

Provided for non-commercial research and education use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

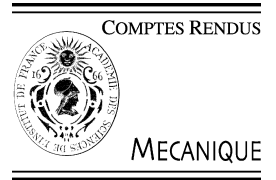


This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



# Grandes déformations et comportements extrêmes

Michel Frémond

*Universita di Roma Tor Vergata, via del Politecnico 1, 00133 Roma, Italie*

Reçu le 8 octobre 2008 ; accepté après révision le 16 janvier 2009

Disponible sur Internet le 28 février 2009

Présenté par Jean Salençon

## Résumé

On étudie les grandes déformations d'un solide. On utilise une décomposition polaire de la matrice gradient  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W}$  ( $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation,  $\mathbf{W}$  est la matrice d'extension). Dans les grandes déformations d'un solide des interactions mécaniques locales existent en tout point tant dans une extension que dans une rotation. Comme les interactions locales sont bien prises en compte par un gradient spatial, la matrice  $\mathbf{W}$  intervient pour les extensions et la matrice  $\text{grad}\mathbf{R}$  intervient pour les rotations. L'énergie libre est alors une fonction de  $\mathbf{W}$  et de  $\text{grad}\mathbf{R}$ . De plus, cette énergie libre prend en compte la condition de non interpénétration locale. Les réactions à cette condition de non interpénétration sont importantes dans les lois de comportement. Ce parti pris donne une description du mouvement, y compris de l'autocontact et des comportements extrêmes comme l'aplatissement (marteau-pilon aplatissant une structure de dimension 3 jusqu'à la réduire à une structure de dimension 2). *Pour citer cet article : M. Frémond, C. R. Mecanique 337 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Large deformations and extreme behaviours.** Large deformations of a solid are investigated. We use a polar decomposition of gradient matrix  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W}$  ( $\mathbf{R}$  is rotation matrix,  $\mathbf{W}$  is stretch matrix). Large deformations of solids involve local spacial interactions either in an extension or in a rotation. Because local interactions are well described by spacial gradient, matrix  $\mathbf{W}$  intervene for extensions and matrix  $\text{grad}\mathbf{R}$  intervene for rotations. Thus the free energy depends on  $\mathbf{W}$  and on  $\text{grad}\mathbf{R}$ . Moreover, free energy takes into account the local impenetrability condition. Reactions to this impenetrability condition are important in constitutive laws. Within our parti-pris, self contact and extreme behaviours like the flattening (for example, structure flattened by a power hammer evolving from dimension 3 to dimension 2) are accounted for. *To cite this article: M. Frémond, C. R. Mecanique 337 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique des solides numérique ; Grandes déformations ; Aplatissement

*Keywords:* Computational solid mechanics; Large deformations; Flattening

Adresse e-mail : [fremond@lagrange.it](mailto:fremond@lagrange.it).

## 1. Introduction

La théorie usuelle des grandes déformations élastiques retient la loi de comportement

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \quad (1)$$

pour le tenseur des contraintes de Boussinesq  $\mathbf{\Pi}$ , où  $\Psi(\mathbf{F})$  est l'énergie libre et  $\mathbf{F}$  la matrice gradient, [1], [2]. Ce point de vue conduit à quelques difficultés. Par exemple, la condition de non interpénétration locale

$$\det \mathbf{F} > 0 \quad (2)$$

qui interdit par ailleurs tout aplatissement, impose de fortes conditions à l'énergie libre, [2]. L'aplatissement d'une structure de dimension 3 par un marteau-pilon est un phénomène mécanique où l'on peut estimer que les grandes déformations vont jusqu'à la réduction de la dimension de la structure à la dimension 2. Lorsqu'un solide est transformé en un fil par une filière, le gradient de la rotation du fil est un élément important de son comportement pendant et après le filage. Les problèmes mécaniques où ces déformations extrêmes apparaissent sont assez nombreux pour nous conduire à revoir les relations (1) et (2), et aussi à envisager qu'un matériau puisse passer d'une dimension géométrique à une autre. On se limite au comportement élastique mais les résultats s'étendent aux comportements dissipatifs.

