$$\circ((\cdots((\Delta \underbrace{\otimes id_C) \otimes id_C) \otimes \cdots \otimes id_C) \otimes id_C)}_{n-2} \circ \cdots \circ((\Delta \otimes id_C) \otimes id_C)\circ(\Delta \otimes id_C)\circ\Delta$$

e si scrive $\Delta^{(n)}(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \cdots \otimes x_{(n+1)}$ per ogni $x \in C$, $n \in \mathbb{N}$.

Una R–**bialgebra** ora è una cinquina $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ tale che (B, m, u) sia una R–algebra, (B, Δ, ϵ) sia una R–coalgebra, e le due strutture siano compatibili, nel senso che $m: B \otimes_R B \longrightarrow B$ sia un morfismo di R–coalgebre (dove $B \otimes_R B$ ha una struttura canonica di R–coalgebra, data da $\Delta_{B \otimes_R B}(x \otimes y) := \sum_{(x),(y)} (x_{(1)} \otimes y_{(1)}) \otimes (x_{(2)} \otimes y_{(2)})$), $\Delta: B \to B \otimes_R B$ sia un morfismo di R–algebre (dove $B \otimes_R B$ è una R–algebra con prodotto $m_{B \otimes_R B}((x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2)) := x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$), e così anche $u: R \to B$ sia un morfismo di R–coalgebre e $\epsilon: B \to R$ sia un morfismo di R–algebre; tali oggetti formano chiaramente una categoria.

Sia ora H una bialgebra sull'anello R: chiamiamo **antipodo** di H un morfismo di R–moduli $S: H \longrightarrow H$ (unico, se esiste) tale che

$$S * id_H := m \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta = u \circ \epsilon \,, \qquad id_H * S := m \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta = u \circ \epsilon$$

cioè siano commutativi i seguenti diagrammi

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{u \circ \epsilon} & H \\ {\scriptstyle \Delta}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle m} \\ H \otimes_R H & \xrightarrow[S \otimes id_H]{} & H \otimes_R H \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{u \circ \epsilon} & H \\ {\scriptstyle \Delta}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle m} \\ H \otimes_R H & \xrightarrow[id_H \otimes S]{} & H \otimes_R H \end{array}$$

Una R–bialgebra H dotata di antipodo S si dice **algebra di Hopf**: dunque un'algebra di Hopf è definita da una sestupla $(H, m, u, \Delta, \epsilon, S)$; tali oggetti formano chiaramente una categoria.

Date due R–algebre di Hopf H e K, si dice **accoppiamento di Hopf** tra H e K un accoppiamento bilineare $\langle \; , \; \rangle: H \otimes K \longrightarrow R$ tale che

$$\langle x \cdot y, z \rangle = \langle x \otimes y, \Delta(z) \rangle \,, \qquad \langle x, z \cdot w \rangle = \langle \Delta(x), z \otimes w \rangle$$
$$\langle 1, z \rangle = \epsilon(z) \,, \quad \langle x, 1 \rangle = \epsilon(x) \,, \quad \langle S(x), z \rangle = \langle x, S(z) \rangle$$

(assumendo $\big\langle x \otimes y, z \otimes w \big\rangle := \langle x, z \rangle \cdot \langle z, w \rangle$) per ogni $x, y \in H$, $z, w \in K$.

Un accoppiamento di Hopf si dice **perfetto** se è non degenere: in tal caso diremo che H e K sono algebre di Hopf duali l'una dell'altra (o che sono in dualità di Hopf), e penseremo l'una come algebra di funzioni sull'altra: con l'espressione **dualità di Hopf** faremo quindi riferimento alla relazione tra due algebre di Hopf duali l'una dell'altra nel senso ora precisato.

Vogliamo ora generalizzare le nozioni precedenti, introducendo categorie più vaste, considerando anche strutture topologiche (cfr. [Di], ch. I).

Per cominciare, sia E uno spazio vettoriale su un campo K (si può poi generalizzare più o meno tutto ciò che segue al caso dei moduli su un anello), e sia E^* il suo duale (lineare); scriveremo com'è usuale $\langle x^*, x \rangle$ per $x^*(x)$ quando $x \in E$ e $x^* \in E^*$. Definiamo su E^* la topologia $\sigma(E^*, E)$ come la topologia meno fine tale che per ogni $x \in E$ la trasformazione lineare $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle$ di E^* in K sia continua, quando K sia dotato della topologia discreta. Pertanto un sistema fondamentale di intorni di 0 in E^* consiste delle intersezioni finite di iperpiani definiti da equazioni $\langle x^*, x_j \rangle = 0$ per ogni successione finita $\{x_j\}_j$ in E; si noti che tali intorni hanno codimensione finita in E^*. Un modo conveniente di descrivere questa topologia consiste nello scegliere una base $\{e_i\}_{i \in I}$ di E: ad ogni $i \in I$ associamo la corrispondente forma lineare (coordinata) e_i^* su E tale che $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$, e diciamo che la famiglia $\{e_i^*\}_{i \in I}$ è la *pseudobase* di E^* duale di $\{e_i\}_{i \in I}$; allora il sottospazio E' di E che è generato (algebricamente) dagli e_i^* è denso in E^*, e E^* non è altro che il *completamento* di E', quando E' sia dotato della topologia per cui un sistema fondamentale di intorni di 0 consista dei sottospazi vettoriali che contengono quasi tutti gli e_i^*; così gli elementi di E^* possono essere descritti da serie negli e_i^* che nella topologia assegnata sono in effetti convergenti. Infine, gli spazi vettoriali topologici E^* sono caratterizzati dalla proprietà di compattezza lineare.

Quando si dualizza due volte, ogni forma lineare su E^* che sia continua per la topologia $\sigma(E^*, E)$ è necessariamente del tipo $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle$ per un unico $x \in E$, quindi si riottiene E come duale topologico di E^*.

Se ora E, F sono due spazi vettoriali su K, siano E^*, F^* i loro spazi duali, con le topologie $\sigma(E^*, E)$, $\sigma(F^*, F)$; per ogni applicazione lineare $u: E \to F$, la sua applicazione trasposta $u^*: F^* \to E^*$ è continua, e viceversa per ogni applicazione lineare $v: F^* \to E^*$ che sia continua esiste un'unica applicazione lineare $u: E \to F$ tale che $v = u^*$.

Quando si considerano prodotti tensoriali, $E^* \otimes F^*$ si identifica naturalmente ad un sottospazio di $(E \otimes F)^*$ tramite la formula $\langle x^* \otimes y^*, x \otimes y \rangle := \langle x^*, x \rangle \cdot \langle y^*, y \rangle$. In aggiunta, questa formula mostra che se $\{e_i\}_{i \in I}$ e $\{f_j\}_{j \in J}$ sono basi di E e F rispettivamente, ed $\{e_i^*\}_{i \in I}$ e $\{f_j^*\}_{j \in J}$ le loro pseudobasi duali in E^* e F^*, allora $\{e_i^* \otimes f_j^*\}_{i \in I, j \in J}$ è la pseudobase duale di $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$ in $(E \otimes F)^*$. Questo prova subito che $(E \otimes F)^*$ è il completamento di $E^* \otimes F^*$ per la topologia prodotto del prodotto tensoriale, cioè la topologia di $E^* \otimes F^*$ per la quale un sistema fondamentale di intorni di 0 consista degli insiemi $E^* \otimes V + W \otimes F^*$ dove V, risp. W, varia in un sistema fondamentale di intorni di 0 composto di sottospazi vettoriali di F^*, risp. E^*; questo completamento è denotato anche con $E^* \widehat{\otimes} F^*$ ed è chiamato *prodotto tensoriale completato* (o *topologico*) di E^* e F^*; l'immersione naturale di $E^* \otimes F^*$ in $(E \otimes F)^* = E^* \widehat{\otimes} F^*$ è allora ovviamente continua. Infine, quando $u: E_1 \to E_2$, $v: F_1 \to F_2$ sono applicazioni lineari, l'applicazione trasposta

$$(u \otimes v)^*: (E_2 \otimes F_2)^* = E_2^* \widehat{\otimes} F_2^* \longrightarrow (E_1 \otimes F_1)^* = E_1^* \widehat{\otimes} F_1^*$$

coincide con l'estensione continua (cioè per continuità) a $E_2^* \widehat{\otimes} F_2^*$ dell'applicazione continua $u^* \otimes v^*: E_2^* \otimes F_2^* \to E_1^* \otimes F_1^*$; perciò si indica anche con $u^* \widehat{\otimes} v^*$.

Detto questo, definiamo *algebra linearmente compatta* un'algebra topologica il cui sottostante spazio vettoriale (o modulo libero) sia linearmente compatto (si noti che questa è esattamente la stessa definizione di [Di], ch. I, §2.7, tranne per il fatto che non richiediamo la commutatività): allora le algebre linearmente compatte formano una sottocategoria piena della categoria delle algebre topologiche (in cui quelle di dimensione finita sono quelle discrete); inoltre per ogni coppia di oggetti A_1 e A_2 in questa categoria è definito il loro prodotto tensoriale topologico $A_1 \widehat{\otimes} A_2$.

Dualmente, nella categoria degli spazi vettoriali linearmente compatti definiamo *coalgebra linearmente compatta* una terna (C, Δ, ϵ) con $\Delta: C \to C \widehat{\otimes} C$ e $\epsilon: C \to K$ che soddisfino gli usuali assiomi di coalgebra già introdotti.

Si può allora verificare (con le stesse argomentazioni di [Di], ch. I, che non necessitano mai della commutatività né della cocommutatività) che $(\ )^*\colon (A,m,u) \mapsto (A^*,m^*,u^*)$ definisce un funtore controvariante dalle algebre alle coalgebre linearmente compatte, mentre $(\ )^*\colon (C,\Delta,\epsilon) \mapsto (C^*,\Delta^*,\epsilon^*)$ definisce un funtore controvariante dalle coalgebre alle algebre linearmente compatte.

Infine definiamo **algebra di Hopf formale** una sestupla $(H,m,u,\Delta,\epsilon,S)$ tale che (H,m,u) sia un'algebra linearmente compatta, (H,Δ,ϵ) sia una coalgebra linearmente compatta, e siano soddisfatti gli assiomi di compatibilità (tra m, u, Δ, ϵ e S) di un'algebra di Hopf. Nel seguito considereremo anche le "usuali" algebre di Hopf come particolari algebre di Hopf formali, in quanto la categoria delle algebre di Hopf è contenuta nella categoria delle algebre di Hopf formali.

Più in generale, possiamo definire strutture di Hopf anche per spazi vettoriali (o moduli) topologici H per i quali sia definita una struttura di spazio vettoriale (o modulo) topologico su un opportuno completamento $H \mathbin{\widehat{\otimes}} H$ di $H \otimes H$, estendendo quanto già fatto per gli spazi linearmente compatti, cioè in sostanza sostituendo $H \otimes H$ con $H \mathbin{\widehat{\otimes}} H$ nella definizione della comoltiplicazione. Se H è un tale spazio, definiamo **algebra di Hopf topologica** una sestupla $(H,m,u,\Delta,\epsilon,S)$, tale che (H,m,u) sia un'algebra topologica, $\Delta\colon H \to H \mathbin{\widehat{\otimes}} H$ e $\epsilon\colon H \to k$ siano morfismi di algebre topologiche, $S\colon H \to H$ sia un'applicazione continua, e siano soddisfatti i varî assiomi di compatibilità di un'algebra di Hopf. Le algebre di Hopf formali allora non sono altro che un caso particolare di algebre di Hopf topologiche.

Infine estendiamo la nozione di accoppiamento di Hopf anche al caso di accoppiamenti tra algebre di Hopf formali.

Bibliografia: Per una trattazione diffusa dei concetti ora introdotti si può fare riferimento a testi standard sulle algebre di Hopf, quali [M-M], [Sw] e [Ab], e a [Di], ch. I, per le algebre di Hopf formali.

1.2 Strutture di Lie. Sia R un anello commutativo con unità.

Un'**algebra di Lie** su R è un R–modulo con un morfismo (di R–moduli) $[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ (detto *bracket* o *parentesi* o *prodotto di Lie*) tale che

$$[x,x] = 0\,, \quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0\,, \qquad \forall\, x,y,z \in \mathfrak{g}\,.$$

Una **coalgebra di Lie** su R è un R–modulo $\mathfrak{g}$ con un morfismo (di R–moduli) $\delta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g}$ (detto *cobracket* o *coparentesi* o *coprodotto di Lie*) tale che

$$\delta(x) + \sigma\big(\delta(x)\big) = 0\,, \quad Alt\Big(\delta \otimes id_{\mathfrak{g}}\big(\delta(x)\big)\Big) = 0\,, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{g}\,,$$

dove $\sigma\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ è data da $\sigma(x \otimes y) := y \otimes x$ (dunque $\delta(x)$ è antisimmetrico, in altre parole $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$) e $Alt(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) := \sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}$.

Nota: dalle definizioni stesse segue che algebra di Lie e coalgebra di Lie sono nozioni duali l'una dell'altra, nel senso che (assumendo per semplicità che i moduli in esame siano finitamente generati)

$$\Big(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]\Big) \text{ è un'algebra di Lie } \iff \Big(\mathfrak{g}^*, [\ ,\ ]^*\Big) \text{ è una coalgebra di Lie}$$

e viceversa

$$\Big(\mathfrak{g},\delta\Big) \text{ è una coalgebra di Lie } \iff \Big(\mathfrak{g}^*,\delta^*\Big) \text{ è un'algebra di Lie}$$

dove $\mathfrak{g}^*$ é il duale lineare di $\mathfrak{g}$ e T^* indica il morfismo duale di un morfismo (R–lineare) T.

Osserviamo anche che — come nel caso delle algebre e coalgebre — le proprietà di cui godono le operazioni di un'algebra di Lie o una coalgebra di Lie possono essere espresse in termini di diagrammi commutativi, e allora appare chiaro che le due nozioni si ottengono l'una dall'altra invertendo le frecce nei diagrammi.

Una **bialgebra di Lie** su R è una terna $\Big(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\delta\Big)$ tale che $\Big(\mathfrak{g},[\ ,\ ]\Big)$ sia un'algebra di Lie, $\Big(\mathfrak{g},\delta\Big)$ sia una coalgebra di Lie, e le due strutture siano compatibili, nel senso che

$$\delta\Big([x,y]\Big) = ad_x\Big(\delta(y)\Big) - ad_y\Big(\delta(x)\Big) \qquad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}$$

dove ad_z indica l'azione aggiunta (di $\mathfrak{g}$) su $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ data da $ad_z(u\otimes v) := [z,u]\otimes v + u\otimes[z,v]$ (in altre parole, si richiede che δ sia un 1–cociclo rispetto all'azione aggiunta di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$).

Dall'osservazione precedente segue che se $\Big(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\delta\Big)$ è una bialgebra di Lie, allora anche la terna duale $\Big(\mathfrak{g}^*,\delta^*,[\ ,\ ]^*\Big)$ è una bialgebra di Lie; dunque la nozione di bialgebra di Lie è in un certo senso *autoduale*.

Nel seguito useremo anche l'espressione **struttura di Poisson (su $\mathfrak{g}$)** per indicare una struttura di bialgebra di Lie (su $\mathfrak{g}$) che estenda una struttura di algebra di Lie (su $\mathfrak{g}$).

Date due R–bialgebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, si dice **accoppiamento di Poisson** o **accoppiamento di bialgebre di Lie** tra $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ un accoppiamento bilineare $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}\longrightarrow R$ tale che

$$\Big\langle [x,y],z\Big\rangle = \Big\langle x\otimes y,\delta(z)\Big\rangle\,, \qquad \Big\langle x,[z,w]\Big\rangle = \Big\langle \delta(x),z\otimes w\Big\rangle$$

per ogni $x,y\in\mathfrak{g}$, $z,w\in\mathfrak{h}$. Diremo **perfetto** un accoppiamento di Poisson non degenere: in tal caso diremo che $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sono bialgebre di Lie duali l'una dell'altra, e con l'espressione **dualità di Poisson** (tra bialgebre di Lie) faremo riferimento alla relazione tra bialgebre di Lie duali l'una dell'altra nel senso ora precisato.

Consideriamo ora un altro approccio alle bialgebre di Lie. Si definisce **terna di Manin** una terna $(\mathfrak{k},\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ di algebre di Lie in cui $\mathfrak{k}$ sia dotata di un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ simmetrico, non degenere ed invariante (rispetto all'azione aggiunta) tale che

(a) $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ siano sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{k}$
(b) $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ come R–moduli
(c) $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ siano isotrope massimali rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$.

L'equivalenza di cui sopra si stabilisce allora come segue: data una bialgebra di Lie $\Big(\mathfrak{g},[\ ,\ ],\delta\Big)$ si costruisce univocamente una struttura di terna di Manin sulla terna $\Big(\mathfrak{g}\bowtie\mathfrak{g}^*,\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*\Big)$, dove $\mathfrak{g}\bowtie\mathfrak{g}^*$ indica $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ con una struttura di algebra di Lie univocamente determinata in termini di $[\ ,\ ]$ e δ; viceversa, data una terna di Manin $(\mathfrak{k},\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, esistono isomorfismi canonici $\mathfrak{h}\cong\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{h}^*$ così che $\Big(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}},[\ ,\ ]_{\mathfrak{h}}^*\Big)$ e $\Big(\mathfrak{h},[\ ,\ ]_{\mathfrak{h}},[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}^*\Big)$

siano bialgebre di Lie, e allora anche $\mathfrak{k}$ è una bialgebra di Lie. Dunque l'equivalenza mette in corrispondenza le terne di Manin con le coppie di bialgebre di Lie duali l'una dell'altra.

Bibliografia: Le algebre di Lie costituiscono un argomento classico e ben noto in tutta la matematica, sul quale esiste una vastissima letteratura. Coalgebre e bialgebre di Lie sono invece nozioni recenti, introdotte da Drinfel'd (cfr. [Dr1]) e Taft (cfr. [Ta]); la corrispondenza tra bialgebre di Lie e terne di Manin è spiegata in [Dr1].

1.3 Strutture di Poisson. Sia R un anello commutativo con unità.

Un'**algebra di Poisson (linearmente compatta)** su R è una quaterna $\big(\mathcal{A}, m, u, \{\ ,\ \}\big)$ tale che $(\mathcal{A}, m, u)$ sia un'algebra associativa unitaria (cioè con unità) commutativa (linearmente compatta), $\big(\mathcal{A}, \{\ ,\ \}\big)$ sia un'algebra di Lie, e le due strutture siano compatibili, nel senso che sia soddisfatta l'*identità di Leibniz*

$$\{a, b\,c\} = \{a,b\}c + b\{a,c\} \qquad \forall\, a,b,c \in \mathcal{A}$$

cioè si abbia

$$\{\ ,\ \}\circ\big(id_{\mathcal{A}} \otimes m\big) = m\circ\Big(\{\ ,\ \} \otimes id_{\mathcal{A}}\Big) + m\circ\Big(id_{\mathcal{A}} \otimes \{\ ,\ \}\Big)\circ\sigma_{12}$$

dove $\sigma_{12}\colon x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \mapsto x_2 \otimes x_1 \otimes x_3$.

Una **coalgebra di Poisson (linearmente compatta)** su R è una quaterna $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon, \delta)$ tale che $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ sia una coalgebra coassociativa counitaria (cioè con counità) cocommutativa (linearmente compatta), $(\mathcal{C}, \delta)$ sia una coalgebra di Lie, e le due strutture siano compatibili, nel senso che sia soddisfatta la *coidentità di Leibniz*

$$\big(id_{\mathcal{C}} \otimes \Delta\big)\circ\big(\delta(x)\big) = \sum_{(x)} \Big(\delta\big(x_{(1)}\big) \otimes x_{(2)} + \sigma_{12}\big(x_{(1)} \otimes \delta\big(x_{(2)}\big)\big)\Big) \qquad \forall\, x \in \mathcal{C}$$

cioè si abbia

$$\big(id_{\mathcal{C}} \otimes \Delta\big)\circ\delta = \big(\delta \otimes id_{\mathcal{C}}\big)\circ\Delta + \sigma_{12}\circ\big(id_{\mathcal{C}} \otimes \delta\big)\circ\Delta$$

dove $\sigma_{12}\colon x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \mapsto x_2 \otimes x_1 \otimes x_3$.

Nota: Anche in questo caso le due nozioni sono duali l'una dell'altra, nello stesso senso della *Nota* in §1.2.

Un'**algebra di Hopf Poisson (formale)** su R è una settupla $\big(\mathcal{P}, m, u, \Delta, \epsilon, S, \{\ ,\ \}\big)$ tale che $(\mathcal{P}, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ sia un'algebra di Hopf (formale) commutativa, $\big(\mathcal{P}, m, u, \{\ ,\ \}\big)$ sia un'algebra (linearmente compatta) di Poisson, e le due strutture siano compatibili, nel senso che valgano le identità

$$\Delta\big(\{f,g\}\big) = \big\{\Delta(f), \Delta(g)\big\}\,, \quad S\big(\{f,g\}\big) = \big\{S(g), S(f)\big\}\,, \quad \epsilon\big(\{f,g\}\big) = 0 \qquad \forall\, f,g \in \mathcal{P}$$

dove il bracket di Poisson su $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ è definito canonicamente da

$$\{h \otimes k, p \otimes q\} := \{h,p\} \otimes kq + hk \otimes \{p,q\}\,.$$

Una **coalgebra di Hopf Poisson (formale)** su R è una settupla $\big(\mathcal{K}, m, u, \Delta, \epsilon, S, \delta\big)$ tale che $(\mathcal{K}, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ sia un'algebra di Hopf (formale) cocommutativa, $(\mathcal{K}, \Delta, \epsilon, \delta)$ sia una coalgebra di Poisson (linearmente compatta), e le due strutture siano compatibili, nel senso che valgano le identità

$$\delta(a{\cdot}b) = \delta(a){\cdot}\Delta(b){+}\Delta(a){\cdot}\delta(b)\,,\ \delta\big(S(a)\big) = \big(S{\otimes}S\big)\big(\delta(a)\big)\,,\ \big(\epsilon{\otimes}\epsilon\big)\big(\delta(a)\big) = 0 \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{K}\,.$$

Bibliografia: La nozione di algebra di Poisson (eventualmente linearmente compatta) è classica è ben nota, così come le nozioni ad essa collegate (coalgebra di Poisson, algebra di Hopf Poisson formale, ecc.), cfr. ad esempio [Bra] e [K-V].

1.4 Gruppi di Poisson. Com'è noto, le varietà algebriche affini su un campo k possono essere messe in corrispondenza con le k–algebre commutative di un certo tipo: tale corrispondenza si esprime rigorosamente in una antiequivalenza di categorie; più in generale la categoria degli schemi affini su un anello R è antiequivalente alla categoria delle R–algebre commutative (associative unitarie).

Se nella categoria delle algebre commutative (associative unitarie) isoliamo la sottocategoria delle algebre di Hopf, il corrispondente geometrico è la categoria dei gruppi algebrici (o degli schemi in gruppo) affini. Se invece isoliamo la sottocategoria delle algebre di Poisson, allora il corrispondente geometrico è la categoria delle varietà algebriche (o degli schemi) di Poisson. Se poi isoliamo la sottocategoria intersezione, cioè quella delle algebre di Hopf Poisson, allora nel contesto geometrico si individua la categoria dei gruppi algebrici (o degli schemi in gruppo) di Poisson affini. Se infine ci allarghiamo a considerare la categoria più ampia delle algebre di Hopf Poisson formali otteniamo la categoria dei gruppi algebrici (o degli schemi in gruppo) di Poisson affini formali.

Un analogo discorso può essere fatto considerando diverse categorie iniziali di algebre, e allora si otterrano diverse categorie di oggetti geometrici, quali le varietà topologiche, o differenziabili, o analitiche (reali o complesse), etc. etc., o anche i "germi di varietà" corrispondenti (se consideriamo le algebre linearmente compatte ma non discrete), nelle quali restano allora definiti i gruppi di Poisson topologici, o differenziabili (tra cui quelli di classe C^∞, detti "gruppi di Lie-Poisson"), o analitici (reali o complessi), etc. etc, detti "formali" se l'oggetto geometrico associato è solo un germe di varietà (in altre parole, se l'algebra di Hopf di partenza è formale).

Passiamo dunque a precisare la nozione di gruppo di Poisson.

Sia G un gruppo algebrico affine su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica zero (è facile poi estendere le definizioni al caso più generale degli schemi in gruppo di Poisson su un anello più generale); ad esso è canonicamente associata un'algebra di Lie $\mathfrak{g} := Lie(G)$, identificabile con lo spazio $T_e(G)$ tangente a G nell'identità (che di qui in avanti sarà sempre indicata con $e \in G$); com'è noto, $\mathfrak{g}$ determina localmente il gruppo G in un intorno dell'identità (e consente di ottenere G per integrazione se esso è connesso e semplicemente connesso), o in altri termini ne "codifica" la struttura infinitesimale. Inoltre si associa a G in modo univoco il gruppo formale (o germe di gruppo) G^∞, che geometricamente può essere pensato come un intorno infinitesimale dell'elemento identità $e \in G$.

Alla coppia $(G, \mathfrak{g})$ si associa canonicamente una coppia di algebre di Hopf $(F[G], U(\mathfrak{g}))$, dove $F[G]$ è l'algebra delle funzioni regolari su G e $U(\mathfrak{g})$ è l'algebra inviluppante universale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Ricordiamo che la struttura di Hopf di $F[G]$ è definita da

$$\Delta\big(f\big)(x \otimes y) := f(x \cdot y)\,, \quad S\big(f\big)(x) := f\left(x^{-1}\right)\,, \quad \epsilon\big(f\big) := f(e) \qquad \forall\, x \in G$$

per ogni $f \in F[G]$ (qui si fa uso dell'isomorfismo naturale $F[G \times G] \cong F[G] \otimes_k F[G]$), mentre quella di $U(\mathfrak{g})$ è definita da

$$\Delta(g) := g \otimes 1 + 1 \otimes g\,, \quad S(g) := -g\,, \quad \epsilon(g) := 0$$

per ogni $g \in \mathfrak{g}$ (qui si utilizza il fatto che $U(\mathfrak{g})$ è generata da $\mathfrak{g}$ come algebra).

Inoltre si può anche definire, in modo diretto, il gruppo formale G^∞ univocamente associato a G come "spettro" dell'algebra di Hopf formale $F^\infty[G]$: questa è definita come completamento m_e–adico dell'anello locale $(\mathcal{O}_e, m_e)$ dell'elemento identità $e \in G$, ed è tale che $F^\infty[G] \cong$ *completamento* $\mathfrak{m}_e$*–adico di* $F[G]$ (dove $\mathfrak{m}_e$ è l'ideale massimale di $F[G]$ associato a $e \in G$; basta applicare il Teorema di Intersezione di Krull) e $F^\infty[G] \cong \big(U(\mathfrak{g})\big)^*$ (cfr. [On], Part I, Ch. 3, §2); in particolare abbiamo $F[G] \subseteq F^\infty[G]$, e $F[G]$ è sottoalgebra di Hopf formale di $F^\infty[G]$.

Data l'algebra $F[G]$, la varietà soggiacente a G si ricostruisce come schema massimale di $F[G]$, e la sua struttura di gruppo è data dalla struttura di Hopf di $F[G]$: così $F[G]$ descrive G del tutto in modo globale; d'altra parte, a livello infinitesimale, data $U(\mathfrak{g})$ si ricostruisce lo spazio vettoriale soggiacente a $\mathfrak{g}$ come sottoinsieme degli elementi primitivi (cioè tali che $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$) di $U(\mathfrak{g})$, e la sua struttura di algebra di Lie è data per restrizione da quella naturale di $U(\mathfrak{g})$ (definita da $[x,y] := xy - yx$): così $U(\mathfrak{g})$ descrive completamente $\mathfrak{g}$, e quindi codifica completamente il dato *locale* del gruppo G. D'altra parte lo stesso è vero per $F^\infty[G]$, per definizione o anche perché $F^\infty[G] \cong \big(U(\mathfrak{g})\big)^*$.

Tra $F[G]$ e $U(\mathfrak{g})$ esiste un accoppiamento di Hopf perfetto naturale $\pi\colon F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$: se si realizza $\mathfrak{g}$ come algebra di Lie $Der_s(G)$ delle derivazioni su $F[G]$ invarianti a sinistra, allora $U(\mathfrak{g})$ è l'algebra degli operatori differenziali su $F[G]$ invarianti a sinistra, e quindi π non è altro che la valutazione: $\langle f, \mathcal{D} \rangle = \mathcal{D}(f)$ per ogni funzione f ed ogni operatore differenziale $\mathcal{D}$ invariante a sinistra. Dunque $F[G]$ e $U(\mathfrak{g})$ sono algebre di Hopf duali l'una dell'altra, e l'una opera come algebra di funzioni sull'altra. D'altra parte esiste anche un accoppiamento naturale non degenere $\pi\colon F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$ dato dalla valutazione, giacché $F^\infty[G] \cong \big(U(\mathfrak{g})\big)^*$: tale accoppiamento è estensione di $\pi\colon F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$ (nel senso che il secondo si ottiene per restrizione dal primo, ricordando che $F[G] \subseteq F^\infty[G]$), ed è anch'esso un accoppiamento di Hopf (tra algebre di Hopf formali).

Un **gruppo (algebrico affine) di Poisson** è un gruppo (algebrico affine) G dotato di un 2-tensore antisimmetrico controvariante $\pi\colon G \to Der_s(G) \wedge Der_s(G)$ tale che

$$\pi(xy) = dL_x{\circ}\pi(y) + dR_y{\circ}\pi(x) \qquad\qquad \forall\, x, y \in G$$

dove L_x, risp. R_y, indica la traslazione sinistra, risp. destra, rispetto a $x \in G$, risp. $y \in G$. A livello infinitesimale, ciò corrisponde all'esistenza di una struttura di bialgebra di Lie su $\mathfrak{g}$, cioè

$$G \text{ è un gruppo di Poisson} \implies \mathfrak{g} \text{ è una bialgebra di Lie;}$$

viceversa, questo risultato si inverte localmente, cioè l'esistenza di una struttura di bialgebra di Lie su $\mathfrak{g}$ implica l'esistenza di una struttura di Poisson *locale* su G (nel senso che si ha un 2-tensore π come sopra definito soltanto localmente, in un intorno di $e \in G$); sotto ipotesi aggiuntive tale struttura è *globale*: così ad esempio se G è connesso e semplicemente connesso si ha

$$G \text{ è un gruppo di Poisson } \Longleftarrow \mathfrak{g} \text{ è una bialgebra di Lie.}$$

Più precisamente, se ci poniamo nella categoria dei gruppi di Lie-Poisson (cioè dei gruppi di Poisson differenziabili di classe C^∞) vale un analogo del *Terzo Teorema di Lie*, che stabilisce un'equivalenza tra la categoria dei gruppi di Lie-Poisson connessi semplicemente connessi e la categoria delle bialgebre di Lie.

Dal punto di vista algebrico l'esistenza di strutture di Poisson *geometriche* (cioè su G o su $\mathfrak{g}$) corrisponde all'esistenza di strutture di Poisson o co-Poisson *sulle algebre di Hopf (formali)* associate, secondo lo schema seguente:

- contesto *globale:*

$$G \text{ è un gruppo di Poisson} \Longleftrightarrow F[G] \text{ è un'algebra di Hopf Poisson}$$

- contesto *locale:*

$$\mathfrak{g} \text{ è una bialgebra di Lie} \Longleftrightarrow \begin{cases} U(\mathfrak{g}) & \text{è una coalgebra di Hopf Poisson} \\ F^\infty[G] & \text{è un'algebra di Hopf Poisson formale} \end{cases}$$

in aggiunta (se G è un gruppo di Poisson) le su citate strutture di Poisson e co-Poisson sono duali l'una dell'altra rispetto all'accoppiamento di Hopf $\pi\colon F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$, cioè

$$\Big\langle \{f, g\}, u \Big\rangle = \Big\langle f \otimes g, \delta(u) \Big\rangle$$

per ogni $f, g \in F[G]$, $u \in U(\mathfrak{g})$. Osserviamo infine che se $\Big(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \delta\Big)$ è una bialgebra di Lie, allora la struttura di coalgebra di Hopf Poisson su $U(\mathfrak{g})$ è univocamente determinata, perché $U(\mathfrak{g})$ è generata da $\mathfrak{g}$ (come algebra) e allora la regola $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot \Delta(b) + \Delta(a) \cdot \delta(b)$ $(\forall\, a, b \in U(\mathfrak{g}))$ permette di estendere δ univocamente da $\mathfrak{g}$ a tutta $U(\mathfrak{g})$.

Sia ora G un gruppo di Lie-Poisson: allora $\mathfrak{g}$ è una bialgebra di Lie; in particolare il suo spazio vettoriale duale $\mathfrak{g}^*$ è anch'esso una bialgebra di Lie: per l'analogo del Terzo Teorema di Lie allora esiste un gruppo di Lie connesso semplicemente connesso G^* che è un gruppo di Lie Poisson con bialgebra di Lie tangente $\mathfrak{g}^*$: esso è chiamato **gruppo di Lie-Poisson duale** di G.

Più in generale, se partiamo dal dato infinitesimale di una terna di Manin $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, integrando le tre bialgebre di Lie otteniamo una terna di gruppi di Lie-Poisson connessi semplicemente connessi (K, G, H) tali che $Lie(K) = \mathfrak{k}$, $Lie(G) = \mathfrak{g}$, $Lie(H) = \mathfrak{h}$, e d'altra parte abbiamo degli isomorfismi $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}^*$, per cui diremo che G e H sono gruppi di Lie-Poisson **duali** l'uno dell'altro; inoltre l'isomorfismo di bialgebre di Lie $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h}$ si integra ad un isomorfismo *locale* di gruppi di Lie-Poisson $K \cong G \bowtie H$ (dove $G \bowtie H$ indica il gruppo di Lie $G \times H$ dotato di una struttura di Poisson univocamente determinata da quelle di G e H): in altre parole i *germi di gruppo di Lie-Poisson* di K e $G \bowtie H$ sono isomorfi.

Per "globalizzare" queste nozioni e adattarle al contesto dei gruppi algebrici introduciamo una nuova nozione: si dice **terna algebrica di Manin** (cfr. [D-P], §11.3) una terna di gruppi algebrici (K, G, H) tali che

(a) G e H siano sottogruppi chiusi di K

(b) $K = G \times H$ come gruppi algebrici

(c) la terna "tangente" $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sia una terna di Manin;

in tal caso la struttura di Poisson di K è univocamente determinata da quelle di G e H, e precisamente si ha $K = G \bowtie H$. In particolare se (K, G, H) è una terna algebrica di Manin diremo che G e H sono gruppi di Poisson (algebrici) **duali** l'uno dell'altro, e con l'espressione **dualità di Poisson** (tra gruppi algebrici) faremo riferimento alla relazione tra gruppi (algebrici) di Poisson duali l'uno dell'altro nel senso ora precisato.

Bibliografia: Lo studio dei gruppi di Poisson è parte dello studio delle varietà di Poisson (il quale rientra nell'ambito della geometria simplettica, della quale è uno sviluppo recente); queste ultime sono trattate ad esempio in [Li], [Be], [We1], [B-V], [We2], [D-W], mentre come primi lavori importanti sui gruppi di Poisson ricordiamo tra gli altri [Ma1], [Se], [K-M], [Ko], [L-W], [G-W]: infine [Ca] è una vasta dissertazione sullo "stato dell'arte" nel 1992.

1.6 Forme intere. Sia R un anello (commutativo unitario), e sia R' un sottoanello di R; sia M un R–modulo, e sia M' un R'–sottomodulo piatto di M: si dice che M' è una **forma intera di** M **su** R', o che M' è una R'–**forma di** M, *come* R*–modulo*, se $M \cong R \otimes_{R'} M'$ *come* R*–moduli.* Se poi M è una R–algebra, risp. una R–coalgebra, ecc., si dice che M' è una forma intera di M su R', o che M' è una R'–forma di M, *come* R*–algebra*, risp. *come* R*–coalgebra*, ecc., se $M \cong R \otimes_{R'} M'$ *come* R*–algebre*, risp. *come* R*–coalgebre*, ecc. In particolare condizione sufficiente affinché M' sia R'–forma di M è che M' abbia un sistema di generatori lineari (su R') che sia anche un sistema di generatori lineari (su R) di M.

Se consideriamo R–moduli con una topologia, preciseremo le nozioni precedenti come segue: dato un R–modulo M e un R'–sottomodulo piatto M' ($\subseteq M$), diremo che M' è una **forma intera di** M **su** R', o che M' è una R'–**forma di** M, come R–modulo, *in senso topologico* se esiste un R–sottomodulo *denso* di M, diciamo N, tale che $R \otimes_{R'} M' \cong N$ *come* R*–moduli.* Se poi M è una R–algebra, risp. una R–coalgebra, ecc., si dice che M' è una forma intera di M su R', o che M' è una R'–forma di M, *come* R*–algebra*, risp. *come* R*–coalgebra*, ecc., *in senso topologico* se in aggiunta N è una R–sottoalgebra, risp. una R–sottocoalgebra, ecc., e $R \otimes_{R'} M' \cong N$ *come* R*–algebre*, risp. *come* R*–coalgebre*, ecc. In particolare condizione sufficiente affinché M' sia R'–forma di M è che M' abbia un sistema completo di generatori lineari (su R') che sia anche un sistema completo di generatori lineari (su R) di M.

1.7 Quantizzazione. In questa sezione introduciamo i concetti di quantizzazione e deformazione (quantica) delle strutture algebriche e/o geometriche classiche descritte in precedenza.

Per cominciare, sia R un anello (commutativo unitario), sia A una R–algebra, risp. una R–coalgebra, risp. una R–bialgebra, risp. una R–algebra di Hopf, e siano $h, h_0 \in R$ tali che A sia privo di $(h - h_0)$–torsione (in altri termini, si richiede che $(h - h_0)$ non sia divisore di zero in A); allora il quoziente $A\Big|_{h=h_0} := A\Big/(h - h_0)A$ è un'algebra, risp. una coalgebra, risp. una bialgebra, risp. un'algebra di Hopf, sull'anello $R_0 := R\Big/(h - h_0)R$: chiameremo $A\Big|_{h=h_0} := A\Big/(h - h_0)A$ la *specializzazione di* A *ad* $h = h_0$, o il *limite di* A *per* h *che tende ad* h_0, e useremo allora la notazione $\lim_{h \to h_0} A := A\Big|_{h=h_0}$; osserviamo anche che R_0 è naturalmente una R–algebra, e si ha un isomorfismo canonico $\left(A\Big|_{h=h_0} := \right) A \Big/ (h-h_0)A \cong A \otimes_R R_0$.

In particolare, sia $A = P$ un'algebra, e supponiamo che $P\Big|_{h=h_0}$ sia *commutativa*: posto $[x,y] := xy - yx$ $(\forall\, x, y \in P)$, cioè $[\ ,\ ] := m - m^{\mathrm{op}}$ (dove $m^{\mathrm{op}} := m \circ \sigma$ indica la moltiplicazione *opposta*, con $\sigma \colon x \otimes y \mapsto y \otimes x$), poiché $P\Big|_{h=h_0}$ è commutativa si ha $\overline{[x,y]} = 0 \in P\Big|_{h=h_0}$ (qui e nel seguito $\overline{x}$ indica la classe di x modulo $(h-h_0)$ in $P\Big|_{h=h_0}$, per ogni $x \in P$), quindi $[x,y] \in (h-h_0)P$ e pertanto è ben definito l'elemento $\frac{[x,y]}{(h-h_0)} \in P$; allora per ogni $x_0, y_0 \in P\Big|_{h=h_0}$, presi $x, y \in P$ tali che $\overline{x} = x_0$, $\overline{y} = y_0$, definiamo $\{x_0, y_0\} := \overline{\left(\frac{[x,y]}{(h-h_0)} \right)} \in P\Big|_{h=h_0}$; tale definizione è ben posta (cioè non dipende dalla scelta di x e y), e dota $P\Big|_{h=h_0}$ di una parentesi di Poisson $\{\ ,\ \} := \frac{m - m^{\mathrm{op}}}{(h-h_0)} \mod (h-h_0)$ con la quale essa diventa un'algebra di Poisson[1]. Se inoltre P è un'algebra di Hopf, allora con questa costruzione $P\Big|_{h=h_0}$ risulta essere un'algebra di Hopf Poisson[2].

Tale costruzione può essere dualizzata. Precisamente, sia ora $A = K$ una coalgebra, e supponiamo che $K\Big|_{h=h_0}$ sia *cocommutativa*: allora per ogni $x \in P$ si ha $\overline{\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x)} = 0 \in P\Big|_{h=h_0}$ (dove $\Delta^{\mathrm{op}} := \sigma \circ \Delta$ indica la comoltiplicazione *opposta*, con $\sigma \colon x \otimes y \mapsto y \otimes x$), quindi $\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x) \in (h-h_0)(K \otimes_R K)$ e pertanto è ben definito l'elemento $\frac{\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x)}{(h-h_0)} \in K \otimes_R K$; allora per ogni $x_0 \in K\Big|_{h=h_0}$, preso $x \in P$ tale che $\overline{x} = x_0$, definiamo $\delta(x_0) := \overline{\left(\frac{\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x)}{(h-h_0)} \right)} \in K\Big|_{h=h_0}$; tale definizione è ben posta (cioè non dipende dalla scelta di x), e dota $K\Big|_{h=h_0}$ di una coparentesi di Poisson $\delta := \frac{\Delta - \Delta^{\mathrm{op}}}{(h-h_0)} \mod (h-h_0)$ con la quale essa diventa una coalgebra di Poisson[3]. Se inoltre K è un'algebra di Hopf, allora con questa costruzione $K\Big|_{h=h_0}$ risulta essere una coalgebra di Hopf Poisson[4].

Rovesciamo ora il nostro punto di vista. Sia R_0 un anello (commutativo con unità), e

---

[1] Questo discende da un fatto più generale (e immediato da dimostrare): se A è una qualunque algebra (associativa unitaria), definendo $\{\ ,\ \} := [\ ,\ ] \equiv m - m^{\mathrm{op}}$ l'algebra A diventa un'algebra di Poisson *non commutativa* (la cui definizione si ottiene generalizzando quella in §1.3 eliminando l'ipotesi di commutatività).

[2] Anche questo discende dalla costruzione su accennata, nel senso che P con la parentesi $\{\ ,\ \} := m - m^{\mathrm{op}}$ è un'algebra di Hopf Poisson *non commutativa* (la cui definizione si ottiene ancora eliminando da quella in §1.3 l'ipotesi di commutatività).

[3] Anche questo discende da un fatto più generale: se K è una qualunque algebra (coassociativa counitaria), definendo $\delta := \Delta - \Delta^{\mathrm{op}}$ la coalgebra K diventa una coalgebra di Poisson *non cocommutativa* (la cui definizione si ottiene da quella in §1.3 eliminando l'ipotesi di cocommutatività).

[4] Anche questo discende dalla costruzione su accennata, nel senso che K con la coparentesi $\delta := \Delta - \Delta^{\mathrm{op}}$ è una coalgebra di Hopf Poisson *non cocommutativa* (la cui definizione si ottiene ancora eliminando da quella in §1.3 l'ipotesi di cocommutatività).

sia R un anello come sopra tale che esistano $h, h_0 \in R$ per cui $R \Big/ (h-h_0)R \cong R_0$. Sia $\mathcal{H}_0$ un'algebra, risp. un'algebra di Poisson commutativa, risp. una coalgebra, risp. una coalgebra di Poisson cocommutativa, risp. una bialgebra, risp. un'algebra di Hopf, risp. un'algebra di Hopf Poisson (formale) commutativa, risp. una coalgebra di Hopf Poisson (formale) cocommutativa, sull'anello R_0, e sia H un'algebra, risp. una coalgebra, risp. una bialgebra, risp. un'algebra di Hopf (formale), sull'anello R priva di $(h-h_0)$–torsione: si dice allora che

H è una **quantizzazione** (o **deformazione quantica**) di $\mathcal{H}_0$

se $H\Big|_{h=h_0}$ è isomorfa a $\mathcal{H}_0$ come algebra, risp. come algebra di Poisson commutativa, risp. come coalgebra, risp. come coalgebra di Poisson cocommutativa, risp. come bialgebra, risp. come algebra di Hopf (formale), risp. come algebra di Hopf Poisson (formale) commutativa, risp. come coalgebra di Hopf Poisson (formale) cocommutativa, sull'anello R_0.

Sia ora $\mathfrak{g}$ una bialgebra di Lie: per **quantizzazione** di $\mathfrak{g}$ si intende una quantizzazione della coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{g})$ biunivocamente associata a $\mathfrak{g}$.

Infine, sia G un gruppo di Poisson: per **quantizzazione di** G si intende una quantizzazione (nel senso algebrico testé prescisato) dell'algebra di Hopf Poisson $F[G]$ biunivocamente associata a G; a rigor di termini per quantizzazione di G si dovrebbe intendere lo "spettro" di una simile quantizzazione dell'algebra di Hopf Poisson $F[G]$, cioè un certo "pseudo-oggetto" geometrico, da chiamarsi **gruppo quantico** o **quantum group**, che però non può essere realizzato concretamente, almeno non in modo soddisfacente (tali nozioni hanno senso e sono usate più in generale anche per la quantizzazione di una qualsiasi varietà algebrica V — eventualmente di Poisson — per la quale si intende una quantizzazione dell'algebra $F[V]$ — eventualmente di Poisson — delle funzioni regolari su V). Si tenga presente però che in letteratura con espressioni del tipo "quantizzazione di G" o "gruppo quantico che deforma G" si intende spesso una quantizzazione (nel senso che abbiamo ora fissato) della bialgebra di Lie $\mathfrak{g}$ tangente a G, dunque qualcosa che "quantizza" soltanto il dato locale di G, e a cui nel seguito faremo riferimento con la locuzione "quantizzazione infinitesimale di G". Infine considereremo anche le quantizzazioni (nel senso algebrico di cui sopra) dell'algebra di Hopf Poisson formale $F^\infty[G]$, cui faremo riferimento ancora con l'espressione "quantizzazione infinitesimale di G", visto che $F^\infty[G]$ codifica il dato locale di G.

Bibliografia: Lo studio dei gruppi quantici è iniziato nell'ambito della meccanica quantistica, ed ha successivamente incontrato un crescente interesse anche in altri campi, quali la teoria dei gruppi di Lie, la teoria dei gruppi algebrici, la teoria degli invarianti, ecc. ecc. Allo stato attuale la letteratura in materia è dunque vastissima e molto differenziata: perciò ci limitiamo a citare come riferimento generale alcuni testi "panoramici", quali [Dr3] (che può essere considerato — a ragion veduta — il punto di partenza dello studio dei gruppi quantici), [Ve], [P-W], [Ro2], e [We3]; gli articoli invece a cui faremo riferimento dal punto di vista tecnico, cioè quelli ai quali il presente lavoro è più strettamente legato, sono [D-P], [D-L], e [C-V1], [C-V2].

§ 2 I gruppi di Poisson G^τ e H^τ

2.1 Richiami sui sistemi di radici finiti. Sia $A := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice di Cartan (di tipo finito) simmetrizzabile di ordine $n \times n$; allora abbiamo $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ con $a_{ii} = 2$ e $a_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$, ed esiste un vettore $(d_1, \dots, d_n)$ con componenti d_i intere positive prime tra loro tali che $(d_i a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sia una matrice simmetrica definita positiva.

Alla matrice di Cartan A associamo un sistema di radici finito e ridotto R, i suoi reticoli dei pesi e delle radici P e Q, il gruppo di Weyl W, un insieme di radici positive R^+, una base di radici semplici Π, i pesi fondamentali $\omega_1, \dots, \omega_n$, ecc. ecc. Così, il *reticolo dei pesi* P è un reticolo su $\mathbb{Z}$ (cioè un gruppo abeliano libero) con base $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$: gli elementi ω_i sono i *pesi fondamentali*; poniamo $P_+ := \sum_{i=1}^n \mathbb{N}\omega_i$ per il sottoinsieme dei *pesi interi dominanti*, definiamo le *radici semplici* $\alpha_j := \sum_{i=1}^n a_{ij}\omega_i$ $(j = 1, \dots, n)$, il *reticolo delle radici* $Q := \sum_{j=1}^n \mathbb{Z}\alpha_j$ $(\subset P)$, e il *reticolo delle radici positive* $Q_+ := \sum_{j=1}^n \mathbb{N}\alpha_j$.

Sia W il gruppo di Weyl associato ad A, con generatori $s_1, \dots, s_n$ (le riflessioni semplici), e sia $\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (l'insieme delle *radici semplici*): allora $R := W(\Pi)$ è l'insieme delle *radici*, e $R^+ := R \cap Q_+$ l'insieme delle *radici positive*; infine, indichiamo con $N := \#(R^+)$ il numero di radici positive.

Definiamo accoppiamenti bilineari $\langle\ |\ \rangle: Q \times P \to \mathbb{Z}$ e $(\ |\ ): Q \times P \to \mathbb{Z}$ tramite $\langle \alpha_i | \omega_j \rangle = \delta_{ij}$ e $(\alpha_i | \omega_j) = \delta_{ij} d_i$. Allora $(\alpha_i | \alpha_j) = d_i a_{ij}$, così che resta definita su Q una forma bilineare a valori in $\mathbb{Z}$, simmetrica e W–invariante, tale che $(\alpha|\alpha) \in 2\mathbb{Z}$. Possiamo anche estendere l'accoppiamento $\mathbb{Z}$–bilineare $(\ |\ ): Q \times P \to \mathbb{Z}$ ad un accoppiamento *non degenere* $(\ |\ ): (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Q) \times (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P) \to \mathbb{Z}$ di spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ per estensione di scalari: la restrizione di questo accoppiamento dà un accoppiamento $(\ |\ ): P \times P \to \mathbb{Q}$ (considerando P come sottoreticolo di $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Q$), che ha valori in $\mathbb{Z}\left[d^{-1}\right]$, dove d è il determinante $d := det\left((a_{ij})_{i,j=1}^n\right)$ della matrice di Cartan. Se $a_{ij} \in \{0, 2, -1\}\ \forall\, i, j$, data una coppia di reticoli di pesi (M, M') (cioè una coppia di reticoli (M, M') con $Q \leq M, M' \leq P$), diremo che essi sono *duali l'uno dell'altro* se

$$M' = \left\{ y \in P \,\middle|\, \big(M, y\big) \subseteq \mathbb{Z} \right\}, \qquad M = \left\{ x \in P \,\middle|\, \big(x, M'\big) \subseteq \mathbb{Z} \right\}$$

le due condizioni essendo equivalenti; allora, dato un reticolo M con $Q \leq M \leq P$, esiste un unico reticolo M' (con $Q \leq M' \leq P$) duale di M, e l'accoppiamento $(\ |\ ): P \times P \to \mathbb{Q}$ si restringe ad un accoppiamento non degenere $(\ |\ ): M \times M' \to \mathbb{Z}$. Nel caso generale diremo *duali l'uno dell'altro* i reticoli Q e P. Se (M, M') è una coppia di reticoli duali l'uno dell'altro, con $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ e $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ indicheremo $\mathbb{Z}$–basi fissate di M e M' rispettivamente duali l'una dell'altra, cioè tali che $(\mu_i | \nu_j) = \delta_{ij}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

2.2 I gruppi di Poisson G e H. Utilizziamo le notazioni e definizioni di [D-P], §11. Sia G un gruppo algebrico affine semisemplice connesso e semplicemente connesso su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0. Fissiamo un toro massimale $T \leq G$, un sottogruppo di Borel $B_+ \geq T$, e sia B_- l'unico sottogruppo di Borel tale che $T = B_+ \cap B_-$. Poniamo $K = G \times G$. Indichiamo con $\mu_\pm : B_\pm \to T$ i morfismi canonici di proiezione, e consideriamo il morfsmo $\phi: B_- \times B_+ \to T$ definito da $\phi(b_-, b_+) := \mu_-(b_-)\mu_+(b_+)$. Poniamo poi $H := Ker(\phi)$, e immergiamo G in K come sottogruppo diagonale; inoltre, sia $\mathfrak{g} := Lie(G)$, $\mathfrak{t} := Lie(T)$, $\mathfrak{b}_\pm := Lie(B_\pm)$, $\mathfrak{k} := Lie(K)$, $\mathfrak{h} := Lie(H)$. Abbiamo così una terna (K, G, H); questa è una terna algebrica di Manin (in particolare la sua "terna tangente" $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ è una terna di Manin), con forma bilineare su $\mathfrak{k}$ — simmetrica, non degenere e invariante — definita come segue: per prima cosa riscaliamo la forma di Killing $(\ ,\ )\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to k$ così che sulla sottoalgebra di Cartan dia alle radici corte lunghezza al quadrato pari a 2; poi prendiamo la differenza di metà della forma di Killing sul secondo e il primo addendo di $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, cioè l'unica forma su $\mathfrak{k}$ che coincida con metà della forma di Killing (risp. l'opposto di metà della forma di Killing) su $\{0\} \oplus \mathfrak{g}$ (risp. $\mathfrak{g} \oplus \{0\}$), e tale che $\mathfrak{g} \oplus \{0\}$ e $\{0\} \oplus \mathfrak{g}$ siano mutuamente ortogonali: in formule,

$$\Big\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \Big\rangle := \frac{1}{2}\Big(y_1, y_2\Big) - \frac{1}{2}\Big(x_1, x_2\Big).$$

Poiché $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ è una terna di Manin, la forma bilineare su $\mathfrak{k}$ dà per restrizione un accoppiamento non degenere $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to k$; questo è un accoppiamento di bialgebre di Lie, che chiameremo anche *accoppiamento di Poisson*, e che denoteremo anche con $\pi_{\mathcal{P}}(h,g) := \langle h, g\rangle$ per ogni $h \in \mathfrak{h}$, $g \in \mathfrak{g}$.

Nel caso in esame l'accoppiamento di Poisson è descritto dalle formule

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathrm{f}_i, f_j\rangle = 0 & \langle \mathrm{f}_i, h_j\rangle = 0 & \langle \mathrm{f}_i, e_j\rangle = -\frac{1}{2}\delta_{ij} d_i^{-1} \\ \langle \mathrm{h}_i, f_j\rangle = 0 & \langle \mathrm{h}_i, h_j\rangle = a_{ij} d_j^{-1} = a_{ji} d_i^{-1} & \langle \mathrm{h}_i, e_j\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_i, f_j\rangle = \frac{1}{2}\delta_{ij} d_i^{-1} & \langle \mathrm{e}_i, h_j\rangle = 0 & \langle \mathrm{e}_i, e_j\rangle = 0 \end{array} \tag{2.1}$$

dove gli $\mathrm{f}_s, \mathrm{h}_s, \mathrm{e}_s$ $(s = 1, \dots, n)$, risp. f_s, h_s, e_s $(s = 1, \dots, n)$, sono generatori di Chevalley di $\mathfrak{h}$, risp. $\mathfrak{g}$, (immersi in $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$) precisamente

$$\mathrm{f}_s = f_s \oplus 0\,, \quad \mathrm{h}_s = (-h_s) \oplus h_s\,, \quad \mathrm{e}_s = 0 \oplus e_s$$
$$f_s = f_s \oplus f_s\,, \quad h_s = h_s \oplus h_s\,, \quad e_s = e_s \oplus e_s$$

(vedi §§2.3–4).

Nota: si faccia attenzione, in particolare, alla normalizzazione che abbiamo scelto per la forma simmetrica di $\mathfrak{k}$, che è diversa (per un coefficiente 1/2) da quella fissata in [D-P]. Questa scelta è necessaria al fine di ottenere una formulazione corretta e coerente dei teoremi di specializzazione

"$\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ è una deformazione della coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{g})$"

che è dimostrato in [D-L], §8, e

"$\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ è una deformazione dell'algebra di Hopf Poisson $F[H]$"

che è dimostrato in [D-P], §12. In particolare in [D-P], §12, si dimostra che l'algebra di Hopf $F[H]$ è isomorfa a $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})\Big|_{q=1}$, ma il suo bracket di Poisson $\{\ ,\ \}$ è "recuperato" come specializzazione di $\frac{[\ ,\ ]}{(q-q^{-1})}$ (cioè $\{f, g\} \equiv \frac{[\mathrm{f},\mathrm{g}]}{(q-q^{-1})} \mod (q-1)$ per ogni f, $g \in F[H]$ dove f, risp. g, è un qualunque sollevamento di f, risp. g, in $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$), (cfr. §15), mentre la definizione in §1.6 prescrive — in questo caso — che $\{\ ,\ \}$ sia la specializzazione di $\frac{[\ ,\ ]}{(q-1)}$. Ma $(q-q^{-1}) \equiv 2(q-1) \mod (q-1)$, pertanto l'analisi in [D-P] prova che $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ è una quantizzazione — nel senso di §1.6 — dell'algebra di Hopf $F[H]$ dotata di un nuovo bracket di Poisson $\{\ ,\ \}' := 2\{\ ,\ \}$; la forma bilineare corrispondente su $\mathfrak{k}$ è esattamente quella che abbiamo fissato[5]. Inoltre con questa scelta dimostreremo i nostri nuovi analoghi risultati di specializzazione (cfr. §10).

2.3 La coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{g})$. È noto che l'algebra inviluppante universale $U(\mathfrak{g})$ ammette la seguente presentazione: essa è la k–algebra associativa unitaria generata da f_i, h_i, e_i $(i=1,\dots,n)$ (i *generatori di Chevalley*) con relazioni

$$\begin{aligned}
h_i h_j - h_j h_i &= 0 & \forall\, i,j=1,\dots,n \\
h_i f_j - f_j h_i &= -a_{ij} f_j & \forall\, i,j=1,\dots,n \\
h_i e_j - e_j h_i &= a_{ij} e_j & \forall\, i,j=1,\dots,n \\
e_i f_j - f_j e_i &= \delta_{ij} h_i & \forall\, i,j=1,\dots,n \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k &= 0 & \forall\, i \neq j \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k &= 0 & \forall\, i \neq j\ .
\end{aligned} \tag{2.2}$$

La struttura naturale di algebra di Hopf di $U(\mathfrak{g})$ è data dalle formule

$$\begin{gathered}
\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i\,, \quad \Delta(h_i) = h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i\,, \quad \Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i \\
S(f_i) = -f_i\ , \quad S(h_i) = -h_i\ , \quad S(e_i) = -e_i \\
\epsilon(f_i) = 0\ , \quad \epsilon(h_i) = 0\ , \quad \epsilon(e_i) = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$.

Infine, la struttura di Poisson di G si riflette in una struttura di coalgebra di Lie $\delta = \delta_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ di $\mathfrak{g}$, che si estende ad una struttura di coalgebra di Poisson $\delta \colon U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ su $U(\mathfrak{g})$, compatibile con la struttura di Hopf: essa è data da

$$\begin{aligned}
\delta(f_i) &= d_i \cdot \big(h_i \otimes f_i - f_i \otimes h_i \big) \\
\delta(h_i) &= 0 \\
\delta(e_i) &= d_i \cdot \big(h_i \otimes e_i - e_i \otimes h_i \big)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

(cfr. [D-L], §8).

[5]Questo è un fatto generale: sia (K,G,H) una terna algebrica di Manin con associata terna di Manin tangente $(\mathfrak{k},\mathfrak{g},\mathfrak{h})$; sia $\langle\ ,\ \rangle$ la forma bilineare su $\mathfrak{k}$, $\delta_{\mathfrak{g}}$, risp. $\delta_{\mathfrak{h}}$, il cobracket di Lie di $\mathfrak{g}$, risp. $\mathfrak{h}$, e $\{\ ,\ \}_G$, risp. $\{\ ,\ \}_H$, il bracket di Poisson su G, risp. H. Se cambiamo la forma bilineare per un coefficiente $c \in k \setminus \{0\}$, ponendo $\langle\ ,\ \rangle' := c \cdot \langle\ ,\ \rangle$, allora i corrispondenti oggetti sono

$$\delta'_{\mathfrak{g}} := c^{-1} \cdot \delta_{\mathfrak{g}}\,, \quad \delta'_{\mathfrak{h}} := c^{-1} \cdot \delta_{\mathfrak{h}}\,, \quad \{\ ,\ \}'_G := c^{-1} \cdot \{\ ,\ \}_G \quad \{\ ,\ \}'_H := c^{-1} \cdot \{\ ,\ \}_H\,;$$

viceversa, se si modifica uno qualunque tra $\delta_{\mathfrak{g}}$, $\delta_{\mathfrak{h}}$, $\{\ ,\ \}_G$, $\{\ ,\ \}_H$ per un fattore $c \in k \setminus \{0\}$ — ad esempio $\delta'_{\mathfrak{g}} := c \cdot \delta_{\mathfrak{g}}$, — allora anche gli altri cambiano secondo lo stesso fattore, mentre la forma bilineare $\langle\ ,\ \rangle$ cambia in $\langle\ ,\ \rangle' := c^{-1} \cdot \langle\ ,\ \rangle$.

2.4 La coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h})$. Sia $\mathfrak{h}$ l'algebra di Lie di H: dalla definizione stessa di H otteniamo che

$$H = \Big\{ \big(u_- t^{-1}, t u_+\big) \;\Big|\; u_- \in U_-,\, t \in T,\, u_+ \in U_+ \Big\} \qquad \Big(\leq B_- \times B_+ \Big)$$

dove $U_\pm$ è la parte unipotente di $B_\pm$; ora poniamo $\mathfrak{h} := Lie(H)$, $\mathfrak{t} := Lie(T)$, $\mathfrak{n}_\pm := Lie\,(U_\pm)$; si riconosce allora subito che $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_+$ come spazi vettoriali, e la struttura di Lie di $\mathfrak{h}$ à univocamente determinata dai seguenti requisiti:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{n}_-\,,\ \mathfrak{t}\,,\ \mathfrak{n}_+ \text{ sono sottoalgebre di Lie di } \mathfrak{h} \\ [n_+, n_-] &= 0 && \forall\, n_+ \in \mathfrak{n}_+, n_- \in \mathfrak{n}_- \\ [t, n_-] &= -\beta(t)\, n_- && \forall\, t \in \mathfrak{t}, n_- \in (\mathfrak{n}_-)_\beta, \beta \in R^- \\ [t, n_+] &= \alpha(t)\, n_+ && \forall\, t \in \mathfrak{t}, n_+ \in (\mathfrak{n}_+)_\alpha, \alpha \in R^+ \;. \end{aligned}$$

Così se $(a_{ij})_{ij}$ è la matrice di Cartan di $\mathfrak{g} := Lie(G)$ e f_i, h_i, e_i $(i = 1, \dots, n)$ sono generatori di Chevalley di $\mathfrak{g}$ (pensati come elementi di $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}_+$), abbiamo la seguente presentazione per $U(\mathfrak{h})$: essa è la k–algebra associativa unitaria generata da f_i, h_i, e_i $(i = 1, \dots, n)$ con relazioni

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_i \mathrm{h}_j - \mathrm{h}_j \mathrm{h}_i &= 0 && \forall\, i, j = 1, \dots, n \\ \mathrm{h}_i \mathrm{f}_j - \mathrm{f}_j \mathrm{h}_i &= a_{ij} \mathrm{f}_j && \forall\, i, j = 1, \dots, n \\ \mathrm{h}_i \mathrm{e}_j - \mathrm{e}_j \mathrm{h}_i &= a_{ij} \mathrm{e}_j && \forall\, i, j = 1, \dots, n \\ \mathrm{e}_i \mathrm{f}_j - \mathrm{f}_j \mathrm{e}_i &= 0 && \forall\, i, j = 1, \dots, n \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} \mathrm{f}_i^{1-a_{ij}-k} \mathrm{f}_j \mathrm{f}_i^k &= 0 && \forall\, i \neq j \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} \mathrm{e}_i^{1-a_{ij}-k} \mathrm{e}_j \mathrm{e}_i^k &= 0 && \forall\, i \neq j \;. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La struttura naturale di algebra di Hopf di $U(\mathfrak{h})$ è data dalle formule

$$\begin{gathered} \Delta(\mathrm{f}_i) = \mathrm{f}_i \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{f}_i\,, \quad \Delta(\mathrm{h}_i) = \mathrm{h}_i \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{h}_i\,, \quad \Delta(\mathrm{e}_i) = \mathrm{e}_i \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{e}_i \\ S(\mathrm{f}_i) = -\mathrm{f}_i\,, \quad S(\mathrm{h}_i) = -\mathrm{h}_i\,, \quad S(\mathrm{e}_i) = -\mathrm{e}_i \\ \epsilon(\mathrm{f}_i) = 0\,, \quad \epsilon(\mathrm{h}_i) = 0\,, \quad \epsilon(\mathrm{e}_i) = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$.

