Journal of Pure and Applied Algebra **161** (2001), 295–307
DOI: 10.1016/S0022-4049(00)00099-2

TRESSAGES DES GROUPES DE POISSON FORMELS À DUAL QUASITRIANGULAIRE

Fabio Gavarini† , Gilles Halbout‡

† Università di Roma "Tor Vergata", Dipartimento di Matematica – Roma, Italie
‡ Institut de Recherche Mathématique Avancée, ULP–CNRS – Strasbourg, France

Abstract. In [D3], Drinfeld constructs a Quantum Formal Series Hopf Algebra (QFSHA) U_h' starting from a Quantum Universal Enveloping Algebra (QUEA) U_h. In this paper, we prove that if $\big(U_h, R\big)$ is any quasitriangular QUEA, then $\Big(U_h', \mathrm{Ad}(R)\big|_{U_h' \otimes U_h'}\Big)$ is a braided QFSHA. As a consequence, we prove that if $\mathfrak{g}$ is a quasitriangular Lie bialgebra over a field k of characteristic zero and $\mathfrak{g}^*$ is its dual Lie bialgebra, the algebra of functions $F[[\mathfrak{g}^*]]$ on the formal group associated to $\mathfrak{g}^*$ is a braided Hopf algebra. This result is a consequence of the existence of a quasitriangular quantization (U_h, R) of $U(\mathfrak{g})$ and of the fact that U_h' is a quantization of $F[[\mathfrak{g}^*]]$.

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie sur un corps k de caractéristique zéro et $\mathfrak{g}^*$ sa bigèbre de Lie duale (topologique, en général). L'algèbre $F[[\mathfrak{g}^*]]$ des fonctions sur le groupe de Poisson formel associé à $\mathfrak{g}^*$ est une k-algèbre de Hopf topologique. Dans ce travail, nous démontrons que la donnée d'une structure quasitriangulaire sur $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire d'une r-matrice, $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$, solution de l'équation de Yang-Baxter classique) induit un tressage sur l'algèbre de Hopf $F[[\mathfrak{g}^*]]$ (la définition d'un tressage est donnée au paragraphe 1). Nous étendons ainsi au cas général les résultats obtenus pour les algèbres de Kac-Moody de type fini ou affine par Reshetikhin [Re] et le premier auteur [G1,G2].

Notre démonstration repose sur les quantifications des algèbres enveloppantes et des algèbres de fonctions sur les groupes formels. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Hopf-co-Poisson. Dans ce cadre, Etingof et Kazhdan [EK] ont montré l'existence d'une quantification de $U(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire d'une $k[[h]]$-algèbre de Hopf topologique $U_h(\mathfrak{g})$ vérifiant:

(a) les $k[[h]]$-modules $U_h(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})[[h]]$ sont isomorphes;
(b) l'algèbre de Hopf-co-Poisson $U_h(\mathfrak{g}) \otimes_{k[[h]]} k$ obtenue par spécialisation à $h = 0$ est isomorphe à $U(\mathfrak{g})$.

† Le premier auteur a été en partie financé par une bourse du *Consiglio Nazionale delle Ricerche* (Italie)

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

A partir d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on peut construire *a priori* plusieurs quantifications $U_h(\mathfrak{g})$. A l'intérieur de chacune d'elles, Drinfeld [D3] construit une sous-algèbre de Hopf $F_h[[\mathfrak{g}^*]]$ dont la spécialisation à $h=0$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf-Poisson $F[[\mathfrak{g}^*]]$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit en outre quasitriangulaire, munie d'une r-matrice $r \in \wedge^2\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. Etingof et Kazhdan ont montré, dans [EK], que cette structure quasitriangulaire pouvait elle aussi être quantifiée: une des quantifications $U_h(\mathfrak{g})$ possède une R-matrice universelle $R_h \in U_h(\mathfrak{g})\otimes U_h(\mathfrak{g})$ (produit tensoriel topologique) qui, dans l'identification de $k[[h]]$-modules $U_h(\mathfrak{g})\otimes U_h(\mathfrak{g}) \simeq (U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g}))\,[[h]]$, s'écrit sous la forme $R_h \equiv 1\otimes 1 + hr \pmod{h^2}$. Nous prouvons dans ce cadre que l'action de R_h par automorphisme intérieur dans $U_h(\mathfrak{g})\otimes U_h(\mathfrak{g})$ stabilise la sous-algèbre $F_h[[\mathfrak{g}^*]]\otimes F_h[[\mathfrak{g}^*]]$ et induit par spécialisation un opérateur $\mathfrak{R}_0$ sur $F[[\mathfrak{g}^*]]\otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$. Les propriétés algébriques de la R-matrice universelle R_h font que $\mathfrak{R}_0$ est un opérateur de tressage, ce qui démontre le résultat.

Dans la première partie de ce papier, nous rappellerons les définitions et notions utiles pour notre travail. Dans la seconde partie, nous énoncerons précisément les résultats principaux et donnons le schéma de leurs démonstrations. Dans la troisième partie, on trouvera la preuve, essentiellement combinatoire, du théorème technique 2.1.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier M. Rosso et C. Kassel pour de nombreux entretiens.

§ 1. Définitions et rappels

1.1 Les objets classiques. Fixons un corps k de caractéristique zéro qui sera le corps de base de tous les objets classiques (algèbres et bigèbres de Lie, algèbres de Hopf, etc.) que nous introduirons.