## 2. Une décomposition polaire

On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices  $3 \times 3$  muni du produit scalaire  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ ,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  le sous ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  le sous ensemble des matrices antisymétriques. On note  $x = \Phi(a, t) = (x_i) \in D_x = \Phi(D_a)$  la position d'un point matériel qui se trouve au point  $a = (a_\alpha) \in D_a$  à l'instant  $t = 0$  (le domaine  $D_a$  est un fermé régulier). On note encore  $C$  le cône convexe des matrices de  $\mathcal{M}$  qui sont semi définies positives ( $\overset{\circ}{C}$  est l'intérieur relatif,  $\partial C$  la frontière relative de  $C$  dans  $\mathcal{S}$ ). Une décomposition polaire de la matrice gradient  $\mathbf{F} = (F_{i\alpha} = \partial \Phi_i / \partial a_\alpha)$  est donnée par la proposition

**Proposition 2.1.** *Soit une matrice  $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$ . Il existe alors une unique matrice symétrique  $\mathbf{W} \in \mathcal{S}$  et une matrice orthogonale  $\mathbf{R}$  ( $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ ) avec  $\det \mathbf{R} = 1$ , qui vérifient*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{W} \quad (3)$$

- si  $\det \mathbf{F} > 0$ ,  $\mathbf{W} \in \overset{\circ}{C}$  ou les valeurs propres  $\lambda_i(\mathbf{W})$  de  $\mathbf{W}$  vérifient  $\lambda_i(\mathbf{W}) > 0$ . La matrice  $\mathbf{R}$  est unique ;
- si  $\det \mathbf{F} < 0$ ,  $\mathbf{W} \in -\overset{\circ}{C}$  ou les valeurs propres de  $\mathbf{W}$  vérifient  $\lambda_i(\mathbf{W}) < 0$ . La matrice  $\mathbf{R}$  est unique ;
- si  $\det \mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{W} \in \partial C$  ou les valeurs propres de  $\mathbf{W}$  vérifient  $\lambda_i(\mathbf{W}) \geq 0$  et
  - si  $\text{rang } \mathbf{F} = \text{rang } \mathbf{W} = 2$ , la matrice  $\mathbf{R}$  est unique ;
  - si  $\text{rang } \mathbf{F} = \text{rang } \mathbf{W} = 1$ , la matrice  $\mathbf{R}$  dépend d'un paramètre ;
  - si  $\text{rang } \mathbf{F} = \text{rang } \mathbf{W} = 0$ , la matrice  $\mathbf{R}$  dépend de trois paramètres.

## 3. Les vitesses de déformation. Les efforts intérieurs

Les vitesses de déformation sont des éléments importants qui définissent les efforts intérieurs par leurs puissances. Leur choix est subjectif et caractérise la complexité de la théorie. *Les phénomènes physiques se produisent dans la position  $D_x$  à l'instant  $t$  et font intervenir des interactions entre points voisins. Les puissances sont alors définies sur l'image par  $\Phi^{-1}$  des voisinages  $\mathcal{V}_x$  des points de  $D_x$ .*

### 3.1. Les vitesses de déformation et les efforts intérieurs dans le domaine

Nous choisissons les vitesses de déformation usuelles

$$\text{grad } \vec{U} = \text{grad } \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t), \quad \mathbf{\Omega} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}(a, t) \mathbf{R}^T(a, t) \quad (4)$$

où  $\mathbf{\Omega}$  est la vitesse de rotation. Les vitesses de déformation virtuelles sont  $\text{grad } \widehat{\mathbf{V}}$  et  $\widehat{\mathbf{\Omega}} \in \mathcal{A}$ . Quand un solide est écrasé en un fil, la variation spatiale de la rotation a un effet sur son comportement : un fil torsadé se comporte différemment d'un fil non torsadé. Nous affinons alors la description des déformations en ajoutant le gradient de la vitesse de rotation aux vitesses de déformation

$$\text{grad } \widehat{\mathbf{\Omega}} = (\widehat{\mathbf{\Omega}}_{ij,\alpha}) \tag{5}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs au voisinage  $\mathcal{V}_x$ , sous ensemble de  $D_x$  tel que  $\mathcal{V}_x \cap \Gamma_{\text{auto}} = \emptyset$  ( $\mathcal{V}_x$  ne coupe pas la surface d'autocontact  $\Gamma_{\text{auto}}$  définie ci-dessous), est

$$\forall \mathcal{V}_a = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_x) \tag{6}$$

$$- \int_{\mathcal{V}_a} \Pi_{i\alpha} \widehat{\mathbf{V}}_{i,\alpha} - \frac{1}{2} \{ M_{ij} \widehat{\mathbf{\Omega}}_{ij} - \Lambda_{ij\alpha} \widehat{\mathbf{\Omega}}_{ij,\alpha} \} dD_a = - \int_{\mathcal{V}_a} \mathbf{\Pi} : \text{grad } \widehat{\mathbf{V}} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{M} : \widehat{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Lambda}_\alpha : \widehat{\mathbf{\Omega}}_{,\alpha} \} dD_a \tag{7}$$

où le nouvel effort intérieur  $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Lambda}_\alpha)$  est un courant de moment (sa divergence est un moment),  $\mathbf{M}$  est le moment intérieur. Il y a le coefficient 1/2 car on fait le produit de tenseurs représentés par les matrices antisymétriques  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_\alpha$  et  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ .

### 3.2. Les vitesses de déformation et les efforts intérieurs sur la surface d'autocontact

Une partie de la frontière du solide peut être en contact avec une autre. Pour simplifier, on considère ici le cas usuel où cette partie  $\Gamma_{\text{auto}}$  est une surface à l'intérieur du domaine  $D_x = \Phi(D_a)$ , (un domaine est fermé). Sur cette surface, le point  $x \in \Gamma_{\text{auto}}$  est la position de deux points matériels  $a$  et  $b$  de  $\partial D_a$

$$x = \Phi(a, t) = \Phi(b, t) \tag{8}$$

Il y a deux vitesses au point  $x$ ,  $\vec{U}(a, t)$  et  $\vec{U}(b, t)$ . On choisit comme vitesse de déformation la vitesse d'écartement  $\vec{U}(a, t) - \vec{U}(b, t)$  et les deux vitesses de rotation  $\mathbf{\Omega}(a, t)$  et  $\mathbf{\Omega}(b, t)$ .

Soit  $\mathcal{V}_x$  un voisinage de  $x$  dans  $D_x$ . Comme la fonction  $a \rightarrow \Phi(a)$  est continue,  $\Phi^{-1}(\mathcal{V}_x \cap \Gamma_{\text{auto}}) = \hat{\mathcal{V}}_a \cup \hat{\mathcal{V}}_b$  où  $\hat{\mathcal{V}}_a$  et  $\hat{\mathcal{V}}_b$  sont des voisinages de  $a$  et  $b$  dans  $\Phi^{-1}(\Gamma_{\text{auto}})$ . La puissance virtuelle des efforts d'autocontact que nous choisissons est

$$\forall \hat{\mathcal{V}}_a \cup \hat{\mathcal{V}}_b = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_x \cap \Gamma_{\text{auto}}) \tag{9}$$

$$- \int_{\partial D_a \cap \Phi^{-1}(\mathcal{V}_x \cap \Gamma_{\text{auto}})} \left( \vec{r} \cdot \widehat{\mathbf{V}} + \frac{1}{2} \mathbf{m} : \widehat{\mathbf{\Omega}} \right) dS_a \tag{10}$$

$$= - \int_{\partial D_a \cap \hat{\mathcal{V}}_a} \left( \vec{r}(\hat{a}) \cdot \widehat{\mathbf{V}}(\hat{a}) + \frac{1}{2} \mathbf{m}(\hat{a}) : \widehat{\mathbf{\Omega}}(\hat{a}) \right) dS_a - \int_{\partial D_a \cap \hat{\mathcal{V}}_b} \left( \vec{r}(\hat{b}) \cdot \widehat{\mathbf{V}}(\hat{b}) + \frac{1}{2} \mathbf{m}(\hat{b}) : \widehat{\mathbf{\Omega}}(\hat{b}) \right) dS_b \tag{11}$$

où  $\vec{r}$  est une force surfacique et  $\mathbf{m}$  est un moment surfacique représenté par une matrice antisymétrique. On définit de la même façon des efforts intérieurs sur les surfaces de contact avec un obstacle fixe occupant le domaine  $D_{\text{obs}}$  de frontière  $\partial D_{\text{obs}}$ .

Les puissances des efforts intérieurs (7) et (11) sont nulles pour tous les mouvements rigidifiants : ceux-ci sont les translations uniformes. Il n'y a pas de vitesse de rotation rigidifiante à l'exception de la vitesse de rotation nulle. On a alors pour toute vitesse rigidifiante  $\widehat{\mathbf{V}}$

$$0 = - \int_{\partial D_a \cap \hat{\mathcal{V}}_a} \vec{r} \cdot \widehat{\mathbf{V}} dS_a - \int_{\partial D_a \cap \hat{\mathcal{V}}_b} \vec{r} \cdot \widehat{\mathbf{V}} dS_b = \left\{ - \int_{\partial D_a \cap \hat{\mathcal{V}}_a} \vec{r} dS_a - \int_{\partial D_a \cap \hat{\mathcal{V}}_b} \vec{r} dS_b \right\} \cdot \widehat{\mathbf{V}} \tag{12}$$