Infine, la struttura di Poisson di H si riflette in una struttura di co-algebra di Lie $\delta = \delta_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ di $\mathfrak{h}$, che si estende ad una struttura di co-Poisson (cioè di coalgebra di Poisson) $\delta \colon U(\mathfrak{h}) \longrightarrow U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{h})$ su $U(\mathfrak{h})$, compatibile con la struttura di Hopf: essa è data da

$$\begin{aligned} \delta(\mathrm{f}_i) &= d_i \cdot \big(\mathrm{h}_i \otimes \mathrm{f}_i - \mathrm{f}_i \otimes \mathrm{h}_i\big) + 2\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} c_{\alpha,\beta}^{i,+}\, d_\alpha d_\beta \cdot \big(\mathrm{e}_\alpha \otimes \mathrm{f}_\beta - \mathrm{f}_\beta \otimes \mathrm{e}_\alpha\big) \\ \delta(\mathrm{h}_i) &= 4\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} d_\gamma\, (\alpha_i | \gamma) \cdot \big(\mathrm{e}_\gamma \otimes \mathrm{f}_\gamma - \mathrm{f}_\gamma \otimes \mathrm{e}_\gamma\big) \\ \delta(\mathrm{e}_i) &= d_i \cdot \big(\mathrm{e}_i \otimes \mathrm{h}_i - \mathrm{h}_i \otimes \mathrm{e}_i\big) + 2\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} c_{\alpha,\beta}^{i,-}\, d_\alpha d_\beta \cdot \big(\mathrm{f}_\beta \otimes \mathrm{e}_\alpha - \mathrm{e}_\alpha \otimes \mathrm{f}_\beta\big) \end{aligned} \tag{2.7}$$

dove gli e_γ e gli f_γ sono opportuni vettori radice (rispettivamente di "peso" γ e $-\gamma$) tali che $\big\langle \mathrm{e}_\gamma, f_\eta \big\rangle = +\delta_{\gamma,\eta} d_\gamma / 2$, $\big\langle \mathrm{f}_\gamma, f_\eta \big\rangle = -\delta_{\gamma,\eta} d_\gamma / 2$ (ove f_η e e_η sono vettori radice di $\mathfrak{g}$), e le costanti $c^{i,\pm}_{\alpha,\beta}$ sono date dalle equazioni $\big[f_\alpha, e_\beta \big] = c^{i,-}_{\alpha,\beta} \cdot f_i$, $\big[f_\alpha, e_\beta \big] = c^{i,+}_{\alpha,\beta} \cdot e_i$.

2.5 I gruppi di Poisson multiparametrici G^τ e H^τ. Una leggera modifica delle definizioni in §2.2 dà origine a varie altre coppie non isomorfe di gruppi di Poisson, dipendenti da n parametri. Sia $\tau := (\tau_1, \dots, \tau_n) \in Q^n$ tale che $(\tau_i, \alpha_j) = -(\tau_j, \alpha_i)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ (per $\tau = (0, \dots, 0)$ si ritrova il caso già considerato). Lasciando G e $K := G \times G$ definiti come in §2.2, poniamo

$$H^\tau := \Big\{ \big(u_- t_-, t_+ u_+ \big) \,\Big|\, u_\pm \in U_\pm,\, t_\pm \in T,\, t_- t_+ \in \exp\big(\mathfrak{t}^\tau\big) \Big\}$$

dove $\mathfrak{t}^\tau := \sum_{i=1}^n k \cdot \big(h_{-\alpha_i + 2\tau_i} \oplus h_{\alpha_i + 2\tau_i} \big) \leq \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t} \leq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{k} = Lie(K)$; così

$$\mathfrak{h}^\tau := Lie\,(H^\tau) = (\mathfrak{n}_-, 0) \oplus \mathfrak{t}^\tau \oplus (0, \mathfrak{n}_+)\,.$$

Considerando su $\mathfrak{k}$ la forma bilineare definita in §2.2 la terna $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}^\tau)$ è ancora una terna di Manin, e (K, G, H^τ) è la corrispondente terna algebrica di Manin: pertanto abbiamo un nuovo gruppo algebrico di Poisson H^τ e una *nuova* struttura di (gruppo di) Poisson sullo *stesso* gruppo algebrico G: sottolineiamo questo fatto indicando con G^τ questo nuovo gruppo di Poisson e con $\mathfrak{g}^\tau$ la sua bialgebra di Lie.

Infine, calcoliamo l'accoppiamento di Poisson $\pi^\tau_{\mathcal{P}} \colon \mathfrak{h}^\tau \otimes \mathfrak{g}^\tau \longrightarrow k$: l'algebra di Lie $\mathfrak{h}^\tau$ contiene ancora i "generatori di Chevalley" $\mathrm{f}^\tau_i := f_i \oplus 0$ e $\mathrm{e}^\tau_i := 0 \oplus e_i$ ($i = 1, \dots, n$), e anche gli elementi $\mathrm{h}^\tau_i := h_{-\alpha_i + 2\tau_i} \oplus h_{\alpha_i + 2\tau_i}$, ai quali ci riferiremo di nuovo come a "generatori di Chevalley"; questi elementi generano $\mathfrak{h}^\tau$ (come algebra di Lie), dunque $\pi^\tau_{\mathcal{P}}$ è completamente determinato dalle formule

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathrm{f}^\tau_i, f_j \rangle = 0 & \langle \mathrm{f}^\tau_i, h_j \rangle = 0 & \langle \mathrm{f}^\tau_i, e_j \rangle = -\frac{1}{2} \delta_{ij} d_i^{-1} \\ \langle \mathrm{h}^\tau_i, f_j \rangle = 0 & \langle \mathrm{h}^\tau_i, h_j \rangle = a_{ij} d_j^{-1} = a_{ji} d_i^{-1} & \langle \mathrm{h}^\tau_i, e_j \rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}^\tau_i, f_j \rangle = \frac{1}{2} \delta_{ij} d_i^{-1} & \langle \mathrm{e}^\tau_i, h_j \rangle = 0 & \langle \mathrm{e}^\tau_i, e_j \rangle = 0 \end{array} \tag{2.8}$$

Si noti in particolare che la nostra scelta di notazioni fa sì che (2.1) e (2.8) abbiano lo stesso aspetto.

2.6 La coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{g}^\tau)$. Poiché $\mathfrak{g}^\tau = \mathfrak{g}$ come algebra di Lie, la struttura di algebra di Hopf di $U(\mathfrak{g}^\tau)$ è esattamente la stessa di $U(\mathfrak{g})$, dunque è descritta dalle formule (2.2–3).

Per il co-bracket di Poisson $\delta = \delta_{\mathfrak{g}^\tau} \colon U(\mathfrak{g}^\tau) \longrightarrow U(\mathfrak{g}^\tau) \otimes U(\mathfrak{g}^\tau)$ su $U(\mathfrak{g})$, esso è dato da

$$\begin{aligned} \delta(f_i) &= \frac{(\alpha_i + 2\tau_i | \alpha_i + 2\tau_i)}{2} \cdot \big(h_{\alpha_i + 2\tau} \otimes f_i - f_i \otimes h_{\alpha_i + 2\tau} \big) \\ \delta(h_i) &= 0 \\ \delta(e_i) &= \frac{(\alpha_i - 2\tau_i | \alpha_i - 2\tau_i)}{2} \cdot \big(h_{\alpha_i - 2\tau} \otimes e_i - e_i \otimes h_{\alpha_i - 2\tau} \big)\,; \end{aligned} \tag{2.9}$$

le stesse formule definiscono anche il cobracket di Lie $\delta_{\mathfrak{g}^\tau} \colon \mathfrak{g}^\tau \longrightarrow \mathfrak{g}^\tau \otimes \mathfrak{g}^\tau$.

2.7 La coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h}^\tau)$. Sia $\mathfrak{h}^\tau$ l'algebra di Lie di H^τ: dalle definizioni stesse otteniamo la seguente presentazione per $U(\mathfrak{h}^\tau)$: essa è la k–algebra associativa unitaria generata da f_i^τ, h_i^τ, e_i^τ $(i=1,\dots,n)$ con relazioni

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_i^\tau \mathrm{h}_j^\tau - \mathrm{h}_j^\tau \mathrm{h}_i^\tau &= 0 && \forall\, i,j=1,\dots,n \\
\mathrm{h}_i^\tau \mathrm{f}_j^\tau - \mathrm{f}_j^\tau \mathrm{h}_i^\tau &= \langle \alpha_i - 2\tau_i, \alpha_j \rangle \mathrm{f}_j^\tau && \forall\, i,j=1,\dots,n \\
\mathrm{h}_i^\tau \mathrm{e}_j^\tau - \mathrm{e}_j^\tau \mathrm{h}_i^\tau &= \langle \alpha_i + 2\tau_i, \alpha_j \rangle \mathrm{e}_j^\tau && \forall\, i,j=1,\dots,n \\
\mathrm{e}_i^\tau \mathrm{f}_j^\tau - \mathrm{f}_j^\tau \mathrm{e}_i^\tau &= 0 && \forall\, i,j=1,\dots,n \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} (\mathrm{f}_i^\tau)^{1-a_{ij}-k} \mathrm{f}_j^\tau (\mathrm{f}_i^\tau)^k &= 0 && \forall\, i \neq j \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} (\mathrm{e}_i^\tau)^{1-a_{ij}-k} \mathrm{e}_j^\tau (\mathrm{e}_i^\tau)^k &= 0 && \forall\, i \neq j \,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

La struttura naturale di algebra di Hopf di $U(\mathfrak{h}^\tau)$ è data di nuovo dalle formule

$$\begin{gathered}
\Delta(\mathrm{f}_i^\tau) = \mathrm{f}_i^\tau \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{f}_i^\tau \,, \quad \Delta(\mathrm{h}_i^\tau) = \mathrm{h}_i^\tau \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{h}_i^\tau \,, \quad \Delta(\mathrm{e}_i^\tau) = \mathrm{e}_i^\tau \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{e}_i^\tau \\
S(\mathrm{f}_i^\tau) = -\mathrm{f}_i^\tau \,, \quad S(\mathrm{h}_i^\tau) = -\mathrm{h}_i^\tau \,, \quad S(\mathrm{e}_i^\tau) = -\mathrm{e}_i^\tau \\
\epsilon(\mathrm{f}_i^\tau) = 0 \,, \quad \epsilon(\mathrm{h}_i^\tau) = 0 \,, \quad \epsilon(\mathrm{e}_i^\tau) = 0
\end{gathered} \tag{2.11}$$

(si noti la completa analogia con le (2.6)).

Infine, la struttura di co-Poisson $\delta = \delta_{\mathfrak{h}^\tau} \colon U(\mathfrak{h}^\tau) \longrightarrow U(\mathfrak{h}^\tau) \otimes U(\mathfrak{h}^\tau)$ è data da

$$\begin{aligned}
\delta(\mathrm{f}_i^\tau) &= d_i \cdot \big(\mathrm{h}_i^\tau \otimes \mathrm{f}_i^\tau - \mathrm{f}_i^\tau \otimes \mathrm{h}_i^\tau \big) + 2\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} c_{\alpha,\beta}^i \, d_\alpha d_\beta \cdot \big(\mathrm{e}_\alpha^\tau \otimes \mathrm{f}_\beta^\tau - \mathrm{f}_\beta^\tau \otimes \mathrm{e}_\alpha^\tau \big) \\
\delta(\mathrm{h}_i^\tau) &= 4\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} d_\gamma \, (\gamma|\alpha_i) \cdot \big(\mathrm{e}_\gamma^\tau \otimes \mathrm{f}_\gamma^\tau - \mathrm{f}_\gamma^\tau \otimes \mathrm{e}_\gamma^\tau \big) \\
\delta(\mathrm{e}_i^\tau) &= d_i \cdot \big(\mathrm{e}_i^\tau \otimes \mathrm{h}_i^\tau - \mathrm{h}_i^\tau \otimes \mathrm{e}_i^\tau \big) + 2\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} c_{\alpha,\beta}^i \, d_\alpha d_\beta \cdot \big(\mathrm{f}_\beta^\tau \otimes \mathrm{e}_\alpha^\tau - \mathrm{e}_\alpha^\tau \otimes \mathrm{f}_\beta^\tau \big)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

(dove f_γ^τ e e_γ^τ sono gli usuali vettori radice). Si noti ancora che la nostra scelta di notazioni fa sì che (2.7) e (2.12) abbiano lo stesso aspetto.

CAPITOLO II
QUANTIZZAZIONE AD UN PARAMETRO

§ 3 Algebre di Borel quantiche e accoppiamenti DRT

3.1 Algebre di Borel quantiche e accoppiamenti DRT. Siano Q, P i gruppi abeliani liberi definiti nel §2. Scriveremo tali gruppi anche in notazione moltiplicativa, con $K_\alpha = \alpha \in Q$ e $L_\lambda = \lambda \in P$, ponendo $K_i = \alpha_i$ e $L_i = \omega_i$ come generatori moltiplicativi. Allora possiamo esprimere l'accoppiamento bilineare perfetto (cioè non degenere) $(\ |\ ): Q \times P \to \mathbb{Z}$ definito in §2 come accoppiamento bimoltiplicativo perfetto $\pi: Q \times P \to k(q)^\star$ dato da $\pi(K_i, L_j) = q^{-(\alpha_i | \omega_j)}$, o più in generale $\pi(K_\alpha, L_\lambda) = q^{-(\alpha|\lambda)}$ ($\alpha \in Q$, $\lambda \in P$); se poniamo $q_i := q^{d_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ allora $\pi(K_i, L_j) = q_i^{-\delta_{ij}} = q_j^{-\delta_{ij}}$. Più in generale, se (M, M') è una qualunque coppia di reticoli (con $Q \leq M, M' \leq P$) duali l'uno dell'altro, li scriveremo in notazione moltiplicativa con $L_\mu = \mu \in M$ e $L_\nu = \nu \in M'$, ponendo $M_i = \mu_i$ e $\Lambda_i = \nu_i$ come generatori moltiplicativi. Allora possiamo esprimere l'accoppiamento bilineare perfetto $(\ |\ ): M \times M' \to \mathbb{Z}$ come accoppiamento bimoltiplicativo perfetto $\pi: M \times M' \to k(q)^\star$ dato da $\pi(L_\mu, L_\nu) = q^{-(\mu|\nu)}$ ($\mu \in M$, $\nu \in M'$).

Definiamo ora i *q–numeri*: per ogni $s, n \in \mathbb{N}$, poniamo $(n)_q := \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $(\in k[q])$, $(n)_q! := \prod_{r=1}^n (r)_q$, $\binom{n}{s}_q := \frac{(n)_q!}{(s)_q!(n-s)_q!}$ $(\in k[q])$, e $[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ $(\in k[q, q^{-1}])$, $[n]_q! := \prod_{r=1}^n [r]_q$, $\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[s]_q![n-s]_q!}$ $(\in k[q, q^{-1}])$. Infine definiamo $q_\alpha := q^{d_\alpha}$ per ogni $\alpha \in R^+$.

Le (sotto)algebre di Borel quantiche $U_q^M(\mathfrak{b}_-)$ e $U_q^M(\mathfrak{b}_+)$, sono definite come segue (cfr. [D-L], §2): sia M un qualunque reticolo tale che $Q \leq M \leq P$; allora $U_q^M(\mathfrak{b}_-)$ (risp. $U_q^M(\mathfrak{b}_+)$) è la $k(q)$–algebra associativa unitaria generata da $\{ L_\mu \mid \mu \in M \} \cup \{ F_i \mid i = 1, \dots, n \}$ (risp. $\{ L_\mu \mid \mu \in M \} \cup \{ E_i \mid i = 1, \dots, n \}$) con relazioni

$$\begin{gathered} L_0 = 1 \,, \quad L_\mu L_\nu = L_{\mu+\nu} \,, \\ L_\mu F_j = q^{-(\mu|\alpha_j)} F_j L_\mu \,, \qquad \sum_{p+s=1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^p F_j F_i^s = 0 \\ (\text{risp.} \quad L_\mu E_j = q^{(\mu|\alpha_j)} E_j L_\mu \,, \qquad \sum_{p+s=1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^p E_j E_i^s = 0\,) \\ \forall\ i, j = 1, \dots, n \,, \quad \mu, \nu \in M \,; \end{gathered} \tag{3.1}$$

inoltre $U_q^M(\mathfrak{b}_-)$ (risp. $U_q^M(\mathfrak{b}_+)$) è un'algebra di Hopf, la cui struttura di Hopf in termini di generatori è data da

$$\begin{gathered} \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + L_{\alpha_i} \otimes E_i \,, \quad \Delta(L_\mu) = L_\mu \otimes L_\mu \,, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes L_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i \\ \epsilon(E_i) = 0 \,, \quad \epsilon(L_\mu) = 1 \,, \quad \epsilon(F_i) = 0 \\ S(E_i) = -L_{-\alpha_i} E_i \,, \quad S(L_\mu) = L_{-\mu} \,, \quad S(F_i) = -F_i L_{\alpha_i} \\ \forall\, i = 1, \dots, n \,, \quad \mu \in M \,. \end{gathered}$$

Nel seguito useremo la notazione $U_\leq^M := U_q^M(\mathfrak{b}_-)$, $U_\geq^M := U_q^M(\mathfrak{b}_+)$. Inoltre indicheremo con $U_q(\mathfrak{n}_+) = U_+$, risp. $U_q(\mathfrak{n}_-) = U_-$, la sottoalgebra di $U_\geq^M$, risp. $U_\leq^M$, generata dagli E_i, risp. F_i, $(i = 1, \dots, n)$ e con $U_q^M(\mathfrak{t}) = U_0^M$ la sottoalgebra generata dagli L_μ $(\mu \in M)$; si dimostra in [Lu2], [Lu3], che U_-, risp. U_+, può essere presentata come la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori $F_1, \dots, F_n$, risp. $E_1, \dots, E_n$, e relazioni

$$\sum_{p+s=1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^p F_j F_i^s = 0\,, \quad \text{risp.} \quad \sum_{p+s=1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^p E_j E_i^s = 0$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Osserviamo inoltre che le prime due *non sono* sottoalgebre di Hopf; invece U_0^M è una sottoalgebra di Hopf, chiaramente isomorfa (come algebra di Hopf) all'algebra gruppo di M.

D'ora in poi, se H è un'algebra di Hopf, allora H^{op} indicherà la stessa coalgebra H con la moltiplicazione opposta, mentre H_{op} indicherà la stessa algebra di H con la comoltiplicazione opposta.

Proposizione 3.2 ([D-L], §2). *L'accoppiamento* $\pi\colon M \times M' \to k(q)^\star$ *può essere esteso univocamente ad un accoppiamento perfetto di algebre di Hopf*

$$\pi\colon \left(U_\leq^M\right)_{op} \otimes U_\geq^{M'} \longrightarrow k(q)\,, \quad \pi\colon U_\leq^M \otimes \left(U_\geq^{M'}\right)^{op} \longrightarrow k(q)$$

tramite le regole

$$\pi\big(L_\mu, E_j\big) = 0\,, \quad \pi\big(F_i, L_\nu\big) = 0\,, \quad \pi\big(F_i, E_j\big) = \delta_{ij}\big(q_i^{-1} - q_i\big)^{-1}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $\mu \in M$, $\nu \in M'$. $\square$

Nota : gli accoppiamenti di Hopf di cui sopra sono stati introdotti da Drinfel'd, Rosso, Tanisaki e altri, perciò li chiameremo *accoppiamenti DRT*. Si noti che nell'attuale contesto c'è qualche differenza rispetto a [D-L], a causa della differente definizione della struttura di Hopf: cfr. anche [Tn] e [D-D].

3.3. Si possono anche definire accoppiamenti DRT

$$\overline{\pi}\colon \left(U_\geq^M\right)_{op} \otimes U_\leq^{M'} \longrightarrow k(q)\,, \quad \overline{\pi}\colon U_\geq^M \otimes \left(U_\leq^{M'}\right)^{op} \longrightarrow k(q)$$

dati da

$$\overline{\pi}\big(L_\mu, L_\nu\big) = q^{+(\mu|\nu)}\,,\ \overline{\pi}\big(E_i, L_\nu\big) = 0\,,\ \overline{\pi}\big(L_\mu, F_j\big) = 0\,,\ \overline{\pi}\big(E_i, F_j\big) = \delta_{ij}\big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $\mu \in M$, $\nu \in M'$. Sottolineiamo il fatto che tutti gli accoppiamenti DRT definiti sono accoppiamenti di Hopf perfetti (cioè non degeneri). Nel seguito scriveremo anche $\langle x, y \rangle_\pi$ per $\pi(x, y)$ e $\langle x, y \rangle_{\overline{\pi}}$ per $\overline{\pi}(x, y)$.

3.4 Basi PBW. È noto (cfr. [Lu2]) che entrambe $U_\leq^M$ e $U_\geq^M$ hanno basi di tipo Poincaré-Birkhoff-Witt (in breve "basi PBW"): fissiamo (una volta per tutte) una qualunque espressione ridotta di w_0 (l'elemento più lungo del gruppo di Weyl W), precisamente $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}$ (con $N := \#(R^+)$ = numero di radici positive); così abbiamo un ordinamento totale convesso $\alpha^1, \alpha^2 := s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \dots, \alpha^N := s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N})$ (e viceversa: ogni ordinamento totale convesso di R^+ determina univocamente una espressione ridotta di w_0, cfr. [Pa]) quindi — seguendo Lusztig, cfr. [Lu3] — possiamo costruire *vettori radice* E_{α^r}, $r = 1, \dots, N$ e ottenere basi PBW di monomi ordinati *crescenti*

$$\left\{ L_\mu \cdot \prod_{r=1}^{N} F_{\alpha^r}^{f_r} \,\middle|\, \mu \in M; f_1, \dots, f_N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{per} \quad U_\leq^M ,$$
$$\left\{ L_\mu \cdot \prod_{r=1}^{N} E_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, \mu \in M; e_1, \dots, e_N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{per} \quad U_\geq^M ;$$

o basi PBW di monomi ordinati *decrescenti*

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r} \cdot L_\mu \,\middle|\, \mu \in M; f_1, \dots, f_N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{per} \quad U_\leq^M ,$$
$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r} \cdot L_\mu \,\middle|\, \mu \in M; e_1, \dots, e_N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{per} \quad U_\geq^M ;$$

in particolare tali basi contengono basi PBW delle sottoalgebre U_-, U_0^M, e U_+, precisamente

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r} \,\middle|\, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{per} \quad U_- ,$$
$$\left\{ L_\mu \,\middle|\, \mu \in M \right\} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} M_i^{m_i} \,\middle|\, (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \right\} \quad \text{per} \quad U_0^M ,$$
$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, e_1, \dots, e_N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{per} \quad U_+ .$$

Sugli elementi della base i valori degli accoppiamenti DRT sono

$$\begin{aligned} \pi\left(\prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r} \cdot L_\mu, \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r} \cdot L_\nu \right) &= q^{-(\mu|\nu)} \prod_{r=1}^{N} \delta_{e_r,f_r} \frac{[e_r]_{q_{\alpha^r}}! \; q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}}}{\left(q_{\alpha^r}^{-1} - q_{\alpha^r}\right)^{e_r}} \\ \overline{\pi}\left(L_\mu \cdot \prod_{r=1}^{N} E_{\alpha^r}^{e_r}, L_\nu \cdot \prod_{r=1}^{N} F_{\alpha^r}^{e_r} \right) &= q^{+(\mu|\nu)} \prod_{r=1}^{N} \delta_{e_r,f_r} \frac{[e_r]_{q_{\alpha^r}}! \; q_{\alpha^r}^{-\binom{e_r}{2}}}{\left(q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}\right)^{e_r}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

(cfr. [D-D] §3, e [D-L] Theorem 2.4).

3.5 Forme intere e dualità. Sia $\mathfrak{U}_\leq^M$ la $k\left[q, q^{-1}\right]$–sottoalgebra di $U_\leq^M$ generata da

$$\left\{ F_i^{(m)}, \binom{M_i; c}{t}, M_i^{-1} \,\middle|\, m, c, t \in \mathbb{N};\ i = 1, \dots, n \right\}$$

dove $F_i^{(m)} := F_i^m \big/ [m]_{q_i}!$ e $\binom{M_i;c}{t} := \prod_{s=1}^t \frac{M_i q_i^{c-s+1}-1}{q_i^s-1}$ sono le così dette *potenze divise*; è noto (cfr. [Lu3], [D-L]) che $\mathfrak{U}_\leq^M$ è una sottoalgebra di Hopf di $U_\leq^M$, avente una base PBW (come $k\big[q,q^{-1}\big]$–modulo) di monomi ordinati *crescenti*

$$\left\{ \prod_{i=1}^n \binom{M_i;0}{t_i} M_i^{-Ent(t_i/2)} \cdot \prod_{r=1}^N F_{\alpha^r}^{(n_r)} \,\middle|\, t_1,\dots,t_n,n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N} \right\}$$

e una simile base PBW di monomi ordinati *decrescenti*

$$\left\{ \prod_{r=N}^1 F_{\alpha^r}^{(n_r)} \cdot \prod_{i=1}^n \binom{M_i;0}{t_i} M_i^{-Ent(t_i/2)} \,\middle|\, t_1,\dots,t_n,n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N} \right\} \; ;$$

in particolare $\mathfrak{U}_\leq^M$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma di $U_\leq^M$.

Analogamente, scambiando gli F_i con gli E_i si costruisce l'algebra $\mathfrak{U}_\geq^M$ e le sue basi PBW.

Con analoga procedura si costruiscono algebre $\mathfrak{U}_-$, $\mathfrak{U}_0^M$, e $\mathfrak{U}_+$.

Precisamente, chiamiamo $\mathfrak{U}_0^M$ la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di U_0^M generata da

$$\left\{ \binom{M_i;c}{t}, M_i^{-1} \,\middle|\, c,t \in \mathbb{N};\; i=1,\dots,n \right\} \; ;$$

allora (cfr. [Lu3], [D-L]) $\mathfrak{U}_0^M$ è una sottoalgebra di Hopf di $\mathcal{U}_0^M$, avente una base PBW (su $k\big[q,q^{-1}\big]$)

$$\left\{ \prod_{i=1}^n \binom{M_i;0}{t_i} M_i^{-Ent(t_i/2)} \,\middle|\, t_1,\dots,t_n \in \mathbb{N} \right\} \; ;$$

in particolare $\mathfrak{U}_0^M$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma di U_0^M.

Chiamiamo $\mathfrak{U}_-$ la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di U_- generata da

$$\left\{ F_i^{(m)} \,\middle|\, m \in \mathbb{N};\; i=1,\dots,n \right\}$$

allora (cfr. [Lu2], [Lu3]) $\mathfrak{U}_-$ è una sottoalgebra di U_-, avente una base PBW (come $k\big[q,q^{-1}\big]$–modulo) di monomi ordinati *crescenti*

$$\left\{ \prod_{r=1}^N F_{\alpha^r}^{(n_r)} \,\middle|\, n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N} \right\}$$

e una simile base PBW di monomi ordinati *decrescenti*; in particolare $\mathfrak{U}_-$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma (come algebra) di U_-.

Scambiando gli F_i con gli E_i si costruisce l'algebra $\mathfrak{U}_+$ e le sue basi PBW.

Sia ora $\mathcal{U}_\geq^M$ la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di $U_\geq^M$ generata da

$$\{\overline{E}_{\alpha^1},\dots,\overline{E}_{\alpha^N}\} \cup \{\, L_\mu \mid \mu \in M \,\}$$

dove $\overline{E}_{\alpha^r} := (q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}) E_{\alpha^r}$, $\forall\, r = 1, \dots, N$; allora è noto (cfr. [D-P], §12) che $\mathcal{U}_{\geq}^{M}$ è una sottoalgebra di Hopf di $U_{\geq}^{M}$, avente una base PBW (come $k\big[q, q^{-1}\big]$–modulo) di monomi ordinati *crescenti*

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} M_i^{t_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{E}_{\alpha^r}^{n_r} \,\middle|\, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z};\, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N} \right\}$$

e una simile base PBW di monomi ordinati *decrescenti*; in particolare $\mathcal{U}_{\geq}^{M}$ è una $k\big[q, q^{-1}\big]$–forma di $U_{\geq}^{M}$.

Analogamente definiamo $\mathcal{U}_{\leq}^{M}$ come $k\big[q, q^{-1}\big]$–sottoalgebra di $U_{\leq}^{M}$ generata da

$$\{ \overline{F}_{\alpha^1}, \dots, \overline{F}_{\alpha^N} \} \cup \{ K_i^{\pm} \,|\, i = 1, \dots, n \}$$

dove $\overline{F}_{\alpha^r} := (q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}) F_{\alpha^r}$, $\forall\, r = 1, \dots, N$; allora $\mathcal{U}_{\leq}^{M}$ è una sottoalgebra di Hopf di $U_{\leq}^{M}$, avente una base PBW (come $k\big[q, q^{-1}\big]$–modulo) di monomi ordinati *decrescenti*

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{F}_{\alpha^r}^{n_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} M_i^{t_i} \,\middle|\, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z};\, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N} \right\}$$

e una simile base PBW di monomi ordinati *crescenti*; in particolare $\mathcal{U}_{\leq}^{M}$ è una $k\big[q, q^{-1}\big]$–forma di $U_{\leq}^{M}$.

Con analoga procedura si costruiscono algebre $\mathcal{U}_{-}$, $\mathcal{U}_{0}^{M}$, e $\mathcal{U}_{+}$.

Precisamente, chiamiamo $\mathcal{U}_{0}^{M}$ la $k\big[q, q^{-1}\big]$–sottoalgebra di U_{0}^{M} generata da

$$\{ L_\mu \,|\, \mu \in M \}$$

che è a sua volta una sottoalgebra di Hopf (su $k\big[q, q^{-1}\big]$) di $\mathcal{U}_{0}^{M}$ avente base PBW

$$\{ L_\mu \,|\, \mu \in M \} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} M_i^{m_i} \,\middle|\, i = 1, \dots, n \right\} .$$

Chiamiamo poi $\mathcal{U}_{-}$ la $k\big[q, q^{-1}\big]$–sottoalgebra di U_{-} generata da

$$\left\{ \overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n \right\}$$

che è a sua volta una sottoalgebra di Hopf (su $k\big[q, q^{-1}\big]$) di U_{-} avente una base PBW (come $k\big[q, q^{-1}\big]$–modulo) di monomi ordinati *crescenti*

$$\left\{ \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{n_r} \,\middle|\, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N} \right\}$$

e una simile base PBW di monomi ordinati *decrescenti*; in particolare $\mathcal{U}_{-}$ è una $k\big[q, q^{-1}\big]$–forma (come algebra) di U_{-}.

Sostituendo gli F_i con gli E_i si ottiene la definizione dell'algebra $\mathcal{U}_+$, forma intera su $k\big[q,q^{-1}\big]$ di U_+, e le sue $k\big[q,q^{-1}\big]$–basi PBW.

Infine osserviamo che dalle presentazioni di U_- e U_+ per generatori e relazioni si traggono subito analoghe presentazioni per le forme intere $\mathfrak{U}_-$, $\mathcal{U}_-$, e $\mathfrak{U}_+$, $\mathcal{U}_+$.

Dalle definizioni e dalla forma esplicita delle basi PBW si ottengono isomorfismi di $k(q)$–spazi vettoriali

$$U_{\leq}^{M} \cong U_- \otimes U_0^M \cong U_0^M \otimes U_- \,,\; U_{\geq}^{M} \cong U_+ \otimes U_0^M \cong U_0^M \otimes U_+$$

e isomorfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–moduli

$$\begin{gathered}\mathfrak{U}_{\leq}^{M} \cong \mathfrak{U}_- \otimes \mathfrak{U}_0^M \cong \mathfrak{U}_0^M \otimes \mathfrak{U}_- \,, \mathfrak{U}_{\geq}^{M} \cong \mathfrak{U}_+ \otimes \mathfrak{U}_0^M \cong \mathfrak{U}_0^M \otimes \mathfrak{U}_+ \\ \mathcal{U}_{\leq}^{M} \cong \mathcal{U}_- \otimes \mathcal{U}_0^M \cong \mathcal{U}_0^M \otimes \mathcal{U}_- \,, \mathcal{U}_{\geq}^{M} \cong \mathcal{U}_+ \otimes \mathcal{U}_0^M \cong \mathcal{U}_0^M \otimes \mathcal{U}_+\end{gathered}$$

Infine, dalle definizioni stesse e da (3.2) si ottengono immediatamente (cfr. [D-L], §3) le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_0^M &= \left\{ y \in U_0^M \,\middle|\, \pi\Big(\mathcal{U}_0^{M'}, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ x \in U_0^M \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(x, \mathcal{U}_0^{M'}\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{U}_0^M &= \left\{ y \in U_0^M \,\middle|\, \pi\Big(\mathfrak{U}_0^{M'}, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ x \in U_0^M \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(x, \mathfrak{U}_0^{M'}\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_- &= \left\{ x \in U_- \,\middle|\, \pi\Big(x, \mathcal{U}_+\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_- \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(\mathcal{U}_+, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{U}_- &= \left\{ x \in U_- \,\middle|\, \pi\Big(x, \mathfrak{U}_+\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_- \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(\mathfrak{U}_+, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathfrak{U}_+ &= \left\{ x \in U_+ \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(x, \mathcal{U}_-\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_+ \,\middle|\, \pi\Big(\mathcal{U}_-, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{U}_+ &= \left\{ x \in U_+ \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(x, \mathfrak{U}_-\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_+ \,\middle|\, \pi\Big(\mathfrak{U}_-, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{\leq}^M &= \left\{ x \in U_{\leq}^M \,\middle|\, \pi\Big(x, \mathcal{U}_{\geq}^{M'}\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_{\leq}^M \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(\mathcal{U}_{\geq}^{M'}, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{U}_{\leq}^M &= \left\{ x \in U_{\leq}^M \,\middle|\, \pi\Big(x, \mathfrak{U}_{\geq}^{M'}\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_{\leq}^M \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(\mathfrak{U}_{\geq}^{M'}, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathfrak{U}_{\geq}^M &= \left\{ x \in U_{\geq}^M \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(x, \mathcal{U}_{\leq}^{M'}\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_{\geq}^M \,\middle|\, \pi\Big(\mathcal{U}_{\leq}^{M'}, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{U}_{\geq}^M &= \left\{ x \in U_{\geq}^M \,\middle|\, \overline{\pi}\Big(x, \mathfrak{U}_{\leq}^{M'}\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} = \left\{ y \in U_{\geq}^M \,\middle|\, \pi\Big(\mathfrak{U}_{\leq}^{M'}, y\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nota: A prima vista può sembrare che le algebre $\mathcal{U}_-$, $\mathcal{U}_+$ e $\mathcal{U}_{\leq}^M$, $\mathcal{U}_{\geq}^M$ dipendano dalla scelta dei vettori radice E_α e F_α, dunque in ultima analisi dalla scelta dell'espressione ridotta $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}$, ma in reltà non è così: in effetti si può anche dare una definizione intrinseca di tali algebre — in termini di generatori di Chevalley (riscalati) e di azione del gruppo delle trecce associato a W — indipendente da scelte del tipo suddetto, e verificare che si ottengono le stesse algebre da noi definite (tale procedimento si trova in [D-P], §12); da questo seguirà anche che le algebre che introdurremo nei §§7, 8, 12, e 13 saranno a loro volta indipendenti dalla scelta dei vettori radice che compariranno nelle definizioni.

§ 4 Il quantum double

4.1 Il "Drinfel'd's double". Siano H_-, H_+ due algebre di Hopf arbitrarie sul campo (o anello) base F, e sia $(H_-)_{op}$ la stessa algebra di H_- con la comoltiplicazione opposta; sia poi $\pi\colon (H_-)_{op} \otimes H_+ \to F$ un qualunque accoppiamento di Hopf. Allora il *Drinfel'd's double* ("doppio di Drinfel'd") $D = D(H_-, H_+, \pi)$ è l' algebra $T(H_- \oplus H_+) \Big/ \mathcal{R}$, dove $T(H_- \oplus H_+)$ indica l'algebra tensoriale su $H_- \oplus H_+$ e $\mathcal{R}$ è un certo ideale di relazioni, precisamente le seguenti:

$$1_{H_-} = 1 = 1_{H_+}$$
$$x \otimes y = xy \qquad \text{per } x, y \in H_+ \text{ oppure } x, y \in H_-$$
$$\sum_{(x),(y)} \pi\left(y_{(2)}, x_{(2)}\right)\, x_{(1)} \otimes y_{(1)} = \sum_{(x),(y)} \pi\left(y_{(1)}, x_{(1)}\right)\, y_{(2)} \otimes x_{(2)} \qquad \text{per } x \in H_+,\, y \in H_- \;;$$

allora D ha una struttura canonica di algebra di Hopf, come afferma il seguente

Teorema 4.2 (cfr. [D-L], Theorem 3.6). *Siano H_-, H_+ algebre di Hopf qualunque sul campo (o anello) base F, e sia $\pi\colon (H_-)_{op} \otimes H_+ \to F$ un qualunque accoppiamento di Hopf. Allora il Drinfel'd's double $D = D(H_-, H_+, \pi)$ ha una struttura canonica di algebra di Hopf tale che H_- e H_+ siano sue sottoalgebre di Hopf e la moltiplicazione fornisca isomorfismi di coalgebre*

$$H_+ \otimes H_- \hookrightarrow D \otimes D \xrightarrow{m} D\,, \quad H_- \otimes H_+ \hookrightarrow D \otimes D \xrightarrow{m} D\,. \square \tag{4.1}$$

4.3 Il "quantum double" $D_q^M(\mathfrak{g})$. Come abbiamo visto nel §3, esiste un accoppiamento (perfetto) di Hopf $\pi\colon (U_\leq^Q)_{op} \otimes U_\geq^P \to k(q)$: così possiamo operare la costruzione del Drinfel'd's double e ottenere un'algebra di Hopf

$$D_q^P(\mathfrak{g}) := D\left(U_\leq^Q, U_\geq^P, \pi\right)$$

che chiamiamo *quantum double* (="doppio quantico"); dalla definizione stessa segue che $D_q^P(\mathfrak{g})$ è generata da K_α, L_λ, F_i, E_i — identificati con $1 \otimes K_\alpha$, $L_\lambda \otimes 1$, $1 \otimes F_i$, $E_i \otimes 1$ quando si pensi a $D_q^P(\mathfrak{g}) \cong U_\geq^P \otimes U_\leq^Q$ come coalgebre (grazie a (4.1)) — ($\alpha \in Q$, $\lambda \in P$, $i = 1, \dots, n$), mentre le relazioni che definiscono l'ideale $\mathcal{R}$ si riducono chiaramente a relazioni di commutazione tra generatori: un semplice calcolo dà

$$\begin{aligned} K_i L_j &= L_j K_i \;, \\ K_i E_j &= q_i^{a_{ij}} E_j K_i \;, \\ L_i F_j &= q_i^{-\delta_{ij}} F_j L_i \;, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{L_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{q_i - q_i^{-1}} \;; \end{aligned} \tag{4.2}$$

Per uso successivo registriamo anche le seguenti importanti regole di commutazione, che possono essere dimostrate per induzione a partire da (4.2):

$$\begin{aligned} E_i^r F_i^s &= \sum_{t\geq 0}^{t\leq r,s} \begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}_{q_i} [t]_{q_i}!^2 \cdot F_i^{s-t} \cdot \begin{bmatrix} K_{\alpha_i} \overset{\otimes}{\otimes}; 2t-r-s \\ t \end{bmatrix} \cdot E_i^{r-t} \\ F_i^s E_i^r &= \sum_{t\geq 0}^{t\leq r,s} \begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}_{q_i} [t]_{q_i}!^2 \cdot \cdot E_i^{r-t} \cdot \begin{bmatrix} K_{-\alpha_i} \overset{\otimes}{\otimes}; 2t-r-s \\ t \end{bmatrix} \cdot F_i^{s-t} \end{aligned} \tag{4.3}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, dove poniamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{+\alpha_i} \overset{\otimes}{\otimes}; c \\ t \end{bmatrix} &:= \prod_{p=1}^{t} \frac{q_i^{c-p+1} \cdot L_{+\alpha_i} \otimes 1 - 1 \otimes K_{-\alpha_i} \cdot q_i^{-c+p-1}}{q_i^p - q_i^{-p}} \\ \begin{bmatrix} K_{-\alpha_i} \overset{\otimes}{\otimes}; c \\ t \end{bmatrix} &:= \prod_{p=1}^{t} \frac{q_i^{c-p+1} \cdot 1 \otimes K_{-\alpha_i} - L_{+\alpha_i} \otimes 1 \cdot q_i^{-c+p-1}}{q_i^p - q_i^{-p}} \end{aligned}$$

per ogni $c \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$.

Poiché la restrizione $\pi \colon (U_\leq^Q)_{op} \otimes U_\geq^M \to k(q)$ è ancora un accoppiamento di Hopf perfetto, possiamo anche operare la stessa costruzione con $U_\geq^M$ invece di $U_\geq^P$, per ogni reticolo M tale che $Q \leq M \leq P$, ottenendo così il quantum double

$$D_q^M(\mathfrak{g}) := D\left(U_\leq^Q, U_\geq^M, \pi\right) \ ;$$

in particolare considereremo il caso $M = Q$ ottenendo così un'algebra di Hopf $D_q^Q(\mathfrak{g})$; inoltre useremo per semplicità la notazione $D_M := D_q^M(\mathfrak{g})$.

4.4 Basi PBW di $D_q^M(\mathfrak{g})$. Dai §§3.4–5 e dalle definizioni è chiaro che le basi PBW delle algebre di Borel quantiche forniscono basi PBW (tensoriali, cioè composte di tensori decomponibili) di $D_q^M(\mathfrak{g})$; in particolare nel caso di $D_q^Q(\mathfrak{g})$ considereremo la base

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{(e_r)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} K_i; 0 \\ t_i \end{pmatrix} K_i^{-Ent(t_i/2)} \otimes \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} K_i; 0 \\ s_i \end{pmatrix} K_i^{-Ent(s_i/2)} \cdot \prod_{r=1}^{N} F_{\alpha^r}^{(f_r)} \;\middle|\; e_r, t_i, s_i, f_r \in \mathbb{N}, \quad \forall\, i, r \right\} \tag{4.4}$$

(assumendo $D_q^Q(\mathfrak{g})$ identificato con $U_\geq^Q \otimes U_\leq^Q$, come sempre faremo nel seguito) e nel caso di $D_q^P(\mathfrak{g})$ considereremo la base

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{E}_{\alpha^r}^{e_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{l_i} \otimes \prod_{i=1}^{n} K_i^{k_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{f_r} \;\middle|\; l_i, k_i \in \mathbb{Z}; e_r, f_r \in \mathbb{N}, \quad \forall\, i, r \right\} \tag{4.5}$$

(assumendo $D_q^P(\mathfrak{g})$ identificato con $U_\geq^P \otimes U_\leq^Q$, come sempre faremo nel seguito).

§ 5 Il gruppo quantico $U_q^M(\mathfrak{g})$

5.1 L'algebra quantica $U_q^M(\mathfrak{g})$. Consideriamo l'ideale $\mathfrak{K}_P$ di $D_q^P(\mathfrak{g})$ generato dagli elementi $K \otimes 1 - 1 \otimes K$, $K \in U_0^Q$; è immediato verificare che $\mathfrak{K}_P$ è un ideale di Hopf, dunque $D_q^P(\mathfrak{g}) \big/ \mathfrak{K}_P$ è un'algebra di Hopf, e per definizione poniamo

$$U_q^P(\mathfrak{g}) := D_q^P(\mathfrak{g}) \big/ \mathfrak{K}_P \,.$$

Se si guarda la presentazione di $D_q^P(\mathfrak{g})$ per generatori e relazioni data in §4 si trova immediatamente che $U_q^P(\mathfrak{g}) := D_q^P(\mathfrak{g}) \big/ \mathfrak{K}_P \cong U_{q,P}(\mathfrak{g})$, dove $U_{q,P}(\mathfrak{g})$ è il gruppo quantico definito in [D-P], §9.

Più esplicitamente, abbiamo la seguente presentazione di $U_q^P(\mathfrak{g})$: essa è la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori

$$F_i\,,\ L_\lambda\,,\ E_i \quad (\lambda \in P\,;\ i = 1, \dots, n)$$

e relazioni

$$\begin{aligned}
L_0 = 1\,, \qquad L_\lambda L_\mu &= L_{\lambda+\mu} && \forall\ \lambda, \mu \in P \\
L_\lambda F_j &= q^{-(\alpha_j|\lambda)} F_j L_\lambda && \forall\ \lambda \in P, \quad j = 1, \dots, n \\
L_\lambda E_j &= q^{(\alpha_j|\lambda)} E_j L_\lambda && \forall\ \lambda \in P, \quad j = 1, \dots, n \\
E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{L_{\alpha_i} - L_{-\alpha_i}}{q_i - q_i^{-1}} && \forall\ i, j = 1, \dots, n \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} & E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k = 0 && \forall\ i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} & F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k = 0 && \forall\ i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j
\end{aligned} \tag{5.1}$$

La struttura di Hopf in termini di generatori è data dalle seguenti formule:

$$\begin{gathered}
\Delta(F_i) = F_i \otimes L_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i\,, \quad \Delta(L_\lambda) = L_\lambda \otimes L_\lambda\,, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + L_{\alpha_i} \otimes E_i \\
\epsilon(F_i) = 0\,, \quad \epsilon(L_\lambda) = 1\,, \quad \epsilon(E_i) = 0 \\
S(F_i) = -F_i L_{\alpha_i}\,, \quad S(L_\lambda) = L_{-\lambda}\,, \quad S(E_i) = -L_{-\alpha_i} E_i \\
\forall\ i = 1, \dots, n\,, \quad \lambda \in P
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Operiando la stessa costruzione con un qualunque reticolo M tale che $Q \leq M \leq P$ definiamo

$$U_q^M(\mathfrak{g}) := D_q^M(\mathfrak{g}) \big/ \mathfrak{K}_M \quad \Big(\cong U_{q,M}(\mathfrak{g}) \Big)$$

(dove $U_{q,M}(\mathfrak{g})$ è il gruppo quantico definito in [D-P], §9). Allora $U_q^M(\mathfrak{g})$ ha una presentazione per generatori e relazioni come in (5.1), (5.2) con M invece di P, e chiaramente $M \leq M' \iff U_q^M(\mathfrak{g}) \geq U_q^{M'}(\mathfrak{g})$. Infine indichiamo con

$$pr_{{}_M} \colon D_q^M(\mathfrak{g}) \relbar\joinrel\twoheadrightarrow D_q^M(\mathfrak{g}) \big/ \mathfrak{K}_M = U_q^M(\mathfrak{g})$$

la proiezione canonica, e ricordiamo (cfr. ad esempio [Ro1]) l'esistenza di *decomposizioni triangolari*, cioè isomorfismi di $k(q)$–spazi vettoriali

$$U_+ \otimes U_0^M \otimes U_- \cong U_q^M(\mathfrak{g}) \cong U_- \otimes U_0^M \otimes U_+ \ .$$

5.2 Forme intere di $U_q^M(\mathfrak{g})$. Sia $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{g})$ la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di $U_q^M(\mathfrak{g})$ generata da

$$\left\{ F_i^{(\ell)}, \binom{M_i;c}{t}, M_i^{-1}, E_i^{(m)} \,\middle|\, \ell,c,t,m \in \mathbb{N}; i=1,\dots,n \right\} \ ;$$

è noto (cfr. [D-L], §3) che questa è una sottoalgebra di Hopf di $U_q^M(\mathfrak{g})$, avente una base PBW (come $k\big[q,q^{-1}\big]$–modulo)

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{(n_r)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \binom{M_i;0}{t_i} M_i^{-Ent(t_i/2)} \cdot \prod_{r=1}^{N} F_{\alpha^r}^{(m_r)} \,\middle|\, n_1,\dots,n_N,t_1,\dots,t_n,m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N} \right\};$$

questa è anche una $k(q)$–base di $U_q^M(\mathfrak{g})$, quindi chiaramente $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{g})$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma di $U_q^M(\mathfrak{g})$. Infine $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{g})$ eredita da $U_q^M(\mathfrak{g})$ *decomposizioni triangolari* (cioè isomorfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–moduli)

$$\mathfrak{U}_+ \otimes \mathfrak{U}_0^M \otimes \mathfrak{U}_- \cong \mathfrak{U}_M(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{U}_- \otimes \mathfrak{U}_0^M \otimes \mathfrak{U}_+ \ .$$

Sia $\mathcal{U}_M(\mathfrak{g})$ la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di $U_q^M(\mathfrak{g})$ generata da

$$\left\{ \overline{F}_{\alpha^1},\dots,\overline{F}_{\alpha^N} \right\} \cup \left\{ L_\mu \,\middle|\, \mu \in M \right\} \cup \left\{ \overline{F}_{\alpha^1},\dots,\overline{E}_{\alpha^N} \right\}$$

dove $\overline{F}_{\alpha^r} := (q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}) F_{\alpha^r}$, $\overline{E}_{\alpha^r} := (q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}) E_{\alpha^r}$, $\forall\, r=1,\dots,N$ (cfr. [D-P], §12; si veda anche [D-K] e [D-K-P]); allora $\mathcal{U}_M(\mathfrak{g})$ è una sottoalgebra di Hopf di $U_q^M(\mathfrak{g})$, avente una base PBW (come $k\big[q,q^{-1}\big]$–modulo)

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{E}_{\alpha^r}^{n_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} M_i^{t_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{m_r} \,\middle|\, t_1,\dots,t_n \in \mathbb{Z}; n_1,\dots,n_N,m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N} \right\};$$

questa è anche una $k(q)$–base di $U_q^M(\mathfrak{g})$, quindi chiaramente $\mathcal{U}_M(\mathfrak{g})$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma di $U_q^M(\mathfrak{g})$. Infine $\mathcal{U}_M(\mathfrak{g})$ eredita da $U_q^M(\mathfrak{g})$ *decomposizioni triangolari* (cioè isomorfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–moduli)

$$\mathcal{U}_+ \otimes \mathcal{U}_0^M \otimes \mathcal{U}_- \cong \mathcal{U}_M(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}_- \otimes \mathcal{U}_0^M \otimes \mathcal{U}_+ \ .$$

5.3 Specializzazioni alle radici dell'unità e morfismo di Frobenius quantico. Poiché le forme intere che abbiamo definito sono moduli su $k\big[q,q^{-1}\big]$, possiamo specializzarle a valori speciali di q. A tal fine assumiamo per semplicità che il nostro campo base k contenga tutte le radici dell'unità (così che $k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon) = k$ per ogni radice dell'unità ε; altrimenti la specializzazione estenderà il campo base k a $k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ p_\ell(q) = k(\varepsilon)$, dove $p_\ell(q)$ è l'ℓ–esimo polinomio ciclotomico e ε è una radice primitiva ℓ–esima dell'unità).

Cominciamo con $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$. Per il caso $\varepsilon = 1$, poniamo

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) := \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \Big/ (q-1)\,\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \;\cong\; \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-1)$); sia $p_1 \colon \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g})$ la proiezione canonica e poniamo $f_i := p_1\Big(F_i^{(1)}\Big)$, $h_i := p_1\Big(\Big(\begin{smallmatrix} K_i;\,0 \\ 1 \end{smallmatrix}\Big)\Big)$, $e_i := p_1\Big(E_i^{(1)}\Big)$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora sfruttando la presentazione di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ per generatori e relazioni data in [D-L], §3.4, si trova (guardando come le relazioni si trasformano tramite p_1) che $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g})$ è cocommutativa, quindi eredita da $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ una struttura canonica di coalgebra di Hopf Poisson; inoltre essa eredita anche da $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ una presentazione per generatori — f_i, h_i, e_i — e relazioni che è esattamente la stessa di (2.2–4) per $U(\mathfrak{g})$, quindi abbiamo un isomorfismo di coalgebre di Hopf Poisson

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})\;; \tag{5.3}$$

in altre parole $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ si specializza a $U(\mathfrak{g})$ per $q \to 1$.

Sia ora ε una radice ℓ–esima primitiva di 1, per ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$, e poniamo

$$\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g}) := \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \;\cong\; \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$); si ha

Teorema 5.4 ([Lu3], Theorem 8.10; [D-L], Theorem 6.3). *Esiste un epimorfismo di algebre di Hopf*

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g}) \relbar\joinrel\twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}) \tag{5.4}$$

definito da

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}\Big(F_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon}\Big) &:= F_i^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se}\ \ \ell\,\big|\,s\,,\ \ 0\ \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}\left(\begin{pmatrix} K_i;0 \\ s \end{pmatrix}\Bigg|_{q=\varepsilon}\right) &:= \begin{pmatrix} K_i;0 \\ s/\ell \end{pmatrix}\Bigg|_{q=1} && \textit{se}\ \ \ell\,\big|\,s\,,\ \ 0\ \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}\Big(K_i^{-1}\Big|_{q=1}\Big) &:= 1 && \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}\Big(E_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon}\Big) &:= E_i^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se}\ \ \ell\,\big|\,s\,,\ \ 0\ \ \textit{altrimenti}
\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $s \in \mathbb{N}$. $\square$

In [Lu3], §8.15, si mostra come, per $\ell = p$ primo, $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}$ possa essere interpretato come un *sollevamento del morfismo di Frobenius* $G_{\mathbb{Z}_p} \to G_{\mathbb{Z}_p}$ *alla caratteristica zero*, quindi ci riferiremo ad esso come ad un *morfismo di Frobenius quantico*.

Ora consideriamo $\mathcal{U}_M(\mathfrak{g})$. Poniamo

$$\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \,\cong\, \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k \;;$$

è noto (cfr. [D-P], ch. IV) che

$$\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) \cong F[H] \tag{5.5}$$

come algebre di Hopf Poisson su k (qui H è il gruppo di Poisson duale di G definito nel §1); in altre parole, $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ si specializza a $F[H]$ per $q \rightarrow 1$.

Per una radice ℓ–esima primitiva dell'unità ε (con ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$), poniamo

$$\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \,\cong\, \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k \;;$$

vale allora il seguente

Teorema 5.5 ([D-P], Theorem 19.1).

(a) Esiste un monomorfismo di algebre di Hopf

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}} \colon F[H] \cong \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g}) \tag{5.6}$$

definito da

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}} \colon \qquad \overline{F}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{F}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon}, \qquad L_\lambda\Big|_{q=1} \mapsto L_\lambda^\ell\Big|_{q=\varepsilon}, \qquad \overline{E}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{E}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon}$$

per ogni $\alpha \in R^+$, $\lambda \in P$.

(b) L'immagine Z_0 $\left(\cong_{\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}}} \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})\right)$ *di* $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}}$ *è una sottoalgebra di Hopf centrale di* $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})$.

(c) L'insieme di monomi PBW ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{E}_{\alpha^r}^{\,\ell e_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{\ell l_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{\,\ell f_r} \,\middle|\, e_1,\dots,e_N,l_1,\dots,l_n,f_1,\dots,f_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è una base di Z_0 *su* k .

(d) L'insieme di monomi PBW ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{E}_{\alpha^r}^{\,e_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{l_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{\,f_r} \,\middle|\, e_1,\dots,e_N,l_1,\dots,l_n,e_1,\dots,e_N = 0,1,\dots,n-1 \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})$ *su* Z_0*; pertanto* $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})$ *è un modulo libero di rango* $\ell^{dim(G)}$ *su* Z_0 . $\square$

Proprio come per $\mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}}$, ci riferiremo a $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}}$ come ad un *morfismo di Frobenius quantico*; infatti esso può essere interpretato come un *sollevamento del morfismo di Frobenius*[6] $H_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow H_{\mathbb{Z}_p}$ *alla caratteristica zero* (per $\ell = p$ primo).

[6] Qui $H_{\mathbb{Z}_p}$ indica lo schema in gruppo alla Chevalley che si può chiaramente costruire a partire dal "dato di Cartan" associato ad H (imitando la consueta procedura che si segue per $G_{\mathbb{Z}_p}$)

§ 6 Algebre quantiche di funzioni

6.1 Le algebre quantiche di funzioni $F_q^M[B_\pm]$ (cfr. [D-L], §4.1). Sia M un qualunque reticolo tale che $Q \leq M \leq P$, e sia M' il reticolo *duale*, $Q \leq M' \leq P$ (cfr. §2.1).

Sia $F_q^M[B_\pm]$ l'*algebra quantica di funzioni* relativa a $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$ (o l'*algebra delle funzioni del gruppo quantico* $B_{q,\pm}^M$), definita come l'algebra di funzioni su $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$ generata dei coefficienti matriciali delle rappresentazioni *positive* di dimensione finita di $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$ (cfr. [D-L], §4); l'aggettivo *positive* indica quelle rappresentazioni di $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$ per le quali esista una base rispetto alla quale gli operatori L_ν ($\nu \in M'$) operino diagonalmente con autovalori potenze di q. Poiché la categoria delle rappresentazioni positive di dimensione finita di $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$ è una categoria tensoriale, $F_q^M[B_\pm]$ è un'algebra di Hopf, che chiamiamo duale di $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$ perché esiste un accoppiamento di Hopf perfetto naturale (valutazione) tra loro; è anche possibile realizzare $F_q^M[B_\pm]$ come sottoalgebra di Hopf di $\big(U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)\big)^\circ$ (qui e nel seguito per ogni algebra di Hopf H indicheremo con H° ($\subseteq H^*$) la sua *algebra di Hopf duale*, nel senso di [SW], ch. VI).

Gli accoppiamenti DRT forniscono isomorfismi di algebre di Hopf

$$\begin{aligned} F_q^M[B_+] &\cong U_q^M(\mathfrak{b}_-)_{op} \qquad \text{indotto dall'accoppiamento } \pi \\ F_q^M[B_-] &\cong U_q^M(\mathfrak{b}_+)_{op} \qquad \text{indotto dall'accoppiamento } \overline{\pi} \end{aligned} \tag{6.1}$$

(cfr. [D-L], Proposition 4.2); tramite questi isomorfismi gli accoppiamenti DRT possono essere interpretati come accoppiamenti naturali di valutazione.

6.2 Forme intere di $F_q^M[B_\pm]$. In §3.5 abbiamo introdotto forme intere di $U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)$: adesso definiamo le corrispondenti algebre di funzioni, che risulteranno essere forme intere di $F_q^M[B_\pm]$. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_M[B_\pm] &:= \Big\{ f \in F_q^M[B_\pm] \,\Big|\, \Big\langle f, \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{b}_\pm) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \ \Big\} \\ \mathcal{F}_M[B_\pm] &:= \Big\{ f \in F_q^M[B_\pm] \,\Big|\, \Big\langle f, \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{b}_\pm) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \ \Big\} \end{aligned} \tag{6.2}$$

dove $\langle \ , \ \rangle \colon F_q^M[B_\pm] \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm) \to k(q)$ è l'accoppiamento naturale di valutazione; allora da (3.2) si dimostra che (cfr. anche (6.1))

$$\mathfrak{F}_M[B_\pm] \cong \mathcal{U}_M(\mathfrak{b}_\mp)_{op}\,, \qquad \mathcal{F}_M[B_\pm] \cong \mathfrak{U}_M(\mathfrak{b}_\mp)_{op}\,; \tag{6.3}$$

in particolare $\mathfrak{F}_M[B_\pm]$ e $\mathcal{F}_M[B_\pm]$ sono $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebre di Hopf e forme intere (su $k\big[q,q^{-1}\big]$) di $F_q^M[B_\pm]$; si ha anche

$$\mathfrak{F}_M[B_\pm] \cong \mathcal{U}_M(\mathfrak{b}_\mp)^{op}\,, \qquad \mathcal{F}_M[B_\pm] \cong \mathfrak{U}_M(\mathfrak{b}_\mp)^{op}\,, \tag{6.4}$$

con i diversi isomorfismi che scaturiscono dai diversi accoppiamenti DRT (cfr. anche (3.3–5)).

6.3 L'algebra quantica di funzioni $F_q^M[G]$. Come in §6.1, chiamiamo $F_q^M[G]$ l'*algebra quantica di funzioni* relativa a $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ (o l'*algebra delle funzioni del gruppo quantico* G_q^M), definita come l'algebra di funzioni su $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ generata dai coefficienti matriciali delle rappresentazioni *positive* di dimensione finita di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ (cfr. [D-L], §4); poiché la categoria delle rappresentazioni positive di dimensione finita di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ è una categoria tensoriale, $F_q^M[G]$ è un'algebra di Hopf, che chiamiamo duale di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ perché esiste un accoppiamento di Hopf perfetto naturale (valutazione) tra loro; è anche possibile realizzare $F_q^M[G]$ come sottoalgebra di Hopf di $\big(U_q^{M'}(\mathfrak{g})\big)^\circ$.

6.4 Forme intere di $F_q^M[G]$. In §5.2 abbiamo introdotto forme intere di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$: adesso definiamo le corrispondenti algebre di funzioni, che risulteranno essere forme intere di $F_q^M[G]$. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_M[G] &:= \Big\{ f \in F_q^M[G] \,\Big|\, \Big\langle f, \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \Big\} \\ \mathcal{F}_M[G] &:= \Big\{ f \in F_q^M[G] \,\Big|\, \Big\langle f, \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \Big\} \end{aligned} \tag{6.5}$$

dove $\langle\ ,\ \rangle \colon F_q^M[G] \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \to k(q)$ è l'accoppiamento naturale di valutazione; è chiaro che queste sono $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebre di $F_q^M[G]$.

6.5 Specializzazioni alle radici dell'unità. Si dimostra in [D-L] che $\mathfrak{F}_P[G]$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma di $F_q^P[G]$ (come algebra di Hopf) e anche che

$$\mathfrak{F}_P[G] \xrightarrow{\ q\to 1\ } F[G] \tag{6.6}$$

cioè $\mathfrak{F}_1^P[G] := \mathfrak{F}_P[G] \Big/ (q-1)\,\mathfrak{F}_P[G] \cong F[G]$ come k–algebre di Hopf Poisson (cfr. [D-L], Proposition 6.2); in effetti questo risultato scaturisce come duale di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\ q\to 1\ } U(\mathfrak{g})$.

Per una radice ℓ–esima primitiva dell'unità ε (ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$) in k (facciamo le ipotesi dell'inizio del §5.3), poniamo

$$\mathfrak{F}_\varepsilon^P[G] := \mathfrak{F}_P[G] \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathfrak{F}_P[G] \cong \mathfrak{F}_P[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$); il risultato seguente definisce un altro *morfismo di Frobenius quantico*:

Teorema 6.6 ([D-L], Proposition 6.4).

Esiste un monomorfismo di algebre di Hopf

$$\mathfrak{F}r_G \colon F[G] \cong \mathfrak{F}_1^P[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_\varepsilon^P[G] \tag{6.7}$$

(duale di $\mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$); la sua immagine F_0 è una sottoalgebra di Hopf centrale di $\mathfrak{F}_\varepsilon^P[G]$. $\square$

§ 7 Gruppi formali quantici

7.1 Algebre di Hopf formali e gruppi formali quantici. In questo paragrafo introduciamo la nozione di *gruppo formale quantico*. Ricordiamo (cfr. §1, o direttamente [Di], ch. I) che i gruppi formali possono essere definiti in una categoria di algebre topologiche commutative di tipo particolare, il cui sottostante spazio vettoriale (o modulo) topologico sia linearmente compatto; seguendo la filosofia di Drinfel'd, definiamo i gruppi formali quantici semplicemente eliminando l'ipotesi di commutatività dalla nozione classica di gruppo formale. Pertanto, se volessimo utilizzare un linguaggio geometrico, in accordo con il "dizionario" di Drinfel'd (cfr. [Dr3], §1) dovremmo definire **gruppo formale quantico** lo *spettro* di un'algebra di Hopf formale (mentre i gruppi formali *classici* sarebbero *spettri* di algebre di Hopf formali *commutative*); naturalmente in quest'ordine di idee l'espressione "spettro di X" vorrebbe soltanto indicare un fantomatico oggetto geometrico associato all'oggetto algebrico X, senza alcuna pretesa di rigorosità.

Il nostro obiettivo ora è studiare $U_q^M(\mathfrak{g})^*$: poiché $U_q^M(\mathfrak{g})$ è un'algebra di Hopf, il suo duale lineare $U_q^M(\mathfrak{g})^*$ è un'algebra di Hopf formale (cfr. §1.1), dunque (associata ad) un gruppo formale quantico. Ricordiamo inoltre (cfr. §5) che $U_q^M(\mathfrak{g})$ è definito come quoziente del Drinfel'd's double $D_M := D_q^M(\mathfrak{g})$; abbiamo dunque un epimorfismo di algebre di Hopf $pr_M \colon D_M \twoheadrightarrow U_q^M(\mathfrak{g})$ che il funtore $(\ )^*$ trasforma in un monomorfismo di algebre di Hopf formali

$$j_{M'} := (pr_M)^* \colon U_q^M(\mathfrak{g})^* \lhook\joinrel\longrightarrow {D_M}^*$$

Pertanto cominciamo con lo studio dell'algebra di Hopf formale ${D_M}^*$.

Lemma 7.2. *Siano H_-, H_+ algebre di Hopf su F, sia $\pi \colon (H_-)_{op} \otimes H_+ \to F$ un arbitrario accoppiamento di Hopf, e sia $D := D(H_-, H_+, \pi)$ il corrispondente Drinfel'd's double. Allora esistono isomorfismi di F–algebre*

$$D^* \cong H_+^* \,\widehat{\otimes}\, H_-^* \ , \qquad D^* \cong H_-^* \,\widehat{\otimes}\, H_+^*$$

duali degli isomorfismi di F–coalgebre

$$D \cong H_+ \otimes H_- \ , \qquad D \cong H_- \otimes H_+$$

forniti dalla moltiplicazione (cfr. Teorema 4.2).

