APPENDICE A2

TEORIA DI BIGWOOD E CROCOMBE

A2.1 Equazioni di campo

Si consideri il giunto incollato a semplice sovrapposizione di figura A2.1, dove si sono utilizzati i simboli originali del lavoro di Bigwood e Crocombe [7].

Sia L la sua lunghezza. Inoltre si suppone che la dimensione ortogonale al piano (x,y) possa considerarsi infinita.

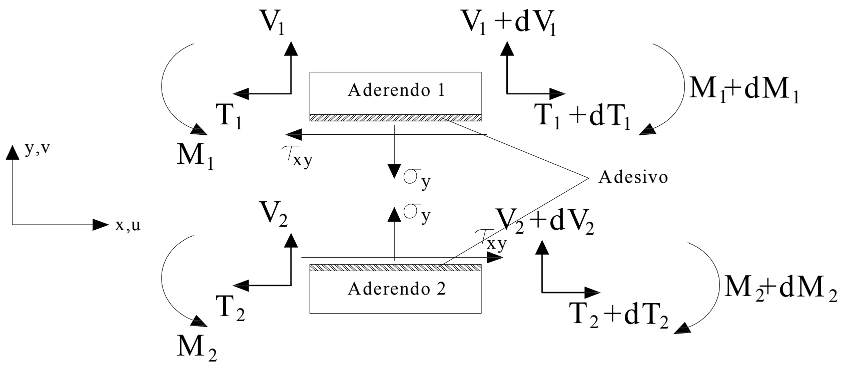

Figura A2.1 – Giunto incollato a semplice sovrapposizione di lunghezza infinitesima.

Gli aderendi, sollecitati a sforzo normale oltre che a taglio e flessione, sono di materiale elastico lineare isotropo ed omogeneo. Nei confronti dell'inflessione laterale sono schematizzati come piastre sottili, obbedienti alle ipotesi di Kirchhoff-Love, in regime di flessione cilindrica nel piano (x,y).

I loro spessori sono costanti ed eventualmente differenti l'uno dall'altro. Nei confronti dello sforzo normale, in virtù delle ipotesi che la dimensione del giunto ortogonale al piano (x,y) è infinita, si può supporre che lo stato di deformazione sia piano e che il piano delle deformazioni coincida con il suddetto piano (x,y).

L'adesivo, anch'esso di materiale elastico lineare isotropo ed omogeneo, ha spessore costante ed è cimentato, com'è facile convincersi, da tensioni tangenziali, τ_{xy}, e normali σ_y, ritenute invece trascurabili per gli aderendi.

Con i simboli di figura A2.1, le equazioni indefinite di equilibrio dei due aderendi sono le seguenti:

$$\frac{dT_1}{dx} - \tau_{xy} = 0\,, \tag{A2.1a}$$

$$\frac{dV_1}{dx} - \sigma_y = 0\,, \tag{A2.1b}$$

$$\frac{dM_1}{dx} - V_1 + \frac{h_1}{2}\,\tau_{xy} = 0\,, \tag{A2.1c}$$

$$\frac{dT_2}{dx} + \tau_{xy} = 0\,, \tag{A2.1d}$$

$$\frac{dV_2}{dx} + \sigma_y = 0\,, \tag{A2.1e}$$

$$\frac{dM_2}{dx} - V_2 + \frac{h_2}{2}\,\tau_{xy} = 0\,. \tag{A2.1f}$$

L'assunzione delle ipotesi a base della teoria di Kirchhoff-Love per i due aderendi, nonché quella di inflessione cilindrica nel piano (x,y), consente di scrivere:

$$\frac{d^2 v_N}{dx^2} = -\frac{M_N}{D_N}, \tag{A2.2a,b}$$

dove v_N rappresenta la componente trasversale (secondo y) dello spostamento di ciascun aderendo ($N \in \{1.2\}$), in corrispondenza della generica coordinata x, ed M_N è il competente momento flettente. In particolare l'ipotesi di inflessione cilindrica, oltre che ad escludere la presenza nelle (A2.2) del momento flettente nel piano ortogonale, consente di scrivere delle derivate totali in luogo di quella parziale.

La rigidezza flessionale, D_N, definita dalla relazione:

$$D_N = \frac{E_N\ h_N^3}{12\ \left(1 - \mu_N^2\right)}, \tag{A2.3a,b}$$

nella quale E_N, h_N e μ_N denotano, rispettivamente, il modulo di Young in direzione longitudinale, lo spessore ed il coefficiente di Poisson dell' N-esimo aderendo.