Il en résulte en faisant tendre la taille du voisinage  $\mathcal{V}_x$  vers 0

$$\forall (a, b), a \neq b, \quad \Phi^{-1}(\Phi(a)) \cap \partial D_a = \Phi^{-1}(\Phi(b)) \cap \partial D_a \tag{13}$$

$$\vec{r}(a) dS_a + \vec{r}(b) dS_b = 0 \tag{14}$$

où les éléments de surface  $dS_a$  et  $dS_b$  sont les images réciproques de  $d\Gamma$ , élément de surface de  $\Gamma_{\text{auto}}$ . On a aussi

$$\frac{\vec{r}(a)}{\|\text{cof } \mathbf{W}(a)\|} + \frac{\vec{r}(b)}{\|\text{cof } \mathbf{W}(b)\|} = 0 \quad (15)$$

La puissance des efforts intérieurs (11) est bien alors une fonction de la vitesse de déformation  $\vec{U}(a, t) - \vec{U}(b, t)$ .

#### 4. Les équations du mouvement

Elles résultent du principe des puissances virtuelles, les champs de vitesses virtuelles étant  $\widehat{V}(a)$  et  $\widehat{\Omega}(a)$ . Les puissances des efforts d'accélération et des efforts extérieurs ont les expressions usuelles. En dehors des zones de contact, le principe donne par un calcul classique, [3]

$$\rho_a \frac{\partial U_i}{\partial t} = \Pi_{i\alpha, \alpha} + f_i, \quad \Lambda_{\alpha, \alpha} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^e = 0, \quad \text{dans } \mathring{D}_a \quad (16)$$

$$\Pi_{i\alpha} N_\alpha = g_i, \quad \Lambda_\alpha N_\alpha = \mathbf{m}^e, \quad \text{sur } \Phi^{-1}(\partial D_x \setminus \partial D_{\text{obs}}) \cap \partial D_a \quad (17)$$

$\rho_a$  est la masse volumique,  $\Phi^{-1}(\partial D_x \setminus \partial D_{\text{obs}}) \cap \partial D_a$  est la partie de  $\partial D_a$  qui n'a pas pour image une zone de contact (autocontact ou contact avec l'obstacle). Les efforts extérieurs surfaciques  $g_i$  et  $\mathbf{m}^e$  y sont appliqués. Les efforts extérieurs volumiques sont  $f_i$  et  $\mathbf{M}^e$ . Le vecteur  $N_\alpha$  est normal à  $\partial D_a$ .

Sur la surface d'autocontact, on a avec des notations et des calculs classiques, la continuité des contraintes

$$\Pi_1 \vec{N}_a dS_a = -\vec{r}(a) dS_a = \sigma_1 \vec{N}_1 d\Gamma = -\Pi_2 \vec{N}_b dS_b = \vec{r}(b) dS_b = -\sigma_2 \vec{N}_2 d\Gamma = \sigma_2 \vec{N}_1 d\Gamma \quad (18)$$

$\sigma_1$  est le tenseur des contraintes de Cauchy sur le côté 1 de normale  $\vec{N}_1$  correspondant au point  $a$  et  $\vec{N}_a$  est la normale sur la configuration initiale. L'équilibre des moments est

$$\Lambda_\alpha(a, t) N_\alpha(a, t) + \mathbf{m}(a, t) = 0, \quad \Lambda_\alpha(b, t) N_\alpha(b, t) + \mathbf{m}(b, t) = 0, \quad \text{sur } \Phi^{-1}(\Gamma_{\text{auto}}) \quad (19)$$

Sur les parties aplaties de  $D_x$ , les équations sont celles de milieux bidimensionnels ou curvilignes, par exemple celles des poutres, [4].