Suivant [D1], nous appelons bigèbre de Lie une paire $(\mathfrak{g},\delta_\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $\delta_\mathfrak{g}\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ est une application linéaire antisymétrique — dite cocrochet de Lie — telle que son dual $\delta_\mathfrak{g}^*\colon \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ soit un crochet de Lie et que δ_g elle-même soit un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. Le dual linéaire $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est alors à son tour une bigèbre de Lie (topologique par rapport à la topologie faible lorsque $\dim(\mathfrak{g})=\infty$). Suivant [D3], §4, nous appelons bigèbre de Lie quasitriangulaire un couple $(\mathfrak{g},r)$ vérifiant les propriétés suivantes: $r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ est solution de l'équation de Yang-Baxter classique (CYBE) dans $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$:

$$[r_{12},r_{13}]+[r_{12},r_{23}]+[r_{13},r_{23}]=0$$

et $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie munie du cocrochet $\delta=\delta_\mathfrak{g}$ défini par $\delta(x)=[x\otimes 1+1\otimes x, r]$; l'élément r est alors appelé la r-matrice de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, son algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf; si de plus $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie, alors $U(\mathfrak{g})$ est en fait une algèbre de Hopf-co-Poisson ([D2]).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque. Comme $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf, son dual est une algèbre de Hopf formelle ([Di], Ch. 1); on appelle alors algèbre des fonctions sur le groupe formel associé à $\mathfrak{g}$, ou tout simplement groupe formel associé à $\mathfrak{g}$, cette algèbre de Hopf formelle $F[[\mathfrak{g}]] = U(\mathfrak{g})^*$. Si G est un groupe algébrique affine connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, si $F[G]$ est l'algèbre de Hopf des fonctions régulières sur G, et si $\mathfrak{m}_e$ est l'idéal maximal dans $F[G]$ des fonctions qui s'annulent au point unité $e \in G$, alors l'algèbre de Hopf formelle $F[[\mathfrak{g}]]$ s'identifie à la complétion $\mathfrak{m}_e$-adique de $F[G]$ ([On], Ch. I). Lorsque, de plus, $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie, $F[[\mathfrak{g}]]$ est en fait une algèbre de Hopf-Poisson formelle ([CP], §6.2.A).

1.2 Tressages et quasitriangularité. Soit H une algèbre de Hopf dans une catégorie tensorielle $(\mathcal{A}, \otimes)$ ([CP], §5): H est dite tressée ([Re], Def. 2) s'il existe un automorphisme $\mathfrak{R}$ de l'algèbre $H \otimes H$, appelé opérateur de tressage de H, différent de la volte $\sigma \colon a \otimes b \mapsto b \otimes a$, et vérifiant

$$\mathfrak{R} \circ \Delta = \Delta^{\mathrm{op}},$$
$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}), \qquad (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12} \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta)$$

où $\Delta^{\mathrm{op}} = \sigma \circ \Delta$ et $\mathfrak{R}_{12}$, $\mathfrak{R}_{13}$ et $\mathfrak{R}_{23}$ sont les automorphismes de $H \otimes H \otimes H$ définis par $\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R} \otimes \mathrm{Id}$, $\mathfrak{R}_{23} = \mathrm{Id} \otimes \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_{13} = (\sigma \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \mathfrak{R}) \circ (\sigma \otimes \mathrm{Id})$.

Si l'algèbre H est une algèbre de Hopf-Poisson, nous dirons que H est tressée en tant qu'algèbre de Hopf-Poisson si elle est tressée en tant qu'algèbre de Hopf et si son tressage est un automorphisme d'algèbre de Poisson.

Si la paire $(H, \mathfrak{R})$ est une algèbre tressée, il résulte de la définition que $\mathfrak{R}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique (QYBE) dans $\mathrm{End}(H^{\otimes 3})$:

$$\mathfrak{R}_{12} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} = \mathfrak{R}_{23} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des tresses $\mathcal{B}_n$ agit sur $H^{\otimes n}$, ce qui permet de construire des invariants de nœuds ([Tu]).

Une algèbre de Hopf H dans une catégorie tensorielle est dite quasitriangulaire ([D3], [CP]) s'il existe un élément inversible $R \in H \otimes H$, appelé R-matrice de H, tel que

$$\mathrm{Ad}(R)(\Delta(a)) = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1} = \Delta^{\mathrm{op}}(a),$$
$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R) = R_{13} R_{23}, \qquad (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}$$

où R_{12}, R_{13} et R_{23} sont les éléments de $H^{\otimes 3}$ définis par $R_{12} = R \otimes 1$, $R_{23} = 1 \otimes R$ et $R_{13} = (\sigma \otimes \mathrm{Id})(R_{23})$. Il résulte classiquement des identités ci-dessus que R vérifie la QYBE dans $H^{\otimes 3}$, c'est-à-dire,

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}.$$

Les produits tensoriels de H-modules sont alors munis d'une action du groupe des tresses. En outre, il est clair que si (H, R) est quasitriangulaire, alors $\big(H, \mathrm{Ad}(R)\big)$ est tressée.

1.3 Les objets quantiques. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie dont les objets sont les $k[[h]]$-modules topologiquement libres et complets au sens h-adique, et les morphismes sont les applications $k[[h]]$-linéaires continues. Pour tous V, W dans $\mathcal{A}$, définissons $V \otimes W$ comme étant la limite projective des $k[[h]]/(h^n)$-modules $\big(V/h^nV\big) \otimes_{k[[h]]/(h^n)} \big(W/h^nW\big)$: on munit ainsi $\mathcal{A}$ d'une structure de catégorie tensorielle; en particulier pour tous espaces vectoriels V_0 et W_0 sur k on a $V_0[[h]] \otimes W_0[[h]] \cong (V_0 \otimes W_0)[[h]]$, où $V_0 \otimes W_0$ est un produit tensoriel topologique si V_0 et W_0 sont des espaces vectoriels topologiques ([EK], §7). Reprenant la définition de Drinfeld ([D3]), on appelle algèbre enveloppante universelle quantifiée (QUEA) toute algèbre de Hopf dans la catégorie $\mathcal{A}$ dont la limite semi-classique, c'est-à-dire la spécialisation en $h = 0$, est l'algèbre enveloppante universelle d'une bigèbre de Lie. En particulier, toute quantification d'une bigèbre de Lie est une QUEA. De même, on appelle algèbre de Hopf des séries formelles quantiques (QFSHA), toute algèbre de Hopf dont la limite semi-classique est l'algèbre des fonctions sur un groupe formel.