Dimostrazione. Dal §1.1 segue che dualizzando (4.1) si ottengono isomorfismi di spazi vettoriali

$$D^* \cong H_+^* \,\widehat{\otimes}\, H_-^* \ , \quad D^* \cong H_-^* \,\widehat{\otimes}\, H_+^* \ ;$$

un semplice calcolo mostra allora che questo è un isomorfismo di algebre, considerando il membro di destra come prodotto tensoriale topologico *di algebre*. $\square$

7.3 Algebre quantiche come algebre di funzioni. Dal §4.3 ricordiamo che esiste un isomorfismo di coalgebre $D_M \cong U_q^M(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q^Q(\mathfrak{b}_-) = U_\geq^M \otimes U_\leq^Q$; quindi il Lemma 7.2 ci dà un isomorfismo di algebre

$${D_M}^* \cong {U_\geq^M}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_\leq^Q}^* \ ;$$

pertanto passiamo a studiare le algebre di Hopf formali $U_{\geq}^{M\,*}$, $U_{\leq}^{Q\,*}$.

Osserviamo che gli accoppiamenti DRT inducono varie immersioni di algebre quantiche nel duale lineare di altre algebre quantiche; precisamente fissiamo tra le tante le seguenti:

$$\begin{aligned} U_- &\hookrightarrow {U_+}^* \qquad \text{(indotto da } \pi\,) \\ U_+ &\hookrightarrow {U_-}^* \qquad \text{(indotto da } \overline{\pi}\,) \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} im_{M}\colon U_0^M &\hookrightarrow {U_0^{M'}}^* \qquad \text{(indotto da } \pi\,) \\ \overline{im}_{M}\colon U_0^M &\hookrightarrow {U_0^{M'}}^* \qquad \text{(indotto da } \overline{\pi}\,) \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} U_{\leq}^M \cong U_- \otimes U_0^M &\hookrightarrow U_+^* \mathbin{\widehat{\otimes}} {U_0^{M'}}^* \cong {U_{\geq}^{M'}}^* \qquad \text{(indotto da } \pi\,) \\ U_{\geq}^M \cong U_0^M \otimes U_+ &\hookrightarrow {U_0^{M'}}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} U_+^* \cong {U_{\leq}^{M'}}^* \qquad \text{(indotto da } \overline{\pi}\,) \end{aligned} \tag{7.3}$$

in aggiunta le (7.3) sono anche immersioni di algebre di Hopf formali. Da ora in avanti allora identificheremo le varie algebre quantiche con le loro immagini nei corrispondenti spazi duali.

Lemma 7.4.

(a+) Il sottoinsieme di $\mathcal{U}_-$

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} (-1)^{f_r} q_{\alpha^r}^{-\binom{f_r}{2}} \overline{F}_{\alpha^r}^{f_r} \,\middle|\, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di ${U_+}^*$ *duale della base PBW di* $\mathfrak{U}_+$ *di monomi ordinati decrescenti.*

(b+) Il sottoinsieme di $\mathfrak{U}_-$

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} (-1)^{f_r} q_{\alpha^r}^{-\binom{f_r}{2}} F_{\alpha^r}^{(f_r)} \,\middle|\, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di ${U_+}^*$ *duale della base PBW di* $\mathcal{U}_+$ *di monomi ordinati decrescenti.*

(a−) Il sottoinsieme di $\mathcal{U}_+$

$$\left\{ \prod_{r=1}^{N} q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}} \overline{E}_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, e_1, \dots, e_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di ${U_-}^*$ *duale della base PBW di* $\mathfrak{U}_-$ *di monomi ordinati crescenti.*

(b−) Il sottoinsieme di $\mathfrak{U}_+$

$$\left\{ \prod_{r=1}^{N} q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}} E_{\alpha^r}^{(e_r)} \,\middle|\, e_1, \dots, e_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di ${U_-}^*$ *duale della base PBW di* $\mathcal{U}_-$ *di monomi ordinati crescenti.*

(c) $\mathcal{U}_0^M$ *(e quindi* U_0^M *) contiene (rispetto ad ambedue le immersioni in (7.2)) la pseudobase* $\mathcal{B}_M$ *di* ${U_0^{M'}}^*$ *duale della base PBW di* $\mathfrak{U}_0^{M'}$*.*

Dimostrazione. Per *(a±)* e *(b±)* basta ricordare la definizione di pseudobase e utilizzare le (3.2).

Per quanto riguarda *(c)*, poniamo

$$u_\tau := \prod_{i=1}^{n} \binom{\Lambda_i ; 0}{t_i} \Lambda_i^{-Ent(t_i/2)} \qquad \forall\, \tau = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$$

per indicare gli elementi della base PBW di $\mathfrak{U}_0^{M'}$, e indichiamo con u_τ^* l'elemento di ${U_0^{M'}}^*$ duale di u_τ, cioè l'unico elemento di ${U_0^{M'}}^*$ tale che $\left\langle u_\tau^*, u_{\tau'} \right\rangle = \delta_{\tau,\tau'}$ per ogni $\tau' \in \mathbb{N}^n$. Analogamente scriviamo gli elementi della base PBW di $\mathcal{U}_0^M$ come $L_\mu = \prod_{i=1}^n M_i^{m_i}$ per ogni $\mu = \sum_{i=1}^n m_i \mu_i \in M$, e identifichiamo μ con $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$; in particolare allora $M_+ := M \cap P_+ \cong \mathbb{N}^n$. Inoltre consideriamo su $\mathbb{N}^n$ l'ordinamento $\preceq$ prodotto dell'ordinamento naturale su $\mathbb{N}$.

Il calcolo diretto ci dà

$$\left\langle L_\mu, u_\tau \right\rangle_{\overline{\pi}} = \prod_{i=1}^{n} \binom{m_i}{t_i}_{q_i} \cdot q_i^{-m_i \cdot Ent(t_i/2)} \qquad \forall\, \mu, \tau \in \mathbb{N}^n$$

da cui ricaviamo in particolare

$$\begin{aligned} &\left\langle L_\mu, u_\tau \right\rangle_{\overline{\pi}} \neq 0 \iff \tau \preceq \mu \\ &\left\langle L_\tau, u_\tau \right\rangle_{\overline{\pi}} = q^{-T(\tau)} \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^n \end{aligned} \tag{7.4}$$

dove $T(\tau) := \sum_{i=1}^n d_i t_i Ent(t_i/2)$; in particolare $q^{-T(\tau)}$ *è invertibile in* $k\big[q, q^{-1}\big]$. Da (7.4) otteniamo formule

$$L_\tau = q^{-T(\tau)} \cdot u_\tau^* + \sum_{\tau' \prec \tau} \left\langle L_\tau, u_{\tau'} \right\rangle_{\overline{\pi}} \cdot u_{\tau'}^* \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^n$$

che ci dicono che l'insieme $\left\{ L_\tau \,\middle|\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\}$ si ottiene dall'insieme $\left\{ u_\tau^* \,\middle|\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\}$ tramite la matrice $\mathbb{M} := \Big(\langle L_\tau, u_{\tau'} \rangle_{\overline{\pi}} \Big)_{\tau,\tau' \in \mathbb{N}^n}$ che ha tutte le componenti in $k\big[q, q^{-1}\big]$, è triangolare inferiore, ed ha tutti gli elementi diagonali invertibili in $k\big[q, q^{-1}\big]$; ma allora anche la matrice inversa $\mathbb{M}^{-1} = \big(c_{\tau,\tau'} \big)_{\tau,\tau' \in \mathbb{N}^n}$ ha queste stesse proprietà, perciò gli u_τ^* sono dati dalle formule

$$u_\tau^* = q^{+T(\tau)} \cdot L_\tau + \sum_{\tau' \prec \tau} c_{\tau,\tau'} \cdot L_{\tau'} \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^n$$

da cui ricaviamo che

$$\mathcal{B}_M := \left\{ u_\tau^* \,\middle|\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\} \subseteq \mathcal{U}_0^M .$$

La costruzione precedente è stata fatta relativamente all'immersione $\overline{im}_M \colon U_0^M \hookrightarrow \big(U_0^{M'}\big)^*$ indotta da $\overline{\pi}$; ripetendo — parola per parola — la stessa costruzione a partire dall' insieme $\left\{ L_{-\mu} = L_\mu^{-1} \,\middle|\, \mu \in M_+ \right\}$ invece che dall'insieme $\left\{ L_\mu \,\middle|\, \mu \in M_+ \right\}$

e utilizzando π al posto di $\overline{\pi}$ si ottiene di nuovo (utilizzando le stesse matrici!) che la pseudobase in questione — che chiamiamo ancora $\mathcal{B}_M$ — è contenuta in $\mathcal{U}_0^M$, rispetto all'immersione im_M indotta da π. $\square$

7.5 Osservazione. Poiché

$$D_{M'} \cong U_{\geq}^{M'} \otimes U_{\leq}^{Q} \cong U_+ \otimes U_0^{M'} \otimes U_0^Q \otimes U_-$$

(come spazi vettoriali), abbiamo che

$${D_{M'}}^* \cong {U_{\geq}^{M'}}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_{\leq}^{Q}}^* \cong {U_+}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_0^{M'}}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_0^Q}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_-}^* \ ;$$

perciò dal Lemma 7.4 deduciamo che

Ogni elemento $f \in {D_{M'}}^*$ *può essere espresso in modo unico come serie formale*

$$f = \sum_{\mathcal{F},\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{E}} a_{\mathcal{F},\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{E}} \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{E}$$

in cui $a_{\mathcal{F},\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{E}} \in k(q)$, $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_M$, $\mathcal{L} \in \mathcal{B}_P$, *e gli* $\mathcal{F}$, *risp. gli* $\mathcal{E}$, *sono monomi ordinati negli* F_α, *risp. negli* E_α;

in particolare

Ogni $f \in {D_{M'}}^*$ *può essere espresso come serie formale negli* $F_{\alpha^1}, \dots, F_{\alpha^N}, E_{\alpha^1}, \dots,$ E_{α^N} *a coefficienti in* $\left(U_0^{M'} \otimes U_0^Q\right)^* \cong {U_0^{M'}}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_0^Q}^*$.

Analogamente per $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ dall'esistenza di decomposizioni triangolari

$$U_+ \otimes U_0^{M'} \otimes U_- \cong U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \cong U_- \otimes U_0^{M'} \otimes U_+$$

si ottiene l'esistenza di decomposizioni duali

$${U_+}^* \,\widehat{\otimes}\, U_0^{M'^*} \,\widehat{\otimes}\, {U_-}^* \cong U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* \cong {U_-}^* \,\widehat{\otimes}\, U_0^{M'^*} \,\widehat{\otimes}\, {U_+}^*$$

perciò dal Lemma 7.4 deduciamo che

Ogni elemento $f \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ *può essere espresso in modo unico come serie formale*

$$f = \sum_{\mathcal{F},\mathcal{M},\mathcal{E}} a_{\mathcal{F},\mathcal{M},\mathcal{E}} \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{E}$$

in cui $a_{\mathcal{F},\mathcal{M},\mathcal{E}} \in k(q)$, $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_M$, *e gli* $\mathcal{F}$, *risp. gli* $\mathcal{E}$, *sono monomi ordinati negli* F_α, *risp. negli* E_α;

in particolare

Ogni $f \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ *può essere espresso come serie formale negli* $F_{\alpha^1}, \dots, F_{\alpha^N}, E_{\alpha^1}, \dots,$ E_{α^N} *a coefficienti in* ${U_0^{M'}}^*$.

Nel seguito quando considereremo l'immersione composta $U_0^M \hookrightarrow {U_0^{M'}}^* \hookrightarrow U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ intenderemo sempre che la prima immersione sia indotta da $\overline{\pi}$ (cfr. (7.2)).

Proposizione 7.6. *Il monomorfismo di algebre di Hopf formali* $j_{{}_M}\colon U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* \hookrightarrow {D_{M'}}^*$ *definito in §7.1 è dato da*

$$j_{{}_M}\colon \quad F_i \mapsto F_i \otimes 1\,, \quad L_\mu \mapsto L_{-\mu} \otimes L_\mu\,, \quad E_i \mapsto 1 \otimes E_i \tag{7.5}$$

($i = 1, \dots, n,\ \mu \in M$ *); in particolare l'immagine di* $j_{{}_M}$ *è la chiusura della sottoalgebra generata dall'insieme*

$$\Big\{ F_i \otimes 1, L_{-\mu} \otimes L_\mu, 1 \otimes E_i \,\Big|\, i = 1, \dots, n,\ \mu \in M \Big\}\,.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di $pr_{{}_M}$ segue subito che un generico monomio della base PBW di $D_{{}_M}$ ha immagine

$$pr_{{}_M}\Big(E \cdot L \otimes K \cdot F\Big) = E \cdot L \cdot K \cdot F\ ;$$

allora dalla definizione di $j_{{}_M} := (pr_{{}_M})^*$ segue subito che

$$j_{{}_M}\Big(F_i\Big) = F_i \otimes 1\,, \quad j_{{}_M}\Big(L_\mu\Big) = L_{-\mu} \otimes L_\mu\,, \quad j_{{}_M}\Big(E_i\Big) = 1 \otimes E_i\ ;$$

ad esempio infatti abbiamo

$$\Big\langle j_{{}_M}\Big(L_\mu\Big), E \cdot L_\nu \otimes K_\alpha \cdot F \Big\rangle = \Big\langle L_\mu, pr_{{}_M}\Big(E \cdot L_\nu \cdot \otimes K_\alpha \cdot F\Big)\Big\rangle_{\overline{\pi}} =$$
$$= \Big\langle L_\mu, E \cdot L_\nu \cdot \cdot K_\alpha \cdot F \Big\rangle = \delta_{E,1} \cdot \delta_{E,1} \cdot q^{(\mu|\nu+\alpha)}$$

e

$$\Big\langle L_{-\mu} \otimes L_\mu, L_\nu \otimes K_\alpha \Big\rangle = \Big\langle L_{-\mu}, L_\nu \Big\rangle_\pi \cdot \Big\langle L_\mu, K_\alpha \Big\rangle_{\overline{\pi}} =$$
$$= \delta_{E,1} \cdot \delta_{E,1} \cdot q^{-(-\mu|\nu)} \cdot q^{(\mu|\alpha)} = \delta_{E,1} \cdot \delta_{E,1} \cdot q^{(\mu|\nu+\alpha)}$$

per ogni $\mu \in M$, $\nu \in M'$, $\alpha \in Q$, quindi appunto $j_{{}_M}\Big(L_\mu\Big) = L_{-\mu} \otimes L_\mu$. Inoltre l'insieme

$$\Big\{ F_i, L_\mu, E_i \,\Big|\, i = 1, \dots, n,\ \mu \in M \Big\}$$

genera un'algebra che contiene la pseudobase di $U_q^M(\mathfrak{g})^*$ (per il Lemma 7.4) e quindi è densa in $U_q^M(\mathfrak{g})^*$, perciò per continuità ($j_{{}_M} := (pr_{{}_{M'}})^*$ è continua, cfr. §1.1) $j_{{}_M}$ è univocamente determinato dalle (7.5). $\square$

Osservazione 7.7. In virtù della Proposizione 7.6 e dell'Osservazione 7.5 potremo identificare $j_{{}_M}\Big(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\Big)$ con lo spazio delle serie formali negli $F_{\alpha^1}, \dots, F_{\alpha^N}, E_{\alpha^1}, \dots, E_{\alpha^N}$ a coefficienti in ${U_0^{M'}}^*$.

7.8 Forme intere. Avendo costruito forme intere di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$, possiamo definire i corrispondenti sottospazi (in $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$) di forme lineari a valori "interi" su tali forme; precisamente definiamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* &:= \left\{ f \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* \,\middle|\, \left\langle f, \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\left[q,q^{-1}\right] \right\} \\ \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* &:= \left\{ f \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* \,\middle|\, \left\langle f, \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\left[q,q^{-1}\right] \right\}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Poiché studiamo $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ immerso in ${D_{M'}}^*$, definiamo anche

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_M &:= \left\{ f \in j_M\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right) \,\middle|\, \left\langle f, \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\left[q,q^{-1}\right] \right\} \\ \mathcal{I}_M &:= \left\{ f \in j_M\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right) \,\middle|\, \left\langle f, \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\left[q,q^{-1}\right] \right\}; \end{aligned} \tag{7.8}$$

è chiaro allora che j_M si restringe a isomorfismi di $k\left[q,q^{-1}\right]$–moduli

$$j_M \colon \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* \xrightarrow{\cong} \mathfrak{I}_M\,, \qquad j_M \colon \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{I}_M\,. \tag{7.9}$$

Infine introduciamo i $k\left[q,q^{-1}\right]$–moduli

$$\begin{aligned} {\mathfrak{U}_0^{M'}}^* &:= \left\{ f \in {U_0^{M'}}^* \,\middle|\, \left\langle f, \mathfrak{U}_0^{M'} \right\rangle \subseteq k\left[q,q^{-1}\right] \right\} \\ {\mathcal{U}_0^{M'}}^* &:= \left\{ f \in {U_0^{M'}}^* \,\middle|\, \left\langle f, \mathcal{U}_0^{M'} \right\rangle \subseteq k\left[q,q^{-1}\right] \right\}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Proposizione 7.9.

(a) Nell'identificazione di cui al §7.5, $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ è il $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottomodulo di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ delle serie formali

$$\sum_{\mathcal{F},\varphi,\mathcal{E}} \mathcal{F}\cdot\varphi\cdot\mathcal{E}$$

in cui $\varphi \in {\mathfrak{U}_0^{M'}}^*$ e gli $\mathcal{F}$, risp. gli $\mathcal{E}$, sono monomi della base PBW di $\mathcal{U}_-$, risp. di $\mathcal{U}_+$. In particolare $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ è una $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottoalgebra di Hopf formale di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$.

(b) Nell'identificazione di cui al §7.5, $\mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ è il $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottomodulo di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ delle serie formali

$$\sum_{\mathfrak{F},\phi,\mathfrak{E}} \mathfrak{F}\cdot\phi\cdot\mathfrak{E}$$

in cui $\phi \in {\mathcal{U}_0^{M'}}^*$ e gli $\mathfrak{F}$, risp. gli $\mathfrak{E}$, sono monomi della base PBW di $\mathfrak{U}_-$, risp. di $\mathfrak{U}_+$. In particolare $\mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ è una $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottoalgebra formale di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$.

Dimostrazione. (a) Dato $f \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, sviluppiamolo in serie

$$f = \sum_\sigma \overline{F}_\sigma \cdot \varphi_\sigma \cdot \overline{E}_\sigma$$

in cui gli $\overline{F}_\sigma$, risp. gli $\overline{E}_\sigma$, sono monomi della base PBW di $\mathcal{U}_-$, risp. di $\mathcal{U}_+$, $\varphi_\sigma \in U_0^{M'\,*}$, e $\varphi_\sigma \neq \varphi_{\sigma'}$ per ogni σ, σ', tali che $(\overline{F}_\sigma, \overline{E}_\sigma) \neq (\overline{F}_{\sigma'}, \overline{E}_{\sigma'})$ (il che è sempre possibile). Per ogni monomio di potenze divise $\widehat{E} \cdot (K) \cdot \widehat{F}$ nella base PBW di $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$ abbiamo

$$\begin{aligned} \left\langle f, \widehat{E} \cdot (K) \cdot \widehat{F} \right\rangle &= \sum_\sigma \left\langle \overline{F}_\sigma \cdot \varphi_\sigma \cdot \overline{E}_\sigma, \widehat{E} \cdot (K) \otimes 1 \cdot \widehat{F} \right\rangle = \\ &= \sum_\sigma \left\langle \overline{F}_\sigma, \widehat{E} \right\rangle_\pi \cdot \varphi_\sigma\Big((K)\Big) \cdot \left\langle \overline{E}_\sigma, \widehat{F} \right\rangle_{\overline{\pi}} \ . \end{aligned} \tag{7.11}$$

Si osservi poi (cfr. Lemma 7.4) che per ogni fissato $\bar\sigma$ esistono monomi di potenze divise $\widehat{E}_{\bar\sigma}$, $\widehat{F}_{\bar\sigma}$ tali che

$$\left\langle \overline{F}_{\bar\sigma}, \widehat{E}_{\bar\sigma} \right\rangle_\pi = \pm q^r \,, \quad \left\langle \overline{E}_{\bar\sigma}, \widehat{F}_{\bar\sigma} \right\rangle_{\overline{\pi}} = \pm q^s$$

per qualche $r, s \in \mathbb{Z}$, e

$$\left\langle \overline{F}, \widehat{E}_{\bar\sigma} \right\rangle_\pi = 0 \,, \quad \left\langle \overline{E}, \widehat{F}_{\bar\sigma} \right\rangle_{\overline{\pi}} = 0$$

per *ogni* monomio PBW $\overline{F} \neq \overline{F}_{\bar\sigma}$ e $\overline{E} \neq \overline{E}_{\bar\sigma}$; così la (7.11) dà

$$\left\langle f, \widehat{E}_{\bar\sigma} \cdot (K) \cdot \widehat{F}_{\bar\sigma} \right\rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \epsilon_\sigma q^{r+s} \cdot \varphi_\sigma\big((K)\big)$$

(dove $\mathcal{S} := \big\{ \sigma \,\big|\, \overline{F}_\sigma = \overline{F}_{\bar\sigma}, \overline{E}_\sigma = \overline{E}_{\bar\sigma} \big\}$ e $\epsilon_\sigma = \pm 1$) che può essere riscritta come

$$\left\langle \widehat{F}_{\bar\sigma} \triangleright f \triangleleft \widehat{E}_{\bar\sigma}, (K) \otimes 1 \right\rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \epsilon_\sigma q^{r+s} \cdot \varphi_\sigma\big((K)\big) \tag{7.12}$$

(dove $\triangleright$, risp. $\triangleleft$, denota l'azione sinistra, risp. destra, di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ su $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, cfr. [D-L]; ma in questa sede ci interessa semplicemente usare il relativo simbolismo per brevità); d'altra parte le ipotesi danno $\mathcal{S} \equiv \{\bar\sigma\}$, quindi in particolare la (7.12) dà

$$\Big(\widehat{F}_{\bar\sigma} \triangleright f \triangleleft \widehat{E}_{\bar\sigma}\Big)\Big|_{\mathfrak{U}_0^{M'}} = \epsilon_{\bar\sigma} q^{r+s} \cdot \varphi_{\bar\sigma} \ .$$

Se ora $f \in \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$, si ha che $\Big(\widehat{F}_{\bar\sigma} \triangleright f \triangleleft \widehat{E}_{\bar\sigma}\Big)\Big|_{\mathfrak{U}_0^{M'}}$ è una funzione a valori interi su $\mathfrak{U}_0^{M'}$, cioè sta in $\mathfrak{U}_0^{M'\,*}$; poiché $\epsilon_{\bar\sigma} q^{r+s}$ è invertibile in $k\big[q, q^{-1}\big]$ si conclude che $\varphi_{\bar\sigma} \in \mathfrak{U}_0^{M'\,*}$; poiché questo si può fare per ogni $\bar\sigma$ si conclude che $\varphi_\sigma \in \mathfrak{U}_0^{M'\,*}$ per tutti i coefficienti σ. Viceversa, se vale quest'ultimo fatto si ha chiaramente $f \in \mathfrak{I}_M$.

Consideriamo adesso la struttura di Hopf. Sia $f \in \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$; come prima, sviluppiamo $\Delta(f)$ in serie

$$\Delta(f) = \sum_\sigma \big(\overline{F}_\sigma \cdot \varphi_\sigma \cdot \overline{E}_\sigma\big) \otimes \Big(\overline{F}'_\sigma \cdot \varphi'_\sigma \cdot \overline{E}'_\sigma\Big)$$

in modo tale che $\varphi_\sigma \otimes \varphi'_\sigma \neq \varphi_\tau \otimes \varphi'_\tau$ per ogni σ, τ, tali che $\Big(\overline{F}_\sigma, \overline{E}_\sigma, \overline{F}'_\sigma, \overline{E}'_\sigma\Big) \neq \Big(\overline{F}_\tau, \overline{E}_\tau, \overline{F}'_\tau, \overline{E}'_\tau\Big)$ (il che è sempre possibile); dobbiamo provare che $\varphi_\sigma, \varphi'_\sigma \in \mathfrak{U}_0^{M'\,*}$

per ogni σ; a tal fine procederemo come nella prima parte della dimostrazione. Poichè $f \in \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$, cioè è una funzione a valori interi su $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$, allora $\Delta(f)$ è una funzione a valori interi su $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$. Fissiamo dunque un $\bar{\sigma}$, e selezioniamo $\widehat{E}_{\bar{\sigma}}$, $\widehat{F}_{\bar{\sigma}}$, $\widehat{E}'_{\bar{\sigma}}$, $\widehat{F}'_{\bar{\sigma}}$ (come nella prima parte della dimostrazione) tali che

$$\left\langle \overline{F}_{\bar{\sigma}}, \widehat{E}_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\pi} = \pm q^r \,, \quad \left\langle \overline{E}_{\bar{\sigma}}, \widehat{F}_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\overline{\pi}} = \pm q^s$$
$$\left\langle \overline{F}'_{\bar{\sigma}}, \widehat{E}'_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\pi} = \pm q^{r'} \,, \quad \left\langle \overline{E}'_{\bar{\sigma}}, \widehat{F}'_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\overline{\pi}} = \pm q^{s'}$$

per qualche $r, s, r', s' \in \mathbb{Z}$, e

$$\left\langle \overline{F}, \widehat{E}_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\pi} = 0 \,, \quad \left\langle \overline{E}, \widehat{F}_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\overline{\pi}} = 0$$
$$\left\langle \overline{F}', \widehat{E}'_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\pi} = 0 \,, \quad \left\langle \overline{E}', \widehat{F}'_{\bar{\sigma}} \right\rangle_{\overline{\pi}} = 0$$

per *tutti* i monomi PBW $\overline{F} \neq \overline{F}_{\bar{\sigma}}$, $\overline{E} \neq \overline{E}_{\bar{\sigma}}$, $\overline{F}' \neq \overline{F}'_{\bar{\sigma}}$ e $\overline{E}' \neq \overline{E}'_{\bar{\sigma}}$; si ha allora

$$\left(\left(\widehat{F}_{\bar{\sigma}} \otimes \widehat{F}'_{\bar{\sigma}} \right) \triangleright \Delta(f) \triangleleft \left(\widehat{E}_{\bar{\sigma}} \otimes \widehat{E}'_{\bar{\sigma}} \right) \right) \Big|_{\left(\mathfrak{U}_0^{M'} \otimes \mathfrak{U}_0^{M'} \right)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \epsilon_\sigma q^{r+s+r'+s'} \cdot \varphi_\sigma \otimes \varphi'_\sigma$$

dove $\mathcal{S} := \left\{ \sigma \,\middle|\, \overline{F}_\sigma = \overline{F}_{\bar{\sigma}}, \overline{E}_\sigma = \overline{E}_{\bar{\sigma}}, \overline{F}'_\sigma = \overline{F}'_{\bar{\sigma}}, \overline{E}'_\sigma = \overline{E}'_{\bar{\sigma}} \right\}$ e $\epsilon_\sigma = \pm 1$; ma per costruzione $\mathcal{S} \equiv \{\bar{\sigma}\}$, e d'altra parte $\left(\left(\widehat{F}_{\bar{\sigma}} \otimes \widehat{F}'_{\bar{\sigma}} \right) \triangleright \Delta(f) \triangleleft \left(\widehat{E}_{\bar{\sigma}} \otimes \widehat{E}'_{\bar{\sigma}} \right) \right) \Big|_{\left(\mathfrak{U}_0^{M'} \otimes \mathfrak{U}_0^{M'} \right)}$ è una funzione a valori interi su $\left(\mathfrak{U}_0^{M'} \otimes \mathfrak{U}_0^{M'} \right)$, perché $\Delta(f)$ è a valori interi, quindi otteniamo $\epsilon_{\bar{\sigma}} q^{r+s+r'+s'} \cdot \varphi_{\bar{\sigma}} \otimes \varphi'_{\bar{\sigma}} \in \mathfrak{U}_0^{M'} \otimes \mathfrak{U}_0^{M'^*} = \mathfrak{U}_0^{M'^*} \widehat{\otimes} \mathfrak{U}_0^{M'^*}$; d'altronde è anche $\epsilon_{\bar{\sigma}} q^{r+s+r'+s'} \cdot \varphi_{\bar{\sigma}} \otimes \varphi'_{\bar{\sigma}} \in U_0^{M'^*} \otimes U_0^{M'^*}$, per cui è $\epsilon_{\bar{\sigma}} q^{r+s+r'+s'} \cdot \varphi_{\bar{\sigma}} \otimes \varphi'_{\bar{\sigma}} \in \mathfrak{U}_0^{M'^*} \otimes \mathfrak{U}_0^{M'^*}$ e quindi $\varphi_{\bar{\sigma}} \otimes \varphi'_{\bar{\sigma}} \in \mathfrak{U}_0^{M'^*} \otimes \mathfrak{U}_0^{M'^*}$, da cui poi si conclude facilmente che $\varphi_{\bar{\sigma}}, \varphi'_{\bar{\sigma}} \in \mathfrak{U}_0^{M'^*}$, q.e.d.

Infine, si ha $1 \in \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ (per definizione, con $1 \equiv \epsilon$), è chiaro che $\epsilon\big(\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*\big) \subseteq k\big[q, q^{-1}\big]$, perché $1 \in \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$, e anche che $S\big(\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*\big) = \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ perché $S\big(\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})\big) = \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$. Così $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*$ è una sottoalgebra di Hopf formale di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ su $k\big[q, q^{-1}\big]$, q.e.d.

(b) Si ripete passo per passo la dimostrazione di *(a)*. $\square$

A questo punto ci serve una nuova definizione:

Definizione 7.10.

(a) Chiamiamo A_M la sottoalgebra di $U_{\leq}^M \otimes U_{\geq}^P$ $\left(\subset {D_{M'}}^* \right)$ generata da

$$\left\{ F_i \otimes 1,\, L_{-\mu} \otimes L_\mu,\, 1 \otimes E_i \,\middle|\, i = 1, \dots, n; \mu \in M \right\}.$$

(b) Definiamo

$$\mathfrak{A}_M := \left\{ f \in A_M \,\middle|\, \left\langle f, \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\big[q, q^{-1}\big] \right\} = A_M \cap \mathfrak{I}_M$$
$$\mathcal{A}_M := \left\{ f \in A_M \,\middle|\, \left\langle f, \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\big[q, q^{-1}\big] \right\} = A_M \cap \mathcal{I}_M \,. \;\square$$

Lemma 7.11.
(a) $\mathfrak{A}_M$ *è la* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_\leq^M \otimes U_\geq^P$ *generata da*

$$\Big\{\, \overline{F}_{\alpha^h} \otimes 1,\; L_{-\mu} \otimes L_\mu,\; 1 \otimes \overline{E}_{\alpha^k} \,\Big|\, h,k = 1,\dots,N;\; \mu \in M \,\Big\} \;.$$

In particolare $\mathfrak{A}_M$ *è una* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera di* A_M *.*
(b) $\mathcal{A}_M$ *è la* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_\leq^M \otimes U_\geq^P$ *generata da*

$$\left\{ F_{\alpha^h}^{(a)} \otimes 1, \begin{pmatrix} L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i};\, c \\ t \end{pmatrix}, L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i}, 1 \otimes E_{\alpha^k}^{(d)} \,\middle|\, h,k,i = 1,\dots,n;\; a,t,d \in \mathbb{N};\; c \in \mathbb{Z} \right\} .$$

In particolare $\mathcal{A}_M$ *è una* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera di* A_M *.*

Dimostrazione. Dalla definizione di A_M si deduce subito l'esistenza di un isomorfismo di spazi vettoriali (su $k(q)$) $\Phi_M\colon A_M \xrightarrow{\;\cong\;} U_- \otimes U_0^M \otimes U_+$ definito da

$$\Phi_M\colon \qquad F_i \otimes 1 \mapsto F_i \,, \qquad L_{-\mu} \otimes L_\mu \mapsto L_\mu \,, \qquad 1 \otimes E_i \mapsto E_i \;;$$

ma questo si restringe subito ad isomorfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–moduli

$$\Phi\colon \mathcal{A}_M \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_- \otimes \mathcal{U}_0^M \otimes \mathcal{U}_+ \qquad\qquad \Phi\colon \mathfrak{A}_M \xrightarrow{\cong} \mathfrak{U}_- \otimes \mathfrak{U}_0^M \otimes \mathfrak{U}_+$$

e quindi la tesi segue immediatamente dalle (3.3–5) e dal §3.5 in generale. □

Il seguente risultato — che approfondisce l'analisi fatta in [D-L], Lemma 4.3 — mette in relazione i gruppi formali quantici in esame con le algebre quantiche di funzioni; in particolare si dimostra il fatto che $\mathfrak{F}_M[G]$ e $\mathcal{F}_M[G]$ siano forme intere (su $k\big[q,q^{-1}\big]$) di $F_q^M[G]$ *come algebre di Hopf*: a conoscenza dell'autore ciò era noto soltanto per $\mathfrak{F}_P[G]$, cfr. [D-L].

Proposizione 7.12.
(a) L'immersione di algebre di Hopf formali

$$j_M\colon U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* \lhook\joinrel\longrightarrow {D_{M'}}^*$$

si restringe ad un'immersione di algebre di Hopf formali

$$\mu_M\colon F_q^M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow {D_{M'}}^*$$

la cui immagine è contenuta in A_M*.*
(b) Le immersioni in (a) conservano le forme intere, precisamente

$$\mathfrak{F}_M[G] = {\mu_M}^{-1}\big(\mathfrak{A}_M\big)\,, \qquad \mathcal{F}_M[G] = {\mu_M}^{-1}\big(\mathcal{A}_M\big)$$

così che la restrizione dà immersioni di $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre*

$$\mu_M\colon \mathfrak{F}_M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{A}_M\,, \qquad \mu_M\colon \mathcal{F}_M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{A}_M\;;$$

ne segue che

$$\mathfrak{F}_M[G] \text{ è una } k\big[q,q^{-1}\big]\text{–forma intera di } F_q^M[G] \text{ come algebra di Hopf}$$

e

$$\mathcal{F}_M[G] \text{ è una } k\big[q,q^{-1}\big]\text{–forma intera di } F_q^M[G] \text{ come algebra di Hopf.}$$

Dimostrazione. *(a)* La prima parte è ovvia. Per la seconda, ricordiamo che l'identificazione $D_{M'} = U_{\geq}^{M'} \otimes U_{\leq}^{Q}$ è data dalla composizione

$$U_{\geq}^{M'} \otimes U_{\leq}^{Q} \xhookrightarrow{\;j_+ \otimes j_-\;} D_{M'} \otimes D_{M'} \xrightarrow{\;m_D\;} D_{M'}$$

dove $j_+ \colon U_{\geq}^{M'} \hookrightarrow D_{M'}$ e $j_- \colon U_{\leq}^{Q} \hookrightarrow D_{M'}$ sono le immersioni naturali di algebre di Hopf e m_D è la moltiplicazione di $D_{M'}$, e consideriamo questa composizione come isomorfismo di algebre di Hopf (tirando così indietro su $U_{\geq}^{M'} \otimes U_{\leq}^{Q}$ la struttura di Hopf di $D_{M'}$); per dualità, l'identificazione di algebre di Hopf formali $D_{M'}{}^* = U_{\geq}^{M'}{}^* \,\widehat{\otimes}\, U_{\leq}^{Q}{}^*$ è data da $\big(m_D \circ (j_+ \otimes j_-)\big)^* = (j_+ \otimes j_-)^* \circ m_D^* = \big(j_+^* \,\widehat{\otimes}\, j_-^*\big) \circ m_D^*$. Se ora m_U denota la moltiplicazione in $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$, si ha $m_U \circ (pr_{M'} \otimes pr_{M'}) = pr_{M'} \circ m_D$, quindi dualizzando

$$U_{\geq}^{M'} \otimes U_{\leq}^{M'} \xhookrightarrow{\;j_+ \otimes j_-\;} D_{M'} \otimes D_{M'} \xrightarrow{\;m_D\;} D_{M'} \xrightarrow{\;pr_{M'}\;} \!\!\!\!\rightarrow U_q^{M'}(\mathfrak{g})$$

si ottiene

$$\big(pr_{M'} \circ m_D \circ (j_+ \otimes j_-)\big)^* = (pr_{M'} \circ j_+)^* \,\widehat{\otimes}\, (pr_{M'} \circ j_-)^* \circ m_U^* \;;$$

inoltre $pr_{M'} \circ j_+$ coincide con l'immersione naturale $i_\pm \colon U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm) \hookrightarrow U_q^{M'}(\mathfrak{g})$, così la formula precedente dà $\big(pr_{M'} \circ m_U \circ (j_+ \otimes j_-)\big)^* = \big(i_+^* \,\widehat{\otimes}\, i_-^*\big) \circ m_U^*$. Ora osserviamo che m_U^* non è altro che la comoltiplicazione di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, che si restringe alla comoltiplicazione Δ di $F_q^M[G]$, mentre $\rho_\pm := i_\pm^* \colon U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* \to U_q^{M'}(\mathfrak{b}_\pm)^*$ è l'applicazione di "restrizione", che manda $F_q^M[G]$ in $F_q^M[B_\pm]$; pertanto

$$\begin{aligned}\big(pr_{M'} \circ m_U \circ (j_+ \otimes j_-)\big)^* \big(F_q^M[G]\big) &= \big(\big(i_+^* \,\widehat{\otimes}\, i_-^*\big) \circ m_U^*\big) \big(F_q^M[G]\big) = \\ &= \big(i_+^* \,\widehat{\otimes}\, i_-^*\big) \big(\Delta\big(F_q^M[G]\big)\big) \subseteq \big(i_+^* \,\widehat{\otimes}\, i_-^*\big) \big(F_q^M[G] \otimes F_q^M[G]\big) = \\ &= \rho_+\big(F_q^M[G]\big) \otimes \rho_-\big(F_q^M[G]\big) = F_q^M[B_+] \otimes F_q^M[B_-] = U_{\leq}^M \otimes U_{\geq}^M \;;\end{aligned}$$

si conclude che l'immersione j_M manda $F_q^M[G]$ in $U_{\leq}^M \otimes U_{\geq}^P$. D'altra parte ovviamente $\mu_M\big(F_q^M[G]\big)$ si annulla su $\mathfrak{K}_{M'}$, quindi — per la Proposizione 7.6 — si conclude che $\mu_M\big(F_q^M[G]\big) \subseteq A_M$.

(b) Le prime due asserzioni sono ovvie dalle definizioni (§6.4 e Definizione 7.10*(b)*).

Sia ora, ad esempio, $f \in \mathcal{F}_M[G]$: allora

$$\Big\langle S\big(\mu_M(f)\big), \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle = \Big\langle \mu_M(f), S\big(\mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})\big) \Big\rangle = \Big\langle \mu_M(f), \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big]$$

(cfr. (6.5)) e inoltre $S\big(\mu_M(f)\big) \in A_M$, quindi dalla Definizione 7.10*(b)* otteniamo $\mu_M\big(S(f)\big) = S\big(\mu_M(f)\big) \in \mathfrak{A}_M$, per cui $S(f) \in \mathcal{F}_M[G]$; analogamente,

$$\Big\langle \Delta\big(\mu_M(f)\big), \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle = \Big\langle \mu_M(f), \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle = \Big\langle \mu_M(f), \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big]$$

e d'altra parte $\Delta(f) \in A_M \otimes A_M$, quindi $\Delta(f) \in \mathfrak{A}_M \otimes \mathfrak{A}_M$: basta osservare che

$$\big(A_M \otimes A_M\big) \cap \Big\{ \phi \in j_M \left(\big(U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g})\big)^* \right) \,\Big|\, \Big\langle \phi, \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \Big\} = \\ = \mathcal{A}_M \otimes \mathcal{A}_M$$

applicando la Definizione 7.10*(b)* al caso di $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (o per verifica diretta, passando per il Lemma 7.11); si conclude che $\Delta(f) \in \mathcal{F}_M[G] \otimes \mathcal{F}_M[G]$. Pertanto $\mathcal{F}_M[G]$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di Hopf di $F_q^M[G]$.

Infine, sia $f \in F_q^M[G]$; allora $\mu_M(f) \in A_M$, quindi esiste $c(q) \in k\big[q,q^{-1}\big]$ tale che $\mu_M\big(c(q)f\big) = c(q) \cdot \mu_M(f) \in \mathcal{A}_M$ (perché $\mathcal{A}_M$ è $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma intera di A_M, cfr. Lemma 7.11*(b)*); allora $c(q)f \in {\mu_M}^{-1}\big(\mathcal{A}_M\big) = \mathcal{F}_M[G]$ (cfr. Proposizione 7.12*(b)*); quindi $f = \frac{1}{c(q)} \cdot \big(c(q)f\big)$ con $c(q)f \in \mathfrak{F}_M[G]$, perciò $k(q) \otimes_{k[q,q^{-1}]} \mathfrak{F}_M[G] = F_q^M[G]$, cioè $\mathfrak{F}_M[G]$ è $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma intera di $F_q^M[G]$, q.e.d.

Evidentemente lo stesso procedimento si può applicare passo per passo anche a $\mathfrak{F}_M[G]$, così da completare la dimostrazione. $\square$

7.13 Coefficienti matriciali. Il risultato precedente può in effetti essere perfezionato, estendendo le immersioni a isomorfismi. Per cominciare, dato $\mu \in M_+ := M \cap P_+$, sia $V_{-\mu}$ un $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$–modulo irriducibile di peso minimo $-\mu$. Sia $v_{-\mu} \neq 0$ un vettore di peso minimo in $V_{-\mu}$, e sia $\phi_{-\mu} \in {V_{-\mu}}^*$ il funzionale lineare su $V_{-\mu}$ definito da *(a)* $\phi_{-\mu}(v_{-\mu}) = 1$ e *(b)* $\phi_{-\mu}$ si annulla sull'unico complemento di $k(q).v_{-\mu}$ in $V_{-\mu}$ che sia $U_0^{M'}$–invariante; sia $\psi_{-\mu} := c_{\phi_{-\mu},v_{-\mu}}$ il corrispondente coefficiente matriciale, cioè $\psi_{-\mu} \colon x \mapsto \phi_{-\mu}(x.v_{-\mu})$ per ogni $x \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})$. Possiamo allora perfezionare la Proposizione 7.12 con il seguente risultato, che migliora [D-L], Theorem 4.6:

Teorema 7.14. *Sia* $\rho := \sum_{i=1}^n \mu_i$.

(a) L'immersione di $k(q)$–algebre $\mu_M \colon F_q^M[G] \hookrightarrow A_M$ si estende ad un isomorfismo di $k(q)$–algebre

$$\mu_M \colon F_q^M[G]\,\big[\psi_{-\rho}^{-1}\big] \xrightarrow{\;\cong\;} A_M \; ; \tag{7.13}$$

inoltre $\mu_M\big(F_q^M[G]\big)$ *è densa in* $j_M\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$.

(b) L'immersione di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre $\mu_M \colon \mathfrak{F}_M[G] \hookrightarrow \mathfrak{A}_M$ si estende ad un isomorfismo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre

$$\mu_M \colon \mathfrak{F}_M[G]\,\big[\psi_{-\rho}^{-1}\big] \xrightarrow{\;\cong\;} \mathfrak{A}_M \; ; \tag{7.14}$$

inoltre $\mu_M\big(\mathfrak{F}_M[G]\big)$ *è densa in* $\mathfrak{I}_M$.

(c) L'immersione di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre $\mu_M \colon \mathcal{F}_M[G] \hookrightarrow \mathcal{A}_M$ si estende ad un isomorfismo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre

$$\mu_M \colon \mathcal{F}_M[G]\,\big[\psi_{-\rho}^{-1}\big] \xrightarrow{\;\cong\;} \mathcal{A}_M \; ; \tag{7.15}$$

inoltre $\mu_M\big(\mathcal{F}_M[G]\big)$ *è densa in* $\mathcal{I}_M$.

Dimostrazione. Si dimostra in [D-L], §§4.4–6, che $\mu_P \colon \mathfrak{F}_P[G] \hookrightarrow \mathfrak{A}_P$ si estende ad un isomorfismo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre $\mu_P \colon \mathfrak{F}_P[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\cong} \mathfrak{A}_P$; in particolare l'estensione di scalari dà un isomorfismo di $k(q)$–algebre $\mu_P \colon F_q^P[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\cong} A_P$. La stessa dimostrazione si adatta senza problemi al caso di M generico, così che *(a)* e *(b)* restano dimostrate.

Ma l'argomentazione usata in [D-L] dimostra anche (senza preoccuparsi dell'integralità) che $\mu_M \colon F_q^M[G] \hookrightarrow A_M$ si estende ad un isomorfismo di $k(q)$–algebre $\mu_M \colon F_q^M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\cong} A_M$. Inoltre i calcoli in [D-L] danno

$$\mu_M(\psi_{-\mu}) = L_\mu \otimes L_{-\mu}$$

per ogni peso $\mu \in M_+$; così in particolare per $\mu = \mu_i$ e $\mu = \rho$ si ottiene

$$\mu_M(\psi_{-\mu_i}) = L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i}\,,\ \mu_M(\psi_{-\rho}) = L_\rho \otimes L_{-\rho}\,,\ \mu_M(\psi_{-\rho}^{-1}) = L_{-\rho} \otimes L_\rho$$

donde $L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i} \in Im(\mu_M)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Sempre dalla dimostrazione in [D-L] (Theorem 4.6) si ricava che $F_i\, L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i}$, $L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i}\, E_i \in \mu_M\big(F_q^M[G]\big)$ (per ogni $i = 1, \dots, n$), quindi anche $F_i^{(f)} L_{f\mu_i} \otimes L_{-f\mu_i}$, $L_{e\mu_i} \otimes L_{-e\mu_i} E_i^{(e)} \in \mu_M\big(F_q^M[G]\big)$ (per ogni $i = 1, \dots, n$, $f, e \in \mathbb{N}$); a questo punto dalla Proposizione 7.12*(b)* si ottiene $F_i^{(f)} L_{f\mu_i} \otimes L_{-f\mu_i}, L_{e\mu_i} \otimes L_{-e\mu_i} E_i^{(e)} \in \mu_M\big(\mathcal{F}_M[G]\big)$, per ogni $i = 1, \dots, n$ e $f, e \in \mathbb{N}$; parimenti si ha $L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i} = \mu_M(z_i) \in \mu_M\big(\mathcal{F}_M[G]\big)$, con $z_i := \psi_{-\mu_i} \in \mathcal{F}_M[G]$, sempre in virtù della Proposizione 7.12*(b)*. Si ha allora

$$L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i} = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} L_{\mu_j} \otimes L_{-\mu_j} \right) \cdot (L_{-\rho} \otimes L_\rho) \in \mu_M\Big(\mathcal{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right]\Big)$$

e quindi $F_i^{(f)} \otimes 1,\ 1 \otimes E_i^{(e)} \in \mu_M\Big(\mathcal{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right]\Big)$ per ogni $i = 1, \dots, n,\ f, e \in \mathbb{N}$; inoltre

$$\begin{aligned}\binom{L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i};\, c}{t} := \prod_{s=1}^{t} \frac{q_i^{c-s+1} \cdot L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i} - 1}{q_i^s - 1} = \\ = \prod_{s=1}^{t} \frac{q_i^{c-s+1} \cdot \mu_M(z_i) - 1}{q_i^s - 1} = \binom{\mu_M(z_i);\, c}{t} = \mu_M\left(\binom{z_i; c}{t}\right)\end{aligned}$$

e di nuovo per la Proposizione 7.12*(b)* si ottiene $\binom{z_i;\, c}{t} \in \mathcal{F}_M[G]$, così $\binom{L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i};\, c}{t} \in \mu_M\Big(\mathcal{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right]\Big)$ (per ogni $i = 1, \dots, n$ e ogni c, t). Finalmente, da tutto questo e dal Lemma 7.11 discende che $\mu_M\Big(\mathcal{F}_M[G]\left[\psi_{-\mu}^{-1}\right]\Big) = \mathcal{A}_M$.

Infine, i calcoli in [D-L], §§4.4–6, danno anche

$$F_i L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i},\ L_\mu \otimes L_{-\mu},\ L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i} E_i \in \mu_M\big(F_q^M[G]\big)$$

e analogamente

$$\overline{F}_\alpha L_\mu \otimes L_{-\mu},\ L_\mu \otimes L_{-\mu},\ L_\mu \otimes L_{-\mu}\overline{E}_\alpha\ \in \mu_{{}_M}\big(\mathfrak{F}_{{}_M}[G]\big)$$

$$F_i^{(f)} L_{f\mu} \otimes L_{-f\mu},\ L_\mu \otimes L_{-\mu},\ L_\mu \otimes L_{-\mu}E_i^{(e)}\ \in \mu_{{}_M}\big(\mathfrak{F}_{{}_M}[G]\big)$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $\mu \in M_+$, $f, e \in \mathbb{N}$. Sia ora v_τ l'immagine di u_τ (riprendendo la notazione usata nella dimostrazione del Lemma 7.4) nell'isomorfismo d'algebre $\theta\colon U_0^{M'} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} U_0^{M'}$ dato da $L_\nu \mapsto L_{-\nu}$ ($\nu \in M'$); poiché $\left\{ u_\tau \,\middle|\, \tau \in M'_+ \cong \mathbb{N}^n \right\}$ è una base di $U_0^{M'}$, anche $\left\{ v_\tau \,\middle|\, \tau \in M'_+ \cong \mathbb{N}^n \right\}$ lo è; riprendendo allora la dimostrazione del Lemma 7.4 si vede subito che v_τ^* (rispetto all'immersione $U_0^M \hookrightarrow {U_0^{M'}}^*$ indotta da $\overline{\pi}$) è una combinazione lineare di elementi $L_{-\mu}$ ($\mu \in M$). Allora, ricordando che $j_{{}_M}\big(L_{-\mu}\big) = L_\mu \otimes L_{-\mu}$ (cfr. (7.5)), il fatto che $L_\mu \otimes L_{-\mu} \in \mu_{{}_M}\big(F_q^M[G]\big)$ per ogni $\mu \in M_+$ implica che $j_{{}_M}(v_\tau^*) \in \mu_{{}_M}\big(F_q^M[G]\big)$ per ogni $\tau \in M_+$; poiché $L_\mu \in {U_0^{M'}}^*$ è somma di una serie di v_τ^*, a coefficienti in $k\big[q, q^{-1}\big]$ ($\tau \in M'_+$) otteniamo che $j_{{}_M}\big(L_{-\mu}\big)$ è nella chiusura di $\mu_{{}_M}\big(F_q^M[G]\big)$; ma allora — per quanto abbiamo già visto — tale chiusura contiene anche tutti gli $F_i \otimes 1$, $1 \otimes E_i$, dunque coincide con tutto $j_{{}_M}\Big(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\Big)$; visto che è anche $L_\mu \otimes L_{-\mu} \in \mu_{{}_M}\big(\mathfrak{F}_{{}_M}[G]\big)$ e $L_\mu \otimes L_{-\mu} \in \mu_{{}_M}\big(\mathcal{F}_{{}_M}[G]\big)$ si può ripetere lo stesso ragionamento con le forme intere, e concludere con la tesi. $\square$

7.15 Gradazioni. Ricordiamo che $U_\geq^M$ ha una Q_+–gradazione $U_\geq^M = \oplus_{\alpha \in Q_+} \big(U_\geq^M\big)_\alpha$ data dalla decomposizione in somma diretta in spazi peso per l'azione aggiunta di $\mathcal{U}_0^M$; similmente $U_\leq^M$ ha un'analoga Q_-–gradazione. Sottolineiamo il fatto che queste sono gradazioni di algebre di Hopf (nell'ovvio senso usuale); inoltre esse sono ereditate dalle varie forme intere, $\mathfrak{U}_\geq^M$, $\mathcal{U}_\leq^M$, ecc. ecc. Infine gli accoppiamenti DRT rispettano queste gradazioni, cioè per esempio $\pi\Big(\big(U_\leq^M\big)_\beta, \big(U_\geq^{M'}\big)_\gamma\Big) = 0$ per ogni $\beta \in Q_-$, $\gamma \in Q_+$ tali che $\beta + \gamma \neq 0$.

Le gradazioni delle sottalgebre di Borel quantiche inducono una Q–gradazione dell'algebra di Hopf $D_{{}_M} := U_\geq^M \otimes U_\leq^Q$ (che è ereditata dall'algebra di Hopf quoziente $U_q^M(\mathfrak{g})$), il sottospazio $\big(U_\geq^M\big)_\beta \otimes \big(U_\leq^Q\big)_\gamma$ avendo grado $\beta + \gamma$), e anche una Q–gradazione della sottoalgebra $U_\geq^M \otimes U_\leq^Q$ di ${D_{M'}}^*$; poiché lo spazio ${D_{M'}}^*$ è completamento (mediante serie formali) di tale sottoalgebra, esso eredita a sua volta una sorta di "pseudogradazione", nel senso che ogni elemento di ${D_{M'}}^*$ è somma infinita di termini aventi ciascuno un grado ben definito: precisamente, dato un elemento $f \in {D_{M'}}^*$ con sviluppo in serie formale (cfr. Osservazione 7.5)

$$f = \sum_{\mathcal{F}, \phi, \mathcal{E}} \mathcal{F} \cdot \phi \cdot \mathcal{E}$$

in cui $\phi \in \big(U_0^{M'} \otimes U_0^Q\big)^*$ e gli $\mathcal{F}$, risp. gli $\mathcal{E}$, sono monomi ordinati negli F_α, risp. negli E_α, i gradi dei suoi vari termini sono dati da

$$deg\,(\mathcal{F} \cdot \phi \cdot \mathcal{E}) := deg(\mathcal{F}) + deg(\mathcal{E})$$

essendo $deg\left(\prod_{r=N}^1 F_{\alpha^r}^{f_r}\right) := -\sum_{r=1}^N f_r \alpha^r$, $deg\left(\prod_{r=1}^N E_{\alpha^r}^{e_r}\right) := \sum_{r=1}^N e_r \alpha^r$. Ora, la sottoalgebra $U_\leq^M \otimes U_\geq^P$ è densa in ${D_{M'}}^*$, e la restrizione dell'accoppiamento naturale di valutazione ${D_{M'}}^* \otimes D_{M'} \to k(q)$ al sottospazio $\big(U_\leq^Q \otimes U_\geq^P\big) \otimes \big(U_\geq^{M'} \otimes U_\leq^Q\big)$ non è altri che $\pi \otimes \overline{\pi}$

(quando si identifichi $\left(U_{\leq}^{M} \otimes U_{\geq}^{P}\right) \otimes \left(U_{\geq}^{M'} \otimes U_{\leq}^{Q}\right)$ con $\left(U_{\leq}^{M} \otimes U_{\geq}^{M'}\right) \otimes \left(U_{\geq}^{P} \otimes U_{\leq}^{Q}\right)$); perciò dal fatto che π e $\overline{\pi}$ rispettino le gradazioni si ottiene subito che anche l'accoppiamento

${D_{M'}}^* \otimes D_{M'} \;\rightarrow\; k(q)$ rispetta le (pseudo)gradazioni che abbiamo introdotto. Infine, la pseudogradazione di ${D_{M'}}^*$ è compatibile con la struttura di Hopf (formale), nel senso che se $x \in {D_{M'}}^*$ è omogeneo di grado α (cioè è somma — eventualmente infinita — di termini di grado α) allora tutti i termini di $S(x)$ hanno grado α, tutti i termini di $\Delta(x)$ hanno anch'essi grado α (con $deg(y \otimes z) := deg(y) + deg(z)$), e $\epsilon(x) \neq 0$ soltanto se $deg(x) = 0$; ad esempio consideriamo il caso di $S(x)$: presi $x \in {D_{M'}}^*$ e $y \in D_{M'}$ *omogenei*, si ha

$$\big\langle S(x), y \big\rangle = \big\langle x, S(y) \big\rangle = \big\langle x, y' \big\rangle$$

dove $y' := S(y)$ è a sua volta omogeneo di grado $deg(y') = deg(y)$, perché la gradazione di $D_{M'}$ è compatibile con la sua struttura di Hopf; allora

$$\big\langle S(x), y \big\rangle \neq 0 \Longrightarrow deg(y) = deg(y') = deg(x) \Longrightarrow S(x) \in ({D_{M'}}^*)_{deg(x)}$$

cioè $deg\big(S(x)\big) = deg(x)$, q.e.d.

7.16 La struttura di Hopf. In questo paragrafo forniamo informazioni più concrete sulla struttura delle algebre di Hopf formali in esame.

Prima di tutto, la counità $\epsilon \colon {D_{M'}}^* \rightarrow k(q)$ è definita come $\epsilon := 1^*$, quindi $\epsilon(x^*) := \big\langle x^*, 1 \big\rangle$, per ogni $x^* \in {D_{M'}}^*$; così in particolare abbiamo

$$\epsilon\big(\overline{F}_{\alpha^k} \otimes 1\big) = 0 \, , \qquad \epsilon\big(L_{-\mu} \otimes L_\mu\big) = 1 \, , \qquad \epsilon\big(1 \otimes \overline{E}_{\alpha^k}\big) = 0 \tag{7.16}$$

($k = 1, \dots, N; \mu \in M$), e

$$\begin{gathered} \epsilon\left(F_i^{(f)} \otimes 1\right) = 0 \, , \quad \epsilon\big(L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i}\big) = 1 \, , \quad \epsilon\left(\begin{pmatrix} L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i} ; c \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}_{q_i} , \\ \epsilon\big(L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i}\big) = 1 \, , \quad \epsilon\left(1 \otimes E_i^{(e)}\right) = 0 \end{gathered} \tag{7.17}$$

($i = 1, \dots, n; f, t, e \in \mathbb{N}; c \in \mathbb{Z}$); poiché i termini in esame generano l'algebra $j_M\big(U_q^{M'}(\mathfrak{g})\big)^*$ (in senso topologico), sia le (7.16) che le (7.17) determinano univocamente $\epsilon \colon j_M\big(U_q^{M'}(\mathfrak{g})\big)^* \rightarrow k(q)$.

Passiamo ora all'antipodo $S \colon {D_{M'}}^* \rightarrow {D_{M'}}^*$: per definizione esso è il trasposto dell'antipodo di $D_{M'}$, quindi è caratterizzato da $\big\langle S(x^*), x \big\rangle = \big\langle x^*, S(x) \big\rangle$, per ogni $x^* \in {D_{M'}}^*$, $x \in D_{M'}$. In particolare consideriamo $F_i^f \otimes 1 \in U_\leq^M \otimes U_\geq^Q \leq {D_{M'}}^*$, $f \in \mathbb{N}$: esso è omogeneo di grado $-f\alpha_i$, dunque $S\left(F_i^f \otimes 1\right)$ ha lo stesso grado (poiché S conserva il grado, essendo la Q–pseudogradazione compatibile con la struttura di Hopf (formale): cfr. §7.15). Perciò scrivendo $S\left(F_i^f \otimes 1\right)$ come serie

$$S\left(F_i^f \otimes 1\right) = \sum_\sigma F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma$$

si ha $deg\left(F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma\right) := deg(F_\sigma) + deg(E_\sigma) = -f\alpha_i$.

La pseudogradazione di ${D_{M'}}^*$ induce anche una pseudogradazione di $\mathfrak{I}_M$; quindi, sfruttando il fatto che $\mathfrak{I}_M$ è una sottoalgebra di Hopf formale di ${D_{M'}}^*$ (Proposizione 7.9), possiamo applicare lo stesso procedimento e ottenere

$$S\left(\overline{F}_i^f \otimes 1\right) = \sum_\sigma \overline{F}_\sigma \cdot \varphi_\sigma \cdot \overline{E}_\sigma \tag{7.18}$$

(per $h = 1, \dots, N$) dove $\varphi_\sigma \in \mathfrak{U}_0^{M'^*}$ e gli $\overline{F}_\sigma$, risp. $\overline{E}_\sigma$, sono monomi della base PBW di $\mathcal{U}_-$, risp. $\mathcal{U}_+$, tali che $deg\big(\overline{F}_\sigma\big) + deg\big(\overline{E}_\sigma\big) = -f\alpha_i$.

La stessa argomentazione fornisce formule per $F_i^{(f)} \otimes 1 \in \mathcal{I}_M$, precisamemente

$$S\left(F_i^{(f)} \otimes 1\right) = \sum_\sigma \widehat{F}_\sigma \cdot \Phi_\sigma \cdot \widehat{E}_\sigma \tag{7.19}$$

(per $f \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$) dove $\Phi_\sigma \in \mathcal{U}_0^{M'^*}$ e gli $\widehat{F}_\sigma$, risp. $\widehat{E}_\sigma$, sono monomi della base PBW di $\mathfrak{U}_-$, risp. $\mathfrak{U}_+$, tali che $deg\Big(\widehat{F}_\sigma\Big) + deg\Big(\widehat{E}_\sigma\Big) = -f\alpha_i$.

Osserviamo ora che si possono comparare $\mathfrak{I}_M$ e $\mathcal{I}_M$ tramite l'ovvia immersione naturale $\mathcal{I}_M \cong \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* \hookrightarrow \mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* \cong \mathfrak{I}_M$ (duale di $\mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$); poiché

$$\overline{F}_{\alpha^h}^f \otimes 1 = \big(q_{\alpha^h} - q_{\alpha^h}^{-1}\big)^f \cdot [f]_{q_{\alpha^h}}! \cdot F_{\alpha^h}^{(f)} \otimes 1 = \prod_{s=1}^f \big(q_{\alpha^h}^s - q_{\alpha^h}^{-s}\big) F_{\alpha^h}^{(f)} \otimes 1$$

$$1 \otimes \overline{E}_{\alpha^k}^e = \big(q_{\alpha^k} - q_{\alpha^k}^{-1}\big)^e \cdot [e]_{q_{\alpha^k}}! \cdot 1 \otimes E_{\alpha^k}^{(e)} = \prod_{s=1}^f \big(q_{\alpha^h}^s - q_{\alpha^h}^{-s}\big) 1 \otimes E_{\alpha^h}^{(e)}$$

($h, k = 1, \dots, N; f, e \in \mathbb{N}$), il confronto diretto tra (7.18) e (7.19) dà

$$\widehat{F}_\sigma \cdot \Phi_\sigma \cdot \widehat{E}_\sigma \in \prod_{h,k=1}^n \prod_{r=1}^{f_h} \prod_{s=1}^{e_k} \big(q_{\alpha^h}^r - q_{\alpha^h}^{-r}\big) \cdot \big(q_{\alpha^k}^s - q_{\alpha^k}^{-s}\big) \cdot \prod_{u=1}^f \big(q_i^u - q_i^{-u}\big)^{-1} \cdot \mathcal{I}_M$$

per $\widehat{F}_\sigma = \prod_{h=N}^1 F_{\alpha^h}^{(f_h)}$, $\widehat{E}_\sigma = \prod_{k=1}^N E_{\alpha^k}^{(e_k)}$. In particolare possiamo scrivere $S\left(F_i^{(f)} \otimes 1\right)$ come serie

$$S\left(F_i^{(f)} \otimes 1\right) = \sum_\sigma \prod_{h,k=1}^n \frac{\prod_{r=1}^{f_h} \prod_{s=1}^{e_k} \big(q_{\alpha^h}^r - q_{\alpha^h}^{-r}\big) \cdot \big(q_{\alpha^k}^s - q_{\alpha^k}^{-s}\big)}{\prod_{u=1}^f \big(q_i^u - q_i^{-u}\big)} \cdot \widehat{F}_\sigma \cdot \Phi'_\sigma \cdot \widehat{E}_\sigma \tag{7.20}$$

dove ancora $\Phi'_\sigma \in \mathcal{U}_0^{P^*}$ e gli $\widehat{F}_\sigma$, risp. gli $\widehat{E}_\sigma$, sono monomi PBW di $\mathfrak{U}_-$, risp. $\mathfrak{U}_+$, con $deg\Big(\widehat{F}_\sigma\Big) + deg\Big(\widehat{E}_\sigma\Big) = -f\alpha_i$; in particolare dal coefficiente che appare in (7.20) possiamo estrarre un fattore del tipo

$$\prod_{h=1}^N \prod_{r=1}^{a_h} \prod_{s=1}^{b_h} \big(q^r - q^{-r}\big) \cdot \big(q^s - q^{-s}\big)$$

con $\sum_{h=1}^{N}(a_h+b_h)=\sum_{h=1}^{N}(f_h+e_k)-f$; allora possiamo riordinare i termini della serie (7.20) e riscriverla come

$$S\left(F_i^{(f)}\otimes 1\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\sum_h a_h+b_h=n}\prod_{h=1}^{N}\prod_{r=1}^{a_h}\prod_{s=1}^{b_h}\left(q^r-q^{-r}\right)\cdot\left(q^s-q^{-s}\right)\cdot X_n \tag{7.21}$$

in cui $X_n\in\mathfrak{U}_-\otimes\mathcal{U}_0^{M'^*}\otimes\mathfrak{U}_+$. Se ora ε è una radice ℓ-esima dell'unità, per $\ell\in\mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{\sum_h a_h+b_h=n}\prod_{h=1}^{N}\prod_{r=1}^{a_h}\prod_{s=1}^{b_h}\left(q^r-q^{-r}\right)\cdot\left(q^s-q^{-s}\right)\equiv 0 \quad \bmod (q-\varepsilon) \quad \forall\, n>2N(\ell-1)$$

e quindi la (7.21) è una somma finita modulo $(q-\varepsilon)$. La stessa analisi può essere fatta chiaramente anche per tutti gli altri generatori di $\mathcal{A}_M$, così che alla fine troviamo che

Per ogni radice dell'unità ε, le serie $S\left(F_i^{(f)}\otimes 1\right)$, $S\left(\binom{L_{-\mu_i}\otimes L_{\mu_i};\,c}{t}\right)$, $S\big(L_{\mu_i}\otimes L_{-\mu_i}\big)$ e $S\left(1\otimes E_i^{(e)}\right)$ sono somme finite modulo $(q-\varepsilon)$.

