

## APPENDICE A5

### **GIUNTO INCOLLATO A SEMPLICE SOVRAPPOSIZIONE SIMMETRICO: SOLLECITAZIONE DI TAGLIO E FLESSIONE; SOLLECITAZIONE DI SFORZO NORMALE**

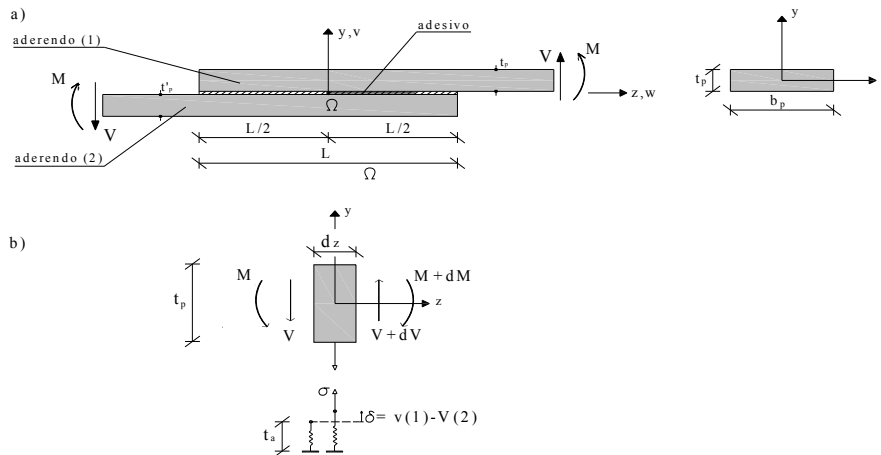
#### **A5.1. Problema di equilibrio**

Si esamina il problema di equilibrio di un giunto incollato a semplice sovrapposizione, di lunghezza  $L$ , realizzato tra due aderenti di FRP, di spessori, rispettivamente,  $t_p$  e  $t'_p$ , aventi la stessa profondità (o larghezza  $b_p$ ) e lo stesso modulo elastico in direzione longitudinale,  $E_p$ .

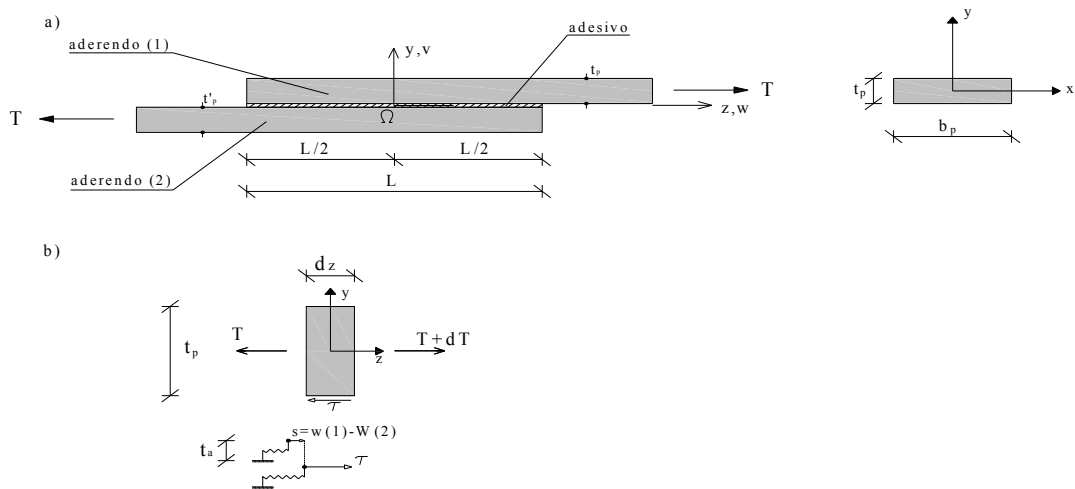
Gli aderenti sono modellati come travi indeformabili a taglio; l'adesivo, di spessore  $t_a$ , mediante leggi di interfaccia, indipendenti per il modo I ed il modo II di frattura, caratterizzate da un ramo iniziale elastico lineare seguito da un ramo *softening*, anche esso ad andamento lineare.

Si considerano, separatamente, il caso di sollecitazione da taglio e flessione (Fig. A5.1) e quello di sollecitazione da sforzo normale (Fig. A5.2).

Com'è ben noto in letteratura [7], infatti, se gli aderenti presentano caratteristiche meccaniche simili, è lecito trascurare gli effetti mutui tra tensioni normali e tangenziali all'interfaccia aderendo/adesivo.