Dans la suite, nous aurons besoin du résultat suivant:

Théorème 1.4. *([EK]) Toute bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une quantification $U_h(\mathfrak{g})$. Si $(\mathfrak{g}, r)$ est de plus quasitriangulaire, alors il existe une quantification $U_h(\mathfrak{g})$ et un élément $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ tels que $\big(U_h(\mathfrak{g}), R_h\big)$ soit une algèbre de Hopf quasitriangulaire et $R_h \in 1 \otimes 1 + r\,h + h^2\,(U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))\,[[h]]$.*

1.5 Le foncteur de Drinfeld. Soit H une algèbre de Hopf sur $k[[h]]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\Delta^n \colon H \longrightarrow H^{\otimes n}$ par $\Delta^0 = \epsilon$, $\Delta^1 = \mathrm{Id}_H$ et $\Delta^n = \big(\Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes (n-2)}\big) \circ \Delta^{n-1}$ si $n > 2$. Pour tout sous-ensemble ordonné $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $i_1 < \cdots < i_k$, on définit l'homomorphisme $j_\Sigma \colon H^{\otimes k} \longrightarrow H^{\otimes n}$ par $j_\Sigma(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_n$ avec $b_i = 1$ si $i \notin \Sigma$ et $b_{i_m} = a_m$ pour $1 \leq m \leq k$; on pose alors $\Delta_\Sigma = j_\Sigma \circ \Delta^k$. On définit aussi $\delta_n \colon H \longrightarrow H^{\otimes n}$ par $\delta_n = \sum_{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} \Delta_\Sigma$, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, et plus généralement, pour tout $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, avec $i_1 < \cdots < i_k$, on pose

$$\delta_\Sigma = \textstyle\sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} (-1)^{|\Sigma| - |\Sigma'|}\, \Delta_{\Sigma'} = j_\Sigma \circ \delta_k. \tag{1.1}$$

En particulier, $\delta_{\{1,\dots,n\}} = \delta_n$. Grâce au principe d'inclusion-exclusion, ceci équivaut à

$$\Delta_\Sigma = \textstyle\sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} \delta_{\Sigma'} \tag{1.2}$$

pour tout $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $i_1 < \cdots < i_k$. Enfin on définit le sous-espace de H

$$H' = \big\{\, a \in H \,\big|\, \delta_n(a) \in h^n H^{\otimes n} \,\big\},$$

que nous considérerons muni de la topologie induite. Nous avons alors:

Théorème 1.6. *([D3]) Si H est une QUEA, alors H' est une QFSHA.*

Si, de plus, la limite semi-classique de H est l'algèbre de Hopf-co-Poisson $U(\mathfrak{g})$, alors la limite semi-classique de ${U_h(\mathfrak{g})}'$ est l'algèbre de Hopf-Poisson toplogique $F[[\mathfrak{g}^*]]$.

§ 2. Les résultats principaux

Les résultats de cet article sont des conséquences du théorème suivant dont la preuve sera donnée dans le paragraphe 3.

Théorème 2.1. *Soit H une algèbre de Hopf quasitriangulaire dans la catégorie $\mathcal{A}$, et soit R sa R-matrice. Alors l'automorphisme interieur* $\mathrm{Ad}(R)\colon H \otimes H \to H \otimes H$ *se restreint en un automorphisme de $H' \otimes H'$ et la paire $\Big(H', \mathrm{Ad}(R)\big|_{H'\otimes H'}\Big)$ est ainsi une algèbre de Hopf tressée.*

On déduit de ce théorème une interprétation géométrique de la r-matrice classique:

Théorème 2.2. *Pour toute bigèbre de Lie quasitriangulaire $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Hopf-Poisson topologique $F[[\mathfrak{g}^*]]$ est tressée. Plus précisément, on peut trouver une algèbre de Hopf tressée qui quantifie l'algèbre $F[[\mathfrak{g}^*]]$ et dont l'opérateur de tressage se spécialise en celui de $F[[\mathfrak{g}^*]]$.*

Preuve. Soit r la r-matrice de $\mathfrak{g}$. D'après le théorème 1.4, il existe une QUEA quasitriangulaire $\big(U_h(\mathfrak{g}), R_h\big)$ dont la limite semi-classique est $\big(U(\mathfrak{g}), r\big)$. D'après le théorème 1.6, la limite semi-classique de $U_h(\mathfrak{g})'$ est $F[[\mathfrak{g}^*]]$. Soit $\mathfrak{R}_h = \mathrm{Ad}(R_h)$, l'automorphisme intérieur défini par R_h. Le théorème 2.1 nous assure que $\Big({U_h(\mathfrak{g})}', \mathfrak{R}_h\big|_{U_h(\mathfrak{g})'\otimes U_h(\mathfrak{g})'}\Big)$ est une algèbre de Hopf tressée. Sa limite semi-classique $\left(F[[\mathfrak{g}^*]], \Big(\mathfrak{R}_h\big|_{U_h(\mathfrak{g})'\otimes U_h(\mathfrak{g})'}\Big)\Big|_{h=0}\right)$ est donc tressée elle-aussi.