Per uso successivo calcoleremo ora i primi termini di alcune di queste serie.

Per $S\big(F_i\otimes 1\big)$ il primo termine — chiamiamolo $\mathcal{F}_1$ — corrispondente al coefficiente $n=0$ nella serie (7.21) (relativa al caso $f=1$), corrisponde ai termini $\widehat{F}_\sigma\cdot\Phi_\sigma\cdot\widehat{E}_\sigma$ in (7.19) (per il caso $f=1$) tali che $\sum_{s=1}^{N}(f_s+e_s)=1$; d'altra parte questi termini devono avere grado $deg\left(\widehat{F}_\sigma\right)+deg\left(\widehat{E}_\sigma\right)=-\alpha_i$, quindi si conclude che essi devono essere tali che $\widehat{F}_\sigma=F_i$ e $\widehat{E}_\sigma=1$. Si osservi adesso che $\mathcal{F}_1$ assume valori non nulli soltanto sui monomi PBW di $\mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})$ del tipo $\overline{E}_i\cdot L_\nu$, $\nu\in M'$; sia dunque $V_{1,i}$ lo spazio vettoriale su $k\big[q,q^{-1}\big]$ generato da tali monomi (che è un $\mathcal{U}_0^{M'}$–modulo libero di rango 1); allora il calcolo diretto mostra che l'elemento $\mathcal{F}_1+q_i^{-2}\cdot F_iL_{\alpha_i}\otimes L_{-\alpha_i}$ è zero in $V_{1,i}^*$: pertanto $\mathcal{F}_1=-q_i^{-2}\cdot F_iL_{\alpha_i}\otimes L_{-\alpha_i}$, quindi

$$S\big(F_i\otimes 1\big)\equiv -q_i^{-2}\cdot F_i\,L_{\alpha_i}\otimes L_{-\alpha_i} \qquad \bmod \left(q-q^{-1}\right)^2$$

Con analoghe argomentazioni si trova che

$$S\big(L_{-\mu_i}\otimes L_{\mu_i}\big)\equiv L_{\mu_i}\otimes L_{-\mu_i} \qquad \bmod \left(q-q^{-1}\right)^2$$
$$S\big(L_{\mu_i}\otimes L_{-\mu_i}\big)\equiv L_{-\mu_i}\otimes L_{\mu_i} \qquad \bmod \left(q-q^{-1}\right)^2$$
$$S\left(\binom{L_{-\mu_i}\otimes L_{\mu_i};\,0}{1}\right)\equiv -L_{\mu_i}\otimes L_{-\mu_i}\cdot\binom{L_{-\mu_i}\otimes L_{\mu_i};\,0}{1} \qquad \bmod \left(q-q^{-1}\right)$$
$$S\big(1\otimes E_i\big)\equiv -q_i^{+2}\cdot L_{\alpha_i}\otimes L_{-\alpha_i}E_i \qquad \bmod \left(q-q^{-1}\right)^2$$

per ogni $i=1,\dots,n$, $c\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{N}$.

Occupiamoci ora della comoltiplicazione $\Delta\colon {D_{M'}}^*\to {D_{M'}}^*\,\widehat{\otimes}\,{D_{M'}}^*$, per la quale possiamo fare un'analisi del tutto simile. Per definizione Δ è il trasposto della moltiplicazione di $D_{M'}$, quindi è caratterizzata da $\big\langle\Delta(x^*),y\otimes z\big\rangle=\big\langle x^*,y\cdot z\big\rangle$, per ogni $x^*\in {D_{M'}}^*$, $y,z\in D_{M'}$.

In particolare consideriamo $F_i^f \otimes 1 \in U_{\leq}^M \otimes U_{\geq}^P \leq {D_{M'}}^*$: esso è omogeneo di grado $-f\alpha_i$, dunque $\Delta\left(F_i^f \otimes 1\right)$ ha lo stesso grado (perché Δ conserva il grado, essendo la Q–pseudogradazione compatibile con la struttura di Hopf formale: cfr. §7.15). Perciò scrivendo $\Delta\left(F_i^f \otimes 1\right)$ come serie

$$\Delta\left(F_i^f \otimes 1\right) = \sum_\sigma \left(F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma\right) \otimes \left(F'_\sigma \cdot \phi'_\sigma \cdot E'_\sigma\right)$$

(dove $\phi_\sigma, \phi'_\sigma \in {U_0^{M'}}^*$ e gli F_σ, F'_σ, risp. gli E_σ, E'_σ, sono monomi PBW di U_-, risp. di U_+) si ha $deg\big((F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma) \otimes (F'_\sigma \cdot \phi'_\sigma \cdot E'_\sigma)\big) := deg(F_\sigma) + deg(E_\sigma) + deg(F'_\sigma) + deg(E'_\sigma) = -f\alpha_i$. Allora applicando questo ragionamento alla forma intera $\mathfrak{I}_M$ e procedendo come per l'antipodo, si ottengono formule

$$\Delta\left(\overline{F}_i^f \otimes 1\right) = \sum_\sigma \left(\overline{F}_\sigma \cdot \varphi_\sigma \cdot \overline{E}_\sigma\right) \otimes \left(\overline{F}'_\sigma \cdot \varphi'_\sigma \cdot \overline{E}'_\sigma\right) \tag{7.22}$$

($h = 1, \dots, N$) dove $\varphi_\sigma, \varphi'_\sigma \in {\mathfrak{U}_0^{M'}}^*$ e gli $\overline{F}_\sigma, \overline{F}'_\sigma$, risp. $\overline{E}_\sigma, \overline{E}'_\sigma$, sono monomi della base PBW di $\mathcal{U}_-$, risp. $\mathcal{U}_+$, tali che $deg\left(\overline{F}_\sigma\right) + deg\left(\overline{F}'_\sigma\right) + deg\left(\overline{E}_\sigma\right) + deg\left(\overline{E}'_\sigma\right) = -f\alpha_i$.

Analogamente per $\mathcal{I}_M$ si hanno formule

$$\Delta\left(F_i^{(f)} \otimes 1\right) = \sum_\sigma \left(\widehat{F}_\sigma \cdot \varPhi_\sigma \cdot \widehat{E}_\sigma\right) \otimes \left(\widehat{F}'_\sigma \cdot \varPhi'_\sigma \cdot \widehat{E}'_\sigma\right) \tag{7.23}$$

$(i = 1, \dots, n)$ dove $\varPhi_\sigma, \varPhi'_\sigma \in {\mathfrak{U}_0^{M'}}^*$ e gli $\widehat{F}_\sigma, \widehat{F}'_\sigma$, risp. $\widehat{E}_\sigma, \widehat{E}'_\sigma$, sono monomi della base PBW di $\mathfrak{U}_-$, risp. $\mathfrak{U}_+$, tali che $deg\left(\widehat{F}_\sigma\right) + deg\left(\widehat{F}'_\sigma\right) + deg\left(\widehat{E}_\sigma\right) + deg\left(\widehat{E}'_\sigma\right) = -f\alpha_i$.

Ora il confronto tra (7.22) e (7.23) dà di nuovo una relazione

$$\begin{aligned}
&\left(\widehat{F}_\sigma \cdot \varPhi_\sigma \cdot \widehat{E}_\sigma\right) \otimes \left(\widehat{F}'_\sigma \cdot \varPhi'_\sigma \cdot \widehat{E}'_\sigma\right) \in \\
&\qquad \in \prod_{h,k=1}^n \prod_{r=1}^{f_h} \prod_{s=1}^{e_k} \left(q_{\alpha^h}^r - q_{\alpha^h}^{-r}\right) \cdot \left(q_{\alpha^k}^s - q_{\alpha^k}^{-s}\right) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \prod_{r'=1}^{f'_h} \prod_{s'=1}^{e'_k} \left(q_{\alpha^h}^{r'} - q_{\alpha^h}^{-r'}\right) \cdot \left(q_{\alpha^k}^{s'} - q_{\alpha^k}^{-s'}\right) \cdot \prod_{u=1}^{f} \left(q_i^u - q_i^{-u}\right)^{-1} \cdot \mathcal{I}_M \otimes \mathcal{I}_M
\end{aligned}$$

per $\widehat{F}_\sigma = \prod_{h=N}^1 F_{\alpha^h}^{(f_h)}$, $\widehat{E}_\sigma = \prod_{k=1}^N E_{\alpha^k}^{(e_k)}$, $\widehat{F}'_\sigma = \prod_{h=N}^1 F_{\alpha^h}^{(f'_h)}$, $\widehat{E}'_\sigma = \prod_{k=1}^N E_{\alpha^k}^{(e'_k)}$. Come nel caso di S, possiamo allora riscrivere la (7.23) come serie

$$\begin{aligned}
\Delta\left(F_i^{(f)} \otimes 1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\sum_h (a_h + a'_h + \\ + b_h + b'_h) = n}} &\prod_{h=1}^N \prod_{r=1}^{a_h} \prod_{s=1}^{b_h} \left(q^r - q^{-r}\right) \cdot \left(q^s - q^{-s}\right) \cdot \\
&\qquad \cdot \prod_{r'=1}^{a'_h} \prod_{s'=1}^{b'_h} \left(q^{r'} - q^{-r'}\right) \cdot \left(q^{s'} - q^{-s'}\right) \cdot Y_n
\end{aligned} \tag{7.24}$$

in cui $Y_n \in \Big(\mathfrak{U}_- \otimes \mathcal{U}_0^{M'^*} \otimes \mathfrak{U}_+\Big)^{\otimes 2}$, e quindi se ε è una radice ℓ-esima dell'unità ($\ell \in \mathbb{N}$), si ha che (7.24) è una somma finita modulo $(q-\varepsilon)$. La stessa analisi può essere fatta chiaramente anche per tutti gli altri generatori di $\mathcal{A}_M$, ottenendo formule del tutto analoghe alla (7.24), così che alla fine troviamo che

Per ogni radice dell'unità ε, le serie $\Delta\Big(F_i^{(f)} \otimes 1\Big)$, $\Delta\big(L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i}\big)$, $\Delta\big(L_{\mu_i} \otimes L_{-\mu_i}\big)$, $\Delta\Big(\Big({L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i}; c \atop t}\Big)\Big)$ e $\Delta\Big(1 \otimes E_i^{(e)}\Big)$ sono somme finite modulo $(q-\varepsilon)$.

Per uso successivo calcoliamo ora i primi termini di alcune di queste serie, usando per brevità la notazione $F_i^{\otimes} := F_i \otimes 1$, $L_\mu^{\otimes} := L_{-\mu} \otimes L_\mu$, $E_i^{\otimes} := 1 \otimes E_i$, e così via. Con la stessa procedura usata per S si trova che, modulo $\big(q-q^{-1}\big)^2$, si ha:

$$\Delta\big(F_i^{\otimes}\big) \equiv F_i^{\otimes} \otimes 1^{\otimes} + 1^{\otimes} \otimes F_i^{\otimes} + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} L_{\alpha_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes F_i^{\otimes} +$$

$$+ \big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} C_{\alpha,\beta}^{i,+} \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right)\left(q_\beta - q_\beta^{-1}\right)\left(E_\alpha^{\otimes} \otimes F_\beta^{\otimes} + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} L_{\alpha_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha^{\otimes} \otimes F_\beta^{\otimes}\right)$$

$$\Delta\big(L_{\mu_i}^{\otimes}\big) \equiv L_{\mu_i}^{\otimes} \otimes L_{\mu_i}^{\otimes}\,, \qquad \Delta\big(L_{-\mu_i}^{\otimes}\big) \equiv L_{-\mu_i}^{\otimes} \otimes L_{-\mu_i}^{\otimes}$$

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1^{\otimes} + 1 \otimes \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (2)_{q^{-1}}^2 (d_i)_q^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} (q-1)\,[d_\gamma]_q \big[(\mu_i|\gamma)\big]_q \cdot \left(E_\gamma^{\otimes} \otimes F_\gamma^{\otimes} + (q_i - 1) \cdot E_\gamma^{\otimes} \otimes F_\gamma^{\otimes} \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\gamma^{\otimes} \otimes F_\gamma^{\otimes} + (q_i - 1)^2 \cdot \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\gamma^{\otimes} \otimes F_\gamma^{\otimes} \begin{pmatrix} L_{\mu_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Delta\big(E_i^{\otimes}\big) \equiv 1^{\otimes} \otimes E_i^{\otimes} + E_i^{\otimes} \otimes 1^{\otimes} + (q_i - 1) \cdot E_i^{\otimes} \otimes \begin{pmatrix} L_{\alpha_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$- \big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} C_{\alpha,\beta}^{i,-} \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right)\left(q_\beta - q_\beta^{-1}\right)\left(E_\alpha^{\otimes} \otimes F_\beta^{\otimes} + (q_i - 1) \cdot E_\alpha^{\otimes} \otimes F_\beta^{\otimes} \begin{pmatrix} L_{\alpha_i}^{\otimes}; 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

dove le costanti $C_{\alpha,\beta}^{i,-}$ e $C_{\alpha,\beta}^{i,-}$ sono definite rispettivamente dalle equazioni

$$\pi_i^-\Big(\big[F_\alpha, E_\beta\big]\Big) = C_{\alpha,\beta}^{i,-} \cdot F_i\,, \qquad \pi_i^+\Big(\big[F_\alpha, E_\beta\big]\Big) = C_{\alpha,\beta}^{i,+} \cdot E_i$$

e $\pi_i^- : U_q^Q(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q) \cdot F_i$, $\pi_i^+ : U_q^Q(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q) \cdot E_i$, sono le proiezioni canoniche.

Nota: in Appendice svilupperemo completamente ed esplicitamente le formule per S e Δ nel caso di $G = SL(2,k)$, così che le algebre di Hopf formali di cui ci interessiamo saranno descritte in tutti i dettagli. In ogni caso la tecnica delineata può essere adottata con successo per calcolare i termini delle serie su viste fino ad un qualunque grado fissato.

§ 8 Il gruppo quantico $U_q^M(\mathfrak{h})$

8.1 L'algebra quantica $U_q^M(\mathfrak{h})$. Per maggior chiarezza diamo ora una veste assiomatica ai risultati che abbiamo discusso nel §7: in particolare introduciamo, tramite una presentazione per generatori e relazioni, un nuovo oggetto $U_q^M(\mathfrak{h})$ — il *nostro nuovo* "quantum group" — che sta a $U(\mathfrak{h})$ come $U_q^M(\mathfrak{g})$ sta a $U(\mathfrak{g})$.

Per cominciare definiamo $\mathbf{H}_M$ come la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori

$$F_i\,,\ L_\mu\,,\ E_i \quad (\lambda \in M;\, i = 1,\dots,n)$$

e relazioni

$$\begin{aligned}
L_0 = 1\,, \qquad L_\mu L_\nu &= L_{\mu+\nu} && \forall\, \mu,\, \nu \in M \\
L_\mu F_j &= q^{(\alpha_j|\mu)} F_j L_\mu && \forall\, \mu \in M,\, j = 1,\dots,n \\
L_\mu E_j &= q^{(\alpha_j|\mu)} E_j L_\mu && \forall\, \mu \in M,\, j = 1,\dots,n \\
E_i F_j - F_j E_i &= 0 && \forall\, i,j = 1,\dots,n \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k &= 0 && \forall\, i,j = 1,\dots,n,\, i \neq j \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k &= 0 && \forall\, i,j = 1,\dots,n,\, i \neq j\,.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Costruiamo poi in U_- ($\subseteq \mathbf{H}_M$) l'insieme dei vettori radice $\{ F_{\alpha^1},\dots,F_{\alpha^N} \}$, in U_0^M ($\subseteq \mathbf{H}_M$) l'insieme $\mathcal{B}_M$ determinato dal Lemma 7.4*(c)*, e in U_+ ($\subseteq \mathbf{H}_M$) l'insieme dei vettori radice $\{ E_{\alpha^1},\dots,E_{\alpha^N} \}$; infine *definiamo $U_q^M(\mathfrak{h})$ il completamento di $\mathbf{H}_M$ tramite le serie formali negli elementi dell'insieme*

$$\mathbb{B}_M := \left\{ \prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r} \cdot B \cdot \prod_{r=1}^{N} E_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, f_r, e_r \in \mathbb{N}\ \forall\, r\,;\ B \in \mathcal{B}_M \right\};$$

dunque (cfr. §1.1) $U_q^M(\mathfrak{h})$ è il completamento di $\mathbf{H}_M$ relativamente alla topologia (di $\mathbf{H}_M$) per cui un sistema fondamentali di intorni di 0 sia l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbf{H}_M$ che contengano quasi tutti gli elementi di $\mathbb{B}_M$, e i suoi elementi si rappresentano in modo unico come combinazioni lineari infinite, a coefficienti in $k(q)$, di elementi di $\mathbb{B}_M$.

In parole povere $U_q^M(\mathfrak{h})$ è un'algebra di serie formali (non-commutative) con le (8.1) come regole di commutazione; perciò diremo anche, in breve, che $U_q^M(\mathfrak{h})$ *è generata topologicamente da* F_i, L_μ, E_i ($\mu \in M\,;\, i = 1,\dots,n$). Infine sottolineiamo il fatto che, grazie al Lemma 7.4*(c)*, possiamo identificare $U_q^M(\mathfrak{h})$ con lo spazio delle serie formali negli $F_{\alpha^1},\dots,F_{\alpha^N},E_{\alpha^1},\dots,E_{\alpha^N}$, a coefficienti in ${U_0^{M'}}^*$.

Il punto chiave adesso è che i risultati del §7 — specialmente la Proposizione 7.6 — rendono possibile produrre una realizzazione esplicita di $U_q^M(\mathfrak{h})$, dotandola al contempo di una struttura di algebra di Hopf formale:

Teorema 8.2. *Esiste un isomorfismo di $k(q)$–algebre topologiche*

$$\nu_{M}\colon U_q^M(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} j_{M}\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$$

definito da

$$\nu_{M}\colon \quad F_i \mapsto F_i \otimes 1\,, \quad L_\mu \mapsto L_{-\mu} \otimes L_\mu\,, \quad E_i \mapsto 1 \otimes E_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n,\ \mu \in M\,;$$

allora il pull-back della struttura di Hopf formale di $j_{M}\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$ definisce una struttura di algebra di Hopf formale su $U_q^M(\mathfrak{h})$, così che $\nu_{M}\colon U_q^M(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} j_{M}\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$ e ${j_{M}}^{-1} \circ \nu_{M}\colon U_q^M(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ sono isomorfismi di algebre di Hopf formali su $k(q)$.

Dimostrazione. Osservando che $F_i \otimes 1, L_{-\mu} \otimes L_\mu, 1 \otimes E_i \in U_{\leq}^M \otimes U_{\geq}^P$ e confrontando le relazioni (8.1) con le relazioni (3.1) che definiscono le algebre di Borel quantiche si ottiene subito che ν_{M} è ben definito. Inoltre abbiamo chiaramente $\mathbf{H}_{M} \cong U_- \otimes U_0^M \otimes U_+$ come spazi vettoriali, così come anche $U_- \otimes U_0^M \otimes U_+ \cong A_{M}$ $\left(\subseteq j_{M}\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)\right)$, da cui si deduce che ν_{M} è un isomorfismo di algebre tra $\mathbf{H}_{M}$ e A_{M}; infine A_{M} contiene una pseudobase $\mathbf{B}_{M}$ di $j_{M}\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$ (cfr. Lemma 7.4, Proposizione 7.6, e Osservazione 7.7) tale che $\nu_{M}(\mathcal{B}_{M}) = \mathbf{B}_{M}$, e quindi si può estendere ν_{M} per continuità ad un isomorfismo d'algebre topologiche $\nu_{M}\colon U_q^M(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} j_{M}\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$. Le rimanenti asserzioni sono più o meno tautologiche. $\square$

Osservazione 8.3. *(a)* Il teorema precedente ci dice dunque che la definizione data in §8.1 non è che una descrizione di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$; tuttavia abbiamo voluto farne appunto una definizione, introducendo il simbolo $U_q^M(\mathfrak{h})$, per sottolineare le analogie esistenti con $U_q^M(\mathfrak{g})$, che appariranno particolarmente evidenti alla luce dei risultati del §10.

(b) Grazie al Teorema 8.2 possiamo identificare $U_q^M(\mathfrak{h})$ con $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ tramite ν_{M}, e quindi far operare $U_- \otimes U_0^M \otimes U_+$ $\left(\subseteq U_q^M(\mathfrak{h})\right)$ su $U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \cong U_+ \otimes U_0^{M'} \otimes U_-$ tramite l'accoppiamento $\pi \otimes \overline{\pi} \otimes \overline{\pi}$.

Lemma 8.4. *Il sottoinsieme*

$$\Omega_{M} := \left\{ x = \sum_\sigma F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma \in U_q^M(\mathfrak{h}) \,\middle|\, \phi_\sigma \in U_0^M,\ \forall\, \sigma \right\}$$

(dove $x = \sum_\sigma F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma$ è lo sviluppo di $x \in U_q^M(\mathfrak{h})$ come serie a coefficienti in ${U_0^{M'}}^*$) è una sottoalgebra di Hopf formale di $U_q^M(\mathfrak{h})$.

Dimostrazione. È chiaro che Ω_{M} è una sottoalgebra di $U_q^M(\mathfrak{h})$.

Consideriamo ora $x \in \Omega_{M}$, con $x = \sum_\tau F'_\tau \cdot \phi'_\tau \cdot E'_\tau$ e $\phi'_\tau = \sum_{\mu \in M} c_{\tau,\mu} L_\mu$ (con soltanto un numero *finito* di coefficienti $c_{\tau,\mu}$ diversi da zero, per l'ipotesi $x \in \Omega_{M}$).

Sia $S(x) = \sum_\sigma F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma$; fissato un indice $\bar{\sigma}$, a priori abbiamo $\phi_{\bar{\sigma}} \in {U_0^{M'}}^*$ (cfr. §8.1): vogliamo dimostrare che in effetti $\phi_{\bar{\sigma}} \in U_0^M$ $\left(\subseteq {U_0^{M'}}^*\right)$, così che $S\big(\Omega_{M}\big) = \Omega_{M}$. Per il Lemma 7.4 esistono due unici monomi di tipo PBW $\mathcal{E}_{\bar{\sigma}}$ e $\mathcal{F}_{\bar{\sigma}}$ tali che

$$\Big\langle S(x), \mathcal{E}_{\bar{\sigma}} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar{\sigma}} \Big\rangle = \Big\langle F_{\bar{\sigma}}, \mathcal{E}_{\bar{\sigma}} \Big\rangle \cdot \phi_{\bar{\sigma}}(y) \cdot \Big\langle E_{\bar{\sigma}}, \mathcal{F}_{\bar{\sigma}} \Big\rangle = \phi_{\bar{\sigma}}(y)$$

per ogni $y \in U_0^{M'}$: in altre parole, $\phi_{\bar\sigma} = \big(\mathcal{F}_{\bar\sigma} \triangleright S(x) \triangleleft \mathcal{E}_{\bar\sigma}\big)\Big|_{U_0^{M'}}$, quindi dobbiamo studiare $\Big\langle S(x), \mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma} \Big\rangle$ come funzione di $y \in U_0^{M'}$; per linearità possiamo restringerci al caso $y = L_\nu$, $\nu \in M'$.

Ora, ricordando la definizione di antipodo per il duale $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, si ha

$$\Big\langle S(x), \mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma} \Big\rangle = \Big\langle x, S(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}) \Big\rangle \; ; \tag{8.2}$$

per calcolare (8.2) il termine $S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}\big)$ deve essere "raddrizzato", cioè espresso come elemento di $U_+ \otimes U_0^{M'} \otimes U_-$ rispetto alle basi PBW. Per prima cosa

$$S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) = S\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \cdot S(y) \cdot S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma}\big) \; ;$$

poi calcoliamo i vari fattori:

— (I) $S\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \in U_{\leq}^{M'}$, e *non dipende da* y;

— (II) $S(y) = S\big(L_\nu\big) = L_{-\nu}$;

— (III) $S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma}\big) \in U_{\geq}^{M'}$, e *non dipende da* y;

ora riordiniamo i vari fattori, in modo da riscrivere il prodotto $S\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \cdot S(y) \cdot S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma}\big)$ come combinazione lineare di elementi della base PBW fissata:

— (IV) commutando $S\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma}\big)$ con $S\big(L_\nu\big) = L_{-\nu}$ si produce un coefficiente $q^{-(\nu|\beta_{\bar\sigma})}$ che *dipende da* $y = L_\nu$ *secondo la funzione* $L_{-\beta_{\bar\sigma}}$, cioè $q^{-(\nu|\beta_{\bar\sigma})} = \Big\langle L_{-\beta_{\bar\sigma}}, L_\nu \Big\rangle_{\overline{\pi}}$, dove $\beta_{\bar\sigma} \in Q_-$ è il peso di $S\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma}\big)$ (uguale al peso di $\mathcal{F}_{\bar\sigma}$);

— (V) riordinando $S\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma}\big)$ con $S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma}\big)$ si produce una somma $\sum_k x_k$ di termini che *non dipendono da* y ;

— (VI) riordinando il prodotto di $S\big(L_\nu\big) = L_{-\nu}$ con la somma $\sum_k x_k$ si produce per ciascun termine x_k un coefficiente $q^{-(\nu|\gamma_{\bar\sigma,k})}$ che *dipende da* $y = L_\nu$ *secondo la funzione* $L_{-\gamma_{\bar\sigma,k}}$, cioè $q^{-(\nu|\gamma_{\bar\sigma,k})} = \Big\langle L_{-\gamma_{\bar\sigma,k}}, L_\nu \Big\rangle_{\overline{\pi}}$, dove $\gamma_{\bar\sigma,k} \in Q_+$ è il peso della parte "positiva" x_k^+ di x_k (rispetto alla decomposizione triangolare $U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \cong U_+ \otimes U_0^{M'} \otimes U_-$).

Perciò quando alla fine calcoliamo $\Big\langle x, S\big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \Big\rangle$ troviamo che questo dipende da y secondo le funzioni $L_{-\beta_{\bar\sigma}}$ e $L_{-\gamma_{\bar\sigma,k}}$ e secondo le funzioni $\phi'_\tau \circ S$: precisamente $\phi_{\bar\sigma} = \big(\mathcal{F}_{\bar\sigma} \triangleright S(x) \triangleleft \mathcal{E}_{\bar\sigma}\big)\Big|_{U_0^{M'}}$ è combinazione lineare di funzioni del tipo

$$L_{-\beta_{\bar\sigma}} \cdot \sum_{\mu \in M} c_{\tau,\mu} L_{-\mu} \cdot L_{-\gamma_{\bar\sigma,k}} = \sum_{\mu \in M} c_{\tau,\mu} L_{-\mu-\beta_{\bar\sigma}-\gamma_{\bar\sigma,k}}$$

perciò $\phi_{\bar\sigma} \in U_0^M$, q.e.d.

Per la comoltiplicazione si procede in modo analogo. Sia $\Delta(x) = \sum_\sigma \big(F_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot E_\sigma\big) \otimes \big(F''_\sigma \cdot \phi''_\sigma \cdot E''_\sigma\big)$, e fissiamo un indice $\bar\sigma$: vogliamo dimostrare che $\phi_{\bar\sigma} \otimes \phi''_{\bar\sigma} \in U_0^M \otimes U_0^M$, così che $\Delta\big(\Omega_M\big) = \Omega_M \,\widehat{\otimes}\, \Omega_M$. Consideriamo gli unici monomi di tipo PBW $\mathcal{E}_{\bar\sigma}$, $\mathcal{E}''_{\bar\sigma}$, e $\mathcal{F}_{\bar\sigma}$, $\mathcal{F}''_{\bar\sigma}$ tali che

$$\Big\langle \Delta(x), \big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \otimes \big(\mathcal{E}''_{\bar\sigma} \cdot z \cdot \mathcal{F}''_{\bar\sigma}\big) \Big\rangle = \phi_{\bar\sigma}(y) \cdot \phi''_{\bar\sigma}(z)$$

per ogni $y, z \in U_0^{M'}$: in altre parole, $\phi_{\bar\sigma} \otimes \phi''_{\bar\sigma} = \Big(\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma} \otimes \mathcal{F}''_{\bar\sigma}\big) \triangleright \Delta(x) \triangleleft \big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \otimes \mathcal{E}''_{\bar\sigma}\big) \Big)\Big|_{U_0^{M'}}$, quindi dobbiamo studiare $\Big\langle \Delta(x), \big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \otimes \big(\mathcal{E}''_{\bar\sigma} \cdot z \cdot \mathcal{F}''_{\bar\sigma}\big) \Big\rangle$ come funzione di $y, z \in U_0^{M'}$; per linearità possiamo restringerci al caso $y = L_\nu, z = L_\xi$, con $\nu, \xi \in M'$.

Ora, ricordando la definizione di comoltiplicazione per $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$ si ha

$$\Big\langle \Delta(x), \big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}\big) \otimes \big(\mathcal{E}''_{\bar\sigma} \cdot z \cdot \mathcal{F}''_{\bar\sigma}\big) \Big\rangle = \Big\langle x, \mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma} \cdot \mathcal{E}''_{\bar\sigma} \cdot z \cdot \mathcal{F}''_{\bar\sigma} \Big\rangle\ ; \tag{8.3}$$

nel "raddrizzare" il prodotto $\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma} \cdot \mathcal{E}''_{\bar\sigma} \cdot z \cdot \mathcal{F}''_{\bar\sigma}$ — per calcolare (8.3) — abbiamo:

— (I) riordinando il prodotto $\mathcal{F}_{\bar\sigma} \cdot \mathcal{E}''_{\bar\sigma}$ si produce una somma $\sum_k x_k$ di termini che *non dipendono da* y, z ;

— (II) commutando $y = L_\nu$ con la parte positiva x_k^+ di ciascun termine x_k si produce un coefficiente $q^{(\nu|\beta_{\bar\sigma,k})}$ che *dipende da* $y = L_\nu$ *secondo la funzione* $L_{\beta_{\bar\sigma,k}}$, cioè $q^{(\nu|\beta_{\bar\sigma,k})} = \Big\langle L_{\beta_{\bar\sigma,k}}, L_\nu \Big\rangle_{\overline{\pi}}$, dove $\beta_{\bar\sigma,k} \in Q_+$ è il peso di x_k^+ ;

— (II) commutando $z = L_\xi$ con la parte negativa x_k^- di ciascun termine x_k si produce un coefficiente $q^{(\xi|\gamma_{\bar\sigma,k})}$ che *dipende da* $z = L_\xi$ *secondo la funzione* $L_{\gamma_{\bar\sigma,k}}$, cioè $q^{(\xi|\gamma_{\bar\sigma,k})} = \Big\langle L_{\gamma_{\bar\sigma,k}}, L_\xi \Big\rangle_{\overline{\pi}}$, dove $\gamma_{\bar\sigma,k} \in Q_-$ è il peso di x_k^- ;

— (IV) riordinando il prodotto $x_k^- \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma}$ per ciascun termine x_k si producono termini che *non dipendono da* y, z;

— (V) riordinando il prodotto $\mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot x_k^+$ si producono termini che *non dipendono da* y, z.

Perciò quando alla fine calcoliamo $\big\langle x, \mathcal{E}_{\bar\sigma} \cdot y \cdot \mathcal{F}_{\bar\sigma} \cdot \mathcal{E}''_{\bar\sigma} \cdot z \cdot \mathcal{F}''_{\bar\sigma} \big\rangle$ troviamo che questo dipende da $y \otimes z$ secondo le funzioni $L_{\beta_{\bar\sigma,k}} \otimes L_{\gamma_{\bar\sigma,k}}$ e secondo le funzioni ϕ'_τ : precisamente $\phi_{\bar\sigma} \otimes \phi''_{\bar\sigma} = \Big(\big(\mathcal{F}_{\bar\sigma} \otimes \mathcal{F}''_{\bar\sigma}\big) \triangleright \Delta(x) \triangleleft \big(\mathcal{E}_{\bar\sigma} \otimes \mathcal{E}''_{\bar\sigma}\big) \Big)\Big|_{U_0^{M'}}$ è combinazione lineare di funzioni del tipo

$$L_{\beta_{\bar\sigma,k}} \cdot \sum_\tau c_{\tau,\mu} \cdot L_\mu \otimes L_\mu \cdot L_{\gamma_{\bar\sigma,k}} = \sum_\tau c_{\tau,\mu} \cdot L_{\mu+\beta_{\bar\sigma}} \otimes L_{\mu+\gamma_{\bar\sigma,k}}$$

perciò $\phi_{\bar\sigma} \otimes \phi''_{\bar\sigma} \in U_0^M$, q.e.d. $\square$

Passiamo ora a definire forme intere di $U_q^M(\mathfrak{h})$ e a dimostrarne le prime proprietà. D'ora in avanti useremo il termine *pseudobase* di un modulo topologico V per indicare una base di V come modulo topologico, cioè un sistema completo di generatori lineari indipendenti di V, così che ogni elemento di V si esprima in modo unico come serie negli elementi della pseudobase.

Definizione 8.5. *Sia* $\mathcal{H}_M$ *la* $k\big[q, q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_q^M(\mathfrak{h})$ *generata da*

$$\Big\{ \overline{F}_{\alpha^r},\, L_\mu,\, \overline{E}_{\alpha^r} \,\Big|\, r = 1, \dots, N\, ;\, \mu \in M \Big\}\, .$$

Chiamiamo $\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$ *la chiusura di* $\mathcal{H}_M$ *nella topologia di* $U_q^M(\mathfrak{h})$. $\square$

Teorema 8.6. *$\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma intera (in senso topologico) di $U_q^M(\mathfrak{h})$, come algebra di Hopf formale, che ha pseudobase su $k\big[q,q^{-1}\big]$*

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{F}_{\alpha^r}^{m_r} \cdot B \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{E}_{\alpha^r}^{n_r} \,\middle|\, m_1,\dots,m_N,n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N}\,;\, B \in \mathbb{B}_M \right\} \; ; \tag{8.4}$$

in particolare $\nu_M\big(\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})\big) = j_M\Big(\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^*\Big) =: \mathfrak{I}_M$. □

Dimostrazione. Per costruzione $\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra; inoltre contiene $\mathcal{U}_0^M$, quindi contiene $\mathcal{B}_M$ (cfr. Lemma 7.4), perciò ammette (8.4) come pseudobase su $k\big[q,q^{-1}\big]$, è quindi è forma intera su $k\big[q,q^{-1}\big]$ (in senso topologico) di $U_q^M(\mathfrak{h})$. D'altra parte per la Proposizione 7.9*(a)* abbiamo anche $\nu_M\big(\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})\big) = \mathfrak{A}_M$, quindi (sempre per la Proposizione 7.9*(a)*) $\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$ è una sottoalgebra di Hopf formale di $U_q^M(\mathfrak{h})$, da cui la tesi. □

Consideriamo $\Omega'_M := \Omega_M \cap {\nu_M}^{-1}(\mathcal{I}_M)$; osserviamo poi che (cfr. Proposizione 7.9*(b)* e (3.5))

$$\Omega'_M = \left\{ x = \sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma \cdot \phi_\sigma \cdot \mathfrak{E}_\sigma \in U_q^M(\mathfrak{h}) \,\middle|\, \mathfrak{F}_\sigma \in \mathfrak{U}_-, \phi_\sigma \in \mathfrak{U}_0^M, \mathfrak{E}_\sigma \in \mathfrak{U}_+,\ \forall\, \sigma \right\} .$$

Definizione 8.7. *Sia $\mathfrak{H}_M$ la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di $U_q^M(\mathfrak{h})$ generata da*

$$\left\{ F_i^{(f)},\, \binom{M_i; c}{t},\, M_i^{-1},\, E_i^{(e)} \,\middle|\, f,c,t,e \in \mathbb{N}; i = 1,\dots,n \right\} .$$

Chiamiamo $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ il $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottomodulo di $U_q^M(\mathfrak{h})$

$$\left\{ x \in \Omega'_M \,\middle|\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ \text{con}\ x_n \in \sum_{\sum_h (a_h+b_h)=n} \prod_{h=1}^{N} \prod_{r,s=1}^{a_h,b_h} \big(q^r - q^{-r}\big) \cdot \big(q^s - q^{-s}\big) \cdot \mathfrak{H}_M \right\} . \ \square \tag{8.5}$$

Teorema 8.8. *$\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma intera (in senso topologico) di $U_q^M(\mathfrak{h})$ e Ω_M, come algebre di Hopf formali.*

Dimostrazione. Per costruzione $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra delle algebre suddette; inoltre il Teorema 8.2 e la Proposizione 7.9*(b)* ci assicurano che Ω'_M è una forma intera (in senso topologico) su $k\big[q,q^{-1}\big]$ di Ω_M come algebra, e da qui si deduce che anche $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ lo è. D'altra parte dalla Proposizione 7.9*(b)* e dal Lemma 8.4 ricaviamo anche che Ω'_M è una sottoalgebra di Hopf formale di Ω_M; infine l'analisi fatta in §7.16 — "tradotta" per $U_q^M(\mathfrak{h})$ tramite ${\nu_M}^{-1}$ — e in particolare le formule (7.21) e (7.24), ci dicono esattamente che $S\big(\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})\big) = \mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ e $\Delta\big(\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})\big) \leq \mathfrak{U}_M(\mathfrak{h}) \,\widehat{\otimes}\, \mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$, quindi $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ è una sottoalgebra di Hopf formale, da cui la tesi. □

8.9 Presentazione di $\mathfrak{U}_{M}(\mathfrak{h})$ per generatori e relazioni. Sfruttando l'analogo risultato valido per $\mathfrak{U}_{Q}(\mathfrak{g})$ ($\cong \mathfrak{U}_{+} \otimes \mathfrak{U}_{0}^{M} \otimes \mathfrak{U}_{-}$) (cfr. [D-L], §3.4), e la discussione fatta nella dimostrazione del Teorema 8.8 possiamo realizzare una presentazione di $\mathfrak{U}_{M}(\mathfrak{h})$ per generatori (topologici) e relazioni. L'algebra $\mathfrak{H}_{M}$ definita in §8.7 è la $k\big[q, q^{-1}\big]$–algebra associativa unitaria con generatori

$$M_i \, , \; M_i^{-1} \, , \; \binom{M_i; c}{t} \, , \; E_i^{(r)} \;\; F_i^{(s)}$$

($i = 1, \dots, n$; $c \in \mathbb{Z}$, $t, r, s \in \mathbb{N}$) (avendo posto $M_i := L_{\mu_i}$) e relazioni

$$M_i M_i^{-1} = 1 = M_i^{-1} M_i \, , \;\; M_i^{\pm 1} M_j^{\pm 1} = M_j^{\pm 1} M_i^{\pm 1} \, , \;\; M_i^{\pm 1} \binom{M_j; c}{t} = \binom{M_j; c}{t} M_i^{\pm 1}$$

$$\binom{M_i; c}{0} = 0 \, , \qquad (q_i - 1) \binom{M_i; 0}{1} = M_i - 1$$

$$\binom{M_i; c}{t} \binom{M_i; c-t}{s} = \binom{t+s}{t}_{q_i} \binom{M_i; c}{t+s} \, , \qquad \forall \, t, s$$

$$\binom{M_i; c+1}{t} - q_i^t \binom{M_i; c}{t} = \binom{M_i; c}{t-1} \, , \qquad \forall \, t \geq 1$$

$$\binom{M_i; c}{t} = \sum_{p \geq 0}^{p \leq c,t} q_i^{(c-p)(t-p)} \binom{c}{p}_{q_i} \binom{M_i; 0}{t-1} \, , \qquad \forall \, c \geq 0$$

$$\binom{M_i; -c}{t} = \sum_{p=0}^{t} (-1)^p q_i^{-t(c+p)+p(p+1)/2} \binom{p+c-1}{p}_{q_i} \binom{M_i; 0}{t-p} \, , \qquad \forall \, c \geq 1$$

$$\binom{M_i; c+1}{t} - \binom{M_i; c}{t} = q_i^{c-t+1} M_i \binom{M_i; c}{t-1} \, , \qquad \forall \, t \geq 1$$

$$M_i E_j^{(p)} = q_i^{p \, a_{ij}} E_j^{(p)} M_i$$

$$M_i F_j^{(p)} = q_i^{p \, a_{ij}} F_j^{(p)} M_i$$

$$\binom{M_i; c}{t} E_j^{(p)} = E_j^{(p)} \binom{M_i; c + p a_{ij}}{t}$$

$$\binom{M_i; c}{t} F_j^{(p)} = F_j^{(p)} \binom{M_i; c + p a_{ij}}{t}$$

$$E_i^{(r)} E_i^{(s)} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{(r+s)} \, , \qquad E_i^{(0)} = 1$$

$$F_i^{(r)} F_i^{(s)} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{(r+s)} \, , \qquad F_i^{(0)} = 1$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s E_i^{(r)} E_j E_i^{(s)} = 0\,, \qquad i \neq j$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s F_i^{(r)} F_j F_i^{(s)} = 0\,, \qquad i \neq j$$

$$E_i^{(r)} F_j^{(s)} = F_j^{(s)} E_i^{(r)}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$. L'algebra $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ è il completamento di $\mathfrak{H}_M$ ottenuto prendendo le serie formali nei monomi PBW di $\mathfrak{U}_-$ e $\mathfrak{U}_+$ a coefficienti in $\mathfrak{U}_0^M$ che soddisfino la condizione in (8.5). Infine dal §7.16 — tramite ν_M — ricaviamo le formule (per ogni $i = 1, \dots, n$, con $K_i := L_{\alpha_i}$, $M_i := L_{\mu_i}$ $\forall\, i$)

$$\Delta\big(F_i\big) \equiv F_i \otimes 1 + 1 \otimes F_i + (q_i - 1) \cdot \binom{K_i;\, 0}{1} \otimes F_i +$$
$$+\big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} C_{\alpha,\beta}^{i,+} \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right)\left(q_\beta - q_\beta^{-1}\right)\left(E_\alpha \otimes F_\beta + (q_i - 1) \cdot \binom{K_i;\, 0}{1} E_\alpha \otimes F_\beta\right)$$

$$\Delta\big(M_i\big) \equiv M_i \otimes M_i\,, \qquad \Delta\left(M_i^{-1}\right) \equiv M_i^{-1} \otimes M_i^{-1}$$

$$\Delta\left(\binom{M_i;\, 0}{1}\right) = \binom{M_i;\, 0}{1} \otimes 1 + 1 \otimes \binom{M_i;\, 0}{1} + (q_i - 1) \cdot \binom{M_i;\, 0}{1} \otimes \binom{M_i;\, 0}{1} +$$
$$+ (2)_{q^{-1}}^2 (d_i)_q^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} (q - 1)\,[d_\gamma]_q \big[(\mu_i|\gamma)\big]_q \cdot \Bigg(E_\gamma \otimes F_\gamma + (q_i - 1) \cdot E_\gamma \otimes F_\gamma \binom{M_i;\, 0}{1} +$$
$$+(q_i - 1) \cdot \binom{M_i;\, 0}{1} E_\gamma \otimes F_\gamma + (q_i - 1)^2 \cdot \binom{M_i;\, 0}{1} E_\gamma \otimes F_\gamma \binom{M_i;\, 0}{1}\Bigg)$$

$$\Delta\big(E_i\big) \equiv 1 \otimes E_i + E_i \otimes 1 + (q_i - 1) \cdot E_i \otimes \binom{K_i;\, 0}{1} -$$
$$-\big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} C_{\alpha,\beta}^{i,-} \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right)\left(q_\beta - q_\beta^{-1}\right)\left(E_\alpha \otimes F_\beta + (q_i - 1) \cdot E_\alpha \otimes F_\beta \binom{K_i;\, 0}{1}\right)$$

come congruenze modulo $\left(q - q^{-1}\right)^2$, e inoltre

$$S\big(F_i\big) \equiv -q_i^{-2} \cdot F_i\, K_i^{-1}\,, \qquad S\big(E_i\big) \equiv -q_i^{+2} \cdot K_i^{-1} E_i \qquad \mod\ \left(q - q^{-1}\right)^2$$

$$S\big(M_i\big) \equiv M_i^{-1}, \quad S\left(\binom{M_i;\, 0}{1}\right) \equiv -M_i^{-1} \cdot \binom{M_i;\, 0}{1}, \quad S\left(M_i^{-1}\right) \equiv M_i \mod\ \left(q - q^{-1}\right)$$

$$\epsilon\big(F_i\big) = 0\,, \qquad \epsilon\big(M_i\big) = 1\,, \qquad \epsilon\left(\binom{M_i; 0}{1}\right) = 0\,, \qquad \epsilon\left(M_i^{-1}\right) = 1\,, \qquad \epsilon\big(E_i\big) = 0\,.$$

8.10 L'immersione naturale $\xi_M \colon F_q^M[G] \longrightarrow U_q^M(\mathfrak{h})$. Poiché l'algebra quantica di funzioni $F_q^M[G]$ è per definizione sottoalgebra di Hopf (formale) di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, possiamo immergerla nell'algebra inviluppante quantizzata $U_q^M(\mathfrak{h})$: precisamente definiamo una immersione di algebre di Hopf formali

$$\xi_M := \nu_M^{-1} \circ \mu_M \colon F_q^M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow U_q^M(\mathfrak{h}) \,.$$

Allora la Proposizione 7.12 e il Teorema 7.14 ci danno immediatamente il seguente

Teorema 8.11. *L'immersione* $\xi_M \colon F_q^M[G] \hookrightarrow U_q^M(\mathfrak{h})$ *induce monomorfismi di algebre*

$$\xi_M \colon F_q^M[G] \hookrightarrow \mathbf{H}_M \,, \qquad \xi_M \colon \mathfrak{F}_M[G] \hookrightarrow \mathcal{H}_M \,, \qquad \xi_M \colon \mathcal{F}_M[G] \hookrightarrow \mathfrak{H}_M$$

e isomorfismi di algebre (con $\rho := \sum_{i=1}^n \mu_i$ *, cfr. Teorema 7.14)*

$$\xi_M \colon F_q^M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbf{H}_M \,, \qquad \xi_M \colon \mathfrak{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{H}_M \,, \qquad \xi_M \colon \mathcal{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathfrak{H}_M \,;$$

inoltre $\xi_M\Big(F_q^M[G]\Big)$ *, risp.* $\xi_M\Big(\mathfrak{F}_M[G]\Big)$ *, risp.* $\xi_M\Big(\mathcal{F}_M[G]\Big)$ *, è densa in* $U_q^M(\mathfrak{h})$ *, risp. in* $\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$ *, risp. in* $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ *.* $\square$

8.12 L'accoppiamento di Poisson quantico. In questo paragrafo costruiamo accoppiamenti di Hopf perfetti $U_q^M(\mathfrak{h}) \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \to k(q)$ che — in un senso molto preciso, che sarà spiegato nel §9 — forniranno una quantizzazione di tre oggetti classici: gli accoppiamenti di Hopf perfetti $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$ (o $F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \to k$) e $U(\mathfrak{h}) \otimes F[H] \to k$ — che rispettano anche le strutture di Poisson e co-Poisson coinvolte — e l'accoppiamento perfetto di bialgebre di Lie $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to k$; proprio per quest'ultimo fatto chiameremo i nuovi oggetti "accoppiamenti di Poisson quantici"; inoltre tali accoppiamenti daranno anche origine per specializzazione a nuovi interessanti accoppiamenti tra algebre di funzioni, come vedremo.

Dal Teorema 8.2 abbiamo ${j_M}^{-1} \circ \nu_M \colon U_q^M(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, quindi l'accoppiamento naturale di valutazione dà un accoppiamento perfetto di algebre di Hopf formali

$$\pi_q^M \colon U_q^M(\mathfrak{h}) \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q)$$

definito da $\pi_q^M(h,g) := \Big\langle {j_M}^{-1}\big(\nu_M(h)\big), g \Big\rangle$ per ogni $h \in U_q^M(\mathfrak{h})$, $g \in U_q^{M'}(\mathfrak{g})$.

Chiamiamo π_q^M **accoppiamento di Poisson quantico**.

In particolare osserviamo che se consideriamo il sottospazio $U' := U_- \otimes U_0^M \otimes U_+$ (immerso in modo naturale in ${U_+}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_0^{M'}}^* \,\widehat{\otimes}\, {U_-}^* \cong U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$) e utilizziamo la decomposizione triangolare di $U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \cong U_+ \otimes U_0^{M'} \otimes U_-$, la restrizione dell'accoppiamento di Poisson quantico a $U' \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ non è altri che $\pi \otimes \overline{\pi} \otimes \overline{\pi}$; poiché $U_- \otimes U_0^M \otimes U_+ \cong \mathbf{H}_M$ genera (topologicamente) $U_q^M(\mathfrak{h})$ questa identità determina univocamente π_q^M.

Nel prossimo paragrafo mostreremo che π_q^M fornisce una quantizzazione dell'accoppiamento di Poisson "classico" $\pi_{\mathcal{P}} \colon \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow k$, donde la nostra scelta del nome; per il momento osserviamo soltanto che la discussione nei paragrafi precedenti assicura che le forme intere — $\mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{U}_{M'}(\mathfrak{g})$ — delle nostre algebre inviluppanti quantizzate sono l'una l'ortogonale dell'altra rispetto a π_q^M ; inoltre π_q^M si restringe ad accoppiamenti perfetti di algebre di Hopf formali (su $k\big[q,q^{-1}\big]$)

$$\pi_{q,H}\colon \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})\otimes\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\ ,\quad \pi_{q,G}\colon \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})\otimes\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\ ;$$

con lo stesso simbolo $\pi_{q,G}$ indicheremo anche gli accoppiamenti di Hopf $\pi_{q,H}\colon \mathcal{F}_Q[G]\otimes\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$, risp. $\pi_{q,G}\colon \mathfrak{F}_P[G]\otimes\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$, ottenuti dalla restrizione dei precedenti: qui e nel seguito identifichiamo $F_q^M[G]$ con la sua immagine in $U_q^M(\mathfrak{h})$ tramite ξ_M, e analogamente per le forme intere.

§ 9 Specializzazione alle radici dell'unità

9.1 Il caso $q\to 1$: specializzazione di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ a $U(\mathfrak{h})$ e conseguenze. La forma intera $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ che abbiamo definito nel §8 è un modulo su $k\big[q,q^{-1}\big]$, quindi possiamo specializzarla a $q=1$. Poniamo dunque

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) := \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})\Big/(q-1)\,\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})\ \cong\ \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})\otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k\cong k\big[q,q^{-1}\big]\Big/(q-1)$); sia $p_1\colon \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})\to\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})$ l'applicazione canonica, e si ponga $\mathrm{f}_i := p_1\Big(F_i^{(1)}\Big)$, $\mathrm{h}_i := p_1\Big(\Big({K_i;0 \atop 1}\Big)\Big)$, $\mathrm{e}_i := p_1\Big(E_i^{(1)}\Big)$, per ogni $i=1,\dots,n$. Dalla presentazione di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ data in §8.9 si trova subito che $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})$ è cocommutativa, quindi eredita da $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ una struttura canonica di Hopf co-Poisson; ecco allora il primo dei nostri risultati principali:

Teorema 9.2. *L'algebra di Hopf $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ si specializza per $q\to 1$ alla coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h})$; in altre parole esiste un isomorfismo di coalgebre di Hopf Poisson*

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})\cong U(\mathfrak{h})\,.$$

Dimostrazione. Per cominciare, osserviamo che dalla presentazione di $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$ data in §8.9 si trova subito che $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) = \mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1} := \mathfrak{H}_Q\Big/(q-1)\,\mathfrak{H}_Q\cong\mathfrak{H}_Q\otimes_{k[q,q^{-1}]}k$, quindi possiamo limitarci a studiare $\mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1}$; inoltre dalla presentazione di $\mathfrak{H}_Q$ otteniamo una presentazione di $\mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1}$. D'altra parte dalla definizione di $\mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1}$ e dalla forma esplicita della base PBW di $\mathfrak{U}_0^Q$ (cfr. §3.5) abbiamo che gli elementi $F_i^{(r)}$, $\Big({K_i;0 \atop t}\Big)$, K_i^{-1}, $E_i^{(s)}$ ($i=1,\dots,n;\ r,t,s\in\mathbb{N}$) sono sufficienti a generare $\mathfrak{H}_Q$; infine dalla definizione di potenze divise e da $K_i^{-1} = 1-(q_i-1)\cdot K_i^{-1}\Big({K_i;0 \atop 1}\Big)$ si ottiene, facilmente con calcolo diretto,

$$p_1\Big(F_i^{(r)}\Big)=\frac{\mathrm{f}_i^r}{r!}\,,\quad p_1\left(\begin{pmatrix}K_i;0\\ t\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{h}_i\\ t\end{pmatrix},\quad p_1\big(K_i^{-1}\big)=1\,,\quad p_1\Big(E_i^{(s)}\Big)=\frac{\mathrm{e}_i^s}{s!}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ (dove $\binom{\mathrm{h}_i}{t} := \frac{\mathrm{h}_i(\mathrm{h}_i-1)(\mathrm{h}_i-2)\cdots(\mathrm{h}_i-t+1)}{t!}$), quindi la coalgebra di Hopf Poisson $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) = \mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1}$ è generata dagli f_i, h_i, e_i $(i = 1, \dots, n)$.

A questo punto la tesi segue dal fatto che la presentazione di $\mathfrak{H}_Q$ induce una presentazione di $\mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1}$ — come algebra associativa unitaria — per generatori f_i, h_i, e_i $(i = 1, \dots, n)$ e relazioni che è esattamente quella di $U(\mathfrak{h})$ (cfr. (2.5)), e la relativa struttura di Hopf co-Poisson è descritta da formule ottenute per specializzazione a $q = 1$ delle formule date in §8.9, le quali vengono a coincidere con le (2.6–7) per $U(\mathfrak{h})$.

Per fare un esempio, calcoliamo $\delta(\mathrm{h}_i)$; per definizione di quantizzazione di struttura di co-Poisson ottenuta per specializzazione (cfr. §1.7), δ è data da $\delta := \frac{\Delta - \Delta^{\mathrm{op}}}{q-1}\Big|_{q=1}$ (dove Δ^{op} indica la comoltiplicazione opposta), dunque si ha

$$\delta(\mathrm{h}_i) := \frac{\Delta\left(\binom{K_i;0}{1}\right) - \Delta^{\mathrm{op}}\left(\binom{K_i;0}{1}\right)}{q-1}\Bigg|_{q=1} =$$

$$= \Bigg((q-1)^{-1} \cdot \bigg((2)_{q^{-1}}^{2} (d_i)_q^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} (q-1)\, [d_\gamma]_q \big[(\alpha_i|\gamma)\big]_q \cdot E_\gamma \otimes F_\gamma -$$

$$- (2)_{q^{-1}}^{2} (d_i)_q^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} (q-1)\, [d_\gamma]_q \big[(\alpha_i|\gamma)\big]_q \cdot F_\gamma \otimes E_\gamma \bigg) \Bigg) \Bigg|_{q=1} =$$

$$= \bigg((2)_{q^{-1}}^{2} (d_i)_q^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} [d_\gamma]_q \big[(\alpha_i|\gamma)\big]_q \cdot \big(E_\gamma \otimes F_\gamma - F_\gamma \otimes E_\gamma \big) \bigg) \bigg|_{q=1} =$$

$$= 4\, d_i^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} d_\gamma \cdot (\alpha_i|\gamma) \cdot \big(\mathrm{e}_\gamma \otimes \mathrm{f}_\gamma - \mathrm{f}_\gamma \otimes \mathrm{e}_\gamma \big) \; ;$$

confrontando con la formula in (2.7) troviamo allora $\delta(\mathrm{h}_i) = \delta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{h}_i)$, q.e.d. $\square$

Così $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ *fornisce l'annunciata quantizzazione infinitesimale di* H: quindi *abbiamo risolto il problema della quantizzazione locale del gruppo di Poisson* H.

Osservazione: al di là della dimostrazione esplicita e diretta che ne abbiamo dato, il Teorema 9.2 può essere spiegato — almeno in parte — anche così: dalla definizione di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ come sottospazio di $U_q^P(\mathfrak{g})^*$ composto di serie soddisfacenti una certa "condizione di crescita" (espressa dalla (8.5)) segue subito che specializzando q ad 1 si ottiene un isomorfismo *di algebre di Hopf*

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong \left\{ f \in F[H]^* \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : f\left(\mathfrak{e}^n\right) = 0 \right\}$$

dove $\mathfrak{e} := Ker\,(\epsilon \colon F[H] \to k)$; ma per definizione di $\epsilon \colon F[H] \to k$ abbiamo $\mathfrak{e} = \mathfrak{m}_e$, dove $\mathfrak{m}_e$ è l'ideale massimale di $F[H]$ associato a $e \in H$; ora, è noto (cfr. [On], Part I, Ch. 3, §2) che esiste un isomorfismo canonico di algebre di Hopf

$$\left\{ f \in F[H]^* \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : f\left({\mathfrak{m}_e}^n\right) = 0 \right\} \cong U(\mathfrak{h})$$

e quindi possiamo concludere che esiste un isomorfimo di algebre di Hopf

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})\,.$$

Tuttavia per quanto riguarda la struttura di co-Poisson questo tipo di analisi non può darci alcuna informazione, quindi la dimostrazione del Teorema 9.2 presentata in precedenza è indispensabile.

Il teorema precedente è la chiave che ci consente di dimostrare due importanti risultati: il primo è la congettura di partenza relativa a $\mathcal{F}_Q[G]$, cioè $\mathcal{F}_Q[G] \xrightarrow{q\to 1} U(\mathfrak{h})$ (cfr. Introduzione), il secondo è una nuova dimostrazione del fatto che $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q\to 1} F[H]$ (cfr. (5.5)).

Per indicare una specializzazione, poniamo come sempre

$$\mathcal{F}_1^Q[G] := \mathcal{F}_Q[G]\Big/(q-1)\,\mathcal{F}_Q[G] \;\cong\; \mathcal{F}_Q[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

dove k è pensato come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big]\Big/(q-1)\,$.

Teorema 9.3. *L'algebra di Hopf $\mathcal{F}_Q[G]$ si specializza alla coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h})$ per $q \to 1$; in altre parole esiste un isomorfismo di coalgebre di Hopf Poisson*

$$\mathcal{F}_1^Q[G] \cong U(\mathfrak{h})\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo il monomorfismo di algebre di Hopf

$$\xi_Q \colon \mathcal{F}_Q[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \tag{9.1}$$

e confrontiamolo con l'isomorfismo d'algebre

$$\xi_Q \colon \mathcal{F}_Q[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xhookrightarrow{\;\cong\;} \mathfrak{H}_Q \subseteq \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$$

dove $\rho := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Quando si specializza q a 1 si trova

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) = \mathfrak{H}_Q\Big|_{q=1} = \Big(\mathcal{F}_Q[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right]\Big)\Big|_{q=1} = \mathcal{F}_1^Q[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\big|_{q=1}\right] \;; \tag{9.2}$$

ma $\psi_{-\rho}^{-1} = K_\rho = \prod_{i=1}^n K_i$ (cfr. Teorema 7.14), quindi

$$\psi_{-\rho}^{-1}\Big|_{q=1} = \prod_{i=1}^n K_i\big|_{q=1} = 1$$

perchè $K_i = 1 + (q_i - 1)\cdot \binom{K_i;\,0}{1} \equiv 1 \mod (q-1)$. Perciò (9.2) dà

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) = \mathcal{F}_1^Q[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\big|_{q=1}\right] = \mathcal{F}_1^Q[G]$$

cioè (9.1) si specializza ad un isomorfismo, q.e.d. $\square$

Nota: dunque anche $F_q^Q[G]$ fornisce una quantizzazione infinitesimale di H ; il vantaggio rispetto a $U_q^Q(\mathfrak{h})$ è che $F_q^Q[G]$ è un'algebra di Hopf *usuale*, mentre $U_q^Q(\mathfrak{h})$ (o anche $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$) è un'algebra di Hopf *formale*.

Sottolineiamo il fatto che il risultato del Teorema 9.3, cioè $\mathcal{F}_Q[G] \xrightarrow{q\to 1} U(\mathfrak{h})$ è il duale (nel senso della dualità di Poisson) di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q\to 1} F[H]$; inoltre, come già accennato, il Teorema 9.2 rende possibile ritrovare in modo del tutto naturale anche tale risultato (la cui dimostrazione originaria — più precisamente, la dimostrazione della parte relativa alla struttura di Poisson — in [D-K-P] e [D-P] è particolarmente complessa e richiede calcoli molto pesanti.

Teorema 9.4. *L'algebra di Hopf $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ si specializza all'algebra di Hopf Poisson $F[H]$ per $q \to 1$, cioè*

$$\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \;\cong\; F[H]$$

come algebre di Hopf Poisson.

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ è accoppiata in modo non degenere con $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$, per $q=1$ abbiamo che $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})$ è accoppiata in modo non degenere con $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})$: quest'ultima è cocommutativa, perciò la prima è commutativa; dunque $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})$ è un'algebra di Hopf commutativa finitamente generata su k, quindi è l'algebra delle funzioni (regolari) di un gruppo algebrico affine, diciamo H' ; inoltre, dalla sua deformazione $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ l'algebra di Hopf $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) = F[H']$ eredita una struttura di Poisson, dunque H' è un gruppo di Poisson. Come in [D-P] è (banalmente) chiaro dalla presentazione di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ che $F[H'] \big(= \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) \big) \cong F[H]$ come algebre di Hopf, quindi $H' = H$ come gruppi algebrici (la parte non banale in [D-P] è quella che tratta la struttura di Poisson). Ora, l'accoppiamento di Hopf tra $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})$ e $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) = F[H'] = F[H]$ è compatibile con le strutture di Poisson e co-Poisson, cioè

$$\Big\langle h, \{f,g\} \Big\rangle = \Big\langle \delta(h), f \otimes g \Big\rangle$$

per ogni $h \in \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})$ e $f,g \in \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})$, dove δ è il coprodotto di Poisson di $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) = U(\mathfrak{h})$ e $\{\ ,\ \}$ può essere o il bracket di Poisson $\{\ ,\ \}_\star$ di $F[H]$ (che dà la struttura di Poisson di H) oppure il bracket di Poisson $\{\ ,\ \}_\circ$ di $F[H'] = \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})$ (che deriva dalla sua quantizzazione $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$) che dà la struttura di Poisson di H' : poiché l'accoppiamento è perfetto, si ha chiaramente identità $\{\ ,\ \}_\star = \{\ ,\ \}_\circ$, da cui la tesi. $\square$

9.5 Il caso $q \to 1$: specializzazione di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ a $F^\infty[G]$. Proveremo ora che $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ è una quantizzazione di $F^\infty[G]$; tale risultato può essere interpretato come controparte duale (nel senso della dualità di Poisson) della quantizzazione

$$\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q\to 1} F[H]$$

dimostrata in [D-P] (cfr. §5.2) e ridimostrata nel Teorema 9.4. Come di consueto, definiamo

$$\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \;\cong\; \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

Teorema 9.6. *L'algebra di Hopf formale $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ si specializza all'algebra di Hopf Poisson formale $F^\infty[G]$ per $q \to 1$; in altre parole, esiste un isomorfismo di algebre di Hopf Poisson formali*

$$\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \cong F^\infty[G] .$$

Dimostrazione. Ricordiamo (cfr. ad esempio [On], Part I, Ch. 3, §2) che $F^\infty[G]$ è canonicamente isomorfo al duale lineare di $U(\mathfrak{g})$, cioè $F^\infty[G] \cong U(\mathfrak{g})^*$. D'altra parte a livello quantistico si ha un isomorfismo di algebre di Hopf formali ${j_P}^{-1} \circ \nu_P : U_q^P(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U_q^Q(\mathfrak{g})^*$ (cfr. Teorema 8.2); inoltre il Teorema 8.6 ci dice tra l'altro che questo isomorfismo si restringe ad un isomorfismo di forme intere

$$ {j_P}^{-1} \circ \nu_P : \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\ \cong\ } \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^* \tag{9.3}$$

(cfr. (7.7)). Ora specializziamo q a 1: allora $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ si specializza a $U(\mathfrak{g})$; dualmente, specializzando q a 1 si ottiene, in virtù di (9.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) &:= \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) = \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k \cong \\ &\cong \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^* \otimes_{k[q,q^{-1}]} k = \big(\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k\big)^* = \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g})^* \cong U(\mathfrak{g})^* = F^\infty[G] \end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{g})^* = F^\infty[G]$$

dunque $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ si specializza a $U(\mathfrak{g})^* = F^\infty[G]$ per $q \to 1$, q. e. d. $\square$

Osservazione: sottolineiamo ancora il fatto che quello che abbiamo effettivamente dimostrato è esattamente che

$$\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\ q \to 1\ } U(\mathfrak{g})^*$$

per poi concludere con la tesi enunciata tramite l'isomorfismo canonico $U(\mathfrak{g}^\tau)^* \cong F^\infty[G^\tau]$.