#### 5. Les lois de comportement

Nous prenons le parti de considérer que la non interpénétration est une propriété du matériau; elle peut être ou ne pas être vérifiée. Par exemple, des galaxies considérées comme des milieux continus peuvent s'interpénétrer. Un ressort spiral considéré comme un système de dimension 1 peut avoir de grandes déformations telles que  $\det \mathbf{F}$  change de signe. Nous retenons la non interpénétration en imposant que les extensions principales  $\lambda_i(\mathbf{W})$  de la matrice d'extension  $\mathbf{W}$  de la décomposition polaire sont positives ou nulles, ou encore

$$\mathbf{W} \in C \quad (20)$$

Cette condition impose que le volume algébrique de l'image par  $\mathbf{F}$  d'un parallélépipède ne change pas de signe. Lorsque  $\det \mathbf{W} = \det \mathbf{F} = 0$ , le matériau est aplati, en une surface si  $\text{rang } \mathbf{W} = 2$ , en une courbe si  $\text{rang } \mathbf{W} = 1$  et en un point si  $\text{rang } \mathbf{W} = 0$ . Cette propriété de l'état du matériau est prise en compte par l'énergie libre volumique qui dépend des variables d'état  $\mathbf{W}$  et  $\text{grad } \mathbf{R}$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R}) = \Psi(\mathbf{W}, \|\text{grad } \mathbf{R}\|^2) + I_C(\mathbf{W}) \quad (21)$$

où  $\|\text{grad } \mathbf{R}\|^2 = R_{i\alpha, \beta} R_{i\alpha, \beta}$  est une quantité objective et  $I_C$  est la fonction indicatrice de l'ensemble convexe  $C$ , [5]. Les lois de comportement pour un matériau élastique sont

$$\Pi = \mathbf{R} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}} + \mathbf{S}^{\text{reac}} + \mathbf{A}^{\text{reac}} \right), \quad (\mathbf{S}^{\text{reac}} + \mathbf{A}^{\text{reac}}) \in \partial I_C(\mathbf{W}) \quad (22)$$

$$\mathbf{S}^{\text{reac}} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{A}^{\text{reac}} \in \mathcal{A} \quad (23)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}} + \mathbf{S}^{\text{reac}} + \mathbf{A}^{\text{reac}} \right) \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}} + \mathbf{S}^{\text{reac}} - \mathbf{A}^{\text{reac}} \right) \mathbf{R}^T \quad (24)$$

$$\Lambda = 4 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial (\|\text{grad } \mathbf{R}\|^2)} \right) (\text{grad } \mathbf{R}) \mathbf{R}^T \quad (25)$$

Elles impliquent que l'inégalité de Clausius Duhem est vérifiée, [6], que  $\mathbf{W} \in C$ , et que

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Pi}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{\Pi}^T \quad (26)$$

Le sous-différentiel  $\partial I_C(\mathbf{W})$  est formé des matrices  $\mathbf{A}^{\text{reac}}$  de  $\mathcal{A}$  et des matrices  $\mathbf{S}^{\text{reac}}$  de  $\mathcal{S}$  qui sont normales au cône  $C$  dans  $\mathcal{S}$  au point  $\mathbf{W} \in C$

$$\forall \mathbf{X} \in C, \quad (\mathbf{X} - \mathbf{W}) : \mathbf{S}^{\text{reac}} \leq 0 \quad (27)$$

Les matrices  $\mathbf{S}^{\text{reac}}$  sont nulles lorsque  $\text{rang } \mathbf{W} = \text{rang } \mathbf{F} = 3$ . Les matrices  $\mathbf{A}^{\text{reac}}$  sont toujours présentes.

Sur la surface d'autocontact  $\Gamma_{\text{auto}}$ ,  $\mathbf{m} = 0$  et la réaction non dissipative de non interpénétration est

$$\vec{r}(a) = \|\text{cof } \mathbf{W}(a)\| R^{\text{reac}} \vec{N}_1(\Phi(a)), \quad R^{\text{reac}} \in \mathbb{R}^+ \quad (28)$$

## 6. Les réactions

Il y a trois conditions de non interpénétration :

- la condition de non interpénétration sur la surface d'autocontact provoquant une force de réaction normale à la surface d'autocontact, donnée par la formule (28). Quand l'autocontact résulte d'une collision, il y a une percussion de réaction qui est précisée dans [6] et [7] ;
- la condition de non interpénétration avec l'obstacle provoquant aussi une force de réaction ;
- la condition de non interpénétration locale qui fait intervenir les tenseurs de contraintes de réaction  $\mathbf{RS}^{\text{reac}}$  lorsque  $\text{rang } \mathbf{W} < 3$  et  $\mathbf{RA}^{\text{reac}}$  lorsque  $\text{rang } \mathbf{W} < 2$ . Ces réactions proviennent de la liaison  $\mathbf{W} \in C$  prise en compte par l'énergie libre. On montre qu'elles sont non dissipatives

$$\mathbf{RA}^{\text{reac}} : \text{grad } \vec{U} = 0, \quad \mathbf{RS}^{\text{reac}} : \text{grad } \vec{U} = 0 \quad (29)$$