Enfin, le crochet de Poisson de $F[[\mathfrak{g}^*]]$ est donné par $\{a,b\} = \big([\alpha,\beta]/h\big)\big|_{h=0}$ pour tout a, $b \in F[[\mathfrak{g}^*]]$ et α, $\beta \in {U_h(\mathfrak{g})}'$ tels que $\alpha|_{h=0} = a$, $\beta|_{h=0} = b$. Ainsi, puisque $\mathfrak{R}_h$ est un automorphisme d'algèbre, sa restriction $\Big(\mathfrak{R}_h\big|_{U_h(\mathfrak{g})'\otimes U_h(\mathfrak{g})'}\Big)\Big|_{h=0}$ est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson. $\square$

Le théorème ci-dessus a une autre conséquence: soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ comme ci-dessus, soit $\mathfrak{R}$ le tressage de $F[[\mathfrak{g}^*]]$ et soit $\mathfrak{e}$ l'idéal maximal (unique) de $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]] = F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$ (produit tensoriel topologique, selon [Di], Ch. 1). Puisque $\mathfrak{R}$ est un automorphisme d'algèbre, $\mathfrak{R}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}$ et $\mathfrak{R}$ induit un automorphisme $\overline{\mathfrak{R}}$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$. Or $\mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ et comme $\mathfrak{R}$ est un automorphisme d'algèbre de Poisson, l'application $\overline{\mathfrak{R}}$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$; l'automorphisme $\overline{\mathfrak{R}}$ hérite aussi des autres propriétés du tressage $\mathfrak{R}$. En particulier, $\mathfrak{R}$ et $\overline{\mathfrak{R}}$ sont solutions de la QYBE et définissent donc une action du groupe des tresses $\mathcal{B}_n$ sur $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]]^{\otimes n}$ et sur $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})^{\otimes n}$.

De tels automorphismes de $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ ont étés introduits dans [WX], §9; leur construction est liée à la "R-matrice globale", qui donne aussi une interprétation géométrique de la r-matrice classique. Il conviendrait de comparer nos résultats et ceux de [WX] et d'étudier parallèlement les propriétés de fonctorialité de notre construction.

§ 3. Démonstration du théorème 2.1

Dans cette section (H,R) sera une algèbre de Hopf quasitriangulaire comme dans l'énoncé du théorème 2.1. Nous voulons étudier l'action adjointe de R sur l'algèbre $H\otimes H$. Cette dernière possède une structure naturelle d'algèbre de Hopf, son coproduit $\tilde{\Delta}$ étant défini par $\tilde{\Delta} = \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}_H \otimes \mathrm{Id}_H) \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \Delta)$, où σ_{23} désigne la volte dans les positions 2 et 3. Nous noterons aussi $I = 1 \otimes 1$ l'unité dans $H \otimes H$. Selon notre définition du produit tensoriel dans $\mathcal{A}$, on a $\big(H \otimes H\big)' = H' \otimes H'$. Notre but est de montrer que, même si R n'appartient pas à $\big(H \otimes H\big)'$, son action adjointe $a \mapsto R \cdot a \cdot R^{-1}$ laisse stable $\big(H \otimes H\big)' = H' \otimes H'$.

Posons tout d'abord, pour $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, toujours avec $i_1 < \cdots < i_k$:

$$R_\Sigma = R_{2i_1-1,2i_k} R_{2i_1-1,2i_{k-1}} \cdots R_{2i_1-1,2i_1} R_{2i_2-1,2i_k} \cdots R_{2i_{k-1}-1,2i_1} R_{2i_k-1,2i_k} \cdots R_{2i_k-1,2i_1}$$

(produit de k^2 termes) où $R_{r,s} = j_{\{r,s\}}(R)$, en définissant $j_{\{r,s\}} \colon H \otimes H \longrightarrow H^{\otimes 2n}$ comme précédemment. Nous noterons toujours $|\Sigma|$ pour le cardinal de Σ (ici $|\Sigma| = k$).

Lemme 3.1. *Dans $\big(H \otimes H\big)^{\otimes n}$, pour tout $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a $\tilde{\Delta}_\Sigma(R) = R_\Sigma$.*

Preuve. Sans nuire à la généralité du problème, nous pouvons nous contenter de prouver le résultat pour $\Sigma = \{1, \dots, n\}$, *i.e.*,

$$\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n\}}(R) = R_{\{1,\dots,n\}} = R_{1,2n} \cdot R_{1,2n-2} \cdots R_{1,2} \cdot R_{3,2n} \cdots R_{2n-3,2} \cdot R_{2n-1,2n} \cdots R_{2n-1,2} \,.$$

Le résultat est évident au rang $n = 1$. Supposons-le acquis au rang $n \geq 1$, et montrons-le au rang $n + 1$: par définition de $\tilde{\Delta}$ et par les propriétés de la R-matrice on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n+1\}}(R) &= \Big(\tilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{H \otimes H}^{\otimes n-1}\Big)\big(\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n\}}(R)\big) \\
&= \Big(\tilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{H \otimes H}^{\otimes n-1}\Big)\big(R_{\{1,\dots,n\}}\big) \\
&= \sigma_{23}(\Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes 2n})\Big(\mathrm{Id}_H \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes 2(n-1)}\Big)(R_{1,2n} \cdots R_{1,2} \cdots R_{3,2} \cdots R_{2n-1,2}) \\
&= \sigma_{23}\big(\Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes 2n}\big)\,(R_{1,2n+1} \cdots R_{1,3} R_{1,2} \cdots R_{4,3} R_{4,2} \cdots R_{2n,3} R_{2n,2}) \\
&= \sigma_{23}(R_{1,2n+2} R_{2,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{2,4} R_{1,3} R_{2,3} \cdots R_{5,4} R_{5,3} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,3}) \\
&= R_{1,2n+2} R_{3,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{3,4} \cdot R_{1,2} R_{3,2} \cdots R_{5,4} \cdot R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,2} \\
&= R_{1,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{1,2} R_{3,2n+2} \cdots R_{3,4} R_{3,2} \cdots R_{5,4} R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,2} \\
&= R_{\{1,\dots,n+1\}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Remarque: dorénavant pour tous a, $b \in \mathbb{N}$, nous utiliserons la notation C_b^a pour désigner l'entier $\binom{b}{a} = \frac{b!}{a!(b-a)!}$.