9.7 Il caso $q \to \varepsilon$: morfismi di Frobenius quantici. Sia ε una radice primitiva ℓ–esima dell'unità in k (facciamo le ipotesi dell'inizio di §5.3), per ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$, e poniamo

$$\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) := \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \cong \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$); per prima cosa, osserviamo che

$$\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \text{ \textit{è un'algebra di Hopf} usuale \textit{su} } k, \text{ \textit{isomorfa a} } \mathfrak{H}_Q\Big|_{q=\varepsilon}; \tag{9.4}$$

infatti, dalla definizione di $\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h})$ segue subito che ogni suo elemento è espresso da una serie formale di termini in $\mathfrak{H}_Q$ che però in effetti *è una somma finita modulo* $(q-\varepsilon)$; inoltre l'analisi in §7.16 — in particolare la formula (7.24) — attraverso il Teorema 8.2 ci dice che $\Delta\big(\mathfrak{H}_Q\big) \subseteq \mathfrak{H}_Q \otimes \mathfrak{H}_Q$, da cui l'asserto.

Siamo pronti allora per il prossimo risultato, che è l'analogo per $U_q^Q(\mathfrak{h})$ del Teorema 5.4:

Teorema 9.8. *Esiste un epimorfismo di algebre di Hopf*

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h}) \tag{9.5}$$

definito da

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}\left(F_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon}\right) &:= F_i^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ell \Big| s\,,\ 0 \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}\left(\binom{K_i;0}{s}\Big|_{q=\varepsilon}\right) &:= \binom{K_i;0}{s/\ell}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ell \Big| s\,,\ 0 \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}\left(K_i^{-1}\Big|_{q=\varepsilon}\right) &:= 1 \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}\left(E_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon}\right) &:= E_i^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ell \Big| s\,,\ 0 \ \textit{altrimenti}
\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \dots, n\,,\ s \in \mathbb{N}$*; esso è aggiunto di* $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}} \colon F[H] \cong \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})$ *(cfr. Teorema 5.5) rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici specializzati, cioè*

$$\pi_{1,H}\left(\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}(h), g\right) = \pi_{\varepsilon,H}\left(h, \mathcal{F}r_{\mathfrak{g}}(g)\right)$$

per ogni $h \in \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h})$*,* $g \in \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})$*.*

Dimostrazione. In virtù di (9.4) abbiamo $\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) = \mathfrak{H}_Q\Big|_{q=\varepsilon}$; allora le formule su enunciate determinano univocamente un epimorfismo $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}$ — se esiste — perché $F_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon}$, $\binom{K_i;0}{s}\Big|_{q=\varepsilon}$, $K_i^{-1}\Big|_{q=\varepsilon}$, $E_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon}$ sono generatori (algebrici) di $\mathfrak{H}_Q\Big|_{q=\varepsilon} = \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h})$.

Consideriamo l'immersione di algebre di Hopf

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}} \colon F[H] \cong \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})$$

(cfr. Teorema 5.5): il suo duale (lineare) è un epimorfismo di algebre di Hopf formali

$$\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})^* \twoheadrightarrow \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})^*\,. \tag{9.6}$$

D'altra parte abbiamo un'immersione naturale

$$\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})^* \tag{9.7}$$

fornita dall'accoppiamento di Poisson quantico (specializzato) $\pi_{\varepsilon,H} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$, oppure direttamente dalle definizioni, per cui l'isomorfismo ${j_Q}^{-1} \circ \nu_Q \colon U_q^Q(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U_q^P(\mathfrak{g})^*$ si restringe a $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathcal{U}_P(\mathfrak{g})^*$ che si specializza a $\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \longhookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})^*$. Componendo (9.7) e (9.6) si ricava un morfismo

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})^* \; ;$$

la costruzione stessa dà allora

$$\left\langle \mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}(h), g \right\rangle = \pi_{1,H}\left(\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}(h), g\right) = \pi_{\varepsilon,H}\left(h, \mathcal{Fr}_{\mathfrak{g}}(g)\right)$$

per ogni $h \in \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h})$, $g \in \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g})$, da cui si ottiene immediatamente che $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}$ è descritto dalle formule suddette e ha immagine $\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})$, q. e. d. $\square$

Con argomentazioni simili dimostriamo anche il prossimo risultato, che è l'analogo del Teorema 5.5; come di consueto poniamo

$$\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \;\cong\; \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k \, .$$

Teorema 9.9.
(a) Esiste un monomorfismo continuo di algebre di Hopf formali

$$\mathcal{Fr}_{\mathfrak{h}} \colon F^\infty[G] \cong \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \longhookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h}) \tag{9.8}$$

definito da

$$\mathcal{Fr}_{\mathfrak{h}} \colon \quad \overline{F}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{F}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon}, \qquad L_\lambda\Big|_{q=1} \mapsto L_\lambda^\ell\Big|_{q=\varepsilon}, \qquad \overline{E}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{E}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon} \tag{9.9}$$

per ogni $\alpha \in R^+$, $\lambda \in P$*; esso è l'estensione per continuità di* $\mathfrak{Fr}_G \colon F[G] \cong \mathfrak{F}_1^P[G] \hookrightarrow \mathfrak{F}_\varepsilon^P[G]$ *(cfr. Teorema 6.6), ed è aggiunto di* $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$ *(cfr. Teorema 5.4) rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici, cioè*

$$\pi_{\varepsilon,G}\left(\mathcal{Fr}_{\mathfrak{h}}(h), g\right) = \pi_{1,G}\left(h, \mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}(g)\right)$$

per ogni $h \in \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h})$, $g \in \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g})$.

(b) L'immagine $Z_0 \left(\cong_{\mathcal{Fr}_{\mathfrak{h}}} \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \right)$ *di* $\mathcal{Fr}_{\mathfrak{h}}$ *è una sottoalgebra di Hopf formale contenuta nel centro di* $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$.

(c) L'insieme di monomi ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{F}_{\alpha^r}^{\,\ell f_r} \cdot u_{\ell\tau}^* \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{E}_{\alpha^r}^{\,\ell e_r} \,\middle|\, \tau = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n; (f_1, \dots, f_N), (e_1, \dots, e_N) \in \mathbb{N}^N \right\}$$

è una pseudobase di Z_0 su k .

(d) L'insieme di monomi ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{F}_{\alpha^r}^{f_r} \cdot u_\tau^* \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{E}_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, \tau = (t_1, \dots, t_n),\ f_r, t_i, e_r \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}\ \forall\, i, r \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$ su Z_0 ; ne segue che anche l'insieme di monomi PBW ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{F}_{\alpha^r}^{f_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{l_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{E}_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, f_1, \dots, f_N, l_1, \dots, l_n, e_1, \dots, e_N = 0, 1, \dots, \ell - 1 \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$ su Z_0; pertanto $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$ è un modulo libero di rango $\ell^{dim(H)}$ su Z_0 .

Dimostrazione. (a) Per cominciare osserviamo che le formule su enunciate determinano univocamente un monomorfismo $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$ — se esiste — perché $\overline{F}_\alpha\Big|_{q=1}$, $L_\lambda\Big|_{q=1}$, $\overline{E}_\alpha\Big|_{q=1}$, ($\alpha \in R^+$, $\lambda \in P$) sono generatori topologici di $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h})$, nel senso che generano una sottoalgebra densa di $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h})$.

Consideriamo l'epimorfismo di algebre di Hopf

$$\mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$$

(cfr. Teorema 5.4): il suo duale è un monomorfismo di algebre di Hopf formali

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g})^* \hookrightarrow \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g})^* \ ;$$

componendo quest'ultimo con gli isomorfismi $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g})^*$, $\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g})^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$ (associati ad accoppiamenti di Poisson quantici specializzati corrispondenti) si ricava un monomorfismo

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}} \colon \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$$

dunque per costruzione si ha

$$\Big\langle \mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}(h), g \Big\rangle = \pi_{\varepsilon,G}\Big(\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}(h), g\Big) = \pi_{1,G}\Big(h, \mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}}(g)\Big)$$

per ogni $h \in \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h})$, $x \in \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g})$: allora dalla definizione di $\pi_{q,G}$ si ottiene immediatamente che $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$ è descritto dalle formule suddette. Notiamo inoltre che, per $\tau, \sigma \in Q_+ \cong \mathbb{N}^n$ con $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$, si ha

$$\Big\langle \mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}(u_\tau^*), u_\sigma \Big\rangle = \pi_{\varepsilon,G}\left(\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}(u_\tau^*), u_\sigma\right) = \pi_{1,G}\left(u_\tau^*, \mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}}\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{K_i; 0}{s_i} \cdot K_i^{-Ent(s_i/2)}\right)\right) =$$

$$= \chi_{\ell Q_+}(\sigma) \cdot \left\langle u_\tau^*, \prod_{i=1}^{n} \binom{K_i; 0}{s_i/\ell} \right\rangle = \chi_{\ell Q_+}(\sigma) \cdot \Big\langle u_\tau^*, u_{\frac{1}{\ell}\sigma} \Big\rangle = \chi_{\ell Q_+}(\sigma) \cdot \delta_{\ell\tau,\sigma}$$

(dove $\chi_{\ell Q_+}$ indica la funzione caratteristica del sottoinsieme $\ell\, Q_+ \subseteq Q_+$) quindi

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}(u^*_\tau) = u^*_{\ell\tau} \qquad\qquad \text{per ogni} \quad \tau \in Q_+ \;; \tag{9.10}$$

da (9.9) e (9.10) si ricava che $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$ manda elementi della pseudobase (8.4) di $\mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h})$ in elementi della analoga pseudobase di $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$: possiamo allora concludere che $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$ è continuo.

Infine poiché $\mathfrak{F}r_G \colon F[G] \cong \mathfrak{F}_1^P[G] \hookrightarrow \mathfrak{F}_\varepsilon^P[G]$ è definito anche come duale (di Hopf) di $\mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$ (cfr. [D-L], Proposition 6.4), allora $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}} \colon F^\infty[G] \cong \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$ è ovviamente estensione di $\mathfrak{F}r_G \colon F[G] \cong \mathfrak{F}_1^P[G] \hookrightarrow \mathfrak{F}_\varepsilon^P[G]$; ricordando che $\mathfrak{F}_P[G]$ è densa in $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^* \cong \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ (cfr. Teorema 7.14 e Teorema 8.11) è anche chiaro che questa è un'estensione per continuità.

(b) Si può facilmente dedurre dal Teorema 5.5 e dalle definizioni di $U_q^P(\mathfrak{g})$ e $U_q^P(\mathfrak{h})$ (altrimenti si può direttamente far uso dei calcoli in [D-P], §19, o imitare la dimostrazione della Proposition 6.4 di [D-L]).

(c) Segue direttamente dalla forma esplicita della pseudobase di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ (cfr. §8.1), da (9.9) e da (9.10).

(d) Da (9.10) si deduce che il sottospazio $\mathcal{Z}$ di $\mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$ di base $\left\{ u^*_\tau \,\middle|\, \tau \in \ell Q_+ \right\}$ coincide con quello di base $\left\{ L_\lambda \,\middle|\, \lambda \in \ell Q_+ \right\}$; chiaramente $\mathcal{U}_0^P\Big|_{q=\epsilon}$ è un modulo libero di rango $\ell^{dim(H)}$ su $\mathcal{Z}$; da questo, dalla forma esplicita della pseudobase di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$, e da (9.9) segue facilmente l'asserto. $\square$

Tra le altre cose, annotiamo il fatto che la parte *(d)* del Teorema 9.9 si accorda bene con [D-L], Theorem 7.2, che afferma che $\mathfrak{F}_\varepsilon^P[G]$ è un modulo proiettivo su $F_0 := \mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}}\Big(\mathfrak{F}_1^P[G]\Big)$ di rango $\ell^{dim(G)} = \ell^{dim(H)}$.

Infine consideriamo

$$\mathcal{F}_\varepsilon^Q[G] := \mathcal{F}_Q[G] \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathcal{F}_Q[G] \;\cong\; \mathcal{F}_Q[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

con k inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$. Possiamo allora provare la seguente controparte del Teorema 6.6: si noti in particolare che ora otteniamo un morfismo di Frobenius quantico *suriettivo* invece che *iniettivo* (come (6.7)).

Teorema 9.10. *Esiste un epimorfismo di algebre di Hopf*

$$\mathcal{F}r_H \colon \mathcal{F}_\varepsilon^Q[G] \relbar\joinrel\twoheadrightarrow \mathcal{F}_1^Q[G] \cong U(\mathfrak{h}) \tag{9.11}$$

duale di $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}} \colon F[H] \cong \mathcal{U}_1^P(\mathfrak{g}) \longhookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{g})$ *e di esso aggiunto rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{F}_\varepsilon^Q[G] \longhookrightarrow \mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h})$, possiamo restringere $\mathfrak{F}r_{\mathfrak{h}}$ a $\mathcal{F}_\varepsilon^Q[G]$, ottenendo così un morfismo di algebre di Hopf

$$\mathcal{F}r_H \colon \mathcal{F}_\varepsilon^Q[G] \longrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h}) \;.$$

Ma dal Teorema 9.3 abbiamo $\mathcal{F}_1^Q[G] = \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})$, da cui la tesi. $\square$

Chiamiamo anche $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}}$, $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$, e $\mathcal{F}r_H$ **morfismi di Frobenius quantici**, perché — come per G — essi possono essere interpretati come sollevamenti dei morfismi di Frobenius classici $H_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow H_{\mathbb{Z}_p}$, $G_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow G_{\mathbb{Z}_p}$ (per $\ell = p$ primo) alla caratteristica zero.

9.11 Specializzazioni dell'accoppiamento di Poisson quantico. Dai §§9.2–6 si ricava immediatamente che gli accoppiamenti di Hopf

$$\pi_{q,H}\colon \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big] \, , \qquad \pi_{q,G}\colon \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$$

si specializzano rispettivamente agli accoppiamenti di Hopf naturali

$$\pi_H\colon U(\mathfrak{h}) \otimes F[H] \longrightarrow k \, , \qquad \pi_G\colon F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$$

dati dalla valutazione; questo significa che

$$\pi_{q,H}\left(\hat{h},\tilde{g}\right)\Big|_{q=1} = \pi_H\left(\hat{h}\big|_{q=1},\tilde{g}\big|_{q=1}\right) \, , \qquad \pi_{q,G}\left(\tilde{h},\hat{g}\right)\Big|_{q=1} = \pi_G\left(\tilde{h}\big|_{q=1},\hat{g}\big|_{q=1}\right)$$

per ogni $\hat{h} \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$, $\tilde{g} \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$, $\tilde{h} \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$, $\hat{g} \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$, dove $x\big|_{q=1}$ denota com'è usuale la specializzazione di x a $q = 1$. Così l'accoppiamento di Hopf $\pi_q\colon U_q^M(\mathfrak{h}) \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \to k(q)$, per $(M,M') = (P,Q)$ oppure $(M,M') = (Q,P)$, è una quantizzazione dell'accoppiamento corrispondente a livello classico. Mostreremo ora che esso può anche essere interpretato come quantizzazione dell'accoppiamento di Poisson classico, cioè l'accoppiamento di bialgebre di Lie $\pi_{\mathcal{P}}\colon \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow k$. Per comodità introduciamo inoltre le notazioni

$$[\ ,\ ] := m - m^{\mathrm{op}} \, , \qquad \nabla := \Delta - \Delta^{\mathrm{op}} \, .$$

Definiamo ora un accoppiamento $\pi_{q,\mathcal{P}}\colon \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$ come segue. Definiamo una gradazione su $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ assegnando ai monomi PBW il grado

$$deg\left(\prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{(m_r)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \binom{K_i;0}{t_i} K_i^{-Ent(t_i/2)} \cdot \prod_{r=1}^{N} F_{\alpha^r}^{(n_r)}\right) := \sum_{r=N}^{1} m_r + \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{r=1}^{N} n_r$$

e poi estendendo per linearità; sia poi $k\big[q,q^{-1}\big] =: \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_h \subset \cdots (\subset \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}))$ la filtrazione associata, e — per ogni $x \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ — poniamo $\partial(x) := h$ se $x \in \mathfrak{U}_h \setminus \mathfrak{U}_{h-1}$ ($h \in \mathbb{N}$); infine definiamo

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(h,g) := (q-1)^{\partial(g)} \cdot \pi_q(h,g)$$

per ogni $h \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$, $g \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$. È chiaro che questa definizione è ben posta, e definisce un accoppiamento non degenere $\pi_{q,\mathcal{P}} : \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q)$ tale che

$$\begin{aligned} \pi_{q,\mathcal{P}}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) &= \alpha \cdot \pi_{q,\mathcal{P}}(x,z) + \beta \cdot \pi_{q,\mathcal{P}}(y,z) \\ \pi_{q,\mathcal{P}}(x, \alpha \cdot u + \beta \cdot v) &= \alpha \cdot \pi_{q,\mathcal{P}}(x,u) + \beta \cdot \pi_{q,\mathcal{P}}(x,v) \end{aligned} \tag{9.12}$$

per ogni $\alpha, \beta \in k\big[q,q^{-1}\big]$, $x, y \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$, $z, u, v \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ tali che $\partial(\alpha{\cdot}u+\beta{\cdot}v) = \partial(u) = \partial(v)$; inoltre considerando (3.2) e la definizione stessa di $\pi_{q,\mathcal{P}}$ si trova che

$$\pi_{q,\mathcal{P}}\Big(\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}), \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big]_{(q-1)}$$

(dove $k\big[q,q^{-1}\big]_{(q-1)}$ è la localizzazione di $k\big[q,q^{-1}\big]$ all'ideale primo principale generato da $(q-1)$); in particolare si può operare la specializzazione di $\pi_{q,\mathcal{P}}$ a $q = 1$.

Teorema 9.12. *L'accoppiamento* $\pi_{q,\mathcal{P}} : \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g}) \to k\big[q,q^{-1}\big]_{(q-1)}$ *si specializza ad un accoppiamento*

$$\pi_{\mathcal{P}} : U(\mathfrak{h}) \times U(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$$

tale che

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{P}}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) &= \alpha \cdot \pi_{\mathcal{P}}(x,z) + \beta \cdot \pi_{\mathcal{P}}(y,z) \\ \pi_{\mathcal{P}}(x, \alpha \cdot u + \beta \cdot v) &= \alpha \cdot \pi_{\mathcal{P}}(x,u) + \beta \cdot \pi_{\mathcal{P}}(x,v) \end{aligned} \tag{9.13}$$

per ogni $\alpha, \beta \in k$, $x, y \in U(\mathfrak{h})$, $z, u, v \in U(\mathfrak{g})$ *tali che* $\partial(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \partial(u) = \partial(v)$ *(dove* $\partial(x) := \partial\,(x')$ *per un qualunque* $x' \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ *tale che* $x'\big|_{q=1} = x$ *), e che*

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{P}}\big(x \cdot y, z\big) &= \pi_{\mathcal{P}}\big(x \otimes y, \Delta(z)\big)\,, \qquad & \pi_{\mathcal{P}}\big(x, z \cdot w\big) &= \pi_{\mathcal{P}}\big(\Delta(x), z \otimes w\big) \\ \pi_{\mathcal{P}}\big([x,y], z\big) &= \pi_{\mathcal{P}}\big(x \otimes y, \delta(z)\big)\,, \qquad & \pi_{\mathcal{P}}\big(x, [z,w]\big) &= \pi_{\mathcal{P}}\big(\delta(x), z \otimes w\big) \end{aligned} \tag{9.14}$$

per ogni $x, y \in U(\mathfrak{h})$, $z, w \in U(\mathfrak{g})$ *, dove* δ *è il cobracket di Poisson di* $U(\mathfrak{g})$ *o di* $U(\mathfrak{h})$*. Tale accoppiamento estende l'accoppiamento di bialgebre di Lie* $\pi_{\mathcal{P}}$: $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow k$ *(cfr. §2.2).*

Dimostrazione. Osserviamo che $\pi_{\mathcal{P}}$ può anche essere caratterizzato come segue. Consideriamo su $U(\mathfrak{g})$ la filtrazione indotta dalla filtrazione canonica di $T(\mathfrak{g})$ (l'algebra tensoriale su $\mathfrak{g}$); indicata con $U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_N \subset \cdots \subset U(\mathfrak{g})$ tale filtrazione, ad ogni elemento $x \in U(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ associamo il grado $\partial(x) := N$ se $x \in U_N \setminus U_{N-1}$; analogamente facciamo con $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ utilizzando l'identificazione canonica $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \cong U\big(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}\big)$. Dati $x \in U(\mathfrak{h})$, $z \in U(\mathfrak{g})$, considerando $x' \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ e $z' \in \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ tali che $x'\Big|_{q=1} = x$, $z'\Big|_{q=1} = z$, e $\partial\big(z'\big) = \partial(z)$, si definisce

$$\pi_{\mathcal{P}}\big(x, z\big) := \pi_{q,\mathcal{P}}\big(x, z\big)\Big|_{q=1} = \Big((q-1)^{\partial(z')} \cdot \pi_q\big(x', z'\big)\Big)\Big|_{q=1}\,.$$

A questo punto, le proprietà di linearità (9.13) discendono direttamente dalle (9.12). Inoltre, usando le relazioni $\delta(x \cdot y) = \delta(x) \cdot \Delta(y) + \Delta(x) \cdot \delta(y)$, $\partial\big(\Delta(x)\big) = \partial(x)$, $\partial(x \otimes y) = \partial(x) + \partial(y) = \partial(x \cdot y)$ si riconosce che è sufficiente verificare la validità delle (9.14) sui generatori di Chevalley. Per le prime due relazioni (riguardanti prodotto e coprodotto) la verifica segue immediatamente dalle definizioni; per le ultime due invece discende dall'ultima parte dell'enunciato, per la quale è sufficiente verificare che

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(h,g)\big|_{q=1} = \pi_{\mathcal{P}}\left(h\big|_{q=1}, g\big|_{q=1}\right)$$

per i generatori di Chevalley $\mathrm{h} = h\big|_{q=1}$ di $\mathfrak{h}$ e $\mathrm{g} = g\big|_{q=1}$ di $\mathfrak{g}$. Ricordiamo che

$$F_i\big|_{q=1} = \mathrm{f}_i\,, \quad H_i\big|_{q=1} = \mathrm{h}_i\,, \quad E_i\big|_{q=1} = \mathrm{e}_i$$

per $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ che si specializza a $U(\mathfrak{h})$, e

$$F_j\big|_{q=1} = f_j\,, \quad H_j\big|_{q=1} = h_j\,, \quad E_j\big|_{q=1} = e_j$$

per $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ che si specializza a $U(\mathfrak{g})$; qui poniamo $H_i := \binom{K_i;\,0}{1}$. Il calcolo diretto dà

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(F_i,F_j)\big|_{q=1} = 0\big|_{q=1} = 0 = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{f}_i,f_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(F_i,H_j)\big|_{q=1} = 0\big|_{q=1} = 0 = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{f}_i,h_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(F_i,E_j)\big|_{q=1} = (q-1)\left.\frac{-\delta_{ij}}{(q_i-q_i^{-1})}\right|_{q=1} = -\frac{1}{2}\delta_{ij}d_i^{-1} = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{f}_i,e_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(H_i,F_j)\big|_{q=1} = 0\big|_{q=1} = 0 = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{h}_i,f_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(H_i,H_j)\big|_{q=1} = (q-1)\left.\frac{(q_i^{a_{ij}}-1)}{(q_i-1)(q_j-1)}\right|_{q=1} = a_{ij}d_j^{-1} = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{h}_i,h_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(H_i,E_j)\big|_{q=1} = 0\big|_{q=1} = 0 = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{h}_i,e_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(E_i,F_j)\big|_{q=1} = (q-1)\left.\frac{\delta_{ij}}{(q_i-q_i^{-1})}\right|_{q=1} = \frac{1}{2}\delta_{ij}d_i^{-1} = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{e}_i,f_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(E_i,H_j)\big|_{q=1} = 0\big|_{q=1} = 0 = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{e}_i,h_j)$$

$$\pi_{q,\mathcal{P}}(E_i,E_j)\big|_{q=1} = 0\big|_{q=1} = 0 = \pi_{\mathcal{P}}(\mathrm{e}_i,e_j)$$

Dal confronto con le (2.1) segue allora la tesi. $\square$

9.13 Gli accoppiamenti $F[G]\times F[H]\longrightarrow k$ **,** $F^\infty[G]\times F[H]\longrightarrow k$ **.** La costruzione del §9.11 può essere "rovesciata", dando origine a *nuovi* interessanti accoppiamenti tra algebre di funzioni che rispettano le strutture di Hopf coinvolte. A tal fine definiamo un accoppiamento $\pi_q^{\mathcal{P}}\colon \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})\times\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$ modificando leggermente π_q .

Cominciamo osservando che, come gli elementi $\overline{F}_{\alpha^r}$, $L_i^{\pm1}$, $\overline{E}_{\alpha^r}$ (per $r=1,\dots N$, $i=1,\dots,n$) generano $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ come algebra su $k\big[q,q^{-1}\big]$, così anche fanno gli elementi $\overline{F}_{\alpha^r}$, $L_i^{\pm1}-1$, $\overline{E}_{\alpha^r}$ (per $r=1,\dots N$, $i=1,\dots,n$). Ora definiamo una gradazione su $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ (come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra) assegnando ai monomi ordinati nei generatori suddetti il grado

$$deg\left(\prod_{r=N}^{1}\overline{E}_{\alpha^r}^{m_r}\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(L_i^{\pm1}-1\right)^{l_i}\cdot\prod_{r=1}^{N}\overline{F}_{\alpha^r}^{n_r}\right) := \sum_{r=N}^{1}m_r+\sum_{i=1}^{n}l_i+\sum_{r=1}^{N}n_r$$

e poi estendendo per linearità; sia poi $k\big[q,q^{-1}\big] =: \mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}_1\subset\cdots\subset\mathcal{U}_h\subset\cdots(\subset\mathcal{U}_P(\mathfrak{g}))$ la filtrazione associata: per ogni $x\in\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ poniamo allora $\partial(x):=h$ se $x\in\mathcal{U}_h\setminus\mathcal{U}_{h-1}$ ($h\in\mathbb{N}$). Poi estendiamo $\pi_q\colon U_q^P(\mathfrak{h})\otimes U_q^Q(\mathfrak{g})\to k(q)$ (oppure $\pi_q\colon U_q^Q(\mathfrak{h})\otimes U_q^P(\mathfrak{g})\to k(q)$, è equivalente) ad un accoppiamento perfetto di algebre di Hopf formali $\pi_q\colon U_q^P(\mathfrak{h})\otimes U_q^P(\mathfrak{g})\to k\left(q^{1/d}\right)$ (dove d è il determinante della matrice di Cartan) tramite la legge $\pi_q\left(L_\lambda,L_\mu\right):=q^{(\lambda|\mu)}$ (dove $(\lambda|\mu)$ è definito alla fine del §2.1). Infine, per ogni $h\in\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ e $g\in\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ definiamo

$$\pi_q^{\mathcal{P}}(h,g) := (q-1)^{-\partial(g)}\cdot\pi_q(h,g)$$

(consideriamo $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ immerso in $U_q^P(\mathfrak{h}) \otimes U_q^P(\mathfrak{g})$), dove $\partial(g)$ è il grado di g testè definito. È chiaro che questa definizione è ben posta — in particolare, anlogamente a quanto accade nel caso di $\pi_{q,\mathcal{P}}$, dato un monomio PBW g in $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ c'è soltanto un numero finito di monomi PBW h in $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ tali che $\pi_q^{\mathcal{P}}(h,g) \neq 0$, perciò la presenza di "somme infinite" in $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ non crea problemi — e stabilisce un accoppiamento non degenere $\pi_q^{\mathcal{P}} : \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \times \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\left[q^{1/d}, q^{-1/d}\right]$, i cui valori formano un ideale coprimo con l'ideale principale $\left(q^{1/d}-1\right)$; inoltre per $\pi_q^{\mathcal{P}}$ valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \pi_q^{\mathcal{P}}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) &= \alpha \cdot \pi_q^{\mathcal{P}}(x,z) + \beta \cdot \pi_q^{\mathcal{P}}(y,z) \\ \pi_q^{\mathcal{P}}(x, \alpha \cdot u + \beta \cdot v) &= \alpha \cdot \pi_q^{\mathcal{P}}(x,u) + \beta \cdot \pi_q^{\mathcal{P}}(x,v) \end{aligned} \tag{9.15}$$

per ogni $\alpha, \beta \in k\left[q, q^{-1}\right]$, $x, y \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$, $z, u, v \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ tali che $\partial(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \partial(u) = \partial(v)$; infine la restrizione dà anche un analogo accoppiamento $\pi_q^{\mathcal{P}} : \mathfrak{F}_P[G] \times \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\left[q^{1/d}, q^{-1/d}\right]$.

A questo punto si può operare la specializzazione di questi accoppiamenti a $q^{1/d} = 1$, il che dà il seguente

Teorema 9.14. *L'accoppiamento* $\pi_q^{\mathcal{P}} : \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) \times \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\left[q^{1/d}, q^{-1/d}\right]$ *e l'accoppiamento* $\pi_q^{\mathcal{P}} : \mathfrak{F}_P[G] \times \mathcal{U}_P(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\left[q^{1/d}, q^{-1/d}\right]$ *si specializzano rispettivamente ad accoppiamenti*

$$\pi^{\mathcal{P}} \colon F^\infty[G] \times F[H] \longrightarrow k\,, \qquad \pi^{\mathcal{P}} \colon F[G] \times F[H] \longrightarrow k$$

tali che

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) &= \alpha \cdot \pi^{\mathcal{P}}(x,z) + \beta \cdot \pi^{\mathcal{P}}(y,z) \\ \pi^{\mathcal{P}}(x, \alpha \cdot u + \beta \cdot v) &= \alpha \cdot \pi^{\mathcal{P}}(x,u) + \beta \cdot \pi^{\mathcal{P}}(x,v) \end{aligned} \tag{9.16}$$

per ogni $\alpha, \beta \in k$, $x, y \in F[G]$ *o* $x, y \in F^\infty[G]$, $z, u, v \in F[H]$ *tali che* $\partial(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \partial(u) = \partial(v)$ *(dove* $\partial(x) := \partial\left(x'\right)$ *per un qualunque* $x' \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ *tale che* $x'\big|_{q=1} = x$ *), e che*

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}}\big(x \cdot y, z\big) &= \pi^{\mathcal{P}}\big(x \otimes y, \Delta(z)\big)\,, \qquad & \pi^{\mathcal{P}}\big(x, z \cdot w\big) &= \pi^{\mathcal{P}}\big(\Delta(x), z \otimes w\big) \\ \pi^{\mathcal{P}}\big(\{x,y\}, z\big) &= \pi^{\mathcal{P}}\big(x \otimes y, \nabla(z)\big)\,, \qquad & \pi^{\mathcal{P}}\big(x, \{z,w\}\big) &= \pi^{\mathcal{P}}\big(\nabla(x), z \otimes w\big) \end{aligned} \tag{9.17}$$

per ogni $x, y \in F[G]$ *o* $x, y \in F^\infty[G]$ *e* $z, w \in F[H]$, *dove* $\{\ ,\ \}$ *è il bracket di Poisson di* $F[G]$ *o* $F^\infty[G]$ *oppure di* $F[H]$.

Dimostrazione. Come già fatto per dimostrare il Teorema 9.12, consideriamo su $U(\mathfrak{g})$ la filtrazione canonica $U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_N \subset \cdots \subset U(\mathfrak{g})$, e ad ogni elemento $x \in U(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ associamo il grado $\partial(x) := N$ se $x \in U_N \setminus U_{N-1}$; analogamente facciamo con $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ tramite l'identificazione canonica $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \cong U\big(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}\big)$. Ora, presi $x \in U(\mathfrak{h})$, $z \in U(\mathfrak{g})$, e considerati $x' \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ e $z' \in \mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ tali che $x'\Big|_{q=1} = x$, $z'\Big|_{q=1} = z$, e $\partial\big(z'\big) = \partial(z)$, si definisce

$$\pi_{\mathcal{P}}\big(x,z\big) := \pi_q^{\mathcal{P}}\big(x',z'\big) = \pi_{q,\mathcal{P}}\big(x,z\big)\Big|_{q=1} = \Big(\big(q-1\big)^{\partial(z')} \cdot \pi_q\big(x',z'\big)\Big)\Big|_{q=1}.$$

Quindi le proprietà di linearità (9.16) discendono direttamente dalle (9.15). Poi usando la presentazione di $F[H]$ per generatori e relazioni derivante da quella di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$, usando le (5.1), la regola di Leibniz (cfr. §1.3) e la relazione $\nabla(x \cdot y) = \nabla(x) \cdot \Delta(y) + \Delta(x) \cdot \nabla(y)$, ci si riduce a dimostrare le (9.17) per i generatori delle algebre in esame, per i quali è sufficiente un sempliice calcolo diretto, basato sull'uso delle formule in §5.1 e in §8.9. □

§ 10 Gruppi quantici formali

10.1 Gruppi formali quantici e gruppi quantici formali. Il titolo di questo sottoparagrafo *non* è un gioco di parole: vogliamo infatti discutere la possibilità di sviluppare *due* diverse nozioni che siano analogo quantico della nozione di gruppo formale; la diversa posizione dell'aggettivo *quantico* nelle espressioni di cui sopra fa appunto riferimento a due diversi modi di concepire la nozione di gruppo formale, i quali danno origine a due diverse "quantizzazioni" di tale concetto.

Nel §7.1 abbiamo introdotto la nozione di gruppo formale quantico, che vuole appunto essere un analogo quantico della nozione di gruppo formale: il punto di partenza era che un gruppo formale è caratterizzato da un'algebra di Hopf formale *commutativa* — che può essere realizzata come duale lineare $U(\mathfrak{g})^*$ dell'algebra inviluppante universale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ associata al gruppo formale in esame (cfr. [On], Part I, Ch. 3, §2) — di cui è lo spettro, per cui abbiamo definito i gruppi formali quantici come spettri di algebre di Hopf formali *non necessariamente commutative*.

Vogliamo ora presentare un'altra possibile soluzione del problema di quantizzare un gruppo formale, mediante il quale otteniamo ancora oggetti interessanti: in particolare anche per essi valgono alcuni dei risultati presentati in §9; tuttavia apparirà chiaramente che tale approccio è molto meno fecondo di quello introdotto e sviluppato nei §§7–9; in particolare alcuni dei risultati sono ottenuti basandosi su quelli dei §§7–9.

Il nuovo punto di partenza è che un gruppo formale è caratterizzato da un'algebra di Hopf topologica che può essere ottenuta per completamento opportuno da un'algebra di Hopf usuale, l'algebra delle funzioni di un gruppo. Precisamente, dato un gruppo formale, sia $F^\infty[G]$ la sua algebra (di Hopf formale) associata; sia poi G un gruppo algebrico con gruppo formale (o germe di gruppo algebrico) associato pari a quello dato: in particolare possiamo supporre che G sia connesso e semplicemente connesso, con algebra delle funzioni $F[G]$. Sia $\mathfrak{m}_e$ l'ideale massimale di $F[G]$ associato all'elemento identità $e \in G$; allora $F^\infty[G]$ non è altri che il completamento $\mathfrak{m}_e$–adico di $F[G]$. Osserviamo poi che, indicata con $\epsilon\colon F[G] \to k$ la counità di $F[G]$, si ha $\mathfrak{e} = \mathfrak{m}_e$, dove $\mathfrak{e} := Ker\,(\epsilon\colon F[G] \to k)$, quindi $F^\infty[G]$ è il completamento $\mathfrak{e}$–adico di $F[G]$.

Da queste osservazioni traiamo lo spunto per una quantizzazione di $F^\infty[G]$ che segua un procedimento in due passi:

(I) — costruire un'algebra di Hopf $F_q[G]$ che dia una quantizzazione di $F[G]$;

(II) — costruire il completamento $\mathfrak{E}$–adico di $F_q[G]$, dove $\mathfrak{E} := Ker\,(\epsilon\colon F_q[G] \to k(q))$ sia il nucleo della counità di $F_q[G]$.

Chiameremo un oggetto ottenuto in questo modo **gruppo quantico formale**, perché ottenuto *prima* per *quantizzazione* di un gruppo (passo (I)) e *poi* per *formalizzazione* del gruppo quantico così ottenuto (passo (II)).

Naturalmente se il gruppo formale in esame ha una struttura di Poisson chiederemo che le quantizzazioni in esame siano in effetti quantizzazioni di quella struttura di Poisson.

Nel caso dei gruppi di Poisson formali associati ai gruppi algebrici semisemplici G con la struttura di Poisson definita in §2.2, abbiamo tutti gli ingredienti per effetuare tale costruzione; introduciamo quindi la seguente

Definizione 10.2. *Sia M un reticolo tale che $Q \leq M \leq P$, e siano $F_q^M[G]$, $\mathfrak{F}_M[G]$, $\mathcal{F}_M[G]$ le algebre quantiche di funzioni definite in §6.*

Siano

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &:= Ker\left(\epsilon\colon F_q^M[G] \longrightarrow k(q)\right) , \\ \mathfrak{E} &:= Ker\left(\epsilon\colon \mathfrak{F}_M[G] \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\right) , \\ \mathcal{E} &:= Ker\left(\epsilon\colon \mathcal{F}_M[G] \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\right) . \end{aligned}$$

Definiamo

$$\begin{aligned} F_q^{M,\infty}[G] &:= \textit{ completamento } \mathbf{E}\text{–}\textit{adico di } F_q^M[G] \\ \mathfrak{F}_M^\infty[G] &:= \textit{ completamento } \mathfrak{E}\text{–}\textit{adico di } \mathfrak{F}_M[G] \\ \mathcal{F}_M^\infty[G] &:= \textit{ completamento } (q-1)\cdot\mathcal{E}\text{–}\textit{adico di } \mathcal{F}_M[G] \end{aligned}$$

e chiamiamo tali oggetti **gruppi quantici formali**. $\square$

Nota: ovviamente si ha $\mathfrak{E} = \mathbf{E} \cap \mathfrak{F}_M[G]$, $\quad \mathcal{E} = \mathbf{E} \cap \mathcal{F}_M[G]$.

Il prossimo risultato ci dice che i suddetti gruppi formali quantici hanno una struttura canonica di algebra di Hopf topologica.

Lemma 10.3. *Sia H un'algebra di Hopf su un anello R, sia $\mathbb{E}$ il nucleo della counità di H, e sia $u \in R$ un elemento non invertibile in R.*

(a) Sia $\widehat{H}$ il completamento $\mathbb{E}$–adico di H.

Esiste un'unica struttura di R–algebra di Hopf topologica su $\widehat{H}$ che estenda per continuità quella di H.

(b) Sia $\widehat{H}_u$ il completamento $u\cdot\mathbb{E}$–adico di H.

Esiste un'unica struttura di R–algebra di Hopf topologica su $\widehat{H}_u$ che estenda per continuità quella di H.

Dimostrazione. È ben noto (è un esercizio elementare in teoria generale delle algebre di Hopf) che $\mathbb{E}$ è un ideale di Hopf di H, cioè $\epsilon(\mathbb{E}) = 0$, $\Delta(\mathbb{E}) \subseteq H \otimes \mathbb{E} + \mathbb{E} \otimes H$, $S(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$; si noti poi che $\mathbb{E}_2 := H \otimes \mathbb{E} + \mathbb{E} \otimes H$ è il nucleo di $\epsilon \otimes \epsilon$, che è la counità di $H \otimes H$; le stesse osservazioni valgono inoltre con $u \cdot \mathbb{E}$ al posto di $\mathbb{E}$. Dato $x \in H$, sia $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ con $x_n \in \mathbb{E}^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; allora $S(x_n) \in \mathbb{E}^n$, perciò $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} S(x_n)$ è un ben definito elemento di $\widehat{H}$, e così $S\colon \widehat{H} \to \widehat{H}$ è definita e continua. Analogamente, $\Delta(x_n) \in \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}^k \otimes \mathbb{E}^{n-k} = {\mathbb{E}_2}^n$, quindi $\Delta(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta(x_n)$ è un ben definito elemento di $\widehat{H} \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{H} := \widehat{H \otimes H}$, il completamento $\mathbb{E}_2$–adico di $H \otimes H$, e così $\Delta\colon \widehat{H} \to \widehat{H} \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{H}$ è definita. Infine $\epsilon(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon(x_n) = \epsilon(x_0)$, così che anche $\epsilon \colon \widehat{H} \to R$ è ben definita e continua (rispetto alla topologia discreta su R). La stessa dimostrazione si applica al caso *(b)* con $u \cdot \mathbb{E}$ al posto di $\mathbb{E}$. $\square$

Dunque i gruppi quantici formali che abbiamo introdotto hanno una struttura canonica di algebra di Hopf topologica; sottolineiamo il fatto che questa è ottenuta per estensione continua dalla struttura di Hopf delle algebre quantiche di funzioni, perciò in effetti la conoscenza di questi gruppi formali quantici si fonda inevitabilmente sulla conoscenza delle suddette algebre quantiche di funzioni: questa è una prima ragione per cui l'approccio che ora presentiamo — basato sui *gruppi quantici formali* — è *intrinsecamente* meno potente e fecondo di quello presentato nei §§7–9 — basato sui *gruppi formali quantici*.

Proposizione 10.4. *$\mathfrak{F}_M^\infty[G]$ e $\mathcal{F}_M^\infty[G]$ sono $k\big[q,q^{-1}\big]$–forme intere di $F_q^{M,\infty}[G]$ come algebre di Hopf topologiche.*

Dimostrazione. Immediata dalle definizioni e dal fatto (cfr. Proposizione 7.12) che $\mathfrak{F}_M[G]$ e $\mathcal{F}_M[G]$ siano $k\big[q,q^{-1}\big]$–forme intere di $F_q^M[G]$. $\square$

I nostri nuovi gruppi quantici formali possono essere descritti esplicitamente tramite una presentazione per generatori e relazioni; incominciamo con l'introdurre nuovi oggetti.

Definizione 10.5. *Sia $\mathbf{H}_M$ l'algebra definita per generatori e relazioni in §8.1, $\mathcal{H}_M$ l'algebra definita in §8.5, e $\mathfrak{H}_M$ l'algebra definita in §8.7. Sia $\epsilon' \colon \mathbf{H}_M \to k(q)$ il morfismo di $k(q)$–algebre definito da*

$$\epsilon'\big(F_i\big) := 0\,, \quad \epsilon'\big(L_\mu\big) := 1\,, \quad \epsilon'\big(E_i\big) := 0\,, \qquad \forall\, i=1,\dots,n,\ \mu \in M$$

e poniamo $\mathbb{E}' := Ker\,(\epsilon')$, $\widetilde{\mathbb{E}}' := \mathbb{E}' \cap \mathcal{H}_M$, $\widehat{\mathbb{E}}' := \mathbb{E}' \cap \mathfrak{H}_M$.

(a) Chiamiamo $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$ il completamento $\mathbb{E}'$–adico di $\mathbf{H}_M$, con la sua struttura naturale di $k(q)$–algebra topologica.

(b) Chiamiamo $\mathcal{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$ il completamento $\widetilde{\mathbb{E}}'$–adico di $\mathcal{H}_M$, con la sua struttura naturale di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra topologica.

(c) Chiamiamo $\mathfrak{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$ il completamento $(q-1)\cdot\widehat{\mathbb{E}}'$–adico di $\mathfrak{H}_M$, con la sua struttura naturale di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra topologica. $\square$

Si noti che $\mathcal{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$ non è altro che la chiusura di $\mathcal{H}_M$ nella topologia $\widetilde{\widetilde{\mathbb{E}}}$–adica di $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, dove $\widetilde{\widetilde{\mathbb{E}}}$ è la chiusura di $\widetilde{\mathbb{E}}'$ in $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$. Analogamente $\mathfrak{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$ non è altro che la chiusura di $\mathfrak{H}_M$ nella topologia $(q-1)\cdot\widehat{\widehat{\mathbb{E}}}$–adica di $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, dove $\widehat{\widehat{\mathbb{E}}}$ è la chiusura di $\widehat{\mathbb{E}}'$ in $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$.

Proposizione 10.6.

(a) Esiste un unico isomorfismo continuo di $k(q)$–algebre topologiche

$$\xi_M^\infty \colon F_q^{M,\infty}[G] \xrightarrow{\ \cong\ } U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$$

che estende i morfismi di $k(q)$–algebre

$$\xi_M \colon F_q^M[G] \longrightarrow \mathbf{H}_M\,, \qquad \xi_M \colon F_q^M[G]\,\big[\psi_{-\rho}^{-1}\big] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbf{H}_M\ .$$

Pertanto il push-out della struttura di algebra di Hopf topologica di $F_q^{M,\infty}[G]$ definisce una analoga struttura di algebra di Hopf topologica su $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, così che ξ_M^∞ è un isomorfismo di $k(q)$–algebre di Hopf topologiche.

(b) Esiste un unico isomorfismo continuo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre topologiche

$$\mathfrak{F}_M^\infty[G] \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$$

che estende i morfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre

$$\xi_M \colon \mathfrak{F}_M[G] \hookrightarrow \mathcal{A}_M \, , \qquad \xi_M \colon \mathfrak{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}_M \; ;$$

tale isomorfismo coincide con la restrizione di ξ_M^∞ (quindi lo indicheremo ancora con ξ_M^∞).

Pertanto il push-out della struttura di algebra di Hopf topologica di $\mathfrak{F}_M^\infty[G]$ definisce una analoga struttura di algebra di Hopf topologica su $\mathcal{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$, così che ξ_M^∞ è un isomorfismo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre di Hopf topologiche.

(c) Esiste un unico isomorfismo continuo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre topologiche

$$\mathcal{F}_M^\infty[G] \xrightarrow{\cong} \mathfrak{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$$

che estende i morfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre

$$\xi_M \colon \mathcal{F}_M[G] \hookrightarrow \mathfrak{A}_M \, , \qquad \xi_M \colon \mathcal{F}_M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\cong} \mathfrak{A}_M \; ;$$

tale isomorfismo coincide con la restrizione di ξ_M^∞ (quindi lo indicheremo ancora con ξ_M^∞).

Pertanto il push-out della struttura di algebra di Hopf topologica di $\mathcal{F}_M^\infty[G]$ definisce una analoga struttura di algebra di Hopf topologica su $\mathcal{U}_M^\infty(\mathfrak{h})$, così che ξ_M^∞ è un isomorfismo di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebre di Hopf topologiche.

Dimostrazione. Consideriamo il caso *(a)*. Dalle definizioni, dal Teorema 8.11, e dalle formule per $\epsilon \colon U_q^M(\mathfrak{h}) \to k(q)$ in §8.9 segue che $\xi_M(\mathbf{E}) \subseteq \mathbb{E}'$, quindi esiste un'unica estensione continua di ξ_M ,

$$\xi_M^\infty \colon F_q^{M,\infty}[G] \hookrightarrow U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h}) \, ,$$

che è un monomorfismo di $k(q)$–algebre topologiche. D'altra parte abbiamo $\xi_M \colon F_q^M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_M$, con $\xi_M(\psi_{-\rho}) = L_{-\rho}$ (cfr. la dimostrazione del Teorema 7.14); quindi — poichè $\xi_M \colon F_q^M[G] \hookrightarrow U_q^M(\mathfrak{h})$ è un monomorfismo *di algebre di Hopf (formali)* — abbiamo

$$\epsilon\,(1-\psi_{-\rho}) = \epsilon\left(\xi_M\big(1-\psi_{-\rho}\big)\right) = \epsilon\,(1-L_{-\rho}) = 0$$

dunque $\big(1-\psi_{-\rho}\big) \in Ker(\epsilon) =: \mathbf{E}$; ma allora

$$\psi_{-\rho}^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\psi_{-\rho})^n \in F_q^{M,\infty}[G]$$

quindi $F_q^M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right]$ si immerge canonicamente in $F_q^{M,\infty}[G]$, dunque $\xi_M\left(F_q^{M,\infty}[G]\right)\supseteq \mathbf{H}_M$ e quindi per continuità $\xi_M\left(F_q^{M,\infty}[G]\right)=U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, così che *(a)* è dimostrata.

Per *(b)* e *(c)* si procede come per *(a)*; dobbiamo soltanto osservare, per il caso *(c)*, che $L_{-\rho}=\prod_{i=1}^n L_{-\mu_i}=\prod_{i=1}^n M_i^{-1}$, quindi $L_\rho=\prod_{i=1}^n M_i$, e

$$M_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-M_i^{-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-q_i)^n\cdot\binom{M_i^{-1};0}{1}^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-d_i)_q^{\,n}\cdot(q-1)^n\cdot\binom{M_i^{-1};0}{1}^n$$

con $\binom{M_i^{-1};0}{1}\in\widehat{\mathbb{E}}'$; poiché $M_i^{-1}:=L_{-\mu_i}=\xi_M\big(\psi_{-\mu_i}\big)$, abbiamo $\xi_M\left(\binom{\psi_{-\mu_i};0}{1}\right)=\binom{M_i^{-1};0}{1}$ e $\binom{\psi_{-\mu_i};0}{1}\in\mathcal{E}$, essendo $\binom{\psi_{-\mu_i};0}{1}:=\frac{\psi_{-\mu_i}-1}{q_i-1}$; ma allora

$$\psi_{-\rho}^{-1}=\prod_{i=1}^n\psi_{-\mu_i}^{-1}=\prod_{i=1}^n\sum_{n=0}^{+\infty}(-d_i)_q^{\,n}\cdot(q-1)^n\cdot\binom{\psi_{-\mu_i};0}{1}^n\in\mathcal{F}_M^\infty[G]$$

dopo di che si può proseguire e concludere come nel caso di *(a)*. $\square$

Passiamo ora a studiare le specializzazioni delle algebre in esame.

Teorema 10.7. *L'algebra di Hopf topologica $\mathfrak{F}_P^\infty[G]$ si specializza a $F^\infty[G]$ come algebra di Hopf Poisson topologica per $q\to 1$, cioè*

$$\mathfrak{F}_1^{P,\infty}[G]:=\mathfrak{F}_P^\infty[G]\Big/(q-1)\,\mathfrak{F}_P^\infty[G]\;\cong\;F^\infty[G]$$

come algebre di Hopf Poisson topologiche. Analogamente si ha

$$\mathcal{U}_1^{P,\infty}(\mathfrak{h}):=\mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h})\Big/(q-1)\,\mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h})\;\cong\;F^\infty[G]$$

come algebre di Hopf Poisson topologiche.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 10.6*(b)* la seconda parte dell'enunciato è diretta conseguenza della prima.

Abbiamo ricordato in §10.1 che $F^\infty[G]$ è il completamento $\mathfrak{e}$–adico di $F[G]$. D'altra parte per definizione $\mathfrak{F}_P^\infty[G]$ è il completamento $\mathfrak{E}$-adico di $\mathfrak{F}_P[G]$; poiché poi (cfr. (6.6)) $\mathfrak{F}_P[G]\xrightarrow{q\to 1}F[G]$ come algebra di Hopf Poisson, abbiamo che $\mathfrak{F}_P^\infty[G]$ si specializza per $q\to 1$ al completamento $\mathfrak{E}_1$–adico di $F[G]$, con $\mathfrak{E}_1:=\mathfrak{E}\Big|_{q=1}$; ma $\mathfrak{E}_1=\mathfrak{e}$, donde segue la tesi. $\square$

Osservazione 10.8. Dunque il teorema precedente ci fornisce una nuova quantizzazione del gruppo formale $F^\infty[G]$; vogliamo ora confrontarla con quella fornita in §9. L'algebra di Hopf topologica $\mathfrak{F}_P^\infty[G]=\mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h})$ per $q\to 1$ si specializza a (e quindi è quantizzazione di) $F^\infty[G]$, quest'ultima essendo definita come l'algebra di Hopf topologica ottenuta per completamento $\mathfrak{e}$–adico di $F[G]$; d'altra parte l'algebra di Hopf formale $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})=\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^*$

per $q \to 1$ si specializza a (e quindi è quantizzazione di) $U(\mathfrak{g})^*$, quest'ultima essendo l'algebra di Hopf formale duale lineare di $U(\mathfrak{g})$; ma $F^\infty[G]$ e $U(\mathfrak{g})^*$ sono canonicamente isomorfi (cfr. [On], Part I, Ch. 3, §2), quindi $\mathfrak{F}_P^\infty[G] = \mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h})$ e $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) = \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^*$ si specializzano allo stesso oggetto, in particolare

$$\mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h})\Big|_{q=1} = \mathfrak{F}_P^\infty[G]\Big|_{q=1} \cong \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^*\Big|_{q=1} = \mathcal{U}_P(\mathfrak{h})\Big|_{q=1} .$$

Vogliamo ora provare che questo è un "fatto singolare", nel senso che abbiamo un'identità che *vale per un "valore specifico" del parametro* ($q = 1$) mentre *non vale per "valori generici"*, cioè

$$\mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_P^\infty[G] \ncong \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^* = \mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) .$$

Teorema 10.9. *Non esiste nessun isomorfismo di $k(q)$–algebre di Hopf topologiche*[7] *tra $U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h}) = F_q^{M,\infty}[G]$ e $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* = U_q^M(\mathfrak{h})$ la cui restrizione a $F_q^M[G]$ (immersa naturalmente nelle suddette algebre) sia l'identità.*

Di conseguenza, non esiste nessun isomorfismo di $k\left[q,q^{-1}\right]$–algebre di Hopf topologiche tra $\mathcal{U}_M^\infty(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_M^\infty[G]$ e $\mathfrak{U}_{M'}(\mathfrak{g})^* = \mathcal{U}_M(\mathfrak{h})$, risp. tra $\mathfrak{U}_M^\infty(\mathfrak{h}) = \mathcal{F}_M^\infty[G]$ e $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{h})$, la cui restrizione a $\mathfrak{F}_M[G]$, risp. a $\mathcal{F}_M[G]$, (immersa naturalmente nelle rispettive algebre) sia l'identità.

Dimostrazione. La seconda parte dell'enunciato segue subito dalla prima perché le $k\left[q,q^{-1}\right]$–algebre topologiche in gioco sono forme intere delle rispettive $k(q)$–algebre topologiche.

Supponiamo ora che esista un isomorfismo $\Theta\colon U_q^{M,\infty}(\mathfrak{h}) = F_q^{M,\infty}[G] \xrightarrow{\cong} U_q^{M'}(\mathfrak{g})^* = U_q^M(\mathfrak{h})$ del tipo suddetto; in particolare $\Theta\left(L_{-\mu}\right) = L_{-\mu}$ per ogni $\mu \in M$, perché $L_{-\mu} \in F_q^M[G]$ e $\Theta\Big|_{F_q^M[G]} = id_{F_q^M[G]}$. Sia ora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq k(q)$ una successione qualunque in $k(q)$; poiché $\left(L_{-\mu_i}-1\right) = \left(M_i^{-1}-1\right) \in \mathbb{E}'$, abbiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(M_i^{-1}-1\right)^n \in F_q^{M,\infty}[G]$; per continuità abbiamo allora

$$\Theta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(M_i^{-1}-1\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta\left(a_n\left(M_i^{-1}-1\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(M_i^{-1}-1\right)^n ;$$

quest'ultimo elemento dovrebbe appartenere a $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*$, cioè essere un funzionale lineare su $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$: ma su $\Lambda_i^{-1} := L_{-\nu_i}$ (con $\nu_i \in M'$ tale che $(\mu_i|\nu_i) = 1$, così che $\left\langle M_i^{-1}, \Lambda_i^{-1}\right\rangle_{\overline{\pi}} = \left\langle M_i, \Lambda_i\right\rangle_{\overline{\pi}} = q_i = q^{d_i}$) il suo valore sarebbe

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(M_i^{-1}-1\right)^n, \Lambda_i^{-1} \right\rangle_{\overline{\pi}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left\langle \left(M_i^{-1}-1\right)^n, \Lambda_i^{-1}\right\rangle_{\overline{\pi}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (q_i-1)^n$$

e per sucessioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *arbitrarie* tale valore *non* è un elemento di $k(q)$; quindi $\Theta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(M_i^{-1}-1\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(M_i^{-1}-1\right)^n$ *non* è un funzionale lineare su $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$. L'assurdo dimostra la tesi. □

[7] Ricordiamo che con *morfismo di algebre di Hopf topologiche* si intende un morfismo di algebre di Hopf *continuo* rispetto alle topologie coinvolte.

Dunque il Teorema 10.7 ci dice che $\mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_P^\infty[G]$ è una *nuova* quantizzazione di $F^\infty[G]$, *diversa* — in virtù del Teorema 10.9 — da $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h}) = \mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})^*$; analogamente ora dimostriamo che $\mathfrak{U}_Q^\infty(\mathfrak{h}) = \mathcal{F}_Q^\infty[G]$ è una *nuova* quantizzazione di $U(\mathfrak{h})$, *diversa* — per il Teorema 10.9 — da $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$.

Teorema 10.10. *L'algebra di Hopf topologica $\mathcal{F}_Q^\infty[G]$ si specializza a $U(\mathfrak{h})$ come coalgebra di Hopf Poisson per $q \to 1$, cioè*

$$\mathcal{F}_1^{Q,\infty}[G] := \mathcal{F}_P^\infty[G] \Big/ (q-1)\, \mathcal{F}_P^\infty[G] \cong U(\mathfrak{h})$$

come coalgebre di Hopf Poisson. Analogamente si ha

$$\mathfrak{U}_1^{Q,\infty}(\mathfrak{h}) := \mathfrak{U}_Q^\infty(\mathfrak{h}) \Big/ (q-1)\, \mathfrak{U}_Q^\infty(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})$$

come coalgebre di Hopf Poisson.

Dimostrazione. La seconda parte dell'enunciato è diretta conseguenza della prima, grazie alla Proposizione 10.6*(c)*.

Dalla definizione di $\mathfrak{F}_Q^\infty[G]$ segue subito che $\mathcal{F}_1^{Q,\infty}[G] = \mathcal{F}_1^Q[G]$ come coalgebre di Hopf Poisson; ma per il Teorema 9.3 abbiamo $\mathcal{F}_1^Q[G] \cong U(\mathfrak{h})$ (come coalgebre di Hopf Poisson), da cui $\mathcal{F}_1^{Q,\infty}[G] \cong U(\mathfrak{h})$, cioè la tesi. $\square$

Nota: osserviamo che, sia per il Teorema 10.7 che per il Teorema 10.10, non abbiamo potuto sviluppare una dimostrazione diretta, ma abbiamo dovuto basarci su risultati relativi alla specializzazione delle rispettive algebre di funzioni quantiche; in particolare per il secondo teorema abbiamo dovuto rifarci al Teorema 9.3 — dimostrato invece per via diretta — che è frutto dello studio di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$; questa è una seconda ragione per cui lo studio dei gruppi quantici formali è meno potente e fecondo di quello dei gruppi formali quantici.

Una terza ragione viene dallo studio dell'esistenza di morfismi di Frobenius quantici: infatti siamo ancora in grado di costruirne uno, e precisamente (cfr. Teorema 10.11 più avanti) di costruire l'analogo del morfismo (9.8), ma solo ottenendolo per estensione continua dal rispettivo morfismo per l'algebra quantica di funzioni corrispondente, precisamente (6.7).

Sia ε una radice primitiva ℓ–esima dell'unità in k (facciamo le ipotesi dell'inizio di §5.3), con ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$; poniamo

$$\mathfrak{F}_\varepsilon^{P,\infty}[G] := \mathfrak{F}_P^\infty[G] \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathfrak{F}_P^\infty[G] \cong \mathfrak{F}_P^\infty[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$
$$\mathcal{U}_\varepsilon^{P,\infty}(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h}) \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h}) \cong \mathcal{U}_P^\infty(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$-algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$); chiaramente abbiamo

$$\mathfrak{F}_\varepsilon^{P,\infty}[G] = \mathcal{U}_\varepsilon^{P,\infty}(\mathfrak{h}).$$

Teorema 10.11. *Esiste un unico monomorfismo di algebre di Hopf topologiche*

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}^{\infty} \colon F^{\infty}[G] \cong \mathcal{U}_1^{P,\infty}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_1^{P,\infty}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon}^{P,\infty}[G] = \mathcal{U}_{\varepsilon}^{P,\infty}(\mathfrak{h}) \tag{10.1}$$

che estende il monomorfismo di algebre di Hopf (6.7) $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}} \colon F[G] \cong \mathfrak{F}_1^P[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon}^P[G]$, *definito da*

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}}^{\infty} \colon \quad \overline{F}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{F}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon}, \quad L_\lambda\Big|_{q=1} \mapsto L_\lambda^{\ell}\Big|_{q=\varepsilon}, \quad \overline{E}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{E}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon} \tag{10.2}$$

per ogni $\alpha \in R^+$ *; la sua immagine* F_0^{∞} *è la sottoalgebra topologica di* $\mathcal{U}_{\varepsilon}^{P,\infty}(\mathfrak{h})$ *generata topologicamente da* $\left\{ \overline{F}_\alpha^{\,\ell}, L_\lambda^{\ell}, \overline{E}_\alpha^{\,\ell} \,\middle|\, \alpha \in R^+, \lambda \in P \right\}$, *che è una sottoalgebra di Hopf topologica contenuta nel centro di* $\mathfrak{F}_{\varepsilon}^{P,\infty}[G]$.

Dimostrazione. Poiché $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}} \colon F[G] \cong \mathfrak{F}_1^P[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon}^P[G]$ è un monomorfismo *di algebre di Hopf*, in particolare $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}\left(\mathfrak{E}\big|_{q=1}\right) = \mathfrak{E}\big|_{q=\varepsilon}$; ma allora $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}$ si estende per continuità, in modo canonico e univoco, ad un monomorfismo (di algebre di Hopf topologiche) $\mathfrak{F}_1^{P,\infty}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon}^{P,\infty}[G]$ che chiamiamo $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}^{\infty}$.

Ora, entrambi $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}^{\infty}$ e $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$ sono estensioni continue di $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}$, dunque coincidono su $\mathfrak{F}_1^P[G]$; in particolare allora $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}(\psi_{-\rho}) = \mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}(\psi_{-\rho})$, e quindi $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}\left(\psi_{-\rho}^{-1}\right) = \mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}\left(\psi_{-\rho}^{-1}\right)$; pertanto $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}^{\infty}$ e $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}}$ coincidono su $\mathfrak{F}_1^P[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] = \mathcal{H}_P$, così da (9.9) ricaviamo (10.2): tali formule determinano univocamente $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}^{\infty}$ perché gli elementi $\overline{F}_\alpha\Big|_{q=1}, L_\lambda\Big|_{q=1}, \overline{E}_\alpha\Big|_{q=1}$ sono generatori (topologici) di $\mathcal{U}_1^{P,\infty}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_1^{P,\infty}[G]$. A questo punto è anche chiaro che $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}}^{\infty}\left(\mathfrak{F}_1^{P,\infty}[G]\right) = F_0^{\infty}$. Il fatto poi che F_0^{∞} sia contenuta nel centro di $\mathcal{U}_{\varepsilon}^{P,\infty}(\mathfrak{h})$ discende direttamente dalle regole di commutazione (8.1) e dall'analogo risultato espresso dal Teorema 5.5*(b)*. $\square$

Appendice: il caso $G = SL(2,k)$

A.1 Programma. La presente appendice è dedicata al caso particolarmente semplice di $G = SL(2,k)$: svilupperemo con calcoli diretti — seguendo il quadro generale descritto nel §7 — alcune formule esplicite e poi metteremo in relazione questo approccio con la ben nota tecnica di studiare $F_q^P[SL(2,k)]$ tramite una descrizione per generatori e relazioni; sarà allora chiaro come un tale confronto si possa fare più in generale anche per il gruppo $G = SL(n+1,k)$.

A.2 Formule di commutazione. Dal §4.3 ricordiamo che $D_q^P(\mathfrak{g}) = U_{\geq}^P \otimes U_{\leq}^Q$ (risp. $D_q^Q(\mathfrak{g}) = U_{\geq}^Q \otimes U_{\leq}^Q$) è generato da $E \otimes 1$, $L \otimes 1$ (risp. $K \otimes 1$), $1 \otimes K$, $1 \otimes F$, con relazioni (4.2) (dove $E = E \otimes 1$, e così via). Usando queste e le relazioni (4.3) si trovano le seguenti "leggi di raddrizzamento" ("straightening laws") per il prodotto di monomi della base PBW (4.5) di $D_q^P(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} &\left(\overline{E}^r L^\ell \otimes K^k \overline{F}^s\right) \cdot \left(\overline{E}^{r'} L^{\ell'} \otimes K^{k'} \overline{F}^{s'}\right) = \\ &= \sum_{t \geq 0}^{t \leq r,s} q^{(\ell+2k)(r'-t)+(\ell'+2k')(s-t)} \cdot \begin{bmatrix} r' \\ t \end{bmatrix}_q \cdot \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}_q \cdot [t]_q!^2 \cdot \left(q - q^{-1}\right)^{2t} \cdot \\ &\quad \cdot \overline{E}^{r+r'-t} L^{\ell+\ell'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1} {}^{\otimes}_{\otimes};\, 2t - r' - s \\ t \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} \cdot \overline{F}^{s+s'-t} \end{aligned} \tag{A.1}$$

e per il prodotto di monomi della base PBW (4.4) di $D_q^Q(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} &\left(E^{(r)} K^h \otimes K^k F^{(s)}\right) \cdot \left(E^{(r')} K^{h'} \otimes K^{k'} F^{(s')}\right) = \\ &= \sum_{t \geq 0}^{t \leq r,s} q^{2((h+k)(r'-t)+(h'+k')(s-t))} \cdot \begin{bmatrix} r + r' - t \\ r \end{bmatrix}_q \cdot \begin{bmatrix} s + s' - t \\ s' \end{bmatrix}_q \cdot \\ &\quad \cdot E^{(r+r'-t)} K^{h+h'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1} {}^{\otimes}_{\otimes};\, 2t - r' - s \\ t \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} F^{(s+s'-t)} \,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3 Calcolo di ϵ, Δ, Δ. Seguendo il §7, identifichiamo ora la $k(q)$–algebra $U_{\leq}^Q \otimes U_{\geq}^P$ (risp. $U_{\leq}^P \otimes U_{\geq}^P$) ad una sottoalgebra di $D_q^P(\mathfrak{g})^*$ (risp. $D_q^Q(\mathfrak{g})^*$); descriveremo con formule esplicite la struttura di algebra di Hopf formale di $U_q^P(\mathfrak{g})^*$, risp. $U_q^Q(\mathfrak{g})^*$, immerso in $D_q^P(\mathfrak{g})^*$ via j_Q, risp. in $D_q^Q(\mathfrak{g})^*$ via j_P.