**Figura A5.1** – a) Giunto incollato a semplice sovrapposizione simmetrico sollecitato a taglio e flessione; b) Tronco elementare.



**Figura A5.2** – a) Giunto incollato a semplice sovrapposizione simmetrico sollecitato a sforzo normale; b) Tronco elementare.

Si indicano, rispettivamente, con  $v^{(i)}$ ,  $w^{(i)}$  l'inflessione laterale o lo spostamento longitudinale dell'aderendo (i): la prima si manifesta in presenza di taglio

e flessione, il secondo in presenza di sforzo normale. Gli spostamenti relativi tra i due aderenti si denotano con  $\delta = v^{(1)} - v^{(2)}$  e  $s = w^{(1)} - w^{(2)}$ .

In analogia a quanto già esposto per il caso di giunto incollato a doppia sovrapposizione bilanciato, esaminato nel Capitolo 1, i due legami costitutivi di interfaccia,  $\sigma(\delta)$  e  $\tau(s)$ , sono esprimibili mediante le seguenti relazioni analitiche:

$$\sigma(\delta) = \begin{cases} \alpha_I \delta & \text{se } \delta \leq \delta_e, \\ \beta_I (\delta_u - \delta) & \text{se } \delta_e \leq \delta \leq \delta_u, \\ 0 & \text{se } \delta > \delta_u. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(A5.1a)} \\ \text{(A5.1b)} \\ \text{(A5.1c)} \end{array}$$

$$\tau(s) = \begin{cases} \alpha_{II} s & \text{se } |s| \leq s_e, \\ \beta_{II} (s_u - |s|) & \text{se } s_e \leq |s| \leq s_u, \\ 0 & \text{se } |s| > s_u. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(A5.2a)} \\ \text{(A5.2b)} \\ \text{(A5.2c)} \end{array}$$

Le equazioni indefinite di equilibrio dei due aderenti, rispettivamente nei casi di taglio e flessione e di sforzo normale, sono le seguenti:

$$E_p I_p \frac{d^4 v^{(1)}}{dz^4} + \sigma(v^{(1)} - v^{(2)}) b_p = 0, \quad \text{(A5.3a)}$$

$$E_p I_p \frac{d^4 v^{(2)}}{dz^4} - \sigma(v^{(1)} - v^{(2)}) b_p = 0, \quad \text{(A5.3b)}$$

$$E_p A_p \frac{d^2 w^{(1)}}{dz^2} - \tau(w^{(1)} - w^{(2)}) b_p = 0, \quad \text{(A5.4a)}$$

$$E_p A'_p \frac{d^2 w^{(2)}}{dz^2} + \tau(w^{(1)} - w^{(2)}) b_p = 0. \quad \text{(A5.4b)}$$

Nelle (A5.3) e (A5.4)  $E_p I_p$ ,  $E_p I'_p$  e  $E_p A_p$ ,  $E_p A'_p$  sono, rispettivamente, le rigidezze flessionali ed estensionali degli aderendi ( $I_p$  e  $I'_p$  sono, nell'ordine, i momenti centrali di inerzia delle sezioni rette degli aderendi (1) e (2) rispetto all'asse  $x$ ;  $A_p$  e  $A'_p$  le competenti aree). Si pone  $E_p I'_p = \mu E_p I_p$ ,  $E_p A'_p = \lambda E_p A_p$ .

Dalle (A5.3) e (A5.4), sottraendo membro a membro la equazione (b) dalla (a), attraverso alcune semplici ulteriori operazioni, si ottengono le seguenti equazioni differenziali nelle incognite, rispettivamente,  $\delta(z)$  e  $s(z)$ :

$$\frac{d^4 \delta}{dz^4} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{b_p}{E_p I_p} \sigma(\delta) = 0, \quad (\text{A5.6})$$

$$\frac{d^2 s}{dz^2} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{b_p}{E_p A_p} \tau(s) = 0. \quad (\text{A5.7})$$

Allo stesso modo, le competenti condizioni al contorno possono essere ottenute per differenza di quelle relative agli aderendi (1) e (2) in corrispondenza delle coordinate  $\left(z = \pm \frac{L}{2}\right)$  (Figg. A5.1 e A5.2):

$$-\frac{d^2 \delta}{dz^2} \Big|_{z = -\frac{L}{2}} = -\frac{M}{\mu E_p I_p}, \quad (\text{A5.8a})$$

$$-\frac{d^3 \delta}{dz^3} \Big|_{z = -\frac{L}{2}} = -\frac{V}{\lambda E_p I_p}, \quad (\text{A5.8b})$$