Lemme 3.2. *Pour tout $a \in \big(H \otimes H\big)'$ et pour tout ensemble Σ tel que $|\Sigma| > i$, on a*

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma,\ |\Sigma'| \leq i} (-1)^{i-|\Sigma'|}\, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O\big(h^{i+1}\big)\,.$$

Preuve. Il suffit de prouver l'énoncé pour $\Sigma = \{1, \dots, n\}$, avec $n > i$. Grâce à (1.2), on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n\}}(a) &= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1,\dots,n\}} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) \\
&= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1,\dots,n\},\ |\bar{\Sigma}| \leq i} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) + O\big(h^{i+1}\big) \\
&= \sum_{\substack{\bar{\Sigma} \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |\bar{\Sigma}| \leq i}} \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma}} (-1)^{|\bar{\Sigma}| - |\Sigma'|}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O\big(h^{i+1}\big) \\
&= \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |\Sigma'| \leq i}} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma},\ |\bar{\Sigma}| \leq i} (-1)^{|\bar{\Sigma}| - |\Sigma'|} + O\big(h^{i+1}\big) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1,\dots,n\},\ |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, (-1)^{i - |\Sigma'|}\, C_{n-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|} + O\big(h^{i+1}\big). \qquad \square
\end{aligned}$$

Avant de nous attaquer au résultat principal, il nous faut encore un petit rappel technique sur les coefficients du binôme qui peut se prouver facilement en utilisant le développement en série formelle de $(1-X)^{-(r+1)}$, à savoir $(1-X)^{-(r+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^{r} X^k$.

Lemme 3.3. *Soient $r,\ s,\ t \in \mathbb{N}$ tels que $r < t$. On a alors les relations suivantes (où l'on pose $C_u^v = 0$ si $v > u$):*

$$(a) \quad \sum_{d=0}^{t} (-1)^d\, C_{d-1}^{r}\, C_t^d = -(-1)^r\,, \qquad (b) \quad \sum_{d=0}^{t} (-1)^d\, C_{d+s}^{r}\, C_t^d = 0.$$

Voici enfin le résultat principal de cette section:

Proposition 3.4. *On a $R\, a\, R^{-1} \in \big(H \otimes H\big)'$ pour tout $a \in \big(H \otimes H\big)'$.*

Preuve. Comme nous devons montrer que $R\, a\, R^{-1}$ appartient à $\big(H \otimes H\big)'$, nous devons considérer les termes $\delta_n\big(R\, a\, R^{-1}\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Pour cela réécrivons $\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big)$ en utilisant le lemme 3.1 et le fait que $\tilde{\Delta}$, et plus généralement $\tilde{\Delta}_{\{i_1,\dots,i_k\}}$ (pour $k \leq n$), est un morphisme d'algèbre: $\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big) = \sum_{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma\, \tilde{\Delta}_\Sigma(a)\, R_\Sigma^{-1}$.

Nous allons démontrer par récurrence sur i que

$$\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big) = O\big(h^{i+1}\big) \qquad \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-1\,. \tag{$\star$}$$

Nous verrons ainsi que tous les termes du développement limité à l'ordre $n-1$ sont nuls, donc que $\delta_n\big(R\, a\, R^{-1}\big) = O(h^n)$, d'où notre énoncé.

Pour $i = 0$ et pour chaque Σ, on a $\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \epsilon(a) I^{\otimes n} + O(h)$, $R_\Sigma = I^{\otimes n} + O(h)$, et aussi $R_\Sigma^{-1} = I^{\otimes n} + O(h)$, d'où

$$\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \epsilon(a)\, I^{\otimes n} + O(h) = O(h)\,,$$

donc le résultat $(\star)$ est vrai pour $i=0$.

Supposons le résultat $(\star)$ acquis pour tout $i'<i$. Écrivons les développements h-adiques de R_Σ et R_Σ^{-1} sous la forme $R_\Sigma=\sum_{\ell=0}^\infty R_\Sigma^{(\ell)}\,h^\ell$ et $R_\Sigma^{-1}=\sum_{m=0}^\infty R_\Sigma^{(-m)}\,h^m$. Le lemme 3.2 fournit une approximation de $\tilde{\Delta}_\Sigma(a)$ à l'ordre j:

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) \,=\, \sum_{\Sigma'\subseteq\Sigma,\ |\Sigma'|\leq j} (-1)^{j-|\Sigma'|}\,C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)+O\big(h^{j+1}\big)\,.$$

Nous obtenons l'approximation suivante de $\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\,a\,R^{-1}\big)$:

$$\begin{aligned}
&\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\,a\,R^{-1}\big)=\sum_{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}}\ \sum_{\ell+m\leq i}(-1)^{n-|\Sigma|}\,R_\Sigma^{(\ell)}\,\tilde{\Delta}_\Sigma(a)\,R_\Sigma^{(-m)}\,h^{\ell+m}+O\big(h^{i+1}\big)=\\
&=\sum_{j=0}^{i}\ \sum_{\ell+m=i-j}\Bigg(\sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |\Sigma|>j}}\ \sum_{\substack{\Sigma'\subseteq\Sigma\\ |\Sigma'|\leq j}}(-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}\,R_\Sigma^{(\ell)}\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,R_\Sigma^{(-m)}+\\
&\qquad\qquad+\sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |\Sigma|\leq j}}(-1)^{n-|\Sigma|}\,R_\Sigma^{(\ell)}\,\tilde{\Delta}_\Sigma(a)\,R_\Sigma^{(-m)}\Bigg)\,h^{\ell+m}+O\big(h^{i+1}\big)=\\
&=\sum_{j=0}^{i}\ \sum_{\ell+m+j=i}\ \sum_{\substack{\Sigma'\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |\Sigma'|\leq j}}\Bigg(\sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}}(-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}\,R_\Sigma^{(\ell)}\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,R_\Sigma^{(-m)}+\\
&\qquad\qquad+(-1)^{n-|\Sigma'|}\,R_{\Sigma'}^{(\ell)}\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,R_{\Sigma'}^{(-m)}\Bigg)\,h^{\ell+m}+O\big(h^{i+1}\big)\,.
\end{aligned}$$

Notons (E) la dernière expression entre parenthèses; nous montrerons que cette expression est nulle, d'où $\delta_n\big(R\,a\,R^{-1}\big)=O\big(h^{i+1}\big)$.