Sappiamo già che

$$\begin{aligned} &\epsilon\,(F \otimes 1) = 0\,, \quad \epsilon\left(K^{\pm 1} \otimes 1\right) = 1\,, \quad \epsilon\left(1 \otimes L^{\pm 1}\right) = 1\,, \quad \epsilon\,(1 \otimes E) = 0\,, \\ \text{risp.} \quad &\epsilon\,(F \otimes 1) = 0\,, \quad \epsilon\left(L^{\pm 1} \otimes 1\right) = 1\,, \quad \epsilon\left(1 \otimes L^{\pm 1}\right) = 1\,, \quad \epsilon\,(1 \otimes E) = 0\,, \end{aligned}$$

così che la counità $\epsilon \colon D_q^P(\mathfrak{g})^* \rightarrow k(q)$, risp. $\epsilon \colon D_q^Q(\mathfrak{g})^* \rightarrow k(q)$, è completamente determinata; in particolare lo stesso vale per $j_Q\left(U_q^P(\mathfrak{g})^*\right)$, risp. $j_Q\left(U_q^P(\mathfrak{g})^*\right)$, con

$$\epsilon\left(K^{\mp 1} \otimes K^{\pm 1}\right) = 1\,, \quad \text{risp. } \epsilon\left(L^{\mp 1} \otimes L^{\pm 1}\right) = 1$$

Per la comoltiplicazione, definita da $\Delta := m^* \colon D_q^P(\mathfrak{g})^* \longrightarrow D_q^P(\mathfrak{g})^* \,\widehat{\otimes}\, D_q^P(\mathfrak{g})^*$, risp. $\Delta := m^* \colon D_q^Q(\mathfrak{g})^* \longrightarrow D_q^Q(\mathfrak{g})^* \,\widehat{\otimes}\, D_q^Q(\mathfrak{g})^*$), facciamo un calcolo diretto. Iniziamo con $\overline{F} \otimes 1 \in D_q^Q(\mathfrak{g})^*$: si ha

$$\begin{aligned} &\left\langle \Delta\left(\overline{F} \otimes 1\right), \left(E^{(r)} K^h \otimes K^k F^{(s)}\right) \otimes \left(E^{(r')} K^{h'} \otimes K^{k'} F^{(s')}\right) \right\rangle = \\ &\qquad = \left\langle \overline{F} \otimes 1, \left(E^{(r)} K^h \otimes K^k F^{(s)}\right) \cdot \left(E^{(r')} K^{h'} \otimes K^{k'} F^{(s')}\right) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$= \sum_{t\geq 0}^{t\leq r',s} q^{2((h+k)(r'-t)+(h'+k')(s-t))} \cdot \begin{bmatrix} r+r'-t \\ r \end{bmatrix}_q \cdot \begin{bmatrix} s+s'-t \\ s' \end{bmatrix}_q \cdot$$

$$\cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(r+r'-t)} K^{h+h'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1}{}^{\otimes}_{\otimes}; \, 2t-r'-s \\ t \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} F^{(s+s'-t)} \right\rangle =$$

$$= \delta_{s',0} \cdot \delta_{min\{s,r'\},s} \cdot q^{2(h+k)(r'-s)} \cdot \begin{bmatrix} r+r'-s \\ r \end{bmatrix}_q \cdot$$

$$\cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(r+r'-s)} K^{h+h'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1}{}^{\otimes}_{\otimes}; \, s-r' \\ s \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} \right\rangle =$$

$$= \delta_{s',0} \cdot \delta_{r+r'-s,1} \cdot q^{2(h+k)(r'-s)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}_q \cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(1)} K^{h+h'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1}{}^{\otimes}_{\otimes}; \, s-r' \\ s \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} \right\rangle =$$

$$= \delta_{s',0} \cdot \left(\delta_{r,0} \cdot \delta_{r',s+1} \cdot q^{2(h+k)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q \cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(1)} K^{h+h'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1}{}^{\otimes}_{\otimes}; \, -1 \\ s \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} \right\rangle + \right.$$

$$\left. + \delta_{r,1} \cdot \delta_{r',s} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(1)} K^{h+h'} \cdot \begin{bmatrix} K^{-1}{}^{\otimes}_{\otimes}; \, 0 \\ s \end{bmatrix}_q \cdot K^{k+k'} \right\rangle \right) =$$

$$= \delta_{s',0} \cdot \left(\delta_{r,0} \cdot \delta_{r',s+1} \cdot q^{2(h+k)} \cdot (-1) \cdot \prod_{t=1}^{s} \frac{q^{-1-t+1} \langle 1 \otimes 1, 1 \otimes K^{-1} \rangle - q^{1+t-1} \langle 1 \otimes 1, K \otimes 1 \rangle}{q^t - q^{-t}} + \right.$$

$$\left. + \delta_{r,1} \cdot \delta_{r',s} \cdot (-1) \cdot \prod_{t=1}^{s} \frac{q^{-t+1} \langle 1 \otimes 1, 1 \otimes K^{-1} \rangle - q^{t-1} \langle 1 \otimes 1, K \otimes 1 \rangle}{q^t - q^{-t}} \right) =$$

$$= \delta_{s',0} \cdot \left(\delta_{r,0} \cdot \delta_{r',s+1} \cdot q^{2(h+k)} \cdot (-1)^{s+1} + \delta_{r,1} \cdot \delta_{r',s} \cdot (-1) \cdot \delta_{s,0} \right) =$$

$$= \delta_{s',0} \cdot (-1)^{s+1} \cdot \left(\delta_{r,0} \cdot \delta_{r',s+1} \cdot q^{2(h+k)} + \delta_{r,1} \cdot \delta_{r',s} \cdot \delta_{s,0} \right)$$

cioè abbiamo

$$\begin{aligned} &\left\langle \Delta\left(\overline{F} \otimes 1\right), \left(E^{(r)} K^h \otimes K^k F^{(s)}\right) \otimes \left(E^{(r')} K^{h'} \otimes K^{k'} F^{(s')}\right) \right\rangle = \\ &\qquad = \delta_{s',0} \cdot (-1)^{s+1} \cdot \left(\delta_{r,0} \cdot \delta_{r',s+1} \cdot q^{2(h+k)} + \delta_{r,1} \cdot \delta_{r',s} \cdot \delta_{s,0}\right) ; \end{aligned} \tag{A.3}$$

se ora consideriamo l'elemento

$$\left(\overline{F} \otimes 1\right) \otimes (1 \otimes 1) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n} \cdot \left(K^{-1} \otimes K \overline{E}^n\right) \otimes \left(\overline{F}^{n+1} \otimes 1\right) \in D_q^{Q*} \,\widehat{\otimes}\, D_q^{Q*}$$

possiamo verificare con un banale calcolo diretto che quando lo si valuta su tensori $\left(E^{(r)}K^h \otimes K^k F^{(s)}\right) \otimes \left(E^{(r')}K^{h'} \otimes K^{k'} F^{(s')}\right)$ di elementi PBW di $D_q^Q(\mathfrak{g})$ esso assume gli stessi valori di $\Delta\left(\overline{F} \otimes 1\right)$ (dati da (A.3)); pertanto si conclude che

$$\Delta\left(\overline{F} \otimes 1\right) = \left(\overline{F} \otimes 1\right) \otimes (1 \otimes 1) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n} \cdot \left(K^{-1} \otimes K\overline{E}^n\right) \otimes \left(\overline{F}^{n+1} \otimes 1\right) \ .$$

Esattamente con la stessa tecnica otteniamo formule

$$\Delta\left(L^{-1} \otimes L\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(L^{-1} \otimes L\overline{E}^n\right) \otimes \left(\overline{F}^n L^{-1} \otimes L\right)$$

$$\Delta\left(L \otimes L^{-1}\right) = \left(L \otimes L^{-1}\right) \otimes \left(L \otimes L^{-1}\right) - \left(L \otimes L^{-1}\overline{E}\right) \otimes \left(\overline{F}L \otimes L^{-1}\right)$$

$$\Delta\left(1 \otimes \overline{E}\right) = (1 \otimes 1) \otimes \left(1 \otimes \overline{E}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{+n} \cdot \left(1 \otimes \overline{E}^{n+1}\right) \otimes \left(\overline{F}^n K^{-1} \otimes K\right) \ .$$

Lo stesso calcolo può esser fatto per $D_q^P(\mathfrak{g})^*$ — usando la formula di raddrizzamento (A.2) invece della (A.1) — oppure possiamo usare l'immersione naturale $D_q^P(\mathfrak{g})^* \hookrightarrow D_q^{Q*}$ (duale di $D_q^Q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow D_q^P(\mathfrak{g})$); in ogni caso otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta\left(F^{(1)} \otimes 1\right) &= \left(F^{(1)} \otimes 1\right) \otimes (1 \otimes 1) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n} \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(q^s - q^{-s}\right)^2 \cdot [n+1]_q \cdot \left(K^{-1} \otimes KE^{(n)}\right) \otimes \left(F^{(n+1)} \otimes 1\right)\end{aligned}$$

$$\Delta\left(K^{-1} \otimes K\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} \left(q^s - q^{-s}\right)^2 \cdot \left(K^{-1} \otimes KE^{(n)}\right) \otimes \left(F^{(n)}K^{-1} \otimes K\right)$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(K \otimes K^{-1}\right) &= \left(K \otimes K^{-1}\right) \otimes \left(K \otimes K^{-1}\right) - \\ &\quad -\left(q - q^{-1}\right)^2 \cdot [2]_q \cdot \left(K \otimes K^{-1}E^{(1)}\right) \otimes \left(F^{(1)}K \otimes K^{-1}\right) + \\ &\quad + \left(q^2 - q^{-2}\right)^2 \cdot \left(q - q^{-1}\right)^2 \cdot \left(K \otimes K^{-1}E^{(2)}\right) \otimes \left(F^{(2)}K \otimes K^{-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(1 \otimes E^{(1)}\right) &= (1 \otimes 1) \otimes \left(1 \otimes E^{(1)}\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} q^{+n} \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(q^s - q^{-s}\right)^2 \cdot [n+1]_q \cdot \left(1 \otimes E^{(n+1)}\right) \otimes \left(F^{(n)}K^{-1} \otimes K\right) \ ;\end{aligned}$$

in particolare osserviamo che le formule trovate sono proprio del tipo della (7.24).

Analogamente procediamo per l'antipodo: per $D_q^P(\mathfrak{g})^*$, risp. $D_q^Q(\mathfrak{g})^*$, esso è definito come $S^* \colon D_q^P(\mathfrak{g})^* \to D_q^P(\mathfrak{g})^*$, risp. $S^* \colon D_q^Q(\mathfrak{g})^* \to D_q^Q(\mathfrak{g})^*$; facciamo un calcolo diretto, cominciando con $\overline{F} \otimes 1 \in D_q^Q(\mathfrak{g})^*$: si ha

$$\left\langle S\left(\overline{F} \otimes 1\right), \left(E^{(r)}K^h \otimes K^k F^{(s)}\right)\right\rangle = \left\langle \overline{F} \otimes 1, S\left(E^{(r)}K^h \otimes K^k F^{(s)}\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \overline{F} \otimes 1, S(1 \otimes F)^{(s)} \cdot S(1 \otimes K)^{k} \cdot S(K \otimes 1)^{h} \cdot S(E \otimes 1)^{(r)} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \overline{F} \otimes 1, \left(-1 \otimes F^{(s)} K\right) \cdot \left(1 \otimes K^{-k}\right) \cdot \left(K^{-h} \otimes 1\right) \cdot \left(-K^{-1} E^{(r)} \otimes 1\right) \right\rangle =$$

$$= (-1)^{r+s} \cdot q^{-s(s-1)-r(r+1)-2rh-2rk+2rs} \cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, \left(1 \otimes F^{(s)}\right) \cdot \left(E^{(r)} \otimes 1\right) \cdot \left(K^{-r-h} \otimes K^{s-k}\right) \right\rangle =$$

$$= (-1)^{r+s} \cdot q^{-s(s-1)-r(r+1)-2rh-2rk+2rs} \cdot$$
$$\cdot \sum_{t \geq 0}^{t \leq r,s} q^{2((r-h)+(s-k))(s-t)} \cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(r-t)} \cdot K^{r-h} \begin{bmatrix} K^{-1 \otimes}_{\ \ \otimes}; \, 2t-r-s \\ t \end{bmatrix} K^{s-k} \cdot F^{(s-t)} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{r+s} \cdot \delta_{r,s+1} \cdot q^{-2(1+h(s+1)+k(s+1))} \cdot \left\langle \overline{F} \otimes 1, E^{(1)} K^{r-h} \begin{bmatrix} K^{-1 \otimes}_{\ \ \otimes}; \, -1 \\ s \end{bmatrix} K^{s-k} \right\rangle =$$

$$= -\delta_{r,s+1} \cdot q^{-2(1+h(s+1)+k(s+1))} \cdot (-1) \cdot \prod_{t=1}^{s} \frac{q^{-1-t+1} \langle 1 \otimes 1, 1 \otimes K^{-1} \rangle - q^{+1+t-1} \langle 1 \otimes 1, K \otimes 1 \rangle}{q^{t} - q^{-t}} =$$

$$= (-1) \cdot \delta_{r,s+1} \cdot q^{-2(1+h(s+1)+k(s+1))} \cdot (-1) \cdot (-1)^{s} =$$
$$= \delta_{r,s+1} \cdot q^{-2(1+h(s+1)+k(s+1))} \cdot (-1)^{s}$$

cioè abbiamo

$$\left\langle S\left(\overline{F} \otimes 1\right), E^{(r)} K^{h} \otimes K^{k} F^{(s)} \right\rangle = \delta_{r,s+1} \cdot q^{-2(1+h(s+1)+k(s+1))} \cdot (-1)^{s} \, ; \qquad (A.4)$$

se ora consideriamo l'elemento

$$-q^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F}^{n+1} L^{2(n+1)} \otimes L^{-2(n+1)} \overline{E}^{n} \in D_q^{Q}(\mathfrak{g})^{*}$$

possiamo verificare con un banale calcolo diretto che quando lo si valuta su elementi PBW $E^{(r)} K^{h} \otimes K^{k} F^{(s)}$ di $D_q^{Q}(\mathfrak{g})$ esso assume gli stessi valori di $S\left(\overline{F} \otimes 1\right)$ (dati da (A.4)); pertanto si conclude che

$$S\left(\overline{F} \otimes 1\right) = -q^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F}^{n+1} L^{2(n+1)} \otimes L^{-2(n+1)} \overline{E}^{n} \, .$$

Esattamente con la stessa tecnica otteniamo formule

$$S\left(L^{-1} \otimes L\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F}^{n} L^{2n+1} \otimes L^{-2n-1} \overline{E}^{n}$$

$$S\left(L \otimes L^{-1}\right) = L^{-1} \otimes L - \overline{F} L \otimes L^{-1} \overline{E}$$

$$S\left(1 \otimes \overline{E}\right) = -q^{+2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F}^{n} L^{2(n+1)} \otimes L^{-2(n+1)} \overline{E}^{n+1} .$$

Possiamo fare lo stesso calcolo per $D_q^{P}(\mathfrak{g})^*$ — usando la formula di raddrizzamento (A.2) — oppure possiamo usare l'immersione naturale $D_q^{P}(\mathfrak{g})^* \hookrightarrow D_q^{Q\,*}$ (duale di $D_q^{Q}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow D_q^{P}(\mathfrak{g})$), così da ottenere le formule

$$S\left(F^{(1)} \otimes 1\right) = -q^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} \left(q^{s} - q^{-s}\right)^{2} \cdot [n+1]_q \cdot F^{(n+1)} K^{n+1} \otimes K^{-(n+1)} E^{(n)}$$

$$S\left(K^{-1} \otimes K\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} \left(q^{s} - q^{-s}\right)^{2} \cdot F^{(n)} K^{2n+1} \otimes K^{-2n-1} E^{(n)}$$

$$S\left(K \otimes K^{-1}\right) = K^{-1} \otimes K - [2]_q \cdot \left(q - q^{-1}\right)^{2} \cdot F^{(1)} \otimes E^{(1)} + [2]_q^{\,2} \cdot \left(q - q^{-1}\right)^{4} \cdot F^{(2)} K \otimes K^{-1} E^{(2)}$$

$$S\left(1 \otimes E^{(1)}\right) = -q^{+2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} \left(q^{s} - q^{-s}\right)^{2} \cdot [n+1]_q \cdot F^{(n)} K^{n+1} \otimes K^{-(n+1)} E^{(n+1)} ;$$

in particolare osserviamo che le formule trovate sono proprio del tipo della (7.21).

Infine annotiamo che — grazie al Teorema 8.2 — le sostituzioni

$$\begin{aligned} & F \otimes 1 \mapsto F , \quad L^{\mp 1} \otimes L^{\pm 1} \mapsto L^{\pm 1} , \quad 1 \otimes E \mapsto E \\ \text{risp.}\ \ & F \otimes 1 \mapsto F , \quad K^{\mp 1} \otimes K^{\pm 1} \mapsto K^{\pm 1} , \quad 1 \otimes E \mapsto E \end{aligned}$$

trasformano le precedenti formule che esprimono Δ, ϵ, e S per $D_q^{Q\,*}$ e per $D_q^{P\,*}$ in anloghe formule esprimenti Δ, ϵ, e S per $U_q^{P}(\mathfrak{h})$ e per $U_q^{Q}(\mathfrak{h})$ rispettivamente; in particolare osserviamo che la forma esplicita di tali formule dimostra direttamente che Ω_P, risp. Ω_Q, (cfr. Lemma 8.4) è una sottoalgebra di Hopf formale di $U_q^{P}(\mathfrak{h})$, risp. $U_q^{Q}(\mathfrak{h})$.

A.4 Presentazione delle algebre quantiche di funzioni. Sia $U_q^{Q}(\mathfrak{g}) := U_q^{Q}(\mathfrak{sl}(2))$; consideriamo lo spazio vettoriale 2–dimensionale V su $k(q)$ con base $\{v_+, v_-\}$: la rappresentazione standard

$$U_q^{Q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow End_{k(q)}(V)$$

è definita da

$$E \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad K^{\pm 1} \mapsto \begin{pmatrix} q^{\pm 1} & 0 \\ 0 & q^{\mp 1} \end{pmatrix} , \qquad F \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove le matrici sono relative alla base ordinata $\{v_+, v_-\}$; indicata con $\{\phi_+, \phi_-\}$ la base di V^* duale di $\{v_+, v_-\}$, denotiamo i coefficienti matriciali di questa rappresentazione con

$$\begin{aligned} a &:= \langle \phi_+, -.v_+ \rangle \quad \left(x \mapsto \langle \phi_+, x.v_+ \rangle\right) , \qquad & b &:= \langle \phi_+, -.v_- \rangle \quad \left(x \mapsto \langle \phi_+, x.v_- \rangle\right) \\ c &:= \langle \phi_-, -.v_+ \rangle \quad \left(x \mapsto \langle \phi_-, x.v_+ \rangle\right) , \qquad & d &:= \langle \phi_-, -.v_- \rangle \quad \left(x \mapsto \langle \phi_-, x.v_- \rangle\right) . \end{aligned}$$

È ben noto (cfr. per esempio [A-P-W], Appendix) che l'algebra quantica delle funzioni $F_q^P[G] = F_q^P[SL(2,k)]$ è generata dai coefficienti matriciali della rappresentazione standard, cioè a, b, c, d (questo è vero più in generale per $G = SL(n+1,k)$). Più precisamente $F_q^P[G]$ ha la seguente presentazione: essa è la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori a, b, c, d e relazioni

$$\begin{gathered} ab = qba\ , \qquad cd = qdc\ , \qquad ac = qca\ , \qquad bd = qdb \\ bc = cb\ , \qquad ad - da = \left(q - q^{-1}\right) bc\ , \qquad ad - qbc = 1\ ; \end{gathered}$$

la sua struttura di algebra di Hopf è definita dalle formule

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c\ , & \epsilon(a) &= 1\ , & S(a) &= d \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes d\ , & \epsilon(b) &= 0\ , & S(b) &= -q^{-1} b \\ \Delta(c) &= c \otimes a + d \otimes c\ , & \epsilon(c) &= 0\ , & S(c) &= -q^{+1} c \\ \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d\ , & \epsilon(d) &= 1\ , & S(d) &= a\ ; \end{aligned} \tag{A.5}$$

inoltre la forma intera $\mathfrak{F}_P[G]$ non è altro che la $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottoalgebra di $F_q^P[G]$ generata da a, b, c, e d.

Analogamente $F_q^P[B_+]$ ha la seguente presentazione: essa è la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori a_+, b_+, d_+ e relazioni

$$a_+ b_+ = q\, b_+ a_+\ , \qquad b_+ d_+ = q\, d_+ b_+\ , \qquad a_+ d_+ = 1 = d_+ a_+$$

con una struttura di algebra di Hopf data da

$$\begin{aligned} \Delta(a_+) &= a_+ \otimes a_+\ , & \epsilon(a_+) &= 1\ , & S(a_+) &= d_+ \\ \Delta(b_+) &= a_+ \otimes b_+ + b_+ \otimes d_+\ , & \epsilon(b_+) &= 0\ , & S(b_+) &= -q^{-1} b_+ \\ \Delta(d_+) &= d_+ \otimes d_+\ , & \epsilon(d_+) &= 1\ , & S(d_+) &= a_+ \end{aligned}$$

e la forma intera $\mathfrak{F}_P[B_+]$ non è altro che la $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottoalgebra di $F_q^P[B_+]$ generata da a_+, b_+, d_+; dall'altra parte, $F_q^P[B_-]$ è la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori a_-, c_-, d_- e relazioni

$$a_- c_- = q\, c_- a_-\ , \qquad c_- d_- = q\, d_- c_-\ , \qquad a_- d_- = 1 = d_- a_-$$

con una struttura di algebra di Hopf data da

$$\begin{aligned} \Delta(a_-) &= a_- \otimes a_-\ , & \epsilon(a_-) &= 1\ , & S(a_-) &= d_- \\ \Delta(c_-) &= c_- \otimes a_- + d_- \otimes c_-\ , & \epsilon(c_-) &= 0\ , & S(c_-) &= -q^{+1} c_- \\ \Delta(d_-) &= d_- \otimes d_-\ , & \epsilon(d_-) &= 1\ , & S(d_-) &= a_-\ ; \end{aligned}$$

e la forma intera $\mathfrak{F}_P[B_-]$ non è altro che la $k\left[q,q^{-1}\right]$–sottoalgebra generata da a_-, c_-, d_-.

Gli epimorfismi di algebre di Hopf

$$\rho_+ \colon F_q^P[G] \twoheadrightarrow F_q^P[B_+]\,, \qquad \rho_- \colon F_q^P[G] \twoheadrightarrow F_q^P[B_-]$$

dati dalla restrizione (cfr. la dimostrazione del Teorema 7.7) sono allora descritti da

$$\rho_+ \colon a \mapsto a_+\,,\ b \mapsto b_+\,,\ c \mapsto 0\,,\ d \mapsto d_+\,, \qquad \rho_- \colon a \mapsto a_-\,,\ b \mapsto 0\,,\ c \mapsto c_-\,,\ d \mapsto d_-\,.$$

A.5 Le immersioni naturali. Realizzeremo ora esplicitamente le immersioni naturali di algebre di Hopf (formali)

$$\mu_P \colon F_q^P[G] \hookrightarrow j_P\left(U_q^Q(\mathfrak{g})^*\right) \qquad \xi_P \colon F_q^P[G] \hookrightarrow U_q^P(\mathfrak{h})$$

(cfr. §7). Dalle presentazioni date nelle precedenti sottosezioni è facile verificare che gli isomorfismi di algebre di Hopf

$$\vartheta_+ \colon F_q^P[B_+] \xrightarrow{\cong} U_q^P(\mathfrak{b}_-)_{op} \qquad \text{(indotto dall'accoppiamento } \pi\text{)}$$

$$\vartheta_- \colon F_q^P[B_-] \xrightarrow{\cong} U_q^P(\mathfrak{b}_+)_{op} \qquad \text{(indotto dall'accoppiamento } \overline{\pi}\text{)}$$

(cfr. (6.1)) sono descritti dalle formule

$$\vartheta_+ \colon\ a_+ \mapsto L^{-1}\,,\ b_+ \mapsto -\overline{F}L\,,\ d_+ \mapsto L\,, \qquad \vartheta_- \colon\ a_- \mapsto L\,,\ c_- \mapsto L^{-1}\overline{E}\,,\ d_- \mapsto L^{-1}\,.$$

Nota: si faccia attenzione alla differenza tra questi isomorfismi e quelli in [D-L], §1, che sono soltanto isomorfismi *di algebre*.

Come abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema 7.7, μ_P non è altro che la composizione

$$F_q^P[G] \xrightarrow{\Delta} F_q^P[G] \otimes F_q^P[G] \xrightarrow{\rho_+ \otimes \rho_-} F_q^P[B_+] \otimes F_q^P[B_-] \xrightarrow{\vartheta_+ \otimes \vartheta_-} U_q^P(\mathfrak{b}_-)_{op} \otimes U_q^P(\mathfrak{b}_+)_{op}$$

(la cui immagine sta in $j_P\left(U_q^Q(\mathfrak{g})^*\right)$) quindi è descritto da

$$\mu_P \colon\ a \mapsto L^{-1} \otimes L - \overline{F}L \otimes L^{-1}\overline{E},\ b \mapsto -\overline{F}L \otimes L^{-1},\ c \mapsto L \otimes L^{-1}\overline{E},\ d \mapsto L \otimes L^{-1}\ ;$$

allora si può facilmente verificare, mediante confronto diretto tra le formule (A.5) e le formule trovate in §A.3, che μ_P conserva le strutture di Hopf (formali), cioè è un monomorfismo *di algebre di Hopf (formali)*.

Nota: a causa della differenza tra la nostra definizione degli isomorfismi $\vartheta_+ \colon F_q^P[B_+] \xrightarrow{\cong} U_q^P(\mathfrak{b}_-)_{op}$, $\vartheta_- \colon F_q^P[B_-] \xrightarrow{\cong} U_q^P(\mathfrak{b}_+)_{op}$ e quella in [D-L], §1, l'analoga immersione $F_q^P[G] \hookrightarrow U_q^P(\mathfrak{b}_-)_{op} \otimes U_q^P(\mathfrak{b}_+)_{op}$ (e $\mathfrak{F}_P[G] \hookrightarrow \mathcal{U}_P(\mathfrak{b}_-)_{op} \otimes \mathcal{U}_P(\mathfrak{b}_+)_{op}$) definita in [D-L] è soltanto un monomorfismo *di algebre*.

Infine dalle formule per μ_P e dal Teorema 8.2 ricaviamo che l'immersione naturale

$$\xi_P \colon F_q^P[G] \hookrightarrow U_q^P(\mathfrak{h})$$

è descritta dalle formule

$$\xi_P \colon \quad a \mapsto L - \overline{F}L^{-1}\overline{E}, \quad b \mapsto -\overline{F}L^{-1}, \quad c \mapsto L^{-1}\overline{E}, \quad d \mapsto L^{-1}\,.$$

CAPITOLO III
QUANTIZZAZIONE A PIÙ PARAMETRI

§ 11 Algebre quantiche multiparametriche

11.1 Algebre di Borel quantiche multiparametriche e accoppiamenti di Tanisaki. Ci occuperemo ora della quantizzazione multiparametrica, come introdotta da [Re] e discussa in [C-V1], [C-V2] (cfr. anche [D-K-P]). Infatti per la quantizzazione ad un parametro abbiamo fatto uso della costruzione delle algebre di Borel quantiche, accoppiamenti DRT e Drinfeld's double sviluppati in [D-L]; ora, questa costruzione è stata generalizzata in [C-V1] e [C-V2] al caso multiparametrico, quindi useremo i risultati di quei lavori come nostro punto di partenza: ogni cosa procederà allora sulle stesse linee del capitolo II, così faremo spesso riferimento agli argomenti e dimostrazioni lì sviluppati, fornendo maggiori dettagli soltanto quando sorgono differenze significative.

Richiamiamo la costruzione in [C-V2]. Fissiamo un endomorfismo φ del $\mathbb{Q}$–spazio vettoriale $\mathbb{Q}P := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ che sia antisimmetrico — rispetto a $(\ |\ )$ — e soddisfi le seguenti condizioni:

$$\varphi(Q) \subseteq Q\,, \quad \frac{1}{2}\,(\varphi(P) \mid P) \subseteq \mathbb{Z}\,, \quad 2AYA^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$$

dove, essendo $\tau_i := \frac{1}{2}\varphi(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} y_{ji}\alpha_j$, poniamo $Y := (y_{ij})_{i,j=1,\dots,n;}$, $M_n(\mathbb{Z})$ è l'insieme delle matrici $n \times n$ con componenti intere, e A è la nostra matrice di Cartan. Per uso successivo definiamo anche

$$\tau_\alpha := \frac{1}{2}\varphi(\alpha)\,, \quad \tau_i := \tau_{\alpha_i} \tag{11.1}$$

per ogni $\alpha \in R$, $i = 1, \dots, n$.

Si dimostra in [C-V1] che $(1+\varphi)$ e $(1-\varphi)$ sono isomorfismi (qui $1 := \mathrm{id}_{\mathbb{Q}P}$) che sono aggiunti l'uno dell'altro, rispetto a $(\ |\ )$: definiamo poi

$$r := (1+\varphi)^{-1}\,, \quad \overline{r} := (1-\varphi)^{-1}\,.$$

In particolare se si considera $\varphi = 0$ si ritrovano le costruzioni — e quindi i gruppi quantici — del capitolo II.

11.2 Algebre di Borel quantiche multiparametriche. Consideriamo ora le (sotto)algebre di Borel quantiche $U_q^M(\mathfrak{b}_-)$ e $U_q^M(\mathfrak{b}_+)$ (per ogni reticolo M tale che $Q \leq M \leq P$); si dimostra in [C-V1] che esse possono essere dotate di una struttura di algebra di Hopf data da[8]

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi(F_i) &= F_i \otimes K_{-\alpha_i-\tau_i} + K_{\tau_i} \otimes F_i\,, \quad \varepsilon_\varphi(F_i) = 0\,, \quad S_\varphi(F_i) = -F_iK_i \\ \Delta_\varphi(K_\mu) &= K_\mu \otimes K_\mu\,, \quad \varepsilon_\varphi(K_\mu) = 1\,, \quad S_\varphi(K_\mu) = K_{-\mu} \\ \Delta_\varphi(E_i) &= E_i \otimes K_{\tau_i} + K_{\alpha_i-\tau_i} \otimes E_i\,, \quad \varepsilon_\varphi(E_i) = 0\,, \quad S_\varphi(E_i) = -K_i^{-1}E_i \end{aligned} \tag{11.2}$$

[8] In effetti, usiamo qui una normalizzazione diversa da quella in [C-V1]: i risultati lì provati coincidono con quelli che elenchiamo nel seguito non appena si effettuano le sostituzioni $q \leftrightarrow q^{-1}$, $L_\lambda \leftrightarrow L_{-\lambda}$ (oppure $K_\lambda \leftrightarrow K_{-\lambda}$).

per ogni $i = 1, \dots, n$, $\mu \in M$.

Indichiamo queste nuove algebre di Hopf con $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_\pm)$, o più sinteticamente con $U_{\varphi,\pm}^M$.

11.3 Accoppiamenti DRT nel caso multiparametrico. Definiamo nuovi accoppiamenti DRT tra algebre di Borel (con le loro nuove strutture di algebre di Hopf)

$$\begin{aligned} \pi_\varphi &\colon \left(U_{\varphi,\leq}^M\right)_{op} \otimes U_{\varphi,\geq}^{M'} \longrightarrow k(q)\,, \qquad \pi_\varphi \colon U_{\varphi,\leq}^M \otimes \left(U_{\varphi,\geq}^{M'}\right)^{op} \longrightarrow k(q) \\ \overline{\pi_\varphi} &\colon \left(U_{\varphi,\geq}^M\right)_{op} \otimes U_{\varphi,\leq}^{M'} \longrightarrow k(q)\,, \qquad \overline{\pi_\varphi} \colon U_{\varphi,\geq}^M \otimes \left(U_{\varphi,\leq}^{M'}\right)^{op} \longrightarrow k(q) \end{aligned}$$

dati da

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(L_\mu, L_\nu) = q^{-(r(\mu)|\nu)}\,,\ \pi_\varphi(L_\mu, E_j) = 0\,, \pi_\varphi(F_i, L_\nu) = 0\,,\ \pi_\varphi(F_i, E_j) = \delta_{ij} \frac{q^{-(r(\tau_i)|\tau_i)}}{\left(q_i^{-1} - q_i\right)} \\ \overline{\pi_\varphi}(L_\mu, L_\nu) = q^{+(r(\mu)|\nu)}\,,\ \overline{\pi_\varphi}(E_i, L_\nu) = 0\,, \overline{\pi_\varphi}(L_\mu, F_j) = 0\,,\ \overline{\pi_\varphi}(E_i, F_j) = \delta_{ij} \frac{q^{+(r(\tau_i)|\tau_i)}}{\left(q_i - q_i^{-1}\right)} \end{aligned}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $\mu \in M$, $\nu \in M'$. Questi sono accoppiamenti di Hopf perfetti; al fine di specificare i loro valori sui monomi delle basi PBW, definiamo, per ogni monomio $\mathcal{E}$ negli E_i, i termini $s(\mathcal{E}) := \frac{1}{2}\varphi\left(wt(\mathcal{E})\right)$, $r(\mathcal{E}) := \frac{1}{2} r\left(\varphi\left(wt(\mathcal{E})\right)\right)$, $\overline{r}(\mathcal{E}) := \frac{1}{2}\overline{r}\left(\varphi\left(wt(\mathcal{E})\right)\right)$, dove $wt(\mathcal{E})$ denota il peso di $\mathcal{E}$; parimenti definiamo $s(\mathcal{F}) := \frac{1}{2}\varphi\left(wt(\mathcal{F})\right)$, $r(\mathcal{F}) := \frac{1}{2} r\left(\varphi\left(wt(\mathcal{F})\right)\right)$, $\overline{r}(\mathcal{F}) := \frac{1}{2}\overline{r}\left(\varphi\left(wt(\mathcal{F})\right)\right)$, dove $wt(\mathcal{F})$ denota il peso di $\mathcal{F}$, per ogni monomio $\mathcal{F}$ negli F_i. Allora i valori degli accoppiamenti DRT modificati sui monomi PBW sono dati da

$$\begin{aligned} &\pi_\varphi\left(\prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r} \cdot L_\mu, \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r} \cdot L_\nu\right) = \\ &\qquad = q^{-\left(r(\mu) - r\left(\prod_{r=N}^1 F_{\alpha^r}^{f_r}\right) | \nu - s\left(\prod_{r=N}^1 E_{\alpha^r}^{e_r}\right)\right)} \prod_{r=1}^{N} \delta_{e_r, f_r} \frac{[e_r]_{q_{\alpha^r}}!\ q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}}}{\left(q_{\alpha^r}^{-1} - q_{\alpha^r}\right)^{e_r}} \\ &\overline{\pi_\varphi}\left(L_\mu \cdot \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r}, L_\nu \cdot \prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r}\right) = \\ &\qquad = q^{\left(\overline{r}(\mu) - \overline{r}\left(\prod_{r=N}^1 E_{\alpha^r}^{f_r}\right) | \nu - s\left(\prod_{r=N}^1 F_{\alpha^r}^{e_r}\right)\right)} \prod_{r=1}^{N} \delta_{e_r, f_r} \frac{[e_r]_{q_{\alpha^r}}!\ q_{\alpha^r}^{-\binom{e_r}{2}}}{\left(q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}\right)^{e_r}} \end{aligned} \tag{11.3}$$

(cfr. [C-V1], Lemma 3.5, e [C-V2] §1).

Consideriamo ora i vettori radice F_α, E_α ($\alpha \in R^+$) definiti in §3.4: definiamo *vettori radice modificati*

$$F_\alpha^\varphi := L_{\tau_\alpha} F_\alpha = F_\alpha L_{\tau_\alpha}\,, \qquad E_\alpha^\varphi := L_{\tau_\alpha} E_\alpha = E_\alpha L_{\tau_\alpha}$$

per ogni $\alpha \in R^+$ (in particolare, $F_i^\varphi := F_{\alpha_i}^\varphi$, $F_i^\varphi := F_{\alpha_i}^\varphi$ per ogni $i = 1, \dots, n$). Allora dalle (11.3) si ottengono formule

$$
\begin{aligned}
&\pi_\varphi\left(\prod_{r=N}^{1} \left(F_{\alpha^r}^\varphi\right)^{f_r} \cdot L_{(1+\varphi)(\mu)}, \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r} \cdot L_\nu\right) = \\
&\quad = q^{+\left(\mu \mid s\left(\prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r}\right)\right) - \sum_{h<k}\left(f_h \tau_{\alpha^h} \mid f_k \alpha^k\right)} \cdot \pi\left(\prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r} \cdot L_\mu, \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r} \cdot L_\nu\right) = \\
&\quad = q^{-\left(\mu \mid \nu - s\left(\prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r}\right)\right) - \sum_{h<k}\left(f_h \tau_{\alpha^h} \mid f_k \alpha^k\right)} \cdot \prod_{r=1}^{N} \delta_{e_r, f_r} \frac{\left[e_r\right]_{q_{\alpha^r}}! \; q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}}}{\left(q_{\alpha^r}^{-1} - q_{\alpha^r}\right)^{e_r}} \\
&\overline{\pi_\varphi}\left(L_{(1-\varphi)(\mu)} \cdot \prod_{r=N}^{1} \left(E_{\alpha^r}^\varphi\right)^{e_r}, L_\nu \cdot \prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r}\right) = \\
&\quad = q^{-\left(\mu \mid s\left(\prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r}\right)\right) + \sum_{h<k}\left(e_h \tau_{\alpha^h} \mid e_k \alpha^k\right)} \cdot \overline{\pi}\left(L_\mu \cdot \prod_{r=N}^{1} E_{\alpha^r}^{e_r}, L_\nu \cdot \prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{f_r}\right) = \\
&\quad = q^{+\left(\mu \mid \nu - s\left(\prod_{r=N}^{1} F_{\alpha^r}^{e_r}\right)\right) + \sum_{h<k}\left(e_h \tau_{\alpha^h} \mid e_k \alpha^k\right)} \prod_{r=1}^{N} \delta_{e_r, f_r} \frac{\left[e_r\right]_{q_{\alpha^r}}! \; q_{\alpha^r}^{-\binom{e_r}{2}}}{\left(q_{\alpha^r} - q_{\alpha^r}^{-1}\right)^{e_r}}
\end{aligned}
\tag{11.4}
$$

(cfr. [C-V1], Lemma 3.5, e [C-V2], Proposition 1.9). Nel seguito indicheremo con $U_{\varphi,-}$, risp. $U_{\varphi,+}$, la $k(q)$–sottoalgebra di $U_{\varphi,\leq}^M$, risp. $U_{\varphi,\geq}^M$, generata dagli F_i^φ, risp. dagli E_i^φ $(i = 1, \dots, n)$; è immediato riconoscere che queste algebre hanno basi di monomi ordinati (tipo PBW) perfettamente analoghe — basta sostituire F con F^φ e E con E^φ — a quelle di U_-, U_+; si osservi però che $U_{\varphi,-} \neq U_-$ e $U_{\varphi,+} \neq U_+$. Per uniformità useremo anche la notazione $U_{\varphi,0}^M := U_0^M$.

11.4 Forme intere. Si dimostra in [C-V2] che le $k\left[q, q^{-1}\right]$–sottoalgebre $\mathfrak{U}_{\leq}^M$ e $\mathcal{U}_{\leq}^M$ di $U_{\varphi,\leq}^M$ sono in effetti sottoalgebre di Hopf di $U_{\varphi,\leq}^M$, dunque forme intere, quindi le indicheremo con $\mathfrak{U}_{\varphi,\leq}^M$ e $\mathcal{U}_{\varphi,\leq}^M$ rispettivamente; analogamente $\mathfrak{U}_{\varphi,\geq}^M := \mathfrak{U}_{\geq}^M$ e $\mathcal{U}_{\varphi,\geq}^M := \mathcal{U}_{\geq}^M$ sono sottoalgebre di Hopf, dunque forme intere, di $U_{\varphi,\geq}^M$.

Osserviamo che $\mathcal{U}_{\varphi,\leq}^M$, risp. $\mathcal{U}_{\varphi,\geq}^M$, contiene gli elementi

$$
\overline{F}_\alpha^\varphi := L_{\tau_\alpha} \overline{F}_\alpha = \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right) F_\alpha^\varphi \,, \qquad \text{risp.} \quad \overline{E}_\alpha^\varphi := L_{\tau_\alpha} \overline{E}_\alpha = \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right) E_\alpha^\varphi \,,
$$

per ogni $\alpha \in R^+$. Indicheremo allora con $\mathcal{U}_{\varphi,-}$, risp. $\mathcal{U}_{\varphi,+}$, la $k\left[q, q^{-1}\right]$–sottoalgebra di $\mathcal{U}_{\varphi,\leq}^M$, risp. $\mathcal{U}_{\varphi,\geq}^M$, generata dagli $\overline{F}_\alpha^\varphi$, risp. dagli $\overline{E}_\alpha^\varphi$ ($\alpha \in R^+$); è immediato riconoscere che queste algebre hanno basi di monomi ordinati (tipo PBW) del tutto analoghe a quelle di $\mathcal{U}_-$, $\mathcal{U}_+$ (basta sostituire $\overline{F}$ con $\overline{F}^\varphi$ e $\overline{E}$ con $\overline{E}^\varphi$); in particolare $\mathcal{U}_{\varphi,-}$, risp. $\mathcal{U}_{\varphi,+}$, è una $k\left[q, q^{-1}\right]$–forma di $U_{\varphi,-}$, risp. $U_{\varphi,+}$. Infine $\mathcal{U}_{\varphi,-} \neq \mathcal{U}_-$ e $\mathcal{U}_{\varphi,+} \neq \mathcal{U}_+$.

Analogamente $\mathfrak{U}_{\varphi,\leq}^M$, risp. $\mathfrak{U}_{\varphi,\geq}^M$, contiene gli elementi

$$
\left(F_\alpha^\varphi\right)^{(m)} := \frac{1}{[m]_{q_\alpha}!} \cdot \left(F_\alpha^\varphi\right)^m , \qquad \text{risp.} \quad \left(E_\alpha^\varphi\right)^{(m)} := \frac{1}{[m]_{q_\alpha}!} \cdot \left(E_\alpha^\varphi\right)^m ,
$$

per ogni $\alpha \in R^+$. Indicheremo allora con $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$, risp. $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$, la $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di $\mathfrak{U}^M_{\varphi,\leq}$, risp. $\mathfrak{U}^M_{\varphi,\geq}$, generata dagli $(F^\varphi_\alpha)^{(m)}$, risp. dagli $(E^\varphi_\alpha)^{(m)}$ ($\alpha \in R^+$, o anche soltanto $\alpha \in \Pi$, è equivalente); anche queste algebre hanno basi di monomi ordinati (tipo PBW) del tutto analoghe a quelle di $\mathfrak{U}_-$, $\mathfrak{U}_+$ (si sostituisca $F_i^{(m)}$ con $(F_i^\varphi)^{(m)}$ e $E_i^{(m)}$ con $(E_i^\varphi)^{(m)}$); in particolare $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$, risp. $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$, è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–forma di $U_{\varphi,-}$, risp. $U_{\varphi,+}$. Infine $\mathcal{U}_{\varphi,-} \neq \mathcal{U}_-$ e $\mathcal{U}_{\varphi,+} \neq \mathcal{U}_+$.

Infine, relazioni come (3.3–5) valgono ancora per queste forme intere multiparametriche.

11.5 L'algebra inviluppante quantizzata multiparametrica $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$. Con la stessa procedura del §4, possiamo operare la costruzione del Drinfeld's double e ottenere un'algebra di Hopf

$$D^P_{q,\varphi}(\mathfrak{g}) := D\left(U^Q_{\varphi,\leq}, U^P_{\varphi,\geq}, \pi_\varphi\right) \ ;$$

dalla definizione stessa segue che $D^P_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$ è generata da K_α, L_λ, F_i, E_i — identificati con $1 \otimes K_\alpha$, $L_\lambda \otimes 1$, $1 \otimes F_i$, $E_i \otimes 1$ quando si pensi a $D^P_{q,\varphi}(\mathfrak{g}) \cong U^P_{\varphi,\geq} \otimes U^Q_{\varphi,\leq}$ come coalgebre (grazie a (4.1)) — ($\alpha \in Q$, $\lambda \in P$, $i = 1, \dots, n$), con relazioni (4.2) e (4.3) di nuovo.

Possiamo anche operare la stessa costruzione con $U^M_{\varphi,\geq}$ invece di $U^P_{\varphi,\geq}$, per ogni reticolo M tale che $Q \leq M \leq P$, ottenendo così il quantum double

$$D^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g}) := D\left(U^Q_{\varphi,\leq}, U^M_{\varphi,\geq}, \pi_\varphi\right) \ ;$$

in particolare considereremo il caso $M = Q$ ottenendo così un'algebra di Hopf $D^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$; inoltre useremo per semplicità la notazione $D^\varphi_M := D^Q_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$.

Consideriamo adesso l'ideale $\mathfrak{K}^\varphi_M$ di D^φ_M generato dagli elementi $K \otimes 1 - 1 \otimes K$, $K \in U^Q_{\varphi,0}$; questo è un ideale di Hopf, dunque

$$U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g}) := D^\varphi_M \Big/ \mathfrak{K}^\varphi_M$$

è un'algebra di Hopf; allora la su menzionata presentazione di D^φ_M per generatori e relazioni fornisce la seguente presentazione di $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$: essa è la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori

$$F_i\,,\ L_\mu\,,\ E_i \qquad (\, \mu \in M\,;\ i = 1, \dots, n\,)$$

e relazioni

$$\begin{aligned}
L_\mu L_\nu &= L_{\mu+\nu} && \forall\, \mu, \nu \in M \\
L_\mu F_j &= q^{-(\alpha_j|\mu)} F_j L_\mu && \forall\, \mu \in M, \quad j = 1, \dots, n \\
L_\mu E_j &= q^{(\alpha_j|\mu)} E_j L_\mu && \forall\, \mu \in M, \quad j = 1, \dots, n \\
E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{L_{\alpha_i} - L_{-\alpha_i}}{q_i - q_i^{-1}} && \forall\, i, j = 1, \dots, n \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k &= 0 && \forall\, i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k &= 0 && \forall\, i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j
\end{aligned} \tag{11.5}$$

con la struttura di Hopf data da

$$
\begin{gathered}
\Delta_\varphi(F_i) = F_i \otimes L_{-\alpha_i-\tau_i} + L_{\tau_i} \otimes F_i \\
\Delta_\varphi(L_\mu) = L_\mu \otimes L_\mu \\
\Delta_\varphi(E_i) = E_i \otimes L_{\tau_i} + L_{\alpha_i-\tau_i} \otimes F_i \\
\epsilon_\varphi(F_i) = 0\,, \quad \epsilon_\varphi(K_\lambda) = 1\,, \quad \epsilon_\varphi(E_i) = 0 \\
S_\varphi(F_i) = -F_i L_{\alpha_i}\,, \quad S_\varphi(L_\mu) = L_{-\mu}\,, \quad S_\varphi(F_i) = -L_{-\alpha_i} E_i \\
\forall\, i = 1, \dots, n\,, \quad \mu \in M
\end{gathered}
\tag{11.6}
$$

Infine indicheremo con $pr_M^\varphi \colon D_M^\varphi \relbar\joinrel\twoheadrightarrow D_M^\varphi \Big/ \mathfrak{K}_M^\varphi =: U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$ l'epimorfismo canonico di algebre di Hopf.

Da [C-V2] sappiamo che $\mathfrak{U}_M(\mathfrak{g})$ è anche una sottoalgebra di Hopf di $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$, perciò la denotiamo con $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{g})$; analogamente, riprendiamo da [D-K-P] il fatto che $\mathcal{U}_M(\mathfrak{g})$ è anche una sottoalgebra di Hopf di $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$, perciò la denotiamo con $\mathcal{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{g})$.

11.6 Specializzazioni alle radici dell'unità per algebre inviluppanti quantizzate multiparametriche. Ci occupiamo adesso di specializzazioni delle precedenti forme intere alle radici dell'unità.

Cominciamo con $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$. Per il caso $\varepsilon = 1$, poniamo

$$\mathfrak{U}_{1,\varphi}^Q(\mathfrak{g}) := \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \Big/ (q-1)\, \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \;\cong\; \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-1)\,$); sia $p_1 \colon \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}_{1,\varphi}^Q(\mathfrak{g})$ l'applicazione canonica e poniamo $f_i := p_1\Big(F_i^{(1)}\Big)$, $h_i := p_1\Big(\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{K_i\,;\,0}{1}\Big)\Big)$, $e_i := p_1\Big(E_i^{(1)}\Big)$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Si osserva allora che $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$ ha la stessa presentazione *come algebra* per generatori e relazioni di $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ (data in [D-L], §4.4), poiché esse sono isomorfe come algebre; si trova allora subito che $\mathfrak{U}_{1,\varphi}^Q(\mathfrak{g})$ è una coalgebra di Hopf Poisson, con una presentazione per generatori — f_i, h_i, e_i — e relazioni che è esattamente la stessa di (2.2–3/9) per $U(\mathfrak{g}^\tau)$, quindi si ha un isomorfismo di coalgebre di Hopf Poisson

$$\mathfrak{U}_{1,\varphi}^Q(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}^\tau)\;; \tag{11.7}$$

in poche parole, $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$ si specializza a $U(\mathfrak{g}^\tau)$ per $q \to 1$.

Sia ora ε una radice ℓ–esima primitiva dell'unità in k (facciamo le ipotesi dell'inizio di §5.3), per ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$, e poniamo

$$\mathfrak{U}_{\varepsilon,\varphi}^Q(\mathfrak{g}) := \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \;\cong\; \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)\,$); si ha allora

Teorema 11.7 ([C-V2], §3.2). *Esiste un epimorfismo di algebre di Hopf*

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau} \colon \mathfrak{U}^Q_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}^Q_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}^\tau) \tag{11.8}$$

definito da

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}\left(F_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= F_i^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ \ell \,\big|\, s \,, \ 0 \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}\left(\left({K_i; 0 \atop s} \right) \Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= \left({K_i; 0 \atop s/\ell} \right) \Big|_{q=1} && \textit{se } \ \ell \,\big|\, s \,, \ 0 \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}\left(K_i^{-1}\Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= 1 \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}\left(E_i^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= E_i^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ \ell \,\big|\, s \,, \ 0 \ \textit{altrimenti}
\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $s \in \mathbb{N}$. $\square$

Nel seguito ci riferiremo a $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}$ come ad un *morfismo di Frobenius quantico*.

Passiamo ora a $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$. Poniamo

$$\mathcal{U}^P_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \,\cong\, \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k \;;$$

è noto (cfr. [D-K-P], §7.7) che

$$\mathcal{U}^P_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \cong F\,[H^\tau] \tag{11.9}$$

come algebre di Hopf Poisson su k (qui H^τ è il gruppo di Poisson definito in §2.5); in una parola, $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$ si specializza a $F\,[H^\tau]$ per $q \to 1$.

Per ε radice ℓ–esima primitiva dell'unità (ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$), poniamo

$$\mathcal{U}^P_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \,\cong\, \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k \;;$$

vale allora il seguente

Teorema 11.8 (cfr. [D-K-P], [D-P]).

(a) Esiste un monomorfismo di algebre di Hopf

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau} \colon F\,[H^\tau] \cong \mathcal{U}^P_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}^P_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{g}) \tag{11.10}$$

definito da

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau} \colon \qquad \overline{F}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{F}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon} \,, \qquad L_\lambda\Big|_{q=1} \mapsto L_\lambda^\ell\Big|_{q=\varepsilon} \,, \qquad \overline{E}_\alpha\Big|_{q=1} \mapsto \overline{E}_\alpha^{\,\ell}\Big|_{q=\varepsilon}$$

per ogni $\alpha \in R^+$, $\lambda \in P$.

(b) L'immagine Z_0 $\left(\cong_{\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau}} \mathcal{U}^P_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \right)$ *di* $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau}$ *è una sottoalgebra di Hopf centrale*

di $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{g})$.

(c) L'insieme di monomi PBW ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{E}_{\alpha^r}^{\ell e_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{\ell l_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{\ell f_r} \,\middle|\, e_1, \dots, e_N, l_1, \dots, l_n, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è una base di Z_0 *su* k *.*

(d) L'insieme di monomi PBW ordinati

$$\left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{E}_{\alpha^r}^{e_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{l_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{F}_{\alpha^r}^{f_r} \,\middle|\, e_1, \dots, e_N, l_1, \dots, l_n, e_1, \dots, e_N = 0, 1, \dots, \ell - 1 \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{g})$ *su* Z_0 *; pertanto* $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{g})$ *è un modulo libero di rango* $\ell^{dim(G)}$ *su* Z_0 *.* $\square$

Ci riferiremo anche a $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau}$ come ad un *morfismo di Frobenius quantico*.

11.9 Algebre di funzioni quantiche multiparametriche (cfr. [C-V2], §§2–3). Proprio come abbiamo fatto nel §6 per il caso ad un parametro, definiamo le algebre quantiche di funzioni multiparametriche come algebre di Hopf $F_{q,\varphi}^{M}[B_\pm]$, $F_{q,\varphi}^{M}[G]$ generate (in ${U_{\varphi,\mp}^{M'}}^*$ e $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$ rispettivamente) dai coefficienti matriciali di rappresentazioni *positive* di dimensione finita delle corrispondenti algebre inviluppanti quantiche multiparametriche. Poiché le nostre nuove algebre inviluppanti quantiche sono isomorfe *come algebre* alle vecchie, le nuove algebre quantiche di funzioni (multiparametriche) sono isomorfe *come coalgebre* alle vecchie (uniparametriche).

Gli accoppiamenti DRT forniscono ancora isomorfismi di algebre di Hopf

$$\begin{aligned} F_{q,\varphi}^{M}[B_+] &\cong \left(U_{\varphi,\leq}^{M'}\right)_{op} \qquad \text{indotto dall'accoppiamento } \pi_\varphi \\ F_{q,\varphi}^{M}[B_-] &\cong \left(U_{\varphi,\geq}^{M'}\right)_{op} \qquad \text{indotto dall'accoppiamento } \overline{\pi_\varphi} \end{aligned} \tag{11.11}$$

(cfr. [C-V2], §2) Ne segue anche che, definendo forme intere $\mathfrak{F}_{\varphi,M}[B_\pm]$, $\mathcal{F}_{\varphi,M}[B_\pm]$, come sottoinsiemi di funzioni a valori interi sulle corrispondenti forme intere di algebre di Borel quantiche multiparametriche (come in (6.2)) i suddetti isomorfismi le fanno corrispondere a forme intere di algebre di Borel quantiche multiparametriche di segno opposto (come in (6.3–4)).

Poniamo infine

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] &:= \left\{ f \in F_{q,\varphi}^{M}[G] \,\middle|\, \left\langle f, \mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] &:= \left\{ f \in F_{q,\varphi}^{M}[G] \,\middle|\, \left\langle f, \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \end{aligned} \tag{11.12}$$

come in (6.5), dove $\langle\ ,\ \rangle \colon F_{q,\varphi}^{M}[G] \otimes U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q)$ è l'accoppiamento naturale di valutazione: dimostreremo più avanti che queste sono $k\big[q,q^{-1}\big]$–forme intere di $F_{q,\varphi}^{M}[G]$.

11.10 Specializzazioni alle radici dell'unità per algebre quantiche di funzioni multiparametriche. Si dimostra in [C-V2] che

$$\mathfrak{F}_{\varphi,P}[G] \xrightarrow{q\to1} F\left[G^\tau\right] \tag{11.13}$$

cioè $\mathfrak{F}_{\varphi,P}[G]\Big/(q-1)\mathfrak{F}_{\varphi,P}[G] \cong F\left[G^\tau\right]$ come k–algebre di Hopf Poisson.

Per una radice primitiva ℓ–esima dell'unità ε in k (facciamo le stesse ipotesi dell'inizio del §5.3), con ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$, poniamo

$$\mathfrak{F}^{P}_{\varepsilon,\varphi}[G] := \mathfrak{F}_{\varphi,P}[G]\Big/(q-\varepsilon)\,\mathfrak{F}_{\varphi,P}[G] \;\cong\; \mathfrak{F}_{\varphi,P}[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big]\Big/(q-\varepsilon)$); il prossimo risultato definisce un altro *morfismo di Frobenius quantico*:

Teorema 11.11 ([C-V2], §3.3).
Esiste un monomorfismo di algebre di Hopf

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}\colon F\left[G^\tau\right] \cong \mathfrak{F}^{P}_{1,\varphi}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}^{P}_{\varepsilon,\varphi}[G] \tag{11.14}$$

(duale di $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}\colon \mathfrak{U}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}^{Q}_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}^\tau)$); la sua immagine F_0 è una sottoalgebra di Hopf centrale di $\mathfrak{F}^{P}_{\varepsilon,\varphi}[G]$. $\square$

§ 12 Gruppi formali quantici multiparametrici

12.1. Seguendo le linee del §7, vogliamo ora studiare $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})^*$: poiché $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$ è un'algebra di Hopf, il suo duale lineare $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})^*$ è un'algebra di Hopf formale (cfr. §1.1), che possiamo pensare associata ad un *gruppo formale quantico multiparametrico*. Poiché (cfr. §11) $U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$ è quoziente del Drinfel'd's double $D^\varphi_M := D^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$, abbiamo un epimorfismo di algebre di Hopf $pr^\varphi_M\colon D^\varphi_M \twoheadrightarrow U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$ che il funtore $(\ \ )^*$ trasforma in un monomorfismo di algebre di Hopf formali

$$j^\varphi_{M'} := (pr^\varphi_M)^*\colon U^M_{q,\varphi}(\mathfrak{g})^* \lhook\joinrel\longrightarrow {D^\varphi_M}^*$$

Pertanto cominciamo con lo studio dell'algebra di Hopf formale ${D^\varphi_M}^*$.

12.2 Algebre quantiche multiparametriche come algebre di funzioni. In virtù dell'esistenza dell'isomorfismo di coalgebre $D^\varphi_M \cong U^M_{\varphi,\geq} \otimes U^Q_{\varphi,\leq}$ il Lemma 7.2 ci dà un isomorfismo di algebre

$${D^\varphi_M}^* \cong {U^M_{\varphi,\geq}}^* \,\widehat{\otimes}\, {U^Q_{\varphi,\leq}}^* \;;$$

pertanto iniziamo a studiare le algebre di Hopf formali ${U^M_{\varphi,\geq}}^*$, ${U^Q_{\varphi,\leq}}^*$.

Gli accoppiamenti DRT inducono varie immersioni di algebre quantiche nel duale lineare di altre algebre quantiche; in particolare fissiamo le seguenti:

$$\begin{aligned} U_{\varphi,-} &\hookrightarrow {U_+}^* \qquad \text{(indotto da } \pi\,) \\ U_{\varphi,+} &\hookrightarrow {U_-}^* \qquad \text{(indotto da } \overline{\pi}\,) \end{aligned} \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned} im^{\varphi}_M \colon U^M_{\varphi,0} &\hookrightarrow {U^{M'}_{\varphi,0}}^* \qquad \text{(indotto da } \pi\,) \\ \overline{im}^{\varphi}_M \colon U^M_{\varphi,0} &\hookrightarrow {U^{M'}_{\varphi,0}}^* \qquad \text{(indotto da } \overline{\pi}\,) \end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned} U^M_{\varphi,\leq} \cong U_{\varphi,-} \otimes U^M_{\varphi,0} &\hookrightarrow U_+^* \,\widehat{\otimes}\, {U_0^{M'}}^* \cong {U_{\geq}^{M'}}^* \qquad \text{(indotto da } \pi\,) \\ U^M_{\varphi,\geq} \cong U^M_{\varphi,0} \otimes U_{\varphi,+} &\hookrightarrow {U_0^{M'}}^* \,\widehat{\otimes}\, U_+^* \cong {U_{\leq}^{M'}}^* \qquad \text{(indotto da } \overline{\pi}\,) \end{aligned} \tag{12.3}$$

inoltre le (12.3) sono anche immersioni di algebre di Hopf formali. Da ora in avanti quindi identificheremo le varie algebre quantiche con le loro immagini nei corrispondenti spazi duali.

Il prossimo passo richiede alcune modifiche rispetto al caso uniparametrico: dalle (11.4) osserviamo che

$$\begin{aligned} \Big\langle L_{(1+\varphi)(\mu)}, L_\nu \Big\rangle_{\pi_\varphi} &= \Big\langle L_\mu, L_\nu \Big\rangle_{\pi} \\ \Big\langle L_{(1-\varphi)(\mu)}, L_\nu \Big\rangle_{\overline{\pi_\varphi}} &= \Big\langle L_\mu, L_\nu \Big\rangle_{\overline{\pi}} \end{aligned} \tag{12.4}$$

quindi, definiti gli isomorfismi di algebre di Hopf

$$\begin{aligned} (1+\varphi) \colon U_0^M \xrightarrow{\cong} U^M_{\varphi,0}\,, &\qquad L_\mu \mapsto L_{(1+\varphi)(\mu)} \qquad \forall\, \mu \in M \\ (1-\varphi) \colon U_0^M \xrightarrow{\cong} U^M_{\varphi,0}\,, &\qquad L_\mu \mapsto L_{(1-\varphi)(\mu)} \qquad \forall\, \mu \in M \end{aligned}$$

i seguenti diagrammi risultano commutativi

$$\begin{array}{ccc} U_0^M & \xrightarrow{(1+\varphi)} & U^M_{\varphi,0} \\ {\scriptstyle im_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle im^{\varphi}_M} \\ {U_0^{M'}}^* & = & {U^{M'}_{\varphi,0}}^* \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} U_0^M & \xrightarrow{(1-\varphi)} & U^M_{\varphi,0} \\ {\scriptstyle \overline{im}_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{im}^{\varphi}_M} \\ {U_0^{M'}}^* & = & {U^{M'}_{\varphi,0}}^* \end{array} \tag{12.5}$$

A questo punto possiamo generalizzare il Lemma 7.4, con dimostrazione del tutto analoga, utilizzando le (11.4) invece delle (3.2):

Lemma 12.3.

(a+) Il sottoinsieme di $\mathcal{U}_{\varphi,-}$

$$\left\{ q^{+\sum_{h<k}(f_h\tau_{\alpha^h}|f_k\alpha^k)} \cdot \prod_{r=N}^{1} (-1)^{f_r} q_{\alpha^r}^{-\binom{f_r}{2}} \Big(\overline{F}^{\varphi}_{\alpha^r}\Big)^{f_r} \;\middle|\; f_1,\ldots,f_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di $U_{\varphi,+}{}^*$ duale della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$ di monomi ordinati decrescenti.

(b+) Il sottoinsieme di $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$

$$\left\{ q^{+\sum_{h<k}(f_h\tau_{\alpha^h}|f_k\alpha^k)} \cdot \prod_{r=N}^{1} (-1)^{f_r} q_{\alpha^r}^{-\binom{f_r}{2}} (F_{\alpha^r}^{\varphi})^{(f_r)} \,\middle|\, f_1,\ldots,f_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di $U_{\varphi,+}{}^*$ duale della base PBW di $\mathcal{U}_{\varphi,+}$ di monomi ordinati decrescenti.

(a−) Il sottoinsieme di $\mathcal{U}_{\varphi,+}$

$$\left\{ q^{-\sum_{h<k}(e_h\tau_{\alpha^h}|e_k\alpha^k)} \cdot \prod_{r=1}^{N} q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}} \left(\overline{E}_{\alpha^r}^{\varphi}\right)^{e_r} \,\middle|\, e_1,\ldots,e_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di $U_{\varphi,-}{}^*$ duale della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$ di monomi ordinati crescenti.

(b−) Il sottoinsieme di $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$

$$\left\{ q^{-\sum_{h<k}(e_h\tau_{\alpha^h}|e_k\alpha^k)} \cdot \prod_{r=1}^{N} q_{\alpha^r}^{+\binom{e_r}{2}} (E_{\alpha^r}^{\varphi})^{(e_r)} \,\middle|\, e_1,\ldots,e_N \in \mathbb{N} \right\}$$

è la pseudobase di $U_{\varphi,-}{}^*$ duale della base PBW di $\mathcal{U}_{\varphi,-}$ di monomi ordinati crescenti.