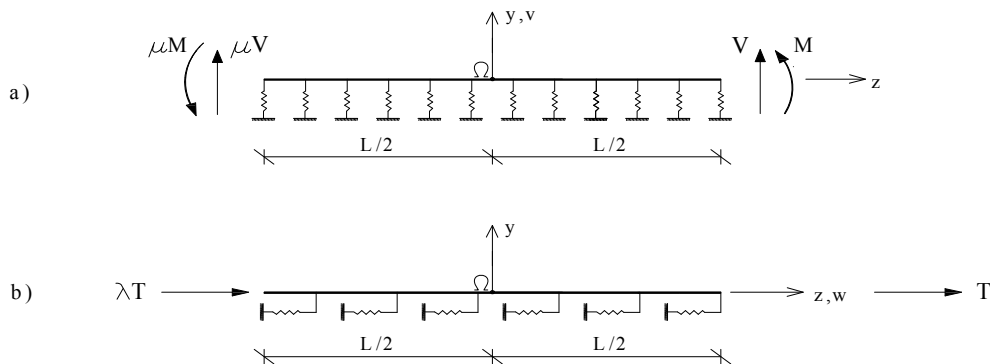
$$-\frac{d^2 \delta}{dz^2} \Big|_{z = \frac{L}{2}} = -\frac{M}{E_p I_p}, \quad (\text{A5.8c})$$

$$-\frac{d^3\delta}{dz^3}\Big|_{z=\frac{L}{2}} = \frac{V}{E_p I_p}, \quad (\text{A5.8d})$$

$$\frac{ds}{dz}\Big|_{z=\frac{L}{2}} = -\frac{T}{\lambda E_p A_p}, \quad (\text{A5.9a})$$

$$\frac{ds}{dz}\Big|_{z=\frac{L}{2}} = \frac{T}{E_p A_p}. \quad (\text{A5.9b})$$

E' agevole concludere che i problemi di valore al contorno (A5.6)-(A5.8) e (A5.7)-(A5.9), relativi a giunti incollati a semplice sovrapposizione, sollecitati a taglio e flessione o a sforzo normale, sono riconducibili, sono riconducibili ai problemi di equilibrio dei seguenti due schemi ausiliari di figura A5.3. Tali schemi sono caratterizzati da molle di rigidzze opportunamente amplificate rispetto a quelle dell'adesivo considerato: il fattore di amplificazione è  $(1+1/\mu)$  per il problema di taglio e flessione e  $(1+1/\lambda)$  per il problema di sforzo normale.



**Figura A5.3** – Schemi ausiliari.

## A5.2. Giunti simmetrici

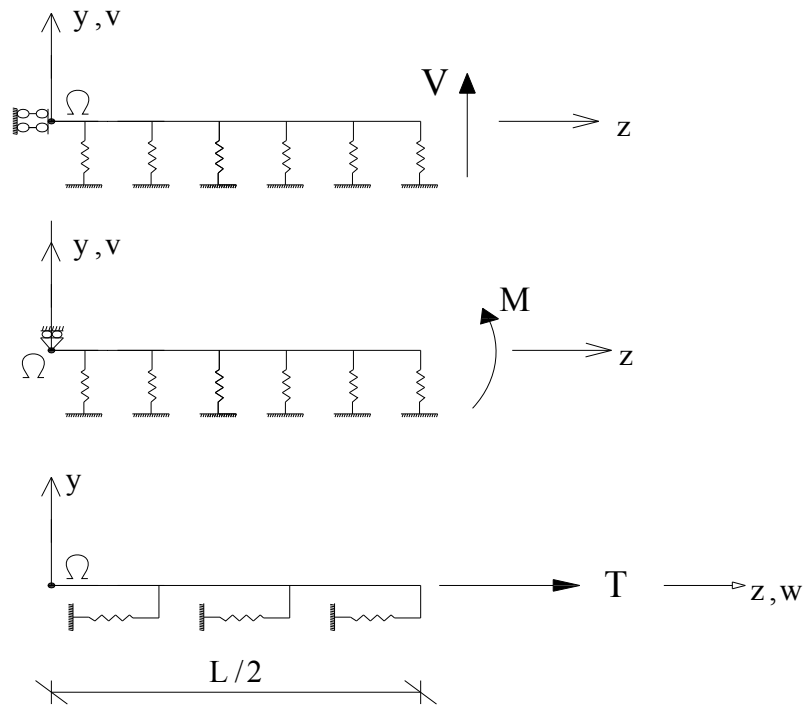
In aggiunta a quanto precedentemente osservato, nel caso di giunti simmetrici ( $\mu=1$  e  $\lambda=1$ ), è possibile avvalersi di schemi ausiliari ulteriormente semplificati. Si rileva banalmente che, in tale eventualità, le molle degli schemi ausiliari sono caratterizzate da valori dei parametri costitutivi doppi rispetto a quelli dell'effettivo adesivo considerato.