Regardons d'abord les termes correspondant à $\ell+m=0$, c'est-à-dire $j=i$. Nous retrouvons $\delta_{\{1,\dots,n\}}(a)$, qui est dans $O\big(h^{i+1}\big)$ par hypothèse. Dans la suite du calcul nous supposerons désormais $\ell+m>0$.

Fixons maintenant un entier strictement positif S et regardons comment les termes $R_\Sigma^{(\ell)}$ et $R_\Sigma^{(-m)}$ agissent sur $\big(H\otimes H\big)'^{\otimes n}$ (respectivement à gauche et à droite) pour $\ell+m=S$. En faisant le développement limité de chaque $R_{i,j}$ qui apparaît dans R_Σ, on voit que $R_\Sigma^{(\ell)}$ et $R_\Sigma^{(-m)}$ sont sommes de produits d'au plus ℓ et m termes respectivement, chacun agissant sur au plus deux facteurs tensoriels de $\big(H\otimes H\big)'^{\otimes n}$. Nous allons réécrire $\sum\limits_{\ell+m=S}R_\Sigma^{(\ell)}\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,R_\Sigma^{(-m)}$ en regroupant les termes de la somme qui agissent sur les mêmes facteurs de $\big(H\otimes H\big)'^{\otimes n}$, facteurs dont nous identifierons les positions par Σ''.

Si i appartient à Σ'', dans l'identification $(H\otimes H)^{\otimes n}=H^{\otimes 2n}$ que nous avons choisie pour définir R_Σ, l'indice i correspond à la paire $(2i-1,2i)$; mais alors R_Σ et R_Σ^{-1}, et donc aussi chaque $R_\Sigma^{(\ell)}$ et chaque $R_\Sigma^{(-m)}$, n'agissent de manière non triviale sur le i-ème facteur de $\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)$ que si, dans l'écriture explicite de R_Σ, un terme non trivial apparait aux places $2i-1$ ou $2i$, donc seulement si $i \in \Sigma$: ainsi $\Sigma'' \subseteq \Sigma$. Nous posons alors

$$\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)} = \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma} A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma,\Sigma''}(a)\,.$$

Maintenant considérons $\bar{\Sigma} \supseteq \Sigma$. D'après la définition on a $R_{\bar{\Sigma}} = R_\Sigma + \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une somme de termes qui contiennent des facteurs $R^{(s)}_{2i-1,2j}$ avec $\{i,j\} \not\subseteq \Sigma$: pour démontrer ceci, il suffit de développer chaque facteur $R_{a,b}$ dans $R_{\bar{\Sigma}}$ comme $R_{a,b} = 1^{\otimes 2n} + O(h)$. De même, on a aussi $R_{\bar{\Sigma}}^{(\ell)} = R_\Sigma^{(\ell)} + \mathcal{A}'$, et pareillement $R_{\bar{\Sigma}}^{(-m)} = R_\Sigma^{(-m)} + \mathcal{A}''$. Cela implique que $A^{(S)}_{\Sigma'',\bar{\Sigma},\Sigma'}(a) = A^{(S)}_{\Sigma'',\Sigma,\Sigma'}(a)$, et donc que les $A^{(S)}_{\Sigma'',\Sigma,\Sigma'}(a)$ ne dépendent pas de Σ ; on écrit alors

$$\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)} = \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma} A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)\ .$$

Nous allons ensuite réécrire (E) à l'aide des $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)$. Par commodité dans la suite des calculs, nous noterons $\delta_{\Sigma''\subseteq\Sigma'}$ la fonction qui vaut 1 si $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$ et 0 sinon. Nous obtenons alors une nouvelle expression pour $\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big)$, à savoir

$$\begin{aligned}
\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big) = \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma'\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |\Sigma'|\leq j}} \Bigg(& \sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\, C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} \times \\
& \times \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma} A^{(i-j)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) + (-1)^{n-|\Sigma'|} \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma'} A^{(i-j)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) \Bigg)\, h^{i-j} + O\big(h^{i+1}\big) \\
= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma'\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |\Sigma'|\leq j}} h^{i-j} & \sum_{\Sigma''\subseteq\{1,\dots,n\}} A^{(i-j)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) \times \\
\times \Bigg(\sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ \Sigma''\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} & (-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\, C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}\, \delta_{\Sigma''\subseteq\Sigma'} \Bigg) + O\big(h^{i+1}\big)\ .
\end{aligned}$$

Notons $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$ la nouvelle expression entre parenthèse; autrement dit, pour Σ' et Σ'' fixées, avec $\big|\Sigma'\big| \leq j$, on pose

$$\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ \Sigma''\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\, C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}\, \delta_{\Sigma''\subseteq\Sigma'}.$$

Remarquons que cette expression est purement combinatoire. Nous allons démontrer qu'elle est nulle lorsque les parties Σ' et Σ'' sont telles que $\big|\Sigma'\cup\Sigma''\big| \leq i-j+\big|\Sigma'\big|$ et $\big|\Sigma'\big| \leq j$. En vertu du lemme suivant, ceci suffira pour prouver la proposition. Remarquons déjà que $j < i$ et $i \leq n-1$, donc $j \leq n-2$.