(c) $\mathcal{U}_{\varphi,0}^{M}$ (e quindi $U_{\varphi,0}^{M}$) contiene (rispetto ad ambedue le immersioni in (12.2)) la pseudobase $\mathcal{B}_M^{\varphi}$ di $U_{\varphi,0}^{M'}{}^*$ duale della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,0}^{M'}$.

(d) $\mathcal{U}_{\varphi,\le}^{M}$, risp. $\mathcal{U}_{\varphi,\le}^{M}$ (e quindi $U_{\varphi,\le}^{M}$, risp. $U_{\varphi,\ge}^{M}$) contiene la pseudobase $U_{\varphi,\ge}^{M'}{}^*$, risp. di $U_{\varphi,\ge}^{M'}{}^*$, duale della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,\le}^{M'}$, risp. di $\mathfrak{U}_{\varphi,\ge}^{M'}$. Tale pseudobase è composta di elementi della forma $\mathcal{F}^{\varphi}\cdot\psi$, risp. $\psi\cdot\mathcal{E}^{\varphi}$, dove $\mathcal{F}^{\varphi}$, risp. $\mathcal{E}^{\varphi}$, è un monomio ordinato negli $\overline{F}_{\alpha}^{\varphi}$, risp. negli $\overline{E}_{\alpha}^{\varphi}$, e $\psi \in \mathcal{U}_{\varphi,0}^{M}$.

Dimostrazione. Per *(a±)* e *(b±)* basta utilizzare le (11.4). Per *(c)* si può ripetere, *mutatis mutandis*, la dimostrazione del Lemma 7.4*(c)*, oppure si può direttamente osservare che, grazie a (12.5), le pseudobasi di $U_{\varphi,0}^{M'} = U_0^{M'}$ date dal Lemma 7.4*(c)* si "trasportano" in $U_{\varphi,0}^{M}$ tramite $(1+\varphi)$ e $(1-\varphi)$.

Infine per *(d)* osserviamo che non possiamo più limitarci a prendere per pseudobase di $U_{\varphi,\le}^{M} \cong U_{\varphi,-}\otimes U_{\varphi,0}^{M}$ l'insieme di tensori del tipo $x\otimes z$ in cui x sia un elemento di una pseudobase di $U_{\varphi,-}$ e z sia un elemento di una pseudobase di $U_{\varphi,0}^{M}$, perchè in generale

$$\left\langle x\otimes z, a\otimes c\right\rangle_{\pi_\varphi} \neq \left\langle x,a\right\rangle_{\pi_\varphi}\cdot\left\langle z,a\right\rangle_{\pi_\varphi}$$

($a \in U_-$, $c \in U_0^{M'}$), contrariamente al caso uniparametrico in cui valeva l'uguaglianza. Dobbiamo invece riprendere e adattare la dimostrazione della parte *(c)* per costruire direttamente la nostra pseudobase.

Indichiamo ancora con $u_\tau := \prod_{i=1}^{n} \binom{\Lambda_i;0}{t_i}\cdot\Lambda_i^{-Ent(t_i/2)}$ ($\tau = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{N}^n$) il generico elemento della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,0}^{M'} = \mathfrak{U}_0^{M'}$, e con $\mathfrak{E}_\eta := \prod_{k=N}^{1} E_{\alpha^k}^{(e_k)}$ ($\eta = (e_1,\ldots,e_N) \in \mathbb{N}^N$) il generico elemento della base PBW di $\mathfrak{U}_+$. Il generico elemento della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,\geq}^{M'} \cong \mathfrak{U}_+ \otimes U_0^{M'}$ è allora $\mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau$ ($\eta \in \mathbb{N}^N$, $\tau \in \mathbb{N}^n$). Analogamente indichiamo con $\mathcal{F}_\phi^\varphi := \prod_{k=N}^1 \left(\overline{F}_{\alpha^k}^\varphi\right)^{(f_k)}$ ($\phi = (f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{N}^n$) il generico elemento della base PBW di $\mathcal{U}_{\varphi,-}$.

Dalle (11.4) otteniamo

$$\begin{gathered} \pi_\varphi\left(\mathcal{F}_\phi^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)},\, \mathfrak{E}_\eta \cdot L_\nu\right) = \\ = q^{+\left(\mu|\nu - s\left(\mathfrak{E}_\eta\right)\right) - \sum_{h<k}\left(f_h \tau_{\alpha^h} | f_k \alpha^k\right)} \cdot (-1)^{\sum_{k=1}^N e_k} \cdot q^{\sum_{k=1}^N d_{\alpha^k} \binom{e_k}{2}} \cdot \delta_{\phi,\eta} = \\ = (-1)^{\sum_{k=1}^N e_k} \cdot q^{-\sum_{h<k}\left(e_h \tau_{\alpha^h} | e_k \alpha^k\right)} \cdot q^{\sum_{k=1}^N d_{\alpha^k} \binom{e_k}{2}} \cdot \delta_{\phi,\eta} \cdot q^{+(\mu|\nu)} \cdot q^{\left(\mu | s\left(\mathfrak{E}_\eta\right)\right)} = \\ = c_\eta \cdot \delta_{\phi,\eta} \cdot q^{+(\mu|\nu)} \cdot q^{-\left(\mu|s\left(\mathfrak{E}_\eta\right)\right)} \end{gathered}$$

($\mu \in M$, $\nu \in M'$) dove $c_\eta := (-1)^{\sum_{k=1}^N e_k} \cdot q^{-\sum_{h<k}\left(e_h \tau_{\alpha^h} | e_k \alpha^k\right)} \cdot q^{\sum_{k=1}^N d_{\alpha^k} \binom{e_k}{2}}$ è un coefficiente che *non dipende* da μ e da ν. Pertanto tra gli elementi di $\mathcal{U}_{\varphi,\leq}^M$ soltanto quelli della forma $x = \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot z$, con $z \in U_{\varphi,0}^M$ danno valori non nulli quando accoppiati con elementi del tipo $\mathfrak{E}_\eta \cdot L_\nu$, e quindi in particolare con l'elemento $\mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau$. Ora, il calcolo diretto — come nella dimostrazione del Lemma 7.4*(c)* — ci dà

$$\left\langle \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)}, \mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau \right\rangle_{\pi_\varphi} = c_\eta \cdot q^{-\left(\mu|s\left(\mathfrak{E}_\eta\right)\right)} \cdot \prod_{i=1}^n \binom{m_i}{t_i}_{q_i} \cdot q_i^{-m_i \cdot Ent(t_i/2)} \qquad \forall\, \mu, \tau \in \mathbb{N}^n$$

dove usiamo l'identificazione $M_+ \cong \mathbb{N}^n$ per cui $M_+ \ni \mu = m_1\mu_1 + \cdots + m_n\mu_n \cong (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$. In particolare

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)}, \mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau \right\rangle_{\pi_\varphi} \neq 0 \iff \tau \preceq \mu \\ &\left\langle \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)}, \mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau \right\rangle_{\pi_\varphi} = c_\eta \cdot q^{-\left(\tau|s\left(\mathfrak{E}_\eta\right)\right)} \cdot q^{-T(\tau)} \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^n \end{aligned}$$

dove $T(\tau) := \sum_{i=1}^n d_i t_i Ent(t_i/2)$; in particolare il coefficiente $C_{\eta,\tau} := c_\eta \cdot q^{-\left(\mu|s\left(\mathfrak{E}_\eta\right)\right)} \cdot q^{-T(\tau)}$ *è invertibile in* $k\big[q, q^{-1}\big]$. Ma allora abbiamo formule

$$\mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)} = C_{\eta,\tau} \cdot \left(\mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau\right)^* + \sum_{\tau' \prec \tau} \left\langle \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)}, \mathfrak{E}_\eta \cdot u_{\tau'} \right\rangle_{\pi_\varphi} \cdot \left(\mathfrak{E}_\eta \cdot u_{\tau'}\right)^* \forall\, \tau \in \mathbb{N}^n$$

che ci dicono che l'insieme $\left\{ \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)} \,\middle|\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\}$ si ottiene dall'insieme $\left\{ \left(\mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau\right)^* \,\middle|\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\}$ tramite la matrice $\mathbb{M}_\varphi := \left(\left\langle \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)},\, \mathfrak{E}_\eta \cdot u_{\tau'} \right\rangle_{\pi_\varphi}\right)_{\tau,\tau' \in \mathbb{N}^n}$ che ha tutte le componenti in $k\big[q, q^{-1}\big]$, è triangolare inferiore, ed ha tutti gli elementi diagonali invertibili in $k\big[q, q^{-1}\big]$; a questo punto si può proseguire e concludere sulla falsariga di quanto già fatto per il Lemma 7.4*(c)*. $\square$

Osservazione 12.4. A questo punto si può ripetere l'Osservazione 7.5 in questo contesto più generale (basta sostituire F con $\overline{F}$, E con $\overline{E}$, e $\mathbb{B}_M$ con $\mathbb{B}_M^\varphi$, o più in generale inserire φ dovunque sia necessario); in particolare potremo esprimere (in modo unico) gli elementi di ${D^{\varphi}_{M'}}^*$, risp. di ${U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})}^*$, come serie formali negli $F^{\varphi}_{\alpha^1}, \dots, F^{\varphi}_{\alpha^N}, E^{\varphi}_{\alpha^1}, \dots, E^{\varphi}_{\alpha^N}$ a coefficienti in ${U^{M'}_0}^* \,\widehat{\otimes}\, {U^{Q}_0}^*$, risp. ${U^{M'}_0}^*$.

Siamo ora in grado di estendere al caso multiparametrico la Proposizione 7.6: riprendendo passo per passo la dimostrazione di quel risultato (utilizzando il Lemma 12.3 al posto del Lemma 7.4) si dimostra senza ulteriori difficoltà il seguente risultato generale:

Proposizione 12.5. *Il monomorfismo di algebre di Hopf formali* $j^{\varphi}_{M} \colon {U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})}^* \lhook\joinrel\longrightarrow {D_{M'}}^*$ *definito in §12.1 è univocamente determinato da*

$$j_{M}\colon \quad F^{\varphi}_i \mapsto F^{\varphi}_i \otimes 1\,, \quad L_\mu \mapsto L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)}\,, \quad E^{\varphi}_i \mapsto 1 \otimes E^{\varphi}_i \tag{12.6}$$

($i = 1, \dots, n$, $\mu \in M$); in particolare l'immagine di $j_{M'}$ è la chiusura della sottoalgebra generata dall'insieme

$$\left\{ F^{\varphi}_i \otimes 1, L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)}, 1 \otimes E^{\varphi}_i \,\middle|\, i = 1, \dots, n,\, \mu \in M \right\}. \ \square$$

Osservazione 12.6. Alla luce dei risultati precedenti potremo identificare anche $j^{\varphi}_{M}\left({U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})}^*\right)$ con lo spazio delle serie formali negli $F^{\varphi}_{\alpha^1}, \dots, F^{\varphi}_{\alpha^N}, E^{\varphi}_{\alpha^1}, \dots, E^{\varphi}_{\alpha^N}$ a coefficienti in ${U^{M'}_{\varphi,0}}^*$.

Una differenza significativa rispetto al caso uniparametrico sta nella realizzazione della pseudobase di $j^{\varphi}_{M}\left({U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})}^*\right)$ duale di una base PBW di $U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})$. Riprendendo l'analisi fatta per dimostrare il Lemma 12.3*(d)*, osserviamo quanto segue. Usando ancora le notazioni

$$\mathfrak{E}_\eta := \prod_{k=N}^{1} E^{(e_k)}_{\alpha^k}\,, \quad u_\tau := \prod_{i=1}^{n} \binom{\Lambda_i; 0}{t_i} \cdot \Lambda_i^{-Ent(t_i/2)}\,, \quad \mathfrak{F}_\phi := \prod_{k=1}^{N} F^{(f_k)}_{\alpha^k}$$

($\eta = (e_1, \dots, e_N) \in \mathbb{N}^N$, $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$, $\phi = (f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{N}^N$), il generico elemento della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})$ è $X_{\eta,\tau,\phi} := \mathfrak{E}_\eta \cdot u_\tau \cdot \mathfrak{F}_\phi$. Posto

$$\mathcal{F}_\phi := \prod_{k=N}^{1} \left(\overline{F}^{\varphi}_{\alpha^k}\right)^{(f_k)}, \qquad \mathcal{E}_\eta := \prod_{k=1}^{N} \left(\overline{E}^{\varphi}_{\alpha^k}\right)^{(e_k)}$$

abbiamo, per le (11.4),

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{F}^{\varphi}_\phi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)} \cdot \mathcal{E}^{\varphi}_\eta,\, \mathfrak{E}_{\bar\eta} \otimes u_\tau \cdot \mathfrak{F}_{\bar\phi} \right\rangle_{\pi_\varphi \otimes \overline{\pi_\varphi}} = \\ &= \left\langle \mathcal{F}^{\varphi}_\phi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)},\, \mathfrak{E}_{\bar\eta} \right\rangle_{\pi_\varphi} \cdot \left\langle L_{(1-\varphi)(\mu)} \cdot \mathcal{E}^{\varphi}_\eta,\, u_\tau \cdot \mathfrak{F}_{\bar\phi} \right\rangle_{\overline{\pi_\varphi}} = \\ &= \varepsilon q^a q^{-\left(\mu | s\left(\mathfrak{E}_{\bar\eta}\right)\right)} \delta_{\phi,\bar\eta} \cdot q^b q^{-\left(\mu | s\left(\mathfrak{F}_{\bar\phi}\right)\right)} \delta_{\eta,\bar\phi} \langle L_\mu, u_\tau \rangle_{\overline{\pi}} = \\ &= \delta_{\phi,\bar\eta}\, \delta_{\eta,\bar\phi} \cdot \varepsilon q^{a+b-\left(\mu | s\left(\mathfrak{E}_{\bar\eta}\right)\right) - \left(\mu | s\left(\mathfrak{F}_{\bar\phi}\right)\right)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \binom{m_i}{t_i}_{q_i} q_i^{-m_i \cdot Ent(t_i/2)} \end{aligned}$$

($\mu = \sum_{i=1}^n m_i \mu_i \in M_+$) dove $\varepsilon = \pm 1$ e a e b sono interi opportuni. Pertanto tra gli elementi di $j_M^\varphi \left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^* \right)$ della forma $\mathcal{F}_\phi^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)} \cdot \mathcal{E}_\eta^\varphi$ soltanto quelli con $(\phi,\eta) = (\bar\eta, \bar\phi)$ e $\mu \preceq \tau$ hanno valore non nullo su $\mathfrak{E}_{\bar\eta} \otimes u_\tau \cdot \mathfrak{F}_{\bar\phi}$. In particolare otteniamo formule del tipo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\bar\eta}^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)} \otimes L_{(1-\varphi)(\tau)} \cdot \mathcal{E}_{\bar\phi}^\varphi = \\
&\qquad = \varepsilon q^z \cdot X_{\bar\eta,\tau,\bar\phi}{}^* + \sum_{\tau' \prec \tau} \left\langle \mathcal{F}_{\bar\eta}^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)} \otimes L_{(1-\varphi)(\tau)} \cdot \mathcal{E}_{\bar\phi}^\varphi ,\, X_{\bar\eta,\tau',\bar\phi} \right\rangle \cdot X_{\bar\eta,\tau',\bar\phi}{}^* = \\
&\qquad\qquad = \varepsilon q^z \cdot X_{\bar\eta,\tau,\bar\phi}{}^* + \sum_{\tau' \prec \tau} c_{\tau,\tau'} \cdot X_{\bar\eta,\tau',\bar\phi}{}^*
\end{aligned}$$

dove z è un certo intero e $c_{\tau,\tau'} \in k\big[q,q^{-1}\big]$ (poniamo anche $c_{\tau,\tau} := \varepsilon q^z$ e $c_{\tau,\tau'} := 0$ per $\tau' \not\preceq \tau$); allora l'insieme $\left\{ \mathcal{F}_{\bar\eta}^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau)} \otimes L_{(1-\varphi)(\tau)} \cdot \mathcal{E}_{\bar\phi}^\varphi \,\middle|\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\}$ si ottiene dall'insieme $\left\{ X_{\bar\eta,\tau',\bar\phi}{}^* \,\middle|\, \tau' \in \mathbb{N}^n \right\}$ tramite la matrice $\mathbb{M}_{\bar\eta,\bar\phi}^\varphi := \big(c_{\tau,\tau'}\big)_{\tau,\tau' \in \mathbb{N}^n}$ che ha tutte le componenti in $k\big[q,q^{-1}\big]$, è triangolare inferiore, ed ha tutti gli elementi diagonali invertibili in $k\big[q,q^{-1}\big]$; allora anche la matrice inversa $\big(\mathbb{M}_{\bar\eta,\bar\phi}^\varphi\big)^{-1} = \big(c'_{\tau,\tau'}\big)_{\tau,\tau' \in \mathbb{N}^n}$ ha queste stesse proprietà, perciò gli $X_{\eta,\tau,\phi}{}^*$ sono dati dalle formule

$$X_{\eta,\tau,\phi}{}^* = \sum_{\tau' \preceq \tau} c'_{\tau,\tau'} \cdot \mathcal{F}_{\bar\eta}^\varphi \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau')} \otimes L_{(1-\varphi)(\tau')} \cdot \mathcal{E}_{\bar\phi}^\varphi \qquad\qquad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^n \;;$$

più precisamente, se definiamo gli elementi

$$B_{\bar\eta,\tau,\bar\phi}^{\varphi,\otimes} := \sum_{\tau' \preceq \tau} c'_{\tau,\tau'} \cdot L_{-(1+\varphi)(\tau')} \otimes L_{(1-\varphi)(\tau')}$$

abbiamo

$$X_{\bar\eta,\tau,\bar\phi}{}^* = \mathcal{F}_{\bar\eta}^\varphi \cdot B_{\bar\eta,\tau,\bar\phi}^{\varphi,\otimes} \cdot \mathcal{E}_{\bar\phi}^\varphi \tag{12.7}$$

quindi l'insieme

$$\left\{ \mathcal{F}_{\bar\eta}^\varphi \cdot B_{\bar\eta,\tau,\bar\phi}^{\varphi,\otimes} \cdot \mathcal{E}_{\bar\phi}^\varphi \,\middle|\, \bar\eta \in \mathbb{N}^N,\, \tau \in \mathbb{N}^n,\, \bar\phi \in \mathbb{N}^N \right\}$$

è la pseudobase di $j_M\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})\right)$ duale della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})$; in particolare

La pseudobase di $j_M\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})\right)$ *duale della base PBW di* $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})$ *è contenuta in* $j_M\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})\right) \cap \left(\mathcal{U}_{\varphi,-} \otimes \mathcal{U}_{\varphi,0}^M \otimes \mathcal{U}_{\varphi,+}\right)$.

12.7 Forme intere. Avendo costruito forme intere di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})$, possiamo studiare i corrispondenti sottospazi (in $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$) di forme lineari a valori "interi" su tali forme; dunque definiamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^* &:= \left\{ f \in U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^* \,\middle|\, \left\langle f, \mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\
\mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^* &:= \left\{ f \in U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^* \,\middle|\, \left\langle f, \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \right\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\}.
\end{aligned} \tag{12.8}$$

Poiché studiamo $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$ immerso in $D_{M'}^{\varphi}{}^*$, definiamo anche

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_M^\varphi &:= \left\{ f \in j_M^\varphi\Big(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*\Big) \,\Big|\, \Big\langle f, \mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{I}_M^\varphi &:= \left\{ f \in j_M^\varphi\Big(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*\Big) \,\Big|\, \Big\langle f, \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\}; \end{aligned} \tag{12.9}$$

e allora ovviamente j_M^φ si restringe a isomorfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$–moduli

$$j_M^\varphi : \mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^* \xrightarrow{\cong} \mathfrak{I}_M^\varphi, \qquad j_M^\varphi : \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{I}_M^\varphi. \tag{12.10}$$

Infine introduciamo i $k\big[q,q^{-1}\big]$–moduli

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\varphi,0}^{M'}{}^* &:= \left\{ f \in U_{\varphi,0}^{M'}{}^* \,\Big|\, \Big\langle f, \mathfrak{U}_{\varphi,0}^{M'} \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\} \\ \mathcal{U}_{\varphi,0}^{M'}{}^* &:= \left\{ f \in U_{\varphi,0}^{M'}{}^* \,\Big|\, \Big\langle f, \mathcal{U}_{\varphi,0}^{M'} \Big\rangle \subseteq k\big[q,q^{-1}\big] \right\}. \end{aligned} \tag{12.11}$$

Allora la generalizzazione della Proposizione 7.9 è la seguente:

Proposizione 12.8.

(a) Nell'identificazione di cui al §12.4, $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^*$ è il $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottomodulo di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$ delle serie formali

$$\sum_{\mathcal{F}^\varphi,\psi,\mathcal{E}^\varphi} \mathcal{F}^\varphi \cdot \psi \cdot \mathcal{E}^\varphi$$

in cui $\psi \in \mathfrak{U}_{\varphi,0}^{M'}{}^*$ e gli $\mathcal{F}^\varphi$, risp. gli $\mathcal{E}^\varphi$, sono monomi della base PBW di $\mathcal{U}_{\varphi,-}$, risp. di $\mathcal{U}_{\varphi,+}$. In particolare $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^*$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra di Hopf formale di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$.

(b) Nell'identificazione di cui al §12.4, $\mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^*$ è il $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottomodulo di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$ delle serie formali

$$\sum_{\mathfrak{F}^\varphi,\phi,\mathfrak{E}^\varphi} \mathfrak{F}^\varphi \cdot \phi \cdot \mathfrak{E}^\varphi$$

in cui $\phi \in \mathcal{U}_{\varphi,0}^{M'}{}^*$ e gli $\mathfrak{F}^\varphi$, risp. gli $\mathfrak{E}^\varphi$, sono monomi della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$, risp. di $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$. In particolare $\mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^*$ è una $k\big[q,q^{-1}\big]$–sottoalgebra formale di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$.

Dimostrazione. Si può ripetere in sostanza la dimostrazione della Proposizione 7.9, ma con alcune precisazioni; le indichiamo brevemente, discutendo il caso *(b)* che non era stato trattato in dettaglio nel caso uniparametrico; il caso *(a)* è del tutto analogo, anzi un po' più semplice.

Dato $f \in U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$, sviluppiamolo in serie

$$f = \sum_{\phi,\eta\in\mathbb{N}^N} \widehat{F}_\phi^\varphi \cdot \Phi_{\phi,\eta}^\varphi \cdot \widehat{E}_\eta^\varphi$$

in cui gli $\widehat{F}_\phi^\varphi$, risp. gli $\widehat{E}_\eta^\varphi$, sono monomi della base PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$, risp. di $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$, e $\Phi_{\phi,\eta}^\varphi \in U_{\varphi,0}^{M'}{}^*$. Sia $\Phi_{\phi,\eta}^\varphi = \sum_{\tau\in\mathbb{N}^n} a_{\phi,\eta}^\tau B_{\phi,\tau,\eta}^\varphi$ con

$$j_M\big(B_{\phi,\tau,\eta}^\varphi\big) = \sum_{\mu\preceq\tau} c_\tau^\mu \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)} = \sum_{\mu\preceq\tau} c_\tau^\mu \cdot L_\mu^\varphi = B_{\phi,\tau,\eta}^{\varphi,\otimes}$$

dove $L^\varphi_\mu := L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)}$, cfr. Osservazione 12.6. Allora per ogni monomio (ordinato) $\overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \cdot \overline{F}_{\bar\phi}$ nella base PBW di $\mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\Big\langle f, \overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \cdot \overline{F}_{\bar\phi} \Big\rangle &= \Bigg\langle \sum_{\phi,\eta\in\mathbb{N}^N} \widehat{F}^\varphi_\phi \cdot \Phi^\varphi_{\phi,\eta} \cdot \widehat{E}^\varphi_\eta, \overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \cdot \overline{F}_{\bar\phi} \Bigg\rangle = \\
&= \sum_{\phi,\tau,\eta} a^\tau_{\phi,\eta} \cdot \Big\langle \widehat{F}^\varphi_\phi \cdot B^\varphi_\tau \cdot \widehat{E}^\varphi_\eta, \overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \cdot \overline{F}_{\bar\phi} \Big\rangle = \\
&= \sum_{\phi,\tau,\eta} a^\tau_{\phi,\eta} \cdot \sum_{\mu\preceq\tau} c^\mu_\tau \cdot \Big\langle \widehat{F}^\varphi_\phi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)} \cdot \widehat{E}^\varphi_\eta, \overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \otimes \overline{F}_{\bar\phi} \Big\rangle_{\pi_\varphi \otimes \overline{\pi_\varphi}} = \\
&= \sum_{\phi,\tau,\eta} a^\tau_{\phi,\eta} \cdot \sum_{\mu\preceq\tau} c^\mu_\tau \cdot \Big\langle \widehat{F}^\varphi_\phi \cdot L_{-(1+\varphi)(\mu)}, \overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \Big\rangle_{\pi_\varphi} \cdot \Big\langle L_{(1-\varphi)(\mu)} \cdot \widehat{E}^\varphi_\eta, \overline{F}_{\bar\phi} \Big\rangle_{\overline{\pi_\varphi}} = \\
&= \sum_{\tau} a^\tau_{\bar\eta,\bar\phi} \cdot \sum_{\mu\preceq\tau} c^\mu_\tau \cdot q^a \cdot q^{-\left(\mu | s\left(\mathfrak{E}_{\bar\phi}\right)\right)} \cdot \langle L^\varphi_\tau, L_\nu \otimes 1 \rangle_{\pi_\varphi \otimes \overline{\pi_\varphi}} \cdot q^b \cdot q^{-\left(\mu | s\left(\mathfrak{F}_{\bar\eta}\right)\right)} = \\
&= q^{a+b} \cdot \sum_{\tau} a^\tau_{\bar\eta,\bar\phi} \cdot \sum_{\mu\preceq\tau} c^\mu_\tau \cdot \Big\langle L^\varphi_\tau, L_{\nu - \left(s\left(\mathfrak{E}_{\bar\phi}\right) + s\left(\mathfrak{F}_{\bar\eta}\right)\right)} \otimes 1 \Big\rangle_{\pi_\varphi \otimes \overline{\pi_\varphi}} = \\
&= q^{a+b} \cdot \sum_{\tau} a^\tau_{\bar\eta,\bar\phi} \cdot \Big\langle B^\varphi_\tau, L_{\nu - \left(s\left(\mathfrak{E}_{\bar\phi}\right) + s\left(\mathfrak{F}_{\bar\eta}\right)\right)} \Big\rangle = \\
&= q^{a+b} \cdot \Big\langle \Phi^\varphi_{\bar\eta,\bar\phi}, L_{\nu - \left(s\left(\mathfrak{E}_{\bar\phi}\right) + s\left(\mathfrak{F}_{\bar\eta}\right)\right)} \Big\rangle
\end{aligned}$$

dove a e b sono interi opportuni, dipendenti soltanto da $\bar\eta$ e $\bar\phi$ rispettivamente; perciò se $f \in \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^*$, abbiamo $\langle f, \overline{E}_{\bar\eta} \cdot L_\nu \cdot \overline{F}_{\bar\phi} \rangle \in k\big[q, q^{-1}\big]$ per ogni $\bar\eta$, ν, $\bar\phi$, e quindi $q^{a+b} \cdot \Big\langle \Phi^\varphi_{\bar\eta,\bar\phi}, L_{\nu - \left(s\left(\mathfrak{E}_{\bar\phi}\right) + s\left(\mathfrak{F}_{\bar\eta}\right)\right)} \Big\rangle \in k\big[q, q^{-1}\big]$ e infine — poiché q^{a+b} è invertibile in $k\big[q, q^{-1}\big]$ — $\Big\langle \Phi^\varphi_{\bar\eta,\bar\phi}, L_{\nu'} \Big\rangle \in k\big[q, q^{-1}\big]$ per ogni $\nu' \in M'$, cioè $\Phi^\varphi_{\bar\eta,\bar\phi} \in \mathcal{U}^{M'}_{\varphi,0}{}^*$, q.e.d.

Lo stesso tipo di analisi consente di adattare al caso generale il resto della dimostrazione svolta per il caso uniparametrico. □

A questo punto dobbiamo definire nuovi oggetti:

Definizione 12.9.

(a) Chiamiamo A^φ_M la sottoalgebra di $U^M_{\varphi,\leq} \otimes U^P_{\varphi,\geq}$ $\big(\subset D^\varphi_{M'}{}^*\big)$ generata da

$$\Big\{ F^\varphi_i \otimes 1,\, L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)},\, 1 \otimes E^\varphi_i \,\Big|\, i = 1, \dots, n;\, \mu \in M \Big\}.$$

(b) Definiamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^\varphi_M &:= \Big\{ f \in A^\varphi_M \,\Big|\, \Big\langle f, \mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q, q^{-1}\big] \Big\} = A^\varphi_M \cap \mathfrak{I}^\varphi_M \\
\mathcal{A}^\varphi_M &:= \Big\{ f \in A^\varphi_M \,\Big|\, \langle f, \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g}) \Big\rangle \subseteq k\big[q, q^{-1}\big] \Big\} = A^\varphi_M \cap \mathcal{I}^\varphi_M \,. \square
\end{aligned}$$

Il seguente risultato estende il Lemma 7.11:

Lemma 12.10.

(a) $\mathfrak{A}_M^\varphi$ *è la* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_{\varphi,\leq}^M \otimes U_{\varphi,\geq}^P$ *generata da*

$$\Big\{ \overline{F}_{\alpha^h}^\varphi \otimes 1,\ L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)},\ 1 \otimes \overline{E}_{\alpha^k}^\varphi \ \Big|\ h,k = 1,\dots,N;\ \mu \in M \Big\}\ .$$

In particolare $\mathfrak{A}_M^\varphi$ *è* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera di* A_M^φ *.*

(b) $\mathcal{A}_M^\varphi$ *è la* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_{\varphi,\leq}^M \otimes U_{\varphi,\geq}^P$ *generata da*

$$\left\{ \big(F_{\alpha^h}^\varphi\big)^{(a)} \otimes 1,\ \binom{L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)};\, c}{t},\ L_{(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{-(1-\varphi)(\mu_i)},\ 1 \otimes \big(E_{\alpha^k}^\varphi\big)^{(d)} \ \right| \\ \left| \ h,k,i = 1,\dots,n;\ a,t,d \in \mathbb{N};\ c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

In particolare $\mathcal{A}_M^\varphi$ *è* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera di* A_M^φ *.*

Dimostrazione. Si segue passo per passo la dimostrazione del Lemma 7.11, ricordando (cfr. (12.4)) che $L_{-(1+\varphi)(\mu)}$ e $L_{(1-\varphi)(\mu)}$ operano entrambi su $U_{\varphi,0}^{M'}$ allo stesso modo. $\square$

Il seguente risultato generalizza il Lemma 7.12, prendendo spunto da [C-V2], Lemma 2.5 (il quale estende [D-L], Lemma 4.3, al caso multiparametrico), mettendo in relazione i gruppi formali quantici multiparametrici con le algebre quantiche di funzioni multiparametriche; in particolare si dimostra il fatto che $\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]$ e $\mathcal{F}_{\varphi,M}[G]$ siano forme intere (su $k\big[q,q^{-1}\big]$) di $F_{q,\varphi}^M[G]$ *come algebre di Hopf*, il che era noto soltanto per $\mathfrak{F}_{\varphi,P}[G]$, cfr. [C-V2]. Ancora una volta la dimostrazione di questo risutato non presenta differenze rilevanti rispetto al caso uniparametrico.

Proposizione 12.11.

(a) L'immersione di algebre di Hopf formali

$$j_M^\varphi \colon U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^* \lhook\joinrel\longrightarrow {D_{M'}^\varphi}^*$$

si restringe ad un'immersione di algebre di Hopf formali

$$\mu_M^\varphi \colon F_{q,\varphi}^M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow {D_{M'}^\varphi}^*$$

la cui immagine è contenuta in A_M^φ*.*

(b) Le immersioni in (a) conservano le forme intere, precisamente

$$\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] = (\mu_M^\varphi)^{-1}\big(\mathfrak{A}_M^\varphi\big)\,, \qquad \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] = (\mu_M^\varphi)^{-1}\big(\mathcal{A}_M^\varphi\big)$$

così che la restrizione dà immersioni di $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre*

$$\mu_M^\varphi \colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{A}_M^\varphi\,, \qquad \mu_M^\varphi \colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{A}_M^\varphi\,;$$

ne segue che

$\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]$ *è una* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera di* $F_{q,\varphi}^M[G]$ *come algebra di Hopf*

e

$\mathcal{F}_{\varphi,M}[G]$ *è una* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera di* $F_{q,\varphi}^M[G]$ *come algebra di Hopf.* □

12.12. Come nel caso uniparametrico, il risultato precedente può essere migliorato, estendendo le immersioni ad isomorfismi. Definiamo coefficienti matriciali $\psi_{-\mu}$ come in §7.12, per ogni $\mu \in M$ (si ricordi che $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})$ e $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$ sono isomorfe come algebre, dunque la loro teoria delle rappresentazioni è la stessa). Allora si applica nuovamente l'analisi fatta nella dimostrazione del Teorema 7.14, così da ricavare la seguente generalizzazione, che migliora [C-V2], Proposition 2.7 (che a sua volta generalizza [D-L], Theorem 4.6, che era la base per dimostrare il Teorema 7.4):

Teorema 12.13. *Sia* $\rho := \sum_{i=1}^n \mu_i$ *.*

(a) L'immersione di algebre $\mu_M^\varphi \colon F_{q,\varphi}^M[G] \hookrightarrow A_M$ *si estende ad un isomorfismo di* $k(q)$*–algebre*

$$\mu_M^\varphi \colon F_{q,\varphi}^M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } A_M^\varphi \; ; \tag{12.12}$$

inoltre $\mu_M^\varphi\big(F_{q,\varphi}^M[G]\big)$ *è densa in* $j_M^\varphi\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$*.*

(b) L'immersione di algebre $\mu_M^\varphi \colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] \hookrightarrow \mathfrak{A}_M^\varphi$ *si estende ad un isomorfismo di* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre*

$$\mu_M^\varphi \colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathfrak{A}_M^\varphi \; ; \tag{12.13}$$

inoltre $\mu_M^\varphi\big(\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]\big)$ *è densa in* $\mathfrak{I}_M^\varphi$ *.*

(c) L'immersione di algebre $\mu_M^\varphi \colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] \hookrightarrow \mathcal{A}_M^\varphi$ *si estende ad un isomorfismo di* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre*

$$\mu_M^\varphi \colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{A}_M^\varphi \; ; \tag{12.14}$$

inoltre $\mu_M^\varphi\big(\mathcal{F}_{\varphi,M}[G]\big)$ *è densa in* $\mathcal{I}_M^\varphi$ *.* □

12.14 La struttura di Hopf. Il programma di estendere al caso multiparametrico la nostra analisi dei gruppi formali quantici richiede ora di indagare più in profondità la struttura di algebra di Hopf formale di ${D_{M'}}^*$. Questo si può fare ancora lungo le linee che abbiamo seguito nei §§7.15–16: le gradazioni che abbiamo considerato allora sulle algebre di Borel quantiche sono tuttora valide (nel senso che sono anche gradazioni delle corrispondenti algebre di Hopf formali multiparametriche), quindi possiamo ripetere la stessa analisi (che adesso coinvolge i nuovi accoppiamenti DRT, dipendenti da φ), definendo su ${D_{M'}}^*$ una pseudogradazione che dia grado α_i a E_i^φ, grado $-\alpha_i$ a F_i^φ, e così via. In particolare l'accoppiamento naturale di valutazione ${D_{M'}^\varphi}^* \otimes D_{M'}^\varphi \to k(q)$ rispetta le (pseudo)gradazioni in gioco.

Ripercorrendo dunque l'analisi fatta in §7.16 troviamo che

$$\epsilon\Big(\overline{F}_{\alpha^k}^\varphi \otimes 1\Big) = 0\,, \quad \epsilon\Big(L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)}\Big) = 1\,, \quad \epsilon\Big(1 \otimes \overline{E}_{\alpha^k}^\varphi\Big) = 0 \tag{12.15}$$

$(\, k=1,\dots,N; \lambda \in P\,)$, e

$$\begin{aligned} &\epsilon\Big(\big(F_i^\varphi\big)^{(f)} \otimes 1\Big) = 0\,, \qquad \epsilon\big(L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)}\big) = 1 \\ &\epsilon\left(\left(\begin{matrix} L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)};\, c \\ t \end{matrix}\right)\right) = \binom{c}{t}_{q_i}\,, \\ &\epsilon\big(L_{(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{-(1-\varphi)(\mu_i)}\big) = 1\,, \quad \epsilon\Big(1 \otimes \big(E_i^\varphi\big)^{(e)}\Big) = 0 \end{aligned} \tag{12.16}$$

$(\, i=1,\dots,n; f,t,e \in \mathbb{N}; c \in \mathbb{Z}\,)$; gli elementi in esame generano l'algebra $j_M^\varphi\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$ (in senso topologico), quindi le (12.15) o le (12.16) determinano univocamente $\epsilon\colon j_M^\varphi\left(U_q^{M'}(\mathfrak{g})^*\right) \longrightarrow k(q)$.

Per quanto riguarda l'antipodo, otteniamo — come in §7.16 — che $S\Big(\big(F_i^\varphi\big)^{(f)} \otimes 1\Big)$ è espresso da una serie del tipo

$$S\Big(\big(F_i^\varphi\big)^{(f)} \otimes 1\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\sum_h a_h + b_h = n} \prod_{h=1}^{N} \prod_{r=1}^{a_h} \prod_{s=1}^{b_h} \big(q^r - q^{-r}\big) \cdot \big(q^s - q^{-s}\big) \cdot X_n \tag{12.17}$$

dove $X_n \in \mathfrak{U}_- \otimes \mathcal{U}_0^{M'^*} \otimes \mathfrak{U}_+$, e analogamente accade anche per tutti gli altri generatori di $\mathcal{A}_M^\varphi$. In particolare se ε è una radice ℓ–esima dell'unità, per $\ell \in \mathbb{N}$, si ha che

Per ogni radice dell'unità ε, *le serie* $S\Big(\big(F_i^\varphi\big)^{(f)} \otimes 1\Big)$, $S\left(\left(\begin{smallmatrix} L_{-\mu_i} \otimes L_{\mu_i};\, c \\ t \end{smallmatrix}\right)\right)$, $S\big(L_{(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{-(1-\varphi)(\mu_i)}\big)$ *e* $S\Big(1 \otimes \big(E_i^\varphi\big)^{(e)}\Big)$ *sono somme finite modulo* $(q-\varepsilon)$.

Come in §7.16 si possono calcolare i termini di queste serie fino ad un ordine prefissato arbitrario: per i nostri scopi ci basta conoscere i termini al più fino al grado 2 in $\big(q-q^{-1}\big)$. Il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} S\left(F_i^\varphi \otimes 1\right) &\equiv -q^{-(\alpha_i|\alpha_i+\tau_i)} \cdot F_i^\varphi L_{-(1+\varphi)(-\alpha_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(-\alpha_i)} && \mod \big(q-q^{-1}\big)^2 \\ S\left(L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)}\right) &\equiv L_{-(1+\varphi)(-\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(-\mu_i)} && \mod \big(q-q^{-1}\big)^2 \\ S\left(L_{-(1+\varphi)(-\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(-\mu_i)}\right) &\equiv L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)} && \mod \big(q-q^{-1}\big)^2 \\ S\left(\left(\begin{matrix} L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)};\, 0 \\ 1 \end{matrix}\right)\right) &\equiv -L_{(1+\varphi)(-\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(-\mu_i)} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\begin{matrix} L_{-(1+\varphi)(\mu_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)});\, 0 \\ 1 \end{matrix}\right) && \mod \big(q-q^{-1}\big) \\ S\left(1 \otimes E_i^\varphi\right) &\equiv -q^{+(\alpha_i|\alpha_i-\tau_i)} \cdot L_{-(1+\varphi)(-\alpha_i)} \otimes L_{(1-\varphi)(-\alpha_i)} E_i^\varphi && \mod \big(q-q^{-1}\big)^2 \end{aligned}$$

per ogni $i=1,\dots,n$; $c \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$.

Analogamente per la comoltiplicazione troviamo che $\Delta\Big(\big(F_i^\varphi\big)^{(f)} \otimes 1\Big)$ è espresso da una serie del tipo

$$\Delta\Big((F_i^\varphi)^{(f)}\otimes 1\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{\sum_h(a_h+a'_h+\\ +b_h+b'_h)=n}}\prod_{h=1}^{N}\prod_{r=1}^{a_h}\prod_{s=1}^{b_h}\big(q^r-q^{-r}\big)\cdot\big(q^s-q^{-s}\big)\cdot \prod_{r'=1}^{a'_h}\prod_{s'=1}^{b'_h}\Big(q^{r'}-q^{-r'}\Big)\cdot\Big(q^{s'}-q^{-s'}\Big)\cdot Y_n \tag{12.18}$$

in cui $Y_n\in\Big(\mathfrak{U}_{\varphi,-}\otimes\mathcal{U}_{\varphi,0}^{M'\,*}\otimes\mathfrak{U}_{\varphi,+}\Big)^{\otimes 2}$; analoga considerazione vale anche per tutti gli altri generatori di $\mathcal{A}_M^\varphi$, così che si ottengono formule del tutto analoghe alla (12.18). In particolare allora se ε è una radice ℓ–esima dell'unità ($\ell\in\mathbb{N}$), tali serie sono somme finite modulo $(q-\varepsilon)$, cioè

Per ogni radice dell'unità ε, le serie $\Delta\Big((F_i^\varphi)^{(f)}\otimes 1\Big)$, $\Delta\Big(\Big(\begin{smallmatrix}L_{-(1+\varphi)(\mu_i)}\otimes L_{(1-\varphi)(\mu_i)};\,c\\ t\end{smallmatrix}\Big)\Big)$, $\Delta\big(L_{(1+\varphi)(\mu_i)}\otimes L_{-(1-\varphi)(\mu_i)}\big)$ e $\Delta\Big(1\otimes(E_i^\varphi)^{(e)}\Big)$ sono somme finite modulo $(q-\varepsilon)$.

Come per S, è possibile calcolare i termini delle serie in esame fino ad un qualsiasi ordine prefissato; nel seguito avremo bisogno di conoscere tali termini fino al grado al più 2 (in $\big(q-q^{-1}\big)$): precisamente, il calcolo diretto come in §7.16 ci dà (con notazione $F_i^{\varphi,\otimes},:=F_i^\varphi\otimes 1$, $L_\mu^{\varphi,\otimes}:=L_{-(1+\varphi)\mu}\otimes L_{(1-\varphi)(\mu)}$, $E_i^{\varphi,\otimes}:=1\otimes E_i^\varphi$, e così via)

$$\Delta\big(F_i^{\varphi,\otimes}\big)\equiv F_i^{\varphi,\otimes}\otimes 1^\otimes+1^\otimes\otimes F_i^{\varphi,\otimes}+(q_i-1)\cdot\begin{pmatrix}L_{\alpha_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}\otimes F_i^{\varphi,\otimes}+\big(q_i-q_i^{-1}\big)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\alpha,\beta\in R^+}C_{\alpha,\beta}^{i,+}\big(q_\alpha-q_\alpha^{-1}\big)\Big(q_\beta-q_\beta^{-1}\Big)\left(E_\alpha^{\varphi,\otimes}\otimes F_\beta^{\varphi,\otimes}+(q_i-1)\cdot\begin{pmatrix}L_{\alpha_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}E_\alpha^{\varphi,\otimes}\otimes F_\beta^{\varphi,\otimes}\right)$$

$$\Delta\big(L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes}\big)\equiv L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes}\otimes L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes}\,,\qquad\qquad \Delta\big(L_{-\mu_i}^{\varphi,\otimes}\big)\equiv L_{-\mu_i}^{\varphi,\otimes}\otimes L_{-\mu_i}^{\varphi,\otimes}$$

$$\Delta\left(\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}\otimes 1^\otimes+1\otimes\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}+(q_i-1)\cdot\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}+$$
$$+(2)_{q^{-1}}^2(d_i)_q^{-1}\cdot\sum_{\gamma\in R^+}(q-1)\,[d_\gamma]_q\big[(\mu_i|\gamma)\big]_q\cdot\Bigg(E_\gamma^{\varphi,\otimes}\otimes F_\gamma^{\varphi,\otimes}+$$
$$+(q_i-1)\cdot E_\gamma^{\varphi,\otimes}\otimes F_\gamma^{\varphi,\otimes}\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}+(q_i-1)\cdot\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}E_\gamma^{\varphi,\otimes}\otimes F_\gamma^{\varphi,\otimes}+$$
$$+(q_i-1)^2\cdot\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}E_\gamma^{\varphi,\otimes}\otimes F_\gamma^{\varphi,\otimes}\begin{pmatrix}L_{\mu_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}\Bigg)$$

$$\Delta\big(E_i^{\varphi,\otimes}\big)\equiv 1^\otimes\otimes E_i^{\varphi,\otimes}+E_i^{\varphi,\otimes}\otimes 1^\otimes+(q_i-1)\cdot E_i^{\varphi,\otimes}\otimes\begin{pmatrix}L_{\alpha_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}-\big(q_i-q_i^{-1}\big)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\alpha,\beta\in R^+}C_{\alpha,\beta}^{i,-}\big(q_\alpha-q_\alpha^{-1}\big)\Big(q_\beta-q_\beta^{-1}\Big)\left(E_\alpha^{\varphi,\otimes}\otimes F_\beta^{\varphi,\otimes}+(q_i-1)\cdot E_\alpha^{\varphi,\otimes}\otimes F_\beta^{\varphi,\otimes}\begin{pmatrix}L_{\alpha_i}^{\varphi,\otimes};\,0\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

dove il segno $\equiv$ indica la congruenza modulo $\big(q-q^{-1}\big)^2$ e le $C_{\alpha,\beta}^{i,\pm}$ sono definite in §7.16.

§ 13 Il gruppo quantico multiparametrico $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$

13.1 L'algebra quantica $U_{q,\varphi}(\mathfrak{h})$. Come abbiamo fatto per i gruppi formali quantici uniparametrici, così anche per quelli multiparametrici possiamo dare una veste assiomatica ai risultati che abbiamo ottenuto nel §12: in particolare introduciamo, tramite una presentazione per generatori e relazioni, un nuovo gruppo quantico multiparametrico, precisamente un'algebra di Hopf formale $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ che generalizza $U_q^M(\mathfrak{h})$, e sta a $U(\mathfrak{h}^\tau)$ come $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{g})$ sta a $U(\mathfrak{g}^\tau)$.

Per cominciare definiamo $\mathbf{H}_M^\varphi$ come la $k(q)$–algebra associativa unitaria con generatori

$$F_i^\varphi\,,\ L_\mu^\varphi\,,\ E_i^\varphi \quad (\lambda \in M;\, i=1,\dots,n)$$

e relazioni

$$\begin{aligned}
L_0^\varphi = 1\,, \qquad L_\mu^\varphi L_\nu^\varphi = L_{\mu+\nu}^\varphi & \qquad \forall\, \mu,\, \nu \in M \\
L_\mu^\varphi F_j^\varphi = q^{(\alpha_j|(1+\varphi)(\mu))} F_j^\varphi L_\mu^\varphi & \qquad \forall\, \mu \in M,\, j=1,\dots,n \\
L_\mu^\varphi E_j^\varphi = q^{(\alpha_j|(1-\varphi)(\mu))} E_j^\varphi L_\mu^\varphi & \qquad \forall\, \mu \in M,\, j=1,\dots,n \\
E_i^\varphi F_j^\varphi - F_j^\varphi E_i^\varphi = 0 & \qquad \forall\, i,j=1,\dots,n \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k q^{+c_{ij}^k} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} (E_i^\varphi)^{1-a_{ij}-k} E_j^\varphi (E_i^\varphi)^k = 0 & \qquad \forall\, i,j=1,\dots,n,\, i\neq j \\
\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k q^{-c_{ij}^k} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} (F_i^\varphi)^{1-a_{ij}-k} F_j^\varphi (F_i^\varphi)^k = 0 & \qquad \forall\, i,j=1,\dots,n,\, i\neq j
\end{aligned} \tag{13.1}$$

dove $c_{ij}^k := -\big(k\alpha_i \,\big|\, \tau_j + (1-a_{ij}-k)\,\tau_i\big) - \big(\alpha_j \,\big|\, (1-a_{ij}-k)\,\tau_i\big)$ per ogni $i,\,j,\,k$. Useremo anche la notazione $M_i^\varphi := L_{\mu_i}^\varphi$ $(\forall\, i=1,\dots,n)$, dove $\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ è come sempre una $\mathbb{Z}$–base fissata di M, cfr. §2.1 e §3.1.

Consideriamo in $U_{\varphi,-}$ $(\subseteq \mathbf{H}_M)$ l'insieme dei vettori radice $\{\, F_{\alpha^1}^\varphi,\dots,F_{\alpha^N}^\varphi \,\}$, in $U_{\varphi,0}^M$ $(\subseteq \mathbf{H}_M)$ gli elementi

$$B_{\eta,\tau,\phi}^\varphi := \sum_{\tau'\preceq\tau} c'_{\tau,\tau'} \cdot L_{\tau'}^\varphi$$

(dove i coefficienti $c'_{\tau,\tau'}$ sono definiti in §12.6), e in $U_{\varphi,+}$ $(\subseteq \mathbf{H}_M)$ l'insieme dei vettori radice $\{\, E_{\alpha^1}^\varphi,\dots,E_{\alpha^N}^\varphi \,\}$.

Definiamo $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ il completamento di $\mathbf{H}_M$ tramite le serie formali a coefficienti in $k(q)$ negli elementi dell'insieme

$$\mathbb{B}_M^\varphi := \left\{ \prod_{r=N}^{1} (F_{\alpha^r}^\varphi)^{f_r} \cdot B_{\eta,\tau,\phi}^\varphi \cdot \prod_{r=1}^{N} (E_{\alpha^r}^\varphi)^{e_r} \,\middle|\, \phi = (f_r)_r, \eta = (e_r)_r \in \mathbb{N}^N\,;\, \tau \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Dunque (cfr. §1.1) $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ è il completamento di $\mathbf{H}_M^\varphi$ relativamente alla topologia (di $\mathbf{H}_M^\varphi$) per cui un sistema fondamentali di intorni di 0 sia l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbf{H}_M^\varphi$ che contengano quasi tutti gli elementi di $\mathbb{B}_M^\varphi$; l'insieme $\mathbb{B}_M^\varphi$ è una *pseudobase* di $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$, cioè un sistema completo di generatori lineari indipendenti, così che ogni elemento del modulo in esame si esprime in modo unico come combinazione lineare infinita a coefficienti in $k(q)$ degli elementi della pseudobase.

In parole povere, possiamo dire che $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ è un'algebra di serie formali (non-commutative) con le formule (13.1) come regole di commutazione; perciò diremo anche che $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ *è generata topologicamente* (o anche *in senso topologico*) *da* F_i^{φ}, L_{μ}^{φ}, E_i^{φ} $(\mu \in M\,;\, i = 1, \dots, n)$.

Infine sottolineiamo il fatto che, in virtù del Lemma 12.3, possiamo identificare $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ con lo spazio delle serie formali, a coefficienti in $U_{\varphi,0}^{M'\,*}$, nelle "variabili" $F_{\alpha^1}^{\varphi}, F_{\alpha^2}^{\varphi}, \dots, F_{\alpha^N}^{\varphi}$, $E_{\alpha^1}^{\varphi}, E_{\alpha^2}^{\varphi}, \dots, E_{\alpha^N}^{\varphi}$.

Grazie ai risultati del §12, possiamo realizzare esplicitamente $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ e dotarla inoltre di una struttura di algebra di Hopf formale; in effetti la definizione di $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ è fatta appositamente *su misura* per soddisfare l'enunciato seguente — che è la generalizzazione immediata (con dimostrazione del tutto analoga) del Teorema 8.2 — cioè non è altro che una presentazione esplicita di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$.

Teorema 13.2. *Esiste un isomorfismo di $k(q)$–algebre topologiche*

$$\nu_M^{\varphi}\colon U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\;\cong\;} j_M^{\varphi}\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$$

definito da

$$\nu_M^{\varphi}\colon \quad F_i^{\varphi} \mapsto F_i^{\varphi} \otimes 1\,, \quad L_{\mu}^{\varphi} \mapsto L_{-(1+\varphi)(\mu)} \otimes L_{(1-\varphi)(\mu)}\,, \quad E_i^{\varphi} \mapsto 1 \otimes E_i^{\varphi} \qquad \forall\, i, \mu\,;$$

allora il pull-back della struttura di Hopf formale di $j_M^{\varphi}\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$ definisce una struttura di algebra di Hopf formale su $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$, così che $\nu_M^{\varphi}\colon U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} j_M^{\varphi}\left(U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*\right)$ e $j_M^{\varphi\,-1} \circ \nu_M^{\varphi}\colon U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$ sono isomorfismi di algebre di Hopf formali su $k(q)$. $\square$

Osservazione 13.3. *(a)* Osserviamo che, come diretta conseguenza del Teorema 13.2 e delle definizioni, posto

$$Y_{\eta,\tau,\phi} := \mathcal{F}_{\eta} \cdot B_{\eta,\tau,\phi}^{\varphi} \cdot \mathcal{E}_{\phi}$$

(con le notazioni del §12), si ha

$$\nu_M^{\varphi}\colon \quad Y_{\eta,\tau,\phi} \mapsto {X_{\eta,\tau,\phi}}^*$$

per ogni $\eta \in \mathbb{N}^N$, $\tau \in \mathbb{N}^n$, $\phi \in \mathbb{N}^N$ (cfr. §12.6).

(b) Il teorema precedente ci dice in breve che la definizione data in §8.1 non è che una descrizione di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$; tuttavia abbiamo voluto farne appunto una definizione, introducendo il simbolo $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$, per sottolineare le analogie esistenti con $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{g})$, che appariranno particolarmente evidenti alla luce dei risultati del §14; circostanza questa che generalizza quanto già osservato in §8.3*(a)*.

Il Lemma 8.4 si estende senza difficoltà al caso multiparametrico come segue:

Lemma 13.4. *Il sottoinsieme*

$$\Omega_M^\varphi := \left\{ x = \sum_\sigma F_\sigma^\varphi \cdot \phi_\sigma^\varphi \cdot E_\sigma^\varphi \in U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h}) \,\middle|\, \phi_\sigma^\varphi \in U_{\varphi,0}^M,\ \forall\, \sigma \right\}$$

(dove $x = \sum_\sigma F_\sigma^\varphi \cdot \phi_\sigma^\varphi \cdot E_\sigma^\varphi$ *è lo sviluppo di* $x \in U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ *come serie a coefficienti in* $U_{\varphi,0}^{M'^*}$ *) è una sottoalgebra di Hopf formale di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$. $\square$

Passiamo ora a definire forme intere di $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ e a dimostrarne le prime proprietà, sulla falsariga di quanto fatto in §§8.5–9. Come sempre useremo il termine pseudobase per indicare una base di un modulo topologico, cioè un sistema completo di generatori lineari indipendenti, così che ogni elemento del modulo in esame si esprima in modo unico come serie negli elementi della pseudobase.

Definizione 13.5. *Sia* $\mathcal{H}_M^\varphi$ *la* $k\big[q, q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ *generata da*

$$\left\{ \overline{F}_{\alpha^r}^\varphi,\, L_\mu^\varphi,\, \overline{E}_{\alpha^r}^\varphi \,\middle|\, r = 1, \dots, N\,;\, \mu \in M \right\}.$$

Chiamiamo $\mathcal{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ *la chiusura di* $\mathcal{H}_M^\varphi$ *nella topologia di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$. $\square$

Teorema 13.6. $\mathcal{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ *è una* $k\big[q, q^{-1}\big]$*–forma intera (in senso topologico) di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$*, come algebra di Hopf formale, che ha pseudobase su* $k\big[q, q^{-1}\big]$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{B}}_M^\varphi &:= \left\{ Y_{\eta,\tau,\phi} \,\middle|\, \eta \in \mathbb{N}^N, \tau \in \mathbb{N}^n, \phi \in \mathbb{N}^N \right\} = \\ &= \left\{ \mathcal{F}_\eta^\varphi \cdot B_{\eta,\tau,\phi}^\varphi \cdot \mathcal{E}_\phi^\varphi \,\middle|\, \eta \in \mathbb{N}^N, \tau \in \mathbb{N}^n, \phi \in \mathbb{N}^N \right\}; \end{aligned} \tag{13.2}$$

in particolare $\nu_M^\varphi\big(\mathcal{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})\big) = j_M^\varphi\left(\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^*\right) =: \mathfrak{I}_M^\varphi$. $\square$

Consideriamo $\Omega_M^{\varphi\prime} := \Omega_M^\varphi \cap \big(\nu_M^\varphi\big)^{-1}\big(\mathcal{I}_M^\varphi\big)$; osserviamo poi che (cfr. Proposizione 12.8*(b)*)

$$\Omega_M^{\varphi\prime} = \left\{ x = \sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma^\varphi \cdot \phi_\sigma^\varphi \cdot \mathfrak{E}_\sigma^\varphi \in U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h}) \,\middle|\, \mathfrak{F}_\sigma^\varphi \in \mathfrak{U}_{\varphi,-}, \phi_\sigma^\varphi \in \mathfrak{U}_{\varphi,0}^M, \mathfrak{E}_\sigma^\varphi \in \mathfrak{U}_{\varphi,+},\ \forall\, \sigma \right\}.$$

Definizione 13.7. *Sia* $\mathfrak{H}_M^\varphi$ *la* $k\big[q, q^{-1}\big]$*–sottoalgebra di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ *generata da*

$$\left\{ \big(F_i^\varphi\big)^{(f)},\, \binom{M_i^\varphi; c}{t},\, \big(M_i^\varphi\big)^{-1},\, \big(E_i^\varphi\big)^{(e)} \,\middle|\, f, c, t, e \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, n \right\}.$$

Chiamiamo $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ *il* $k\big[q, q^{-1}\big]$*–sottomodulo di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$

$$\left\{ x \in \Omega_M^{\varphi\prime} \,\middle|\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ \text{con}\ x_n \in \sum_{\sum_h (a_h + b_h) = n} \prod_{h=1}^N \prod_{r,s=1}^{a_h, b_h} \big(q^r - q^{-r}\big) \cdot \big(q^s - q^{-s}\big) \cdot \mathfrak{H}_M^\varphi \right\}. \ \square \tag{13.3}$$

Ecco allora la generalizzazione del Teorema 8.8:

Teorema 13.8. $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ *è una* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–forma intera (in senso topologico) di* $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ *e* Ω_M^φ*, come algebre di Hopf formali.* $\square$

13.9 Presentazione di $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ per generatori e relazioni. Come in §8.9, possiamo sfruttare la presentazione di $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$ ($\cong \mathfrak{U}_{\varphi,+} \otimes \mathfrak{U}_{\varphi,0}^M \otimes \mathfrak{U}_{\varphi,-}$) per realizzare una presentazione di $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ per generatori (topologici) e relazioni. L'algebra $\mathfrak{H}_M^\varphi$ definita in §13.7 è la $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra associativa unitaria con generatori

$$M_i^\varphi\,,\ \big(M_i^\varphi\big)^{-1},\ \binom{M_i^\varphi;c}{t}\,,\ \big(E_i^\varphi\big)^{(r)}\ \big(F_i^\varphi\big)^{(s)}$$

($i=1,\dots,n$; $c\in\mathbb{Z}$, $t,r,s\in\mathbb{N}$) e relazioni

$$M_i^\varphi\big(M_i^\varphi\big)^{-1}=1=\big(M_i^\varphi\big)^{-1}M_i^\varphi\,,\ \ \big(M_i^\varphi\big)^{\pm1}\big(M_j^\varphi\big)^{\pm1}=\big(M_j^\varphi\big)^{\pm1}\big(M_i^\varphi\big)^{\pm1}$$

$$\big(M_i^\varphi\big)^{\pm1}\binom{M_j^\varphi;c}{t}=\binom{M_j^\varphi;c}{t}\big(M_i^\varphi\big)^{\pm1}$$

$$\binom{M_i^\varphi;c}{0}=0\,,\qquad (q_i-1)\binom{M_i^\varphi;0}{1}=M_i^\varphi-1$$

$$\binom{M_i^\varphi;c}{t}\binom{M_i^\varphi;c-t}{s}=\binom{t+s}{t}_{q_i}\binom{M_i^\varphi;c}{t+s}\,,\qquad \forall\, t,s$$

$$\binom{M_i^\varphi;c+1}{t}-q_i^t\binom{M_i^\varphi;c}{t}=\binom{M_i^\varphi;c}{t-1}\,,\qquad \forall\, t\geq 1$$

$$\binom{M_i^\varphi;c}{t}=\sum_{p\geq 0}^{p\leq c,t} q_i^{(c-p)(t-p)}\binom{c}{p}_{q_i}\binom{M_i^\varphi;0}{t-1}\,,\qquad \forall\, c\geq 0$$

$$\binom{M_i^\varphi;-c}{t}=\sum_{p=0}^{t}(-1)^p q_i^{-t(c+p)+p(p+1)/2}\binom{p+c-1}{p}_{q_i}\binom{M_i^\varphi;0}{t-p}\,,\qquad \forall\, c\geq 1$$

$$\binom{M_i^\varphi;c+1}{t}-\binom{M_i^\varphi;c}{t}=q_i^{c-t+1}M_i^\varphi\binom{M_i^\varphi;c}{t-1}\,,\qquad \forall\, t\geq 1$$

$$M_i^\varphi\big(E_j^\varphi\big)^{(p)}=q_i^{p\,a_{ij}}\big(E_j^\varphi\big)^{(p)}M_i^\varphi$$

$$M_i^\varphi\big(F_j^\varphi\big)^{(p)}=q_i^{p\,a_{ij}}\big(F_j^\varphi\big)^{(p)}M_i^\varphi$$

$$\binom{M_i^\varphi;c}{t}\big(E_j^\varphi\big)^{(p)}=\big(E_j^\varphi\big)^{(p)}\binom{M_i^\varphi;c+pa_{ij}}{t}$$

$$\binom{M_i^\varphi;c}{t}\big(F_j^\varphi\big)^{(p)}=\big(F_j^\varphi\big)^{(p)}\binom{M_i^\varphi;c+pa_{ij}}{t}$$

$$(E_i^\varphi)^{(r)}(E_i^\varphi)^{(s)} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (E_i^\varphi)^{(r+s)}\,, \qquad (E_i^\varphi)^{(0)} = 1$$

$$(F_i^\varphi)^{(r)}(F_i^\varphi)^{(s)} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (F_i^\varphi)^{(r+s)}\,, \qquad (F_i^\varphi)^{(0)} = 1$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s (E_i^\varphi)^{(r)} E_j^\varphi (E_i^\varphi)^{(s)} = 0\,, \qquad i \neq j$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s (F_i^\varphi)^{(r)} F_j^\varphi (F_i^\varphi)^{(s)} = 0\,, \qquad i \neq j$$

$$(E_i^\varphi)^{(r)} \big(F_j^\varphi\big)^{(s)} = \big(F_j^\varphi\big)^{(s)} (E_i^\varphi)^{(r)}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$. L'algebra $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$ è il completamento di $\mathfrak{H}_M^\varphi$ ottenuto prendendo le serie formali nei monomi PBW di $\mathfrak{U}_{\varphi,-}$ e $\mathfrak{U}_{\varphi,+}$ a coefficienti in $\mathfrak{U}_{\varphi,0}^M$ che soddisfino la condizione in (13.3). Infine dai calcoli in §12.14 ricaviamo le seguenti formule (per ogni $i = 1, \dots, n$), ottenute dalle formule lì scritte tramite l'isomorfismo ν_M^φ (con $K_i^\varphi := L_{\alpha_i}^\varphi \ \forall\, i$):

$$\Delta\big(F_i^\varphi\big) \equiv F_i^\varphi \otimes 1^\otimes + 1^\otimes \otimes F_i^\varphi + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} K_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes F_i^\varphi +$$

$$+\big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1} \sum_{\alpha,\beta \in R^+} C_{\alpha,\beta}^{i,+} \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right) \left(q_\beta - q_\beta^{-1}\right) \left(E_\alpha^\varphi \otimes F_\beta^\varphi + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} K_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha^\varphi \otimes F_\beta^\varphi \right)$$

$$\Delta\big(M_i^\varphi\big) \equiv M_i^\varphi \otimes M_i^\varphi\,, \qquad \Delta\left((M_i^\varphi)^{-1} \right) \equiv (M_i^\varphi)^{-1} \otimes (M_i^\varphi)^{-1}$$

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1^\otimes + 1 \otimes \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (2)_{q^{-1}}^2 (d_i)_q^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in R^+} (q-1) \, [d_\gamma]_q \big[(\mu_i|\gamma)\big]_q \cdot \Bigg(E_\gamma^\varphi \otimes F_\gamma^\varphi +$$

$$+ (q_i - 1) \cdot E_\gamma^\varphi \otimes F_\gamma^\varphi \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (q_i - 1) \cdot \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\gamma^\varphi \otimes F_\gamma^\varphi +$$

$$+ (q_i - 1)^2 \cdot \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\gamma^\varphi \otimes F_\gamma^\varphi \begin{pmatrix} M_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg)$$

$$\Delta\big(E_i^\varphi\big) \equiv 1^\otimes \otimes E_i^\varphi + E_i^\varphi \otimes 1^\otimes + (q_i - 1) \cdot E_i^\varphi \otimes \begin{pmatrix} K_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$-\big(q_i - q_i^{-1}\big)^{-1} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in R^+} C_{\alpha,\beta}^{i,-} \left(q_\alpha - q_\alpha^{-1}\right) \left(q_\beta - q_\beta^{-1}\right) \left(E_\alpha^\varphi \otimes F_\beta^\varphi + (q_i - 1) \cdot E_\alpha^\varphi \otimes F_\beta^\varphi \begin{pmatrix} K_i^\varphi ; 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

come congruenze modulo $\left(q - q^{-1}\right)^2$, e inoltre

$$S\left(F_i^\varphi\right) \equiv -q_i^{-2} \cdot F_i^\varphi (K_i^\varphi)^{-1}\,, \qquad S\left(E_i^\varphi\right) \equiv -q_i^{+2} \cdot (K_i^\varphi)^{-1} E_i^\varphi \qquad \mod \left(q - q^{-1}\right)^2$$

$$S\left(M_i^\varphi\right) \equiv (M_i^\varphi)^{-1}\,, \qquad S\left((M_i^\varphi)^{-1} \right) \equiv M_i^\varphi \qquad \mod \left(q - q^{-1}\right)^2$$

$$S\left(\binom{M_i^\varphi;\,0}{1}\right) \equiv -(M_i^\varphi)^{-1}\cdot\binom{M_i^\varphi;\,0}{1} \qquad\qquad \mod\ \left(q-q^{-1}\right)$$

$$\epsilon\left(F_i^\varphi\right)=0\,,\quad \epsilon\left(M_i^\varphi\right)=1\,,\quad \epsilon\left(\binom{M_i^\varphi;0}{1}\right)=0\,,\quad \epsilon\left((M_i^\varphi)^{-1}\right)=1\,,\quad \epsilon\left(E_i^\varphi\right)=0\,.$$

13.10 L'immersione naturale $\xi_M^\varphi\colon F_{q,\varphi}^M[G] \hookrightarrow U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$. Poiché l'algebra quantica di funzioni $F_{q,\varphi}^M[G]$ è per definizione sottoalgebra di Hopf (formale) di $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$, possiamo immergerla nell'algebra inviluppante quantizzata $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$: così definiamo un'immersione di algebre di Hopf formali

$$\xi_M^\varphi := (\nu_M^\varphi)^{-1}\circ\mu_M^\varphi\colon F_{q,\varphi}^M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})\ .$$

Allora la Proposizione 12.11 e il Teorema 12.13 ci danno immediatamente il seguente risultato, che generalizza il Teorema 8.11:

Teorema 13.11. *L'immersione $\xi_M^\varphi\colon F_{q,\varphi}^M[G] \hookrightarrow U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ induce monomorfismi di algebre*

$$\xi_M^\varphi\colon F_{q,\varphi}^M[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathbf{H}_M^\varphi\,,\qquad \xi_M^\varphi\colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{H}_M^\varphi\,,\qquad \xi_M^\varphi\colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{H}_M^\varphi$$

e isomorfismi di algebre (con $\rho := \sum_{i=1}^n \mu_i$, cfr. Teorema 12.13)

$$\xi_M^\varphi\colon F_{q,\varphi}^M[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbf{H}_M^\varphi\,,\quad \xi_M^\varphi\colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{H}_M^\varphi\,,\quad \xi_M^\varphi\colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathfrak{H}_M^\varphi\,;$$

inoltre $\xi_M^\varphi\left(F_{q,\varphi}^M[G]\right)$, risp. $\xi_M^\varphi\left(\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]\right)$, risp. $\xi_M\left(\mathcal{F}_{\varphi,M}[G]\right)$, è densa in $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$, risp. $\mathcal{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$, risp. $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$. $\square$

13.12 L'accoppiamento di Poisson quantico nel caso multiparametrico. In questo paragrafo definiamo accoppiamenti di Hopf perfetti $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})\otimes U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})$ che forniscono una quantizzazione di tre oggetti classici, precisamente gli accoppiamenti di Hopf $F\left[G^\tau\right]\otimes U(\mathfrak{g}^\tau)\to k$ (o $F^\infty\left[G^\tau\right]\otimes U(\mathfrak{g}^\tau)\to k$) e $U(\mathfrak{h}^\tau)\otimes F\left[H^\tau\right]\to k$ — che rispettano anche le strutture di Poisson e co-Poisson coinvolte — e l'accoppiamento perfetto di bialgebre di Lie $\mathfrak{h}^\tau\otimes\mathfrak{g}^\tau\to k$; i nuovi oggetti generalizzano gli accoppiamenti di Poisson quantici definiti in §8.12, così li chiameremo "accoppiamenti di Poisson quantici multiparametrici"; come nel caso uniparametrico la specializzazione di tali oggetti ci darà anche nuovi interessanti accoppiamenti tra algebre di funzioni.