Le tenseur  $\mathbf{RS}^{\text{reac}}$  avec  $\mathbf{S}^{\text{reac}} \in \partial I_C(\mathbf{W})$  empêche les extensions principales, les valeurs propres de  $\mathbf{W}$ , de devenir négatives. Il est, bien sûr, nul lorsque  $\text{rang } \mathbf{W} = \text{rang } \mathbf{F} = 3$ . On montre, comme on peut s'y attendre, que lorsque le solide est aplati en un solide de dimension 2, une plaque par exemple, ce tenseur de contraintes de réaction donne une pression  $\mathbf{RS}^{\text{reac}} \vec{S}_a$ , où  $\vec{S}_a$  est le vecteur propre unitaire de  $\mathbf{W}$  relatif à la valeur propre nulle, qui maintient l'aplatissement.

On pourrait penser que cette pression est toujours suffisante pour assurer la non interpénétration. Mais si l'on veut transformer cette plaque en un fil, un solide de dimension 1, on peut, entre autres, lui appliquer des forces tangentielles surfaciques. Il peut donc apparaître une seconde réaction, c'est une force  $\mathbf{RA}_1^{\text{reac}} \vec{S}_a$ , une contrainte de cisaillement orthogonale à la pression et qui n'existe que lorsque  $\text{rang } \mathbf{W} < 2$ .

Plus précisément, la matrice  $\mathbf{A}^{\text{reac}}$ , toujours présente, est la somme de deux matrices  $\mathbf{A}_0^{\text{reac}} \in \mathcal{A}$  et  $\mathbf{A}_1^{\text{reac}} \in \mathcal{A}$  avec  $\mathbf{A}_1^{\text{reac}} : \mathbf{A}_0^{\text{reac}} = 0$ . Le tenseur  $\mathbf{RA}_0^{\text{reac}}$  empêche la matrice  $\mathbf{W}$  de devenir non symétrique ou, suivant la formule (26), la matrice  $\mathbf{M}$  de devenir non antisymétrique. Il est déterminé par les lois de comportement (22) et (24). La matrice  $\mathbf{A}_1^{\text{reac}}$ , nulle pour  $\text{rang } \mathbf{W} \geq 2$ , donne la réaction de non interpénétration,  $\mathbf{RA}_1^{\text{reac}} \vec{S}_a$ , qui est déterminée par les équations du mouvement.

Le tenseur  $\mathbf{RA}^{\text{reac}}$  apparaît comme un tenseur de contraintes de réaction conservant la symétrie de la matrice d'extension et intervenant éventuellement pour assurer la non interpénétration. Le tenseur des contraintes  $\mathbf{RA}^{\text{reac}}$  n'est donc qu'exceptionnellement nul et la loi de comportement (1) n'est valide que dans des cas particuliers. Il est alors naturel de retenir la loi de comportement générale

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}) \in \partial \bar{\Psi}(\mathbf{W}, \text{grad } \mathbf{R}) \quad (30)$$

en incluant la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$  dans l'énergie libre  $\bar{\Psi}$ . La relation (1) devient alors

$$\mathbf{\Pi} \in \mathbf{R} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}} + \partial I_C(\mathbf{W}) \right) \quad (31)$$

On peut rechercher des positions d'équilibre, celles qui minimisent l'énergie potentielle, et montrer que sous des hypothèses raisonnables ce problème a des solutions, [8].

La conservation de la masse fait apparaître des masses surfaciques, linéiques et ponctuelles. On peut encore remarquer que la condition  $\mathbf{W} \in C$  peut être introduite indépendamment de la prise en compte de  $\text{grad } \mathbf{R}$ .

## Références

- [1] J.J. Moreau, Lois d'élasticité en grande déformation, Séminaire d'Analyse convexe, Exposé n° 12, Université de Montpellier II, 1979.
- [2] P.G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [3] J. Salençon, Mécanique des milieux continus. I, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2005.
- [4] M. Frémond, Sur l'aplatissement des matériaux, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II 311 (1990) 901–907.
- [5] J.J. Moreau, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966, et Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Roma Tor Vergata, Roma, 2003. ISBN 9 788862 960014.
- [6] M. Frémond, Non-Smooth Thermomechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [7] M. Frémond, Collisions, Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Roma Tor Vergata, ISBN 9 788862 960007, 2007.
- [8] M. Frémond, Équilibre d'un solide élastique en grandes déformations, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2009), accepté pour publication, doi: 10.1016/j.crma.2009.02.001.