Lemme 3.5.
Pour tout $S>0$ *, dans l'expression* $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,R_\Sigma^{(-m)} = \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma} A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)$ *on a* $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)=0$ *pour tout* Σ', Σ'' *tels que* $\left|\Sigma'\cup\Sigma''\right| > S+\left|\Sigma'\right|$.

Preuve. Pour démontrer ce résultat nous étudions l'action adjointe de R_Σ sur $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$.

Premièrement, sur $k\cdot I^{\otimes n}$ l'action de ces éléments donne un terme nul car pour $S>0$, on retrouve le terme à l'ordre S du développement h-adique de $R_\Sigma\cdot R_\Sigma^{-1}=1$.

Deuxièmement, considérons $\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}$, et étudions l'action sur

$$\big(H\otimes H\big)_{\Sigma'} = j_{\Sigma'}\Big(\big(H\otimes H\big)^{\otimes|\Sigma'|}\Big) \subseteq \big(H\otimes H\big)^{\otimes n}.$$

R_Σ est un produit de $|\Sigma|^2$ termes du type $R_{a,b}$, avec $a,b\in\big\{\,2i-1,2j\,\big|\,i,j\in\Sigma\,\big\}$; analysons ce qui se passe lorsqu'on effectue le produit $P=R_\Sigma\cdot x\cdot R_\Sigma^{-1}$ si $x\in\big(H\otimes H\big)_{\Sigma'}$.

Considérons le facteur $R_{a,b}$ qui apparaît le plus à droite: si $a,b\notin\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$, alors en calculant P on trouve $P=R_\Sigma\,x\,R_\Sigma^{-1}=R_\star\,R_{a,b}\,x\,R_{a,b}^{-1}\,R_\star^{-1}=R_\star\,x\,R_\star^{-1}$ (où $R_\star=R_\Sigma\,R_{a,b}^{-1}$). De même, en avançant de droite à gauche le long de R_Σ on peut écarter tous les facteurs $R_{c,d}$ de ce type, à savoir les facteurs tels que $c,d\notin\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$. Ainsi le premier facteur dont l'action adjointe est non triviale sera nécessairement du type $R_{\bar{a},\bar{b}}$ avec l'un des deux indices appartenant à $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$, soit par exemple $\bar{a}$. Notons que le nouvel indice $\bar{a}$ ($\in\{1,2,\dots,2n-1,2n\}$), qui agit sur un facteur tensoriel dans $H^{\otimes 2n}$, correspond à un nouvel indice $j_{\bar{a}}$ ($\in\{1,\dots,n\}$), agissant sur un facteur tensoriel de $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$. Ainsi pour les facteurs successifs — c'est-à-dire à gauche de $R_{\bar{a},\bar{b}}$ — il faut répéter la même analyse, mais avec l'ensemble $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\cup\{j_{\bar{a}}\}\,\big\}$ à la place de $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$; donc, comme $R_{\bar{a},\bar{b}}$ ne peut agir de manière non triviale que sur au plus $\left|\Sigma'\right|$ facteurs de $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$, le facteur à sa gauche ne peut agir de manière non triviale que sur au plus $\left|\Sigma'\right|+1$ facteurs. La conclusion est que l'action adjointe de R_Σ est non triviale sur au plus $\left|\Sigma'\right|+\left|\Sigma\right|$ facteurs de $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$.

Maintenant, considérons les différents termes $R_\Sigma^{(\ell)}$ et $R_\Sigma^{(-m)}$, avec $\ell+m=S$, et étudions les produits $R_\Sigma^{(\ell)}\cdot x\cdot R_\Sigma^{(-m)}$, avec $x\in\big(H\otimes H\big)_{\Sigma'}$. On sait déjà que $R_\Sigma^{(\ell)}$ et $R_\Sigma^{(-m)}$ sont sommes de produits, notés P_+ et P_-, d'au plus ℓ et m termes respectivement, du type $R_{i,j}^{(\pm k)}$; les termes $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)$ ne sont alors que des sommes de termes du type $P_+\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,P_-$, où de plus les “indices” intervenant dans P_+ et P_- sont dans Σ''. Or, comme chaque P_+ et chaque P_- est un produit d'au plus ℓ et m facteurs $R_{i,j}^{(\pm k)}$, on peut raffiner l'argument précédent. Considérons seulement le terme à l'ordre S du développement h-adique de $P=R_\Sigma\,x\,R_\Sigma^{-1}=R_\star\,R_{a,b}\,x\,R_{a,b}^{-1}\,R_\star^{-1}=R_\star\,x\,R_\star^{-1}$: lorsqu'il y a des facteurs du type $R_{a,b}^{(k)}$ ou $R_{a,b}^{(t)}$, pour a et b fixés n'appartenant pas à $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$, qui apparaissent dans $R_\Sigma^{(\ell)}$ ou $R_\Sigma^{(-m)}$ pour certains ℓ ou m, la contribution totale de tous ces termes dans la somme $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\,x\,R_\Sigma^{(-m)}$ est nulle. De plus, comme on ne considère maintenant que S facteurs, on conclut que $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)=0$ si $\left|\Sigma'\cup\Sigma''\right|>S+\left|\Sigma'\right|$. $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition 3.4 et calculons $\left(E'\right)_{\Sigma',\Sigma''}$. Grâce à la remarque précédente, nous pouvons nous limiter aux paires $\left(\Sigma',\Sigma''\right)$ telles que

$$\left|\Sigma'\cup\Sigma''\right| \leq i-j+\left|\Sigma'\right| \leq i-j+j=i\leq n-1\ .$$