Per il Teorema 13.2 abbiamo ${j_M^\varphi}^{-1}\circ\nu_M^\varphi\colon U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\ \cong\ } U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$, perciò l'accoppiamento naturale di valutazione dà un accoppiamento perfetto di algebre di Hopf formali

$$\pi_{q,\varphi}^M\colon U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})\otimes U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q)$$

definito da $\pi_{q,\varphi}^M(h,g) := \left\langle (j_M^\varphi)^{-1}\big(\nu_M^\varphi(h)\big), g\right\rangle$ per ogni $h\in U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$, $g\in U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})$.

Chiamiamo $\pi_{q,\varphi}^M$ **accoppiamento di Poisson quantico multiparametrico**.

Nel prossimo paragrafo dimostreremo tra l'altro che $\pi_{q,\varphi}^M$ fornisce una quantizzazione dell'accoppia-mento di Poisson "classico" $\pi_{\mathcal{P}}^\tau\colon \mathfrak{h}^\tau\otimes\mathfrak{g}^\tau \longrightarrow k$ (dove τ è dato da $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)=\frac{1}{2}\cdot\big(\varphi(\alpha_1),\dots,\varphi(\alpha_n)\big)$), donde la nostra scelta del nome.

Intanto sin d'ora possiamo osservare che la discussione nei paragrafi precedenti assicura che le forme intere — $\mathcal{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{U}_{\varphi,M}(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})$ — delle nostre algebre inviluppanti quantizzate sono l'una l'ortogonale dell'altra rispetto a $\pi_{q,\varphi}^{M}$; da questo segue allora che $\pi_{q,\varphi}^{M}$ si restringe ad accoppiamenti perfetti di algebre di Hopf formali (su $k\big[q,q^{-1}\big]$)

$$\pi_{q,H^\tau}^{\varphi}\colon \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})\otimes\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\ ,\quad \pi_{q,G^\tau}^{\varphi}\colon \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})\otimes\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\ ;$$

nel seguito col medesimo simbolo indicheremo anche gli accoppiamenti di Hopf

$$\pi_{q,H^\tau}^{\varphi}\colon \mathcal{F}_{\varphi,Q}[G]\otimes\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]\ ,\qquad \text{risp.}\quad \pi_{q,G^\tau}^{\varphi}\colon \mathfrak{F}_{\varphi,P}[G]\otimes\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$$

che si ottengono per restrizione dai precedenti: inoltre d'ora in avanti identificheremo $F_{q,\varphi}^{M}[G]$ con la sua immagine in $U_{q,\varphi}^{M}(\mathfrak{h})$ tramite ξ_M^{φ}, e analogamente per le forme intere.

§ 14 Specializzazione alle radici dell'unità nel caso multiparametrico

14.1 Il caso $q\to 1$: specializzazione di $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ a $U(\mathfrak{h}^\tau)$ e conseguenze. In questo paragrafo operiamo la specializzazione alle radici dell'unità dei nostri nuovi gruppi quantici multiparametrici: il nostro obiettivo è generalizzare i risultati del §9 estendendo le argomentazioni che abbiamo usato in quella sede.

D'ora in avanti sarà

$$\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n):=\frac{1}{2}\cdot\big(\varphi(\alpha_1),\dots,\varphi(\alpha_n)\big)$$

La forma intera $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ che abbiamo definito nel §13 è un modulo su $k\big[q,q^{-1}\big]$, quindi possiamo specializzarla a $q=1$. Dunque poniamo

$$\mathfrak{U}_{1,\varphi}^{Q}(\mathfrak{h}):=\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})\Big/(q-1)\,\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})\;\cong\;\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})\otimes_{k[q,q^{-1}]}k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k\cong k\big[q,q^{-1}\big]\Big/(q-1)$); sia $p_1^{\varphi}\colon\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})\to\mathfrak{U}_{1,\varphi}^{Q}(\mathfrak{h})$ l'applicazione canonica.

Utilizzando la presentazione di $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ data in §13.9, possiamo ripetere — *mutatis mutandis* — la dimostrazione del Teorema 9.2, e ottenerne così senza ulteriori difficoltà la seguente versione multiparametrica:

Teorema 14.2. *L'algebra di Hopf $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ si specializza per $q\to 1$ alla coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h}^\tau)$; in altre parole esiste un isomorfismo di coalgebre di Hopf Poisson*

$$\mathfrak{U}_{1,\varphi}^{Q}(\mathfrak{h})\cong U(\mathfrak{h}^\tau)\,.\ \square$$

Dunque $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ *fornisce l'annunciata quantizzazione infinitesimale di* H^τ *:* pertanto *abbiamo risolto il problema della quantizzazione locale del gruppo di Poisson* H^τ, generalizzando quanto già fatto per il gruppo H.

Osservazione: come per il caso uniparametrico, sottolineiamo il fatto che dalla definizione di $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ come sottospazio di $U_{q,\varphi}^P(\mathfrak{g})^*$ composto di serie soddisfacenti una certa "condizione di crescita" (cfr. (13.7)) segue subito che per $q \to 1$ si ottiene un isomorfismo *di algebre di Hopf*

$$\mathfrak{U}_{1,\varphi}^Q(\mathfrak{h}) \cong \left\{ f \in F\left[H^\tau\right]^* \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : f\left(\mathfrak{e}^n\right) = 0 \right\}$$

dove $\mathfrak{e} := Ker\,(\epsilon\colon F\left[H^\tau\right] \to k)$; ma $\mathfrak{e} = \mathfrak{m}_e$, dove $\mathfrak{m}_e$ è l'ideale massimale di $F\left[H^\tau\right]$ associato a $e \in H^\tau$, e inoltre (cfr. [On], Part I, Ch. 3, §2) esiste un isomorfismo canonico di algebre di Hopf

$$\left\{ f \in F\left[H^\tau\right]^* \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : f\left({\mathfrak{m}_e}^n\right) = 0 \right\} \cong U(\mathfrak{h}^\tau)$$

per cui possiamo concludere che

$$\mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})$$

come algebre di Hopf. Tuttavia questo tipo di analisi non può darci alcuna informazione riguardo alla sturttura di co-Poisson, quindi lo studio dettagliato di $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$ che abbiamo fatto è effettivamente necessario per dimostrare il Teorema 14.2.

Anche nel caso generale, il teorema precedente consente di dimostrare altri due importanti risultati, cioè la congettura iniziale su $\mathcal{F}_{\varphi,Q}[G]$ (cfr. Introduzione) e il risultato di specializzazione $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q \to 1} F\left[H^\tau\right]$ (cfr. (11.9)), di cui otteniamo una nuova dimostrazione diretta. In entrambi i casi la dimostrazione sviluppata nel caso uniparametrico si estende senza problemi al caso generale.

Per indicare una specializzazione, poniamo come sempre

$$\mathcal{F}_{1,\varphi}^Q[G] := \mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \Big/ (q-1)\,\mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \;\cong\; \mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

dove k è pensato come $k\left[q,q^{-1}\right]$–algebra via $k \cong k\left[q,q^{-1}\right] \Big/ (q-1)$.

Il seguente risultato è la generalizzazione del Teorema 9.3:

Teorema 14.3. *L'algebra di Hopf* $\mathcal{F}_{\varphi,Q}[G]$ *si specializza alla coalgebra di Hopf Poisson* $U(\mathfrak{h}^\tau)$ *per* $q \to 1$ *; in altre parole esiste un isomorfismo di coalgebre di Hopf Poisson*

$$\mathcal{F}_{1,\varphi}^Q[G] \cong U(\mathfrak{h}^\tau)\,. \,\square$$

Nota: così anche $F_{q,\varphi}^Q[G]$ fornisce una quantizzazione infinitesimale di H^τ; rispetto a $U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{h})$ il vantaggio è che $F_{q,\varphi}^Q[G]$ è un'algebra di Hopf *usuale*, mentre $U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{h})$ (o anche $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$) è un'algebra di Hopf *formale*.

Sottolineiamo il fatto che il Teorema 14.3 ci dà $\mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \xrightarrow{q\to 1} U(\mathfrak{h}^\tau)$, che è il risultato duale (nel senso della dualità di Poisson) di $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q\to 1} F\left[H^\tau\right]$; anche tale risultato (che è soltanto enunciato in [D-K-P], e non dimostrato) può essere dedotto in modo del tutto naturale dal Teorema 14.2, ricalcando parola per parola la dimostrazione che abbiamo presentato nel caso uniparametrico (cfr. la dimostrazione del Teorema 9.4): l'enunciato è allora il seguente:

Teorema 14.4. *L'algebra di Hopf $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$ si specializza all'algebra di Hopf Poisson $F\left[H^\tau\right]$ per $q \to 1$, cioè*

$$\mathcal{U}_{1,\varphi}^{P}(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \;\cong\; F\left[H^\tau\right]$$

come algebre di Hopf Poisson.

14.5 Il caso $q \to 1$: specializzazione di $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$ a $F^\infty\left[G^\tau\right]$. Proveremo ora che $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$ è una quantizzazione di $F^\infty\left[G^\tau\right]$; tale risultato può essere interpretato come controparte duale (nel senso della dualità di Poisson) del risultato di specializzazione

$$\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q\to 1} F\left[H^\tau\right]$$

enunciato in [D-K-P] (cfr. §§7.6–7) e dimostrato nel Teorema 14.4. Come di consueto, definiamo

$$\mathcal{U}_{1,\varphi}^{P}(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \;\cong\; \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

e formuliamo la seguente generalizzazione del Teorema 10.6 (che si dimostra esattamente allo stesso modo):

Teorema 14.6. *L'algebra di Hopf formale $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$ si specializza all'algebra di Hopf Poisson formale $F^\infty\left[G^\tau\right]$ per $q \to 1$; in altre parole, esiste un isomorfismo di algebre di Hopf Poisson formali*

$$\mathcal{U}_{1,\varphi}^{P}(\mathfrak{h}) \cong F^\infty\left[G^\tau\right]\,. \;\square$$

Osservazione: è da sottolineare il fatto che — come per il Teorema 10.6 — quello che effettivamente si dimostra è che

$$\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{q\to 1} U(\mathfrak{g}^\tau)^*$$

e poi l'isomorfismo canonico (cfr. ad esempio [On], Part I, Ch. 3, §2) $U(\mathfrak{g}^\tau)^* \cong F^\infty\left[G^\tau\right]$ permette di ottenere quanto enunciato.

14.7 Il caso $q \to \varepsilon$: morfismi di Frobenius quantici multiparametrici. Sia ε una radice primitiva ℓ–esima dell'unità in k (facciamo le ipotesi dell'inizio di §5.3), per ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$, e poniamo

$$\mathfrak{U}_{\varepsilon,\varphi}^{Q}(\mathfrak{h}) := \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \;\cong\; \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$); da principio osserviamo che

$$\mathfrak{U}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{h}) \text{ \textit{è un'algebra di Hopf} usuale \textit{su} } k, \text{ \textit{isomorfa a} } \mathfrak{H}^{\varphi}_{Q}\Big|_{q=\varepsilon}; \tag{14.1}$$

infatti, per definizione ogni elemento di $\mathfrak{U}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{h})$ è espresso da una serie formale di termini in $\mathfrak{H}^{\varphi}_{Q}$ che però in effetti *è una somma finita modulo* $(q-\varepsilon)$; inoltre l'analisi in §12.14 e il Teorema 13.2 ci dicono che $\Delta\Big(\mathfrak{H}^{\varphi}_{Q}\Big) \subseteq \mathfrak{H}^{\varphi}_{Q} \otimes \mathfrak{H}^{\varphi}_{Q}$, da cui l'asserto.

Siamo pronti allora per il prossimo risultato, che è l'analogo per $U^{Q}_{q,\varphi}(\mathfrak{h})$ del Teorema 11.7, generalizzante il Teorema 9.8 del quale ricalca la dimostrazione senza differenze apprezzabili:

Teorema 14.8. *Esiste un epimorfismo di algebre di Hopf*

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}^{\tau}} \colon \mathfrak{U}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{h}) \relbar\joinrel\twoheadrightarrow \mathfrak{U}^{Q}_{1}(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h}) \tag{14.2}$$

definito da

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}^{\tau}}\left(\big(F^{\varphi}_{i}\big)^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= \big(F^{\varphi}_{i}\big)^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ \ell \Big| s\,, \ 0 \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}^{\tau}}\left(\left.\begin{pmatrix} K^{\varphi}_{i};0 \\ s \end{pmatrix}\right|_{q=\varepsilon} \right) &:= \left.\begin{pmatrix} K^{\varphi}_{i};0 \\ s/\ell \end{pmatrix}\right|_{q=1} && \textit{se } \ \ell \Big| s\,, \ 0 \ \textit{altrimenti} \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}^{\tau}}\left(\big(K^{\varphi}_{i}\big)^{-1}\Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= 1 \\
\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}^{\tau}}\left(\big(E^{\varphi}_{i}\big)^{(s)}\Big|_{q=\varepsilon} \right) &:= \big(E^{\varphi}_{i}\big)^{(s/\ell)}\Big|_{q=1} && \textit{se } \ \ell \Big| s\,, \ 0 \ \textit{altrimenti}
\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $s \in \mathbb{N}$*; esso è aggiunto di* $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^{\tau}} \colon F\left[H^{\tau}\right] \cong \mathcal{U}^{P}_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}^{P}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{g})$ *(cfr. Teorema 11.8) rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici specializzati, cioè*

$$\pi^{\varphi}_{1,H^{\tau}}\Big(\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{h}^{\tau}}(h), g \Big) = \pi^{\varphi}_{\varepsilon,H^{\tau}}\Big(h, \mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^{\tau}}(g) \Big)$$

per ogni $h \in \mathfrak{U}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{h})$, $g \in \mathcal{U}^{P}_{1,\varphi}(\mathfrak{g})$. $\square$

Analogamente il prossimo risultato, che è l'analogo del Teorema 11.8, estende — con la stessa dimostrazione — al caso multiparametrico il Teorema 9.9; come di consueto poniamo

$$\mathcal{U}^{P}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \Big/ (q-\varepsilon)\,\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \cong \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k\,.$$

Teorema 14.9.

(a) Esiste un monomorfismo continuo di algebre di Hopf formali

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}^\tau} \colon F^\infty\left[G^\tau\right] \cong \mathcal{U}_{1,\varphi}^{P}(\mathfrak{h}) \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{h}) \tag{14.3}$$

definito da

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}^\tau} \colon \quad \overline{F}_\alpha^\varphi\Big|_{q=1} \mapsto \left(\overline{F}_\alpha^\varphi\right)^\ell\Big|_{q=\varepsilon}, \quad L_\lambda^\varphi\Big|_{q=1} \mapsto \left(L_\lambda^\varphi\right)^\ell\Big|_{q=\varepsilon}, \quad \overline{E}_\alpha^\varphi\Big|_{q=1} \mapsto \left(\overline{E}_\alpha^\varphi\right)^\ell\Big|_{q=\varepsilon} \tag{14.4}$$

per ogni $\alpha \in R^+$, $\lambda \in P$ *; esso è l'estensione per continuità di* $\mathfrak{F}r_{G^\tau} \colon F\left[G^\tau\right] \cong \mathfrak{F}_{1,\varphi}^{P}[G] \hookrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P}[G]$ *(cfr. Teorema 11.11), ed è aggiunto di* $\mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}^\tau} \colon \mathfrak{U}_{\varepsilon,\varphi}^{Q}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_{1,\varphi}^{Q}(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}^\tau)$ *(cfr. Teorema 11.7) rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici, cioè*

$$\pi_{\varepsilon,G^\tau}^{\varphi}\left(\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}^\tau}(h), g\right) = \pi_{1,G^\tau}^{\varphi}\left(h, \mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}^\tau}(g)\right)$$

per ogni $h \in \mathcal{U}_{1,\varphi}^{P}(\mathfrak{h})$, $g \in \mathfrak{U}_{\varepsilon,\varphi}^{Q}(\mathfrak{g})$.

(b) L'immagine Z_0^φ $\left(\cong_{\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}^\tau}} \mathcal{U}_{1,\varphi}^{P}(\mathfrak{h})\right)$ *di* $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}^\tau}$ *è una sottoalgebra di Hopf formale contenuta nel centro di* $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{h})$.

(c) L'insieme di monomi ordinati

$$\left\{ \mathcal{F}_{\ell\phi} \cdot B_{\ell\phi,\ell\tau,\ell\eta}^{\varphi} \cdot \mathcal{E}_{\ell\eta} \,\middle|\, \phi \in \mathbb{N}^N,\ \tau \in \mathbb{N}^n,\ \eta \in \mathbb{N}^N \right\}$$

è una pseudobase di Z_0^φ *su* k .

(d) L'insieme di monomi ordinati

$$\left\{ \mathcal{F}_{\phi} \cdot B_{\phi,\tau,\eta}^{\varphi} \cdot \mathcal{E}_{\eta} \,\middle|\, \tau \in \left\{0,1,\dots,\ell-1\right\}^n;\ \phi,\eta \in \left\{0,1,\dots,\ell-1\right\}^N \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{h})$ *su* Z_0 *; ne segue che anche l'insieme di monomi PBW ordinati*

$$\left\{ \mathcal{F}_{\phi} \cdot L_{\mu}^{\varphi} \cdot \mathcal{E}_{\eta} \,\middle|\, \mu \in \left\{0,1,\dots,\ell-1\right\}^n;\ \phi,\eta \in \left\{0,1,\dots,\ell-1\right\}^N \right\} =$$

$$= \left\{ \prod_{r=N}^{1} \overline{F}_{\alpha^r}^{f_r} \cdot \prod_{i=1}^{n} L_i^{l_i} \cdot \prod_{r=1}^{N} \overline{E}_{\alpha^r}^{e_r} \,\middle|\, f_1,\dots,f_N,l_1,\dots,l_n,e_1,\dots,e_N \in \left\{0,1,\dots,\ell-1\right\} \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{h})$ *su* Z_0^φ *; pertanto* $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P}(\mathfrak{h})$ *è un modulo libero di rango* $\ell^{dim(H^\tau)}$ *su* Z_0^φ . $\square$

Osserviamo tra l'altro che la parte *(d)* del Teorema 14.9 si accorda bene con [C-V2], Proposition 3.5, che afferma che $\mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P}[G]$ è un modulo proiettivo su $F_0^\varphi := \mathfrak{F}r_{\mathfrak{g}^\tau}\left(\mathfrak{F}_{1,\varphi}^{P}[G]\right)$ di rango $\ell^{dim(G^\tau)} = \ell^{dim(H^\tau)}$.

Infine consideriamo

$$\mathcal{F}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}[G] := \mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \,\cong\, \mathcal{F}_{\varphi,Q}[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

con k inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$. Possiamo allora generalizzare il Teorema 9.10, ricalcandone la dimostrazione, così da ottenere la seguente controparte del Teorema 11.13: si noti in particolare che ora otteniamo un morfismo di Frobenius quantico (multiparametrico) *suriettivo* invece che *iniettivo* (com'è (11.13)).

Teorema 14.10. *Esiste un epimorfismo di algebre di Hopf*

$$\mathcal{F}r_{H^\tau} \colon \mathcal{F}^{Q}_{\varepsilon,\varphi}[G] \relbar\joinrel\twoheadrightarrow \mathcal{F}^{Q}_{1,\varphi}[G] \cong U(\mathfrak{h}^\tau) \tag{14.5}$$

duale di $\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau} \colon F\,[H^\tau] \cong \mathcal{U}^{P}_{1,\varphi}(\mathfrak{g}) \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{U}^{P}_{\varepsilon,\varphi}(\mathfrak{g})$ *e di esso aggiunto rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici.* $\square$

Chiamiamo anche $\mathfrak{F}r_{\mathfrak{h}^\tau}$, $\mathcal{F}r_{\mathfrak{h}^\tau}$, e $\mathcal{F}r_{H^\tau}$ **morfismi di Frobenius quantici**, perché possono essere interpretati come sollevamenti dei morfismi di Frobenius classici $H^\tau_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow H^\tau_{\mathbb{Z}_p}$, $G^\tau_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow G^\tau_{\mathbb{Z}_p}$ (per $\ell = p$ primo) alla caratteristica zero.

14.11 Specializzazioni dell'accoppiamento di Poisson quantico multiparametrico. Dai §§14.2–6 si ricava immediatamente che gli accoppiamenti di Hopf

$$\pi^{\varphi}_{q,H^\tau} \colon \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big] \; , \qquad \pi^{\varphi}_{q,G^\tau} \colon \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$$

si specializzano rispettivamente agli accoppiamenti di Hopf naturali

$$\pi_{H^\tau} \colon U(\mathfrak{h}^\tau) \otimes F\,[H^\tau] \longrightarrow k \, , \qquad \pi_{G^\tau} \colon F^\infty\,[G^\tau] \otimes U(\mathfrak{g}^\tau) \longrightarrow k$$

dati dalla valutazione; in altre parole

$$\pi^{\varphi}_{q,H^\tau}\left(\hat{h},\tilde{g}\right)\Big|_{q=1} = \pi_{H^\tau}\left(\hat{h}\big|_{q=1},\tilde{g}\big|_{q=1}\right) \; , \qquad \pi^{\varphi}_{q,G^\tau}\left(\tilde{h},\hat{g}\right)\Big|_{q=1} = \pi_{G^\tau}\left(\tilde{h}\big|_{q=1},\hat{g}\big|_{q=1}\right)$$

per ogni $\hat{h} \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$, $\tilde{g} \in \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$, $\tilde{h} \in \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$, $\hat{g} \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$, dove $x\big|_{q=1}$ denota come sempre la specializzazione di x a $q=1$. Perciò l'accoppiamento di Hopf $\pi^{\varphi}_{q} \colon U^{M}_{q,\varphi}(\mathfrak{h}) \otimes U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q)$, per $(M,M') = (P,Q)$ oppure $(M,M') = (Q,P)$, fornisce una quantizzazione dell'accoppiamento corrispondente a livello classico. Come per il caso uniparametrico, mostreremo ora che esso può anche essere interpretato come quantizzazione dell'accoppiamento di Poisson classico $\pi^{\tau}_{\mathcal{P}} \colon \mathfrak{h}^\tau \otimes \mathfrak{g}^\tau \to k$, e anche di *nuovi* accoppiamenti tra algebre di funzioni. Usiamo ancora le notazioni

$$[\;,\;] := m - m^{\mathrm{op}} \, , \qquad \nabla := \Delta - \Delta^{\mathrm{op}} \, .$$

Per cominciare definiamo un accoppiamento $\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}} \colon \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$ seguendo la procedura adottata nel caso Assegnamo ai monomi PBW il grado

$$deg\left(\prod_{r=N}^{1}(E^{\varphi}_{\alpha^r})^{(m_r)} \cdot \prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} K^{\varphi}_i;0 \\ t_i \end{pmatrix}(K^{\varphi}_i)^{-Ent(t_i/2)} \cdot \prod_{r=1}^{N}(F^{\varphi}_{\alpha^r})^{(n_r)}\right) := \sum_{r=N}^{1} m_r + \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{r=1}^{N} n_r$$

ed estendiamo deg per linearità a tutto $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$. Sia poi $k\big[q,q^{-1}\big] =: \mathfrak{U}^{\varphi}_0 \subset \mathfrak{U}^{\varphi}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}^{\varphi}_h \subset \cdots (\subset \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}))$ la filtrazione associata, e — per ogni $x \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$ — poniamo $\partial(x) := h$ se $x \in \mathfrak{U}^{\varphi}_h \setminus \mathfrak{U}^{\varphi}_{h-1}$ $(h \in \mathbb{N})$; infine definiamo

$$\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(h,g) := (q-1)^{\partial(g)} \cdot \pi^{\varphi}_{q}(h,g)$$

per ogni $h \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$, $g \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$. È chiaro che questa definizione è ben posta, e definisce un accoppiamento non degenere $\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}} : \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k(q)$ tale che

$$\begin{aligned} \pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) &= \alpha \cdot \pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(x,z) + \beta \cdot \pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(y,z) \\ \pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(x, \alpha \cdot u + \beta \cdot v) &= \alpha \cdot \pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(x,u) + \beta \cdot \pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}(x,v) \end{aligned} \tag{14.6}$$

per ogni $\alpha, \beta \in k\big[q,q^{-1}\big]$, $x,y \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$, $z,u,v \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$ tali che $\partial(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \partial(u) = \partial(v)$; inoltre considerando (3.2) e la definizione stessa di $\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}$ si trova che

$$\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}\Big(\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}), \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})\Big) \subseteq k\big[q,q^{-1}\big]_{(q-1)}$$

(dove $k\big[q,q^{-1}\big]_{(q-1)}$ è la localizzazione di $k\big[q,q^{-1}\big]$ all'ideale primo principale generato da $(q-1)$); in particolare si può operare la specializzazione di $\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}$ a $q=1$; perciò si può operare la specializzazione di $\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}}$ a $q=1$, ottenendo la seguente generalizzazione del Teorema 9.12 (che si dimostra in modo analogo):

Teorema 14.12. *L'accoppiamento* $\pi^{\varphi}_{q,\mathcal{P}} : \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g}) \to k\big[q,q^{-1}\big]_{(q-1)}$ *si specializza ad un accoppiamento*

$$\pi^{\tau}_{\mathcal{P}} : U(\mathfrak{h}^{\tau}) \times U(\mathfrak{g}^{\tau}) \longrightarrow k$$

tale che

$$\begin{aligned} \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, z) &= \alpha \cdot \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}(x,z) + \beta \cdot \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}(y,z) \\ \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}(x, \alpha \cdot u + \beta \cdot v) &= \alpha \cdot \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}(x,u) + \beta \cdot \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}(x,v) \end{aligned} \tag{14.7}$$

per ogni $\alpha, \beta \in k$, $x,y \in U(\mathfrak{h}^{\tau})$, $z,u,v \in U(\mathfrak{g}^{\tau})$ *tali che* $\partial(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \partial(u) = \partial(v)$ *(dove* $\partial(x) := \partial(x')$ *per un qualunque* $x' \in \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})$ *tale che* $x'\big|_{q=1} = x$ *), e che*

$$\begin{aligned} \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(x \cdot y, z\big) &= \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(x \otimes y, \Delta(z)\big), \qquad & \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(x, z \cdot w\big) &= \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(\Delta(x), z \otimes w\big) \\ \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big([x,y], z\big) &= \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(x \otimes y, \delta(z)\big), \qquad & \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(x, [z,w]\big) &= \pi^{\tau}_{\mathcal{P}}\big(\delta(x), z \otimes w\big) \end{aligned} \tag{14.8}$$

per ogni $x,y \in U(\mathfrak{h}^{\tau})$, $z,w \in U(\mathfrak{g}^{\tau})$, *dove* δ *è il cobracket di Poisson di* $U(\mathfrak{g}^{\tau})$ *o di* $U(\mathfrak{h}^{\tau})$. *Tale accoppiamento estende l'accoppiamento di bialgebre di Lie* $\pi^{\tau}_{\mathcal{P}} \colon \mathfrak{h}^{\tau} \otimes \mathfrak{g}^{\tau} \longrightarrow k$ *(cfr. §2.2).*

14.13 Gli accoppiamenti $F\,[G^\tau]\times F\,[H^\tau]\longrightarrow k$, $F^\infty\,[G^\tau]\times F\,[H^\tau]\longrightarrow k$. Vogliamo ora generalizzare quanto già fatto in §9.13, rovesciando la costruzione di §14.11. Iniziamo col definire un accoppiamento $\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}} : \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) \times \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g}) \longrightarrow k\big[q,q^{-1}\big]$ ottenuto modificando leggermente π_q^φ. Per cominciare osserviamo che fanno gli elementi $\overline{F}_{\alpha^r}^\varphi$, $(L_i^\varphi)^{\pm 1}-1$, $\overline{E}_{\alpha^r}^\varphi$ (per $r=1,\dots N$, $i=1,\dots,n$) generano $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$ come $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra. Allora assegnamo ai monomi ordinati nei suddetti generatori il grado

$$deg\left(\prod_{r=N}^{1}\left(\overline{E}_{\alpha^r}^\varphi\right)^{m_r}\cdot\prod_{i=1}^{n}\left((L_i^\varphi)^{\pm 1}-1\right)^{l_i}\cdot\prod_{r=1}^{N}\left(\overline{F}_{\alpha^r}^\varphi\right)^{n_r}\right):=\sum_{r=N}^{1}m_r+\sum_{i=1}^{n}l_i+\sum_{r=1}^{N}n_r$$

ed estendiamo deg per linearità a tutto $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$. Poi estendiamo $\pi_q^\varphi\colon U_{q,\varphi}^P(\mathfrak{h})\otimes U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{g})\to k(q)$ (oppure $\pi_q^\varphi\colon U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{h})\otimes U_{q,\varphi}^P(\mathfrak{g})\to k(q)$ è equivalente) ad un accoppiamento perfetto di algebre di Hopf formali $\pi_q^\varphi\colon U_{q,\varphi}^P(\mathfrak{h})\otimes U_{q,\varphi}^P(\mathfrak{g})\to k\left(q^{1/d},\right)$ (dove d è il determinante della matrice di Cartan) tramite la legge $\pi_q^\varphi\left(L_\lambda,L_\mu\right):=q^{(\lambda|\mu)}$ (dove $(\lambda|\mu)$ è definito in §2.1). Infine, per ogni $h\in\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$ e $g\in\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$ poniamo

$$\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(h,g):=(q-1)^{-\partial(g)}\cdot\pi_{q,\varphi}(h,g)$$

È chiaro che questa definizione è ben posta — in particolare la presenza di "somme infinite" in $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ non crea problemi — e stabilisce un accoppiamento non degenere $\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}} : \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})\times\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\left[q^{1/d},q^{-1/d}\right]$ che gode delle proprietà

$$\begin{aligned}\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(\alpha\cdot x+\beta\cdot y,z)&=\alpha\cdot\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(x,z)+\beta\cdot\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(y,z)\\ \pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(x,\alpha\cdot u+\beta\cdot v)&=\alpha\cdot\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(x,u)+\beta\cdot\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}}(x,v)\end{aligned}\tag{14.9}$$

per ogni $\alpha,\beta\in k\big[q,q^{-1}\big]$, $x,y\in\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$, $z,u,v\in\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})$ tali che $\partial(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)=\partial(u)=\partial(v)$; infine la restrizione dà anche un analogo accoppiamento $\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}} : \mathfrak{F}_{\varphi,P}[G]\times\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\left[q^{1/d},q^{-1/d}\right]$.

A questo punto si può operare la specializzazione di questi accoppiamenti a $q^{1/d}=1$, così da ottenere senza difficoltà la seguente generalizzazione del Teorema 9.14:

Teorema 14.14. *L'accoppiamento* $\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}} : \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})\times\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\left[q^{1/d},q^{-1/d}\right]$ *e l'accoppiamento* $\pi_{q,\varphi}^{\mathcal{P}} : \mathfrak{F}_{\varphi,P}[G]\times\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{g})\longrightarrow k\left[q^{1/d},q^{-1/d}\right]$ *si specializzano rispettivamente ad accoppiamenti*

$$\pi_\tau^{\mathcal{P}}\colon F^\infty\,[G^\tau]\times F\,[H^\tau]\longrightarrow k\,,\qquad \pi_\tau^{\mathcal{P}}\colon F\,[G^\tau]\times F\,[H^\tau]\longrightarrow k$$

tali che

$$\begin{aligned}\pi_\tau^{\mathcal{P}}(\alpha\cdot x+\beta\cdot y,z)&=\alpha\cdot\pi_\tau^{\mathcal{P}}(x,z)+\beta\cdot\pi_\tau^{\mathcal{P}}(y,z)\\ \pi_\tau^{\mathcal{P}}(x,\alpha\cdot u+\beta\cdot v)&=\alpha\cdot\pi_\tau^{\mathcal{P}}(x,u)+\beta\cdot\pi_\tau^{\mathcal{P}}(x,v)\end{aligned}\tag{14.10}$$

per ogni $\alpha,\beta\in k$, $x,y\in F\,[G^\tau]$ *o* $x,y\in F^\infty\,[G^\tau]$, $z,u,v\in F\,[H^\tau]$ *tali che* $\partial(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)=\partial(u)=\partial(v)$ *(dove* $\partial(x):=\partial\left(x'\right)$ *per un qualunque* $x'\in\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ *tale che* $x'\big|_{q=1}=x$ *), e che*

$$\begin{aligned}\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(x\cdot y,z\big)=\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(x\otimes y,\Delta(z)\big)\,,&\qquad\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(x,z\cdot w\big)=\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(\Delta(x),z\otimes w\big)\\ \pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(\{x,y\},z\big)=\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(x\otimes y,\nabla(z)\big)\,,&\qquad\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(x,\{z,w\}\big)=\pi_\tau^{\mathcal{P}}\big(\nabla(x),z\otimes w\big)\end{aligned}\tag{14.11}$$

per ogni $x,y\in F\,[G^\tau]$ *o* $x,y\in F^\infty\,[G^\tau]$ *e* $z,w\in F\,[H^\tau]$ *, dove* $\{\ ,\ \}$ *è il bracket di Poisson di* $F[G]$ *o* $F^\infty\,[G^\tau]$ *oppure di* $F\,[H^\tau]$ *.* $\square$

§ 15 Gruppi quantici multiparametrici formali

15.1 Gruppi formali quantici multiparametrici e gruppi quantici multiparametrici formali. In questo paragrafo vogliamo estendere al caso multiparametrico le costruzioni e i risultati del §10: così introduciamo i *gruppi quantici multiparametrici formali*, che ci danno un analogo quantico dei gruppi formali relativi agli oggetti classici di cui ai §§2.5–7 *diverso* dall'analogo quantico costituito dai gruppi formali quantici multiparametrici che abbiamo studiato nei §§12–14. In particolare — come nel caso uniparametrico — il metodo che ora presentiamo è intrinsecamente più debole di quello già discusso, giacché si fonda per definizione sulla conoscenza delle algebre quantiche (multiparametriche) di funzioni, anche sfruttando alcuni risultati per dimostrare i quali abbiamo dovuto avvalerci proprio dei gruppi formali quantici (multiparametrici).

Per cominciare ricordiamo la strategia definita in §10 per costruire un gruppo quantico formale (che quantizzi un gruppo formale di Poisson associato ad un gruppo di Poisson G), la quale consta di due passi:

(I) — costruire un'algebra di Hopf $F_q[G]$ che dia una quantizzazione di $F[G]$;

(II) — costruire il completamento $\mathfrak{E}$–adico di $F_q[G]$, dove $\mathfrak{E} := Ker\,(\epsilon\colon F_q[G] \to k(q))$ sia il nucleo della counità di $F_q[G]$.

Abbiamo poi stabilito di chiamare *gruppo quantico formale* un oggetto ottenuto in questo modo.

Nel caso dei gruppi di Poisson formali associati ai gruppi algebrici semisemplici G con la struttura di Poisson definita in §2.5, abbiamo tutti gli strumenti per intraprendere tale costruzione; introduciamo quindi la seguente definizione, estensione diretta della Definizione 10.2:

Definizione 15.2. *Sia M un reticolo tale che $Q \leq M \leq P$, e siano $F_{q,\varphi}^{M}[G]$, $\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]$, $\mathcal{F}_{\varphi,M}[G]$ le algebre quantiche di funzioni definite in §11.*

Siano

$$\mathbf{E}_\varphi := Ker\left(\epsilon\colon F_{q,\varphi}^{M}[G] \longrightarrow k(q)\right) ,$$
$$\mathfrak{E}_\varphi := Ker\left(\epsilon\colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] \longrightarrow k\left[q,q^{-1}\right]\right) ,$$
$$\mathcal{E}_\varphi := Ker\left(\epsilon\colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] \longrightarrow k\left[q,q^{-1}\right]\right) .$$

Definiamo

$$F_{q,\varphi}^{M,\infty}[G] := \textit{ completamento } \mathbf{E}_\varphi\textit{–adico di } F_{q,\varphi}^{M}[G]$$
$$\mathfrak{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G] := \textit{ completamento } \mathfrak{E}_\varphi\textit{–adico di } \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]$$
$$\mathcal{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G] := \textit{ completamento } (q-1)\cdot\mathcal{E}_\varphi\textit{–adico di } \mathcal{F}_{\varphi,M}[G]$$

e chiamiamo tali oggetti **gruppi quantici multiparametrici formali**. □

Nota: ovviamente abbiamo $\mathfrak{E}_\varphi = \mathbf{E}_\varphi \cap \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]$, $\quad \mathcal{E}_\varphi = \mathbf{E}_\varphi \cap \mathcal{F}_{\varphi,M}[G]$.

In virtù del Lemma 10.3 i gruppi quantici multiparametrici formali hanno una struttura canonica di algebra di Hopf topologica; essa è ottenuta per estensione continua dalla struttura di Hopf delle algebre quantiche (multiparametriche) di funzioni, pertanto la conoscenza di questi gruppi formali quantici si fonda intrinsecamente sulla conoscenza delle suddette algebre quantiche di funzioni: questa è una prima ragione per cui lo studio che stiamo sviluppando — centrato sui *gruppi quantici multiparametrici formali* — è *intrinsecamente* meno potente e fecondo di quello presentato nei §§12–14 — basato invece sui *gruppi formali quantici multiparametrici*.

La prima osservazione da farsi è l'immediata estensione della Proposizione 10.4:

Proposizione 15.3. *$\mathfrak{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G]$ e $\mathcal{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G]$ sono $k\big[q,q^{-1}\big]$–forme intere di $F_{q,\varphi}^{M,\infty}[G]$ come algebre di Hopf topologiche.* $\square$

Come per il caso uniparametrico, anche i nuovi gruppi quantici multiparametrici formali possono essere descritti esplicitamente per generatori (topologici) e relazioni; a tal fine dobbiamo introdurre nuovi oggetti, sulla falsariga di quanto già fatto nel caso uniparametrico.

Definizione 15.4. *Sia $\mathbf{H}_M^{\varphi}$ l'algebra definita per generatori e relazioni in §13.1, $\mathcal{H}_M^{\varphi}$ l'algebra definita in §13.5, e $\mathfrak{H}_M^{\varphi}$ l'algebra definita in §13.7. Sia $\epsilon'\colon \mathbf{H}_M^{\varphi} \longrightarrow k(q)$ il morfismo di $k(q)$–algebre definito da*

$$\epsilon'\left(F_i^{\varphi}\right) := 0\,, \quad \epsilon'\left(L_\mu^{\varphi}\right) := 1\,, \quad \epsilon'\left(E_i^{\varphi}\right) := 0\,, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n,\ \mu \in M$$

e poniamo $\mathbb{E}'_\varphi := Ker\,(\epsilon')\,,\ \widetilde{\mathbb{E}}'_\varphi := \mathbb{E}'_\varphi \cap \mathcal{H}_M^{\varphi}\,,\ \widehat{\mathbb{E}}'_\varphi := \mathbb{E}'_\varphi \cap \mathfrak{H}_M^{\varphi}\,.$

(a) Chiamiamo $U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$ il completamento $\mathbb{E}'_\varphi$–adico di $\mathbf{H}_M^{\varphi}$, con la sua struttura naturale di $k(q)$–algebra topologica.

(b) Chiamiamo $\mathcal{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$ il completamento $\widetilde{\mathbb{E}}'_\varphi$–adico di $\mathcal{H}_M^{\varphi}$, con la sua struttura naturale di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra topologica.

(c) Chiamiamo $\mathfrak{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$ il completamento $(q-1)\cdot\widehat{\mathbb{E}}'_\varphi$–adico di $\mathfrak{H}_M^{\varphi}$, con la sua struttura naturale di $k\big[q,q^{-1}\big]$–algebra topologica. $\square$

Osserviamo che $\mathcal{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$ non è altro che la chiusura di $\mathcal{H}_M^{\varphi}$ nella topologia $\widetilde{\mathbb{E}}_\varphi$–adica di $U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, dove $\widetilde{\mathbb{E}}_\varphi$ è la chiusura di $\widetilde{\mathbb{E}}'_\varphi$ in $U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$. Analogamente $\mathfrak{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$ non è altro che la chiusura di $\mathfrak{H}_M^{\varphi}$ nella topologia $(q-1)\cdot\widehat{\mathbb{E}}_\varphi$–adica di $U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, dove $\widehat{\mathbb{E}}_\varphi$ è la chiusura di $\widehat{\mathbb{E}}'_\varphi$ in $U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$.

A questo punto possiamo enunciare (la dimostrazione è sostanzialmente la stessa) la diretta generalizzazione del Teorema 10.6:

Proposizione 15.5.

(a) Esiste un unico isomorfismo continuo di $k(q)$–algebre topologiche

$$\xi_M^{\varphi,\infty}\colon F_{q,\varphi}^{M,\infty}[G] \xrightarrow{\ \cong\ } U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$$

che estende i morfismi di $k(q)$–algebre

$$\xi_M^{\varphi}\colon F_{q,\varphi}^{M}[G] \hookrightarrow \mathbf{H}_M^{\varphi} \qquad \xi_M^{\varphi}\colon F_{q,\varphi}^{M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbf{H}_M^{\varphi}\ .$$

Pertanto il push-out della struttura di algebra di Hopf topologica di $F_{q,\varphi}^{M,\infty}[G]$ definisce una analoga struttura di algebra di Hopf topologica su $U_{q,\varphi}^{M,\infty}(\mathfrak{h})$, così che $\xi_M^{\varphi,\infty}$ è un isomorfismo di $k(q)$–algebre di Hopf topologiche.

(b) Esiste un unico isomorfismo continuo di $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre topologiche*

$$\mathfrak{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G] \xrightarrow{\;\cong\;} \mathcal{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$$

che estende i morfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre*

$$\xi_M^{\varphi}\colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G] \hookrightarrow \mathcal{A}_M^{\varphi} \qquad \xi_M^{\varphi}\colon \mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\;\cong\;} \mathcal{A}_M^{\varphi}\ ;$$

tale isomorfismo coincide con la restrizione di $\xi_M^{\varphi,\infty}$ *(quindi lo indicheremo ancora con* $\xi_M^{\varphi,\infty}$ *).*

Pertanto il push-out della struttura di algebra di Hopf topologica di $\mathfrak{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G]$ *definisce una analoga struttura di algebra di Hopf topologica su* $\mathcal{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$*, così che* $\xi_M^{\varphi,\infty}$ *è un isomorfismo di* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre di Hopf topologiche.*

(c) Esiste un unico isomorfismo continuo di $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre topologiche*

$$\mathcal{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G] \xrightarrow{\;\cong\;} \mathfrak{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$$

che estende i morfismi di $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre*

$$\xi_M^{\varphi}\colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G] \hookrightarrow \mathfrak{A}_M^{\varphi} \qquad \xi_M^{\varphi}\colon \mathcal{F}_{\varphi,M}[G]\left[\psi_{-\rho}^{-1}\right] \xrightarrow{\;\cong\;} \mathfrak{A}_M^{\varphi}\ ;$$

tale isomorfismo coincide con la restrizione di $\xi_M^{\varphi,\infty}$ *(quindi lo indicheremo ancora con* $\xi_M^{\varphi,\infty}$ *).*

Pertanto il push-out della struttura di algebra di Hopf topologica di $\mathcal{F}_{\varphi,M}^{\infty}[G]$ *definisce una analoga struttura di algebra di Hopf topologica su* $\mathcal{U}_{\varphi,M}^{\infty}(\mathfrak{h})$*, così che* $\xi_M^{\varphi,\infty}$ *è un isomorfismo di* $k\big[q,q^{-1}\big]$*–algebre di Hopf topologiche.* $\square$

Quando studiamo le specializzazioni dei gruppi quantici multiparametrici formali, otteniamo le ovvie generalizzazioni dei risultati del §10, che si dimostrano allo stesso modo: per cominciare si ha

Teorema 15.6. *L'algebra di Hopf topologica* $\mathfrak{F}_{\varphi,P}^{\infty}[G]$ *si specializza a* $F^{\infty}\left[G^{\tau}\right]$ *come algebra di Hopf Poisson topologica per* $q \to 1$*, cioè*

$$\mathfrak{F}_{1,\varphi}^{P,\infty}[G] := \mathfrak{F}_{\varphi,P}^{\infty}[G] \Big/ (q-1)\,\mathfrak{F}_{\varphi,P}^{\infty}[G] \;\cong\; F^{\infty}\left[G^{\tau}\right]$$

come algebre di Hopf Poisson topologiche. Analogamente si ha

$$\mathcal{U}_{1,\varphi}^{P,\infty}(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}^{\infty}(\mathfrak{h}) \Big/ (q-1)\,\mathcal{U}_{\varphi,P}^{\infty}(\mathfrak{h}) \;\cong\; F^{\infty}\left[G^{\tau}\right]$$

come algebre di Hopf Poisson topologiche. $\square$

Osservazione 15.7. Il teorema precedente fornisce una nuova quantizzazione del gruppo formale $F^{\infty}\left[G^{\tau}\right]$, che possiamo confrontare con quella fornita in §14. L'algebra di Hopf topologica $\mathfrak{F}^\infty_{\varphi,P}[G] = \mathcal{U}^\infty_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$ per $q \to 1$ si specializza a (e quindi è quantizzazione di) $F^\infty[G^\tau]$, quest'ultima essendo definita come l'algebra di Hopf topologica ottenuta per completamento $\mathfrak{e}$–adico di $F[G^\tau]$ (dove $\mathfrak{e} := Ker\,(\epsilon\colon F[G^\tau] \to k) = \mathfrak{m}_e$, e $\mathfrak{m}_e$ è l'ideale massimale di $F[G^\tau]$ associato all'elemento identità $e \in G^\tau$); d'altra parte l'algebra di Hopf formale $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})^*$ per $q \to 1$ si specializza a (e quindi è quantizzazione di) $U(\mathfrak{g}^\tau)^*$, quest'ultima essendo l'algebra di Hopf formale duale lineare di $U(\mathfrak{g}^\tau)$; poiché $F^\infty[G^\tau]$ e $U(\mathfrak{g}^\tau)^*$ sono canonicamente isomorfi (cfr. [On], Part I, Ch. 3, §2), si conclude che $\mathfrak{F}^\infty_{\varphi,P}[G] = \mathcal{U}^\infty_{\varphi,P}(\mathfrak{h})$ e $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})^*$ si specializzano allo stesso oggetto, in particolare

$$\mathcal{U}^\infty_{\varphi,P}(\mathfrak{h})\Big|_{q=1} = \mathfrak{F}^\infty_{\varphi,P}[G]\Big|_{q=1} \cong \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})^*\Big|_{q=1} = \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})\Big|_{q=1} .$$

Ma, come nel caso uniparametrico, questo è un "fatto singolare", mentre "per valori generici" si ha

$$\mathcal{U}^\infty_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}^\infty_{\varphi,P}[G] \not\cong \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})^* = \mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h})\ ;$$

la spiegazione è nel prossimo teorema, che estende (nell'enunciato) e ricalca (nella dimostrazione) il Teorema 10.9.

Teorema 15.8. *Non esiste nessun isomorfismo di $k(q)$–algebre di Hopf topologiche*[9] *tra* $U^{M,\infty}_{q,\varphi}(\mathfrak{h}) = F^{M,\infty}_{q,\varphi}[G]$ *e* $U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{g})^* = U^{M'}_{q,\varphi}(\mathfrak{h})$ *la cui restrizione a* $F^M_{q,\varphi}[G]$ *(immersa naturalmente nelle suddette algebre) sia l'identità.*

Di conseguenza, non esiste nessun isomorfismo di $k\left[q,q^{-1}\right]$–algebre di Hopf topologiche tra $\mathcal{U}^\infty_{\varphi,M}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}^\infty_{\varphi,M}[G]$ *e* $\mathfrak{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{g})^* = \mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{h})$*, risp. tra* $\mathfrak{U}^\infty_{\varphi,M}(\mathfrak{h}) = \mathcal{F}^\infty_{\varphi,M}[G]$ *e* $\mathcal{U}_{\varphi,M'}(\mathfrak{h})$*, la cui restrizione a* $\mathfrak{F}_{\varphi,M}[G]$*, risp. a* $\mathcal{F}_{\varphi,M}[G]$*, (immersa naturalmente nelle rispettive algebre) sia l'identità.* $\square$

Allora il Teorema 15.6 ci dice che $\mathcal{U}^\infty_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}^\infty_{\varphi,P}[G]$ è una *nuova* quantizzazione di $F^\infty[G^\tau]$, *diversa* — grazie al Teorema 15.8 — da $\mathcal{U}_{\varphi,P}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{g})^*$; analogamente si dimostra (ricalcando la dimostrazione del Teorema 10.10) che $\mathfrak{U}^\infty_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) = \mathcal{F}^\infty_{\varphi,Q}[G]$ è una *nuova* quantizzazione di $U(\mathfrak{h})$, *diversa* — per il Teorema 15.8 — da $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$:

Teorema 15.9. *L'algebra di Hopf topologica $\mathcal{F}^\infty_{\varphi,Q}[G]$ si specializza a $U(\mathfrak{h}^\tau)$ come coalgebra di Hopf Poisson per $q \to 1$, cioè*

$$\mathcal{F}^{Q,\infty}_{1,\varphi}[G] := \mathcal{F}^\infty_{\varphi,P}[G] \Big/ (q-1)\,\mathcal{F}^\infty_P[G] \cong U(\mathfrak{h}^\tau)$$

come coalgebre di Hopf Poisson. Analogamente si ha

$$\mathfrak{U}^{Q,\infty}_{1,\varphi}(\mathfrak{h}) := \mathfrak{U}^\infty_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \Big/ (q-1)\,\mathfrak{U}^\infty_{\varphi,Q}(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h})$$

come coalgebre di Hopf Poisson. $\square$

[9] Ricordiamo che con *morfismo di algebre di Hopf topologiche* si intende un morfismo di algebre di Hopf *continuo* rispetto alle topologie coinvolte.

Nota: sottolineiamo il fatto che, sia per il Teorema 15.6 che per il Teorema 15.9, non abbiamo potuto sviluppare una dimostrazione diretta, ma abbiamo dovuto far ricorso a risultati relativi alla specializzazione delle rispettive algebre di funzioni quantiche; in particolare per il secondo teorema abbiamo dovuto rifarci al Teorema 14.3 — che si dimostra invece in modo diretto — che è frutto dello studio di $\mathfrak{U}_{\varphi,Q}(\mathfrak{h})$; questo è un secondo punto in cui lo studio dei gruppi quantici multiparametrici formali si rivela meno potente e fecondo di quello dei gruppi formali quantici multiparametrici.

Un terzo punto viene dallo studio dei morfismi di Frobenius quantici: infatti siamo ancora in grado di costruirne uno soltanto, e precisamente (cfr. Teorema 15.10 più avanti) l'analogo del morfismo (14.3), ma solo ottenendolo per estensione continua dal rispettivo morfismo per l'algebra quantica multiparametrica di funzioni corrispondente, precisamente (11.14), così come avevamo fatto nel caso uniparametrico.

Sia ε una radice primitiva ℓ–esima dell'unità in k (facciamo le ipotesi dell'inizio di §5.3), con ℓ *dispari*, $\ell > d := \max_i\{d_i\}$; poniamo

$$\mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}[G] := \mathfrak{F}_{\varphi,P}^{\infty}[G] \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathfrak{F}_{\varphi,P}^{\infty}[G] \,\cong\, \mathfrak{F}_{\varphi,P}^{\infty}[G] \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$
$$\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}(\mathfrak{h}) := \mathcal{U}_{\varphi,P}^{\infty}(\mathfrak{h}) \Big/ (q-\varepsilon)\, \mathcal{U}_{\varphi,P}^{\infty}(\mathfrak{h}) \,\cong\, \mathcal{U}_{\varphi,P}^{\infty}(\mathfrak{h}) \otimes_{k[q,q^{-1}]} k$$

(dove k è inteso come $k\big[q,q^{-1}\big]$-algebra via $k \cong k\big[q,q^{-1}\big] \Big/ (q-\varepsilon)$); ovviamente si ha

$$\mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}[G] = \mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}(\mathfrak{h})\,.$$

Teorema 15.10. *Esiste un unico monomorfismo di algebre di Hopf topologiche*

$$\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau}^{\infty} \colon F^\infty\left[G^\tau\right] \cong \mathcal{U}_{1,\varphi}^{P,\infty}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_{1,\varphi}^{P,\infty}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}[G] = \mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}(\mathfrak{h}) \tag{15.1}$$

che estende il monomorfismo di algebre di Hopf $\mathfrak{Fr}_{\mathfrak{g}^\tau} \colon F\left[G^\tau\right] \cong \mathfrak{F}_{1,\varphi}^{P}[G] \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P}[G]$ *(cfr. (11.13)), definito da*

$$\mathcal{F}r_{\mathfrak{g}^\tau}^{\infty} \colon \quad \overline{F}_\alpha^\varphi\Big|_{q=1} \mapsto \left(\overline{F}_\alpha^\varphi\right)^\ell\Big|_{q=\varepsilon}, \qquad L_\lambda^\varphi\Big|_{q=1} \mapsto \left(L_\lambda^\varphi\right)^\ell\Big|_{q=\varepsilon}, \qquad \overline{E}_\alpha^\varphi\Big|_{q=1} \mapsto \left(\overline{E}_\alpha^\varphi\right)^\ell\Big|_{q=\varepsilon} \tag{15.2}$$

per ogni $\alpha \in R^+$ *; la sua immagine* $F_0^{\varphi,\infty}$ *è la sottoalgebra topologica di* $\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}(\mathfrak{h})$ *generata topologicamente da* $\left\{ \left(\overline{F}_\alpha^\varphi\right)^\ell, \left(L_\lambda^\varphi\right)^\ell, \left(\overline{E}_\alpha^\varphi\right)^\ell \,\Big|\, \alpha \in R^+, \lambda \in P \right\}$, *ed è una sottoalgebra di Hopf topologica contenuta nel centro di* $\mathfrak{F}_{\varepsilon,\varphi}^{P,\infty}[G]$ *.* □

BIBLIOGRAFIA

[Ab] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Tracts in Math. **74**, Cambridge Univeristy Press, Cambridge-New York, 1980.

[A-P-W] H. H. Andersen, P. Polo, Wen Kexin, *Representations of quantum algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1–59.

[Be] R. Berger, *Géométrie algébrique de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris (A) **289** (1979), 583–585.

[Br] J. Braconnier, *Algèbres de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris (A) **284** (1977), 1345–1348.

[B-V] K. H. Bhaskara, K. Viswanath, *Calculus on Poisson manifolds*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 68–72.

[Ca] P. Caressa, *Strutture di Poisson su algebre associative e gruppi di Lie*, Tesi di Laurea in Matematica, Università degli studi di Roma "La Sapienza", a.a. 1992–93.

[C-G-S-T] E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace, M. Tarlini, *Contractions of quantum groups*, in P. P. Kulish ed., *Quantum Groups*, Lecture Notes in Math. **1510**, 221–244.

[C-V1] M. Costantini, M. Varagnolo, *Quantum double and multiparameter quantum group*, Comm. Alg. **22 (15)** (1994), 6305–6321.

[C-V2] M. Costantini, M. Varagnolo, *Multiparameter Quantum Function Algebra at Roots of 1*, to appear in Math. Ann.

[D-D] I. Damiani, C. De Concini, *Quantum groups and Poisson groups*, in W. Baldoni, M. Picardello (eds.), *Representations of Lie groups and quantum groups*, Longman Scientific & Technical.

[Di] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Appl. Math. **20**, M. Dekker inc., New York, 1973.

[D-K] C. De Concini, V. G. Kac, *Representations of Quantum Groups at Roots of 1*, Colloque Dixmier 1989, Progr. Math. **92** (1990), 471 – 506.

[D-K-P] C. De Concini, V. G. Kac, C. Procesi, *Quantum coadjoint action*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 151 – 189.

[D-L] C. De Concini, V. Lyubashenko, *Quantum function algebra at roots of 1*, Adv. Math. **108** (1994), 205 – 262.

[D-P] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum groups*, in *D-modules, Representation Theory, and Quantum Groups*, L. Boutet de Monvel, C. De Concini, C. Procesi, P. Schapira, M. Vergne (eds.), Lecture Notes in Math. **1565**, Springer & Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1993.

[Dr1] V. G. Drinfel'd, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983), 68–71.

[Dr2] V. G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254–258.

[Dr3] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proc. ICM Berkeley 1 (1986), 789–820.

[D-W] P. Dazord, A. Weinstein (eds.), *Symplectic geometry, groupoids and integrable systems*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **20**, Springer & Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1990.

[E-K1] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Preprint q-alg@eprints.math.duke.edu (July 24$^{\text{th}}$, 1995).

[E-K2] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Poisson algebraic groups and Poisson homogeneous spaces*, Preprint q-alg@eprints.math.duke.edu (October 20$^{\text{th}}$, 1995).

[F-G] C. Fronsdal, A. Galindo, *The Dual of a Quantum Group*, Lett. Math. Phys. **27** (1993), 59–71.

[G-W] V. Ginzburg, A. Weinstein, *Lie-Poisson structures on some Poisson Lie groups*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 445–453.

[H-L] T. J. Hodge, T. Levasseur, *Primitive ideals of* $\mathbb{C}_q[G]$, J. Algebra **168** (1994), 455–468.

[H-L-T] T. J. Hodge, T. Levasseur, M. Toro *Algebraic structure of multi-parameter quantum groups*, Preprint (1994).

[Ji] M. Jimbo, *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[Jo] A. Joseph, *On the prime and primitive spectrum of the algebra of functions on a quantum group*, J. Algebra **169** (1994), 441–511.

[K-M] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri *Poisson Lie groups and complete integrability*, Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Theor. **49** (1988), 433–460.

[Ko] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes de Lie Poisson quasitriangulaires*, in Lecture Notes in Math. **1416**, Springer & Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989, 161–177.

[K-V] L. S. Krasil'ščik, *What is the hamiltonian formalism?*, Russian Math. Surveys **30** (1975), 177–202.

[Li] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geom. **12** (1987), 253–300.

[Lu1] G. Lusztig, *Modular representations and quantum groups*, Contemp. Math. **82** (1989), 59–77.

[Lu2] G. Lusztig, *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantum groups*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 257–296.

[Lu3] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata **35** (1990), 89–113.

[L-W] J.-H. Lu, A. Weinstein *Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decomposition*, J. Differential Geom. **31** (1990), 501–526.

[Ma1] S. Majid, *Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations*, Pacific J. Math. **141** (1990), 311–332.

[Ma2] S. Majid, *Quantum and braided Lie algebras*, J. Geom. Phys. **13** (1994), 307–356.

[Ma3] S. Majid, *Algebras and Hopf algebras in braided categories*, in J. Berger, S. Montgomery (eds.), *Advances in Hopf algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **158** (1994), 55–105.

[M-M] J. W. Milnor, J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211–264.

[On] A. L. Onishchik (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **20** (1993).

[Pa] P. Papi, *A characterization of a good ordering in a root system*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 661–665.

[Pa-Wa] B. Parshall, J. Wang, *Quantum linear groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **89** (1991), n^o 439.

[Po-Wo] P. P. Podles, S. L. Woronowicz, *Quantum Deformation of Lorentz Group*, Commun. Math. Phys. **130** (1990), 381–431.

[Re] N. Reshetikin, *Multiparameter Quantum Groups and Twisted Quasitriangular Hopf Algebras*, Lett. Math. Phys. **20** (1990), 331–335.

[Ro1] M. Rosso, *Finite Dimensional Representations of the Quantum Analog of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 581–593.

[Ro2] M. Rosso, *Représentations des groupes quantiques*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 744, Astérisque **201–202–203** (1991), 443–483.

[R-T-F] N. Reshetikin, L. Takhtajan, L. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225.

[Se] M. Semenov-Tian-Šanskij, *Poisson groups and dressing transformations*, J. Soviet Math. **46** (1989), 1641–1657.

[So] Ya. S. Soibelman, *Algebra of functions on a compact quantum group and its representations*, Leningrad Math. J. **2** (1991), 161–178.

[Sw] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin, New York, 1969.

[Ta] E. J. Taft, *Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras*, J. Pure and Appl. Math. **87** (1993), 301–312.

[Tn] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra Isomorphisms, and Universal R-Matrices for Quantum Algebras*, Internat. J. Modern Phys. A **7**, Suppl. 1B (1992), 941–961.

[Ve] J. L. Verdier, *Groupes quantiques (d'après V. G. Drinfel'd)*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 685, Astérisque **152–153** (1987), 305–319.

[We1] A. Weinstein, *Poisson structures and Lie algebras*, in *Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui. The Mathematical Heritage of Elie Cartan*, Asterisque (hors série), Société Mathématique de France (1985), 421–434.

[We2] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), 523–577.

[We3] A. Weinstein, *Deformation quantization*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 789, Astérisque **227** (1995), 389–409.