La tensione σ_{xN} all'interfaccia aderendo/adesivo è somma di un contributo dovuto allo sforzo normale, T, ed un altro dovuto al momento flettente, M:

$$\sigma_{XN} = \frac{T_N}{h_N} + \frac{M_N\ y}{I_N}. \tag{A2.4a,b}$$

Nella (A2.4a,b) $I_N = D_N / E_N$ rappresenta il momento di inerzia specifico dell' N-esimo aderendo. Conseguentemente, in virtù dell'ipotesi di flessione cilindrica e di deformazione piana nel piano (x,y) per effetto dello sforzo normale, la deformazione normale, in direzione x, all'interfaccia aderendo/adesivo risulta essere:

$$\varepsilon_{XN} = \frac{du_N}{dx} = \frac{\left(1 - \mu_N^2\right)}{E_{1N}\ h_N} \left(T_N + \frac{M_N\ h_N\ y}{I_N} \right). \tag{A2.5a,b}$$

Il valore della tensione tangenziale, τ_{xy}, e di quella normale, σ_y, che cimentano l'adesivo possono essere espresse in funzione degli spostamenti tra i due aderendi,rispettivamente lungo x ed y.

$$\tau_{xy} = \frac{G_a}{t}\left(u_1 - u_2\right), \tag{A2.6a}$$

$$\sigma_y = \frac{E_a}{t}\left(v_1 - v_2\right). \tag{A2.6b}$$

Nelle relazioni (A2.6a) e (A2.6b), G_a ed E_a rappresentano, rispettivamente, i moduli di elasticità tangenziale e normale dello strato di adesivo, mentre t ne denota lo spessore.

Derivando la relazione (A2.6a) rispetto alla variabile x, si ottiene la seguente altra:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_{xy}}{dx} &= \frac{G_a}{t}\left(\frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx}\right) = \\
&= \frac{G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1 h_1}\left(T_1 - \frac{M_1\, h_1^2/2}{h_1^3/12}\right) - \frac{1-\mu_2^2}{E_2 h_2}\left(T_2 - \frac{M_2\, h_2^2/2}{h_2^3/12}\right)\right], \\
&= \frac{G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1 h_1}\left(T_1 - \frac{6\, M_1}{h_1}\right) - \frac{1\text{-}\mu_2^2}{E_2 h_2}\left(T_2 + \frac{6\, M_2}{h_2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{A2.7}$$

nella quale si è anche sostituito a $\frac{du_1}{dx}$ e $\frac{du_2}{dx}$ le competenti espressioni deducibili dalla (A2.5a,b).

Un' ulteriore derivazione della (A2.7) rispetto sempre alla variabile x, porge:

$$\frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3}=$$
$$=\frac{G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1h_1}\left(\frac{d^2T_1}{dx^2}-\frac{6}{h_1}\frac{d^2M_1}{dx^2}\right)-\frac{1-\mu_1^2}{E_1h_1}\left(\frac{d^2T_2}{dx^2}+\frac{6}{h_2}\frac{d^2M_2}{dx^2}\right)\right]. \tag{A2.8}$$

Dalle equazioni indefinite di equilibrio (A2.1) è possibile ricavare per derivazione le seguenti relazioni:

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}=\frac{d\tau_{xy}}{dx}, \tag{A2.9a}$$

$$\frac{d^2M_1}{dx^2}=\frac{dV_1}{dx}-\frac{h_1}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}=\sigma_y-\frac{h_1}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}, \tag{A2.9b}$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2}=-\frac{d\tau_{xy}}{dx}, \tag{A2.9c}$$

$$\frac{d^2M_2}{dx^2}=\frac{dV_2}{dx}-\frac{h_2}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}=-\sigma_y-\frac{h_2}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}. \tag{A2.9d}$$

Sostituendo queste ultime nella (A2.14) si ottiene:

$$\begin{aligned}&\frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3}-\frac{G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1h_1}(4)+\frac{1-\mu_2^2}{E_2h_2}(4)\right]\frac{d\tau_{xy}}{dx}=\\&\frac{G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1h_1}\left(-\frac{6}{h_1}\right)-\frac{1\text{-}\mu_2^2}{E_2h_2}\left(-\frac{6}{h_2}\right)\right]\sigma_y.\end{aligned} \tag{A2.10}$$