On pourra toujours trouver au moins deux parties Σ de $\{1,\ldots,n\}$ telles que $|\Sigma|>j$ et $\Sigma'\cup\Sigma''\subseteq\Sigma$, ce qui nous assure qu'il y aura toujours au moins deux termes dans le comptage qui va suivre (condition qui assurera la nullité de l'expression $\left(E'\right)_{\Sigma',\Sigma''}$). Nous allons distinguer trois cas:

(I) Si $\Sigma''\subseteq\Sigma'$, alors l'expression $\left(E'\right)_{\Sigma',\Sigma''}$ devient

$$\left(E':1\right)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}\ .$$

En regroupant les Σ qui ont le même cardinal d, un simple comptage nous donne

$$\left(E':1\right)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{d=j+1}^{n} (-1)^{n-d}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C^{j-|\Sigma'|}_{d-1-|\Sigma'|}\,C^{d-|\Sigma'|}_{n-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}\ .$$

Or, cette dernière expression est nulle d'après le lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type

$$\sum_{k=r+1}^{t} (-1)^{t+r-k}\,C^{r}_{k-1}\,C^{k}_{t} + (-1)^{t} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+r-k}\,C^{r}_{k-1}\,C^{k}_{t} + (-1)^{t}$$

(où $C^{v}_{u}=0$ si $v>u$) avec $r,\ t\in\mathbb{N}_{+}$ et $r<t$: dans notre cas on a posé $t=n-\left|\Sigma'\right|$, $r=j-\left|\Sigma'\right|$ et $k=d-\left|\Sigma'\right|$; on vérifie que l'on a $j-\left|\Sigma'\right|<n-\left|\Sigma'\right|$ parce que $j<n$.

(II) Si $\Sigma''\nsubseteq\Sigma'$ et $\left|\Sigma'\cup\Sigma''\right|>j$, alors l'expression $\left(E'\right)_{\Sigma',\Sigma''}$ devient

$$\left(E':2\right)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ \Sigma'\cup\Sigma''\subseteq\Sigma}} (-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}\ .$$

En regroupant les Σ qui ont le même cardinal d, un simple comptage nous donne

$$\left(E':2\right)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{d=|\Sigma'\cup\Sigma''|}^{n} (-1)^{n-d}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C^{j-|\Sigma'|}_{d-1-|\Sigma'|}\,C^{d-|\Sigma'\cup\Sigma''|}_{n-|\Sigma'\cup\Sigma''|}\ .$$

À nouveau, cette dernière expression est nulle grâce au lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type $\sum\limits_{k=0}^{t}(-1)^{t+r-k}\,C^{r}_{k+s}\,C^{k}_{t}$ avec $r,\ t,\ s\in\mathbb{N}_{+}$ et $r<t$. Dans $\left(E':2\right)_{\Sigma',\Sigma''}$, on a posé $t=n-\left|\Sigma'\cup\Sigma''\right|$, $r=j-\left|\Sigma'\right|$, $s=\left|\Sigma'\cup\Sigma''\right|-\left|\Sigma'\right|-1$ et

$k = d - \big|\Sigma' \cup \Sigma''\big|$; on vérifie que l'on a $j - \big|\Sigma'\big| < n - \big|\Sigma'\big|$ car $j < n$ et $\big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| - \big|\Sigma'\big| - 1 \geq 0$ car $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$.

(III) Si $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$ et $\big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| \leq j$, alors l'expression $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$ devient

$$\big(E' : 3\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma,\ |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} \, (-1)^{j-|\Sigma'|} \, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \; .$$

Si l'on regroupe les Σ qui ont le même cardinal d, un simple comptage nous donne

$$\big(E' : 3\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{d=j+1}^{n} (-1)^{n-d} \, (-1)^{j-|\Sigma'|} \, C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \, C_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|} \; .$$

Mais là encore, la dernière expression est nulle d'après le lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type

$$\sum_{k=j+1-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{t} (-1)^{t+r-k} \, C_{k+s}^{r} \, C_{t}^{k} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+r-k} \, C_{k+s}^{r} \, C_{t}^{k}$$

où $C_u^v = 0$ si $v > u$, avec $r,\, t,\, s \in \mathbb{N}_+$ et $r < t$: ici on a encore posé $t = n - \big|\Sigma' \cup \Sigma''\big|$, $r = j - \big|\Sigma'\big|$, $s = \big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| - \big|\Sigma'\big| - 1$ et $k = d - \big|\Sigma' \cup \Sigma''\big|$; toujours pour les mêmes raisons, $j - \big|\Sigma'\big| < n - \big|\Sigma'\big|$ et $\big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| - \big|\Sigma'\big| - 1 \geq 0$.

En conclusion, on a toujours $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''} = 0$, d'où $(E) = 0$, ce qui termine la preuve. $\square$

References

[CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Di] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[D1] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations.*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), 285–287.

[D2] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **283** (1985), 1060–1064.

[D3] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. Intern. Congress of Math. (Berkeley, 1986), 1987, pp. 798–820.

[EK] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Selecta Math. (New Series) **2** (1996), 141.

[G1] F. Gavarini, *Geometrical Meaning of R-matrix action for Quantum groups at Roots of 1*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 95–117.

[G2] F. Gavarini, *The R-matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1* (to appear in Jour. Pure Appl. Algebra).

[On] A. L. Onishchik, *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Re] N. Reshetikhin, *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 79–99.

[Tu] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527–553.

[WX] A. Weinstein, P. Xu, *Classical Solutions of the Quantum Yang-Baxter Equation*, Commun. Math. Phys. **148** (1992), 309–343.

† Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" — Dipartimento di Matematica
Via della Ricerca Scientifica, 1 — I-00133 Roma, Italie — e-mail: gavarini@mat.uniroma2.it

‡ Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S. — 7, rue René Descartes — 67084 STRASBOURG Cedex, France — e-mail: halbout@math.u-strasbg.fr