In particolare, se sullo schema di figura A5.3a agiscono i soli sforzi di taglio,  $V$ , quest'ultimo risulta essere simmetrico rispetto all'asse  $y$  e simmetricamente caricato rispetto al medesimo asse. Conseguentemente, è possibile limitarsi al problema di equilibrio di una sola metà del suddetto schema, vincolando la sezione di mezzeria,  $\Omega$ , con un doppio pendolo ad asse orizzontale (Fig. A5.4a).

Considerazioni analoghe sono possibili anche nel caso in cui agiscano i soli momenti flettenti,  $M$  (Fig. A5.3b) a patto di ammettere, a differenza di quanto finora supposto ed in perfetta analogia con la legge  $\tau(s)$ , che il legame  $\sigma(\delta)$  sia elasto-*softening* anche per valori negativi di  $\delta$  ed inoltre risulti:  $\sigma(-\delta) = -\sigma(\delta)$ . In tal modo lo schema strutturale di figura A5.3a, caricato dai soli momenti flettenti,  $M$ , di estremità, risulta essere simmetrico rispetto all'asse  $y$  e caricato antisimmetricamente rispetto al medesimo asse.

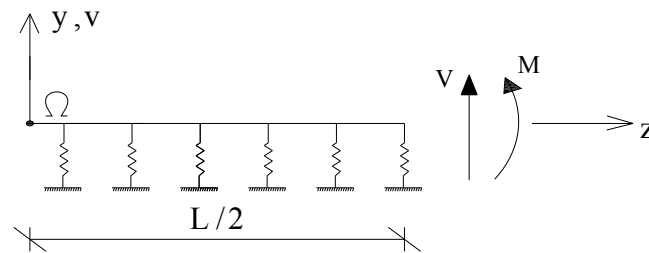
Conseguentemente, è ancora possibile limitarsi al problema di equilibrio di una sola metà dello schema, vincolando questa volta la sezione di mezzeria,  $\Omega$ , con un carrello ad asse verticale (Fig. A5.4b).

Infine, in quanto simmetrico rispetto all'asse  $y$  e antisimmetricamente caricato rispetto ad esso, lo schema di figura A5.3b è riconducibile, nei termini sopra precisati, a quello di figura A5.4c.



**Figura A5.4** – Schemi ausiliari sempificati.

In particolare, se, come generalmente accade, la lunghezza del giunto, nei casi di figura A5.4a,b, è tale da potersi considerare infinita, la presenza del doppio pendolo e del carrello diventano superflue e pertanto è possibile avvalersi dell'unico schema di figura A5.5. Su di esso, peraltro, è possibile cumulare, se entrambi presenti, il taglio ed il momento.



**Figura A5.5** – Schema ausiliario semplificato nel caso di giunto di lunghezza infinita.

### A5.3. Risoluzione iterativa

I problemi di equilibrio dei giunti di figure A5.1e A5.2, come pure quelli degli schemi ausiliari ad essi associati, sono non lineari e non sempre ammettono soluzione.

Per una discussione di condizioni necessarie a garantire, sotto assegnati carichi, l'esistenza di soluzioni dei suddetti problemi si rinvia a quanto già esposto nei §§ 2. e 3. del Capitolo I.

Si rileva inoltre che, per tutto quanto illustrato nei primi paragrafi della presente Appendice, la procedura iterativa proposta nei suddetti paragrafi per i giunti a doppia sovrapposizione bilanciati può essere utilizzata anche nei casi di giunti a semplice sovrapposizione. Inoltre, sempre al fine di utilizzare i suddetti risultati numerici e per quanto attiene unicamente alle sollecitazioni da taglio e flessione, il giunto a semplice sovrapposizione va caratterizzato con un valore dimezzato del parametro  $L$  e con valori raddoppiati dei parametri  $\alpha_1$   $\beta_1$  rispetto a quelli effettivi.