Quest'ultima può essere riscritta, più semplicemente, nel modo seguente:

$$\frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3}-K_1\frac{d\tau_{xy}}{dx}=-K_2\ \sigma_y, \tag{A2.11a}$$

dove si è posto:

$$K_1 = \frac{4\,G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1\,h_1} + \frac{1-\mu_1^2}{E_2\,h_2}\right], \tag{A2.11b}$$

$$K_2 = \frac{6\,G_a}{t}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1 h_1^2} - \frac{1-\mu_1^2}{E_2 h_2^2}\right]. \tag{A2.11c}$$

Reiterando per la σ_y la procedura sopra seguita per la τ_{xy} , si deriva quattro volte la relazione (A2.6b) rispetto alla variabile x:

$$\frac{d^4\sigma_y}{dx^4} = \frac{E_a}{t}\left(\frac{1}{D_2}\frac{d^2M_2}{dx^2} - \frac{1}{D_1}\frac{d^2M_1}{dx^2}\right). \tag{A2.12}$$

Sempre dalle (A2.1), per derivazione, è possibile ricavare le seguenti altre relazioni:

$$\frac{d^2M_1}{dx^2} = \frac{dV_1}{dx} - \frac{h_1}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx} = \sigma_y - \frac{h_1}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}, \tag{A2.13a}$$

$$\frac{d^2M_2}{dx^2} = \frac{dV_2}{dx} - \frac{h_2}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx} = -\,\sigma_y - \frac{h_2}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}, \tag{A2.13b}$$

che sostituite nella relazione (A2.12) porgono:

$$\frac{d^4\sigma_y}{dx^4} = \frac{E_a}{t}\left[\frac{1}{D_2}\left(-\sigma_y - \frac{h_2}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}\right) - \frac{1}{D_1}\left(\sigma_y - \frac{h_1}{2}\frac{d\tau_{xy}}{dx}\right)\right]. \tag{A2.14}$$

Quest'ultima relazione può essere anch'essa compattata nella forma:

$$\frac{d^4\sigma_y}{dx^4} + K_3\,\sigma_y = K_4\frac{d\tau_{xy}}{dx}, \tag{A2.15a}$$

dove si è posto:

$$K_3 = \frac{E_a}{t}\left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1}\right), \tag{A2.15b}$$

$$K_4 = \frac{E_a}{2t}\left(\frac{h_1}{D_1} - \frac{h_2}{D_2}\right). \tag{A2.15c}$$

Le relazioni (A2.11a) e (A2.15a) costituiscono il seguente sistema di due equazioni differenziali accoppiate, di seguito riportate, rispettivamente del terzo e del quarto ordine, nelle incognite τ_{xy} e σ_y :

$$\begin{cases} \dfrac{d^3\tau_{xy}}{dx^3} - K_1 \dfrac{d\tau_{xy}}{dx} = - K_2\ \sigma_y & \text{(A2.16a)} \\ \dfrac{d^4\sigma_y}{dx^4} + K_3\ \sigma_y = K_4 \dfrac{d\tau_{xy}}{dx} & \text{(A2.16b)} \end{cases} .$$

Manipolando opportunamente le (A2.16) è possibile pervenire alla scrittura di un ulteriore sistema di due equazioni differenziali, tra loro disaccoppiate ma di ordine superiore.

A tal scopo, moltiplicando la (A2.16a) per K_3 e la (A2.16b) per K_2, si ottiene:

$$\frac{K_3\ d^3\tau_{xy}}{dx^3} - K_1\ K_3 \frac{d\tau_{xy}}{dx} = - K_2\ K_3\ \sigma_y\ , \tag{A2.17a}$$

$$\frac{K_2\ d^4\sigma_y}{dx^4} + K_2\ K_3\ \sigma_y = K_2\ K_4 \frac{d\tau_{xy}}{dx}\ . \tag{A2.17b}$$

Risolvendo la (A2.17a) rispetto al termine $K_2 K_3 \sigma_y$ e sostituendo nella (A2.17b), è possibile ricavare la relazione:

$$\frac{K_2\, d^4\tau_{xy}}{dx^4} - K_3 \frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3} + \left(K_1\, K_3 - K_2\, K_4\right)\frac{d\tau_{xy}}{dx} = 0\,, \tag{A2.18a}$$

ıscettibile di una riscrittura più corretta:

$$\frac{K_2\, d^4\sigma_y}{dx^4} - K_3 \frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3} + K_5 \frac{d\tau_{xy}}{dx} = 0\,, \tag{A2.18b}$$

a patto di porre:

$$K_5 = K_1\, K_3 - K_2\, K_4\,. \tag{A2.18c}$$

Infine, derivando la (A2.16a) quattro volte rispetto alla variabile x e sostituisce nella (A2.18b) l'espressione $k_2 \frac{d^4\sigma_y}{dx^4}$ così ottenuta, si perviene all'equazione nella sola incognita τ_{xy}:

$$\frac{d^7\tau_{xy}}{dx^7} - K_1 \frac{d^5\tau_{xy}}{dx^5} + K_3 \frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3} - K_5 \frac{d\tau_{xy}}{dx} = 0\,. \tag{A2.19}$$

Analogamente, moltiplicando la (A2.16a) e la (A2.16b), rispettivamente, per K_4 e K_1 risulta:

$$\frac{K_4\, d^3\tau_{xy}}{dx^3} - K_1\, K_4 \frac{d\tau_{xy}}{dx} = -\, K_2\, K_4\, \sigma_y\,, \tag{A2.20a}$$

$$\frac{K_1\, d^4\sigma_y}{dx^4} + K_1\, K_3\, \sigma_y = K_1\, K_4 \frac{d\tau_{xy}}{dx}\,. \tag{A2.20b}$$

Ricavando la (A2.20a) rispetto al termine $K_1 K_4 \dfrac{d\tau_{xy}}{dx}$ e sostituendo nella (A2.20b) è possibile ricavare la relazione:

$$\frac{K_4\, d^3\tau_{xy}}{dx^3} - K_1 \frac{d^4\sigma_y}{dx^4} + K_2\, K_4\, \sigma_y - K_1\, K_3\, \sigma_y = 0\,, \tag{A2.21a}$$

Ovvero, tenendo conto della (A2.11a):

$$\frac{K_4\, d^3\tau_{xy}}{dx^3} = K_1 \frac{d^4\sigma_y}{dx^4} + K_5\, \sigma_y\,. \tag{A2.21b}$$

Infine, derivando la (A2.16b) due volte rispetto alla variabile x e sostituendo nella (A2.21b) l'espressione di $k_4 \dfrac{d^3\tau_{xy}}{dx^3}$ cosi ottenuto, si perviene all'equazione differenziale nella sola funzione incognita σ_y :

$$\frac{d^6\sigma_y}{dx^6} + K_3 \frac{d^2\sigma_y}{dx^2} - K_1 \frac{d^4\sigma_y}{dx^4} - K_5\, \sigma_y = 0\,. \tag{A2.22}$$

Le equazioni (A2.19) e (A2.22) costituiscono il preannunciato sistema di due equazioni differenziali disaccoppiate, nelle incognite τ_{xy} e σ_y, rispettivamente del settimo e del sesto ordine ordine.

$$\begin{cases} \dfrac{d^7\tau_{xy}}{dx^7} - K_1 \dfrac{d^5\tau_{xy}}{dx^5} + K_3 \dfrac{d^3\tau_{xy}}{dx^3} - K_5 \dfrac{d\tau_{xy}}{dx} = 0 & \text{(A2.23a)} \\[2ex] \dfrac{d^6\sigma_y}{dx^6} - K_1 \dfrac{d^4\sigma_y}{dx^4} + K_3 \dfrac{d^2\sigma_y}{dx^2} - K_5\, \sigma_y = 0 & \text{(A2.23b)} \end{cases}.$$

A2.2 Condizioni al contorno

L'integrale generale delle (A2.23) comporta tredici costanti di integrazione, sette per τ_{xy} e sei per l'incognita σ_y, che vanno determinate con le competenti condizioni al contorno alle estremità del giunto:

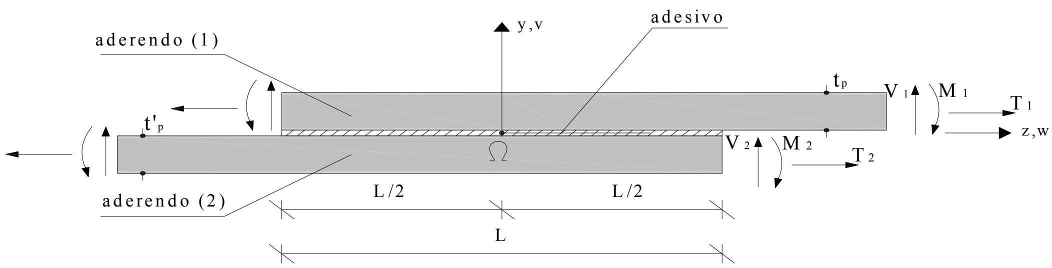

Figura A2.2 – Condizioni al contorno.

Innanzitutto, si ricavano le sette condizioni al contorno relative all'equazione differenziale con incognita τ_{xy}.

Le prime due condizioni discendono dalla (A2.7), che fornisce il valore della derivata prima dell'incognita in funzione degli sforzi normali e dei momenti flettenti nei due aderendi.

Banalmente, si tratta di imporre il soddisfacimento di tale relazione alle estremità del giunto, per $x = 0$ e $x = L$.

Altre due condizioni possono essere ricavate derivando due volte rispetto a x la (A2.2) e la (A2.16a):

$$\frac{d^2\sigma_y}{dx^2} = \frac{E_a}{t}\left(\frac{M_2}{D_2} - \frac{M_1}{D_1}\right), \tag{A2.24a}$$

$$\frac{d^5\tau_{xy}}{dx^5} - K_1\frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3} = -K_2\frac{d^2\sigma_y}{dx^2}. \tag{A2.24b}$$

Per confronto, si ottiene la relazione:

$$\frac{1}{K_2}\frac{d^5\tau_{xy}}{dx^5}-\frac{K_1}{K_2}\frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3}=-\frac{E_a}{t}\left(\frac{M_2}{D_2}-\frac{M_1}{D_1}\right), \tag{A2.25}$$

da cui, imponendone il soddisfacimento per $x=0$ e $x=L$, si deducono le preannunciate due ulteriori condizioni al contorno.

La quinta e la sesta condizione al contorno sono deducibili per derivazione della (A2.24):

$$\frac{d^3\sigma_y}{dx^3}=\frac{E_a}{t}\left(\frac{dM_2}{dx}\frac{1}{D_2}-\frac{dM_1}{dx}\frac{1}{D_1}\right), \tag{A2.26a}$$

$$\frac{d^6\tau_{xy}}{dx^6}-K_1\frac{d^4\tau_{xy}}{dx^4}=-K_2\,\frac{d^3\sigma_y}{dx^3}. \tag{A2.26b}$$

Da tali relazioni, per confronto, tenendo inoltre conto delle (A2.1a) e (A2.1f), discende la seguente altra relazione:

$$\frac{1}{K_2}\frac{d^6\tau_{xy}}{dx^6}-\frac{K_1}{K_2}\frac{d^4\tau_{xy}}{dx^4}+\frac{E_a}{2t}\left(\frac{h_2}{D_2}-\frac{h_1}{D_1}\right)\tau_{xy}=-\frac{E_a}{t}\left(\frac{V_1}{D_1}-\frac{V_2}{D_2}\right), \tag{A2.27}$$

da cui, imponendone il soddisfacimento per $x=0$ e $x=L$, si deducono le suddette condizioni al contorno.

La settima ed ultima condizione al contorno può essere ottenuta imponendo l'equilibrio alla traslazione lungo x dell'aderendo superiore:

$$\int_0^L \tau_{xy}dx=T_1(L)-T_1(0). \tag{A2.28}$$

Una volta determinate le sette costanti di integrazione dell'integrale generale delle τ_{xy}, per determinare le costanti dell'integrale generale delle σ_y, basta tener conto della relazione:

$$\sigma_y = \frac{K_1}{K_2}\frac{d\tau_{xy}}{dx} - \frac{1}{K_2}\frac{d^3\tau_{xy}}{dx^3}, \qquad \text{(A2.29)}$$

che deriva dalla (A2.16a).

Le sei condizioni possono essere determinate imponendo l'eguaglianza, in corrispondenza di una generica x, della σ_y e delle sue prime cinque derivate, alla funzione a secondo membro delle (A2.28) e delle prime cinque derivate di quest'ultima.