

APPENDICE A1

TEORIA DI TSAI, OPLINGER E MORTON

A1. Giunto a doppia sovrapposizione (Double-lap joint)

Si consideri il giunto a doppia sovrapposizione di figura A1.1, dove si sono utilizzati gli stessi simboli del lavoro originale [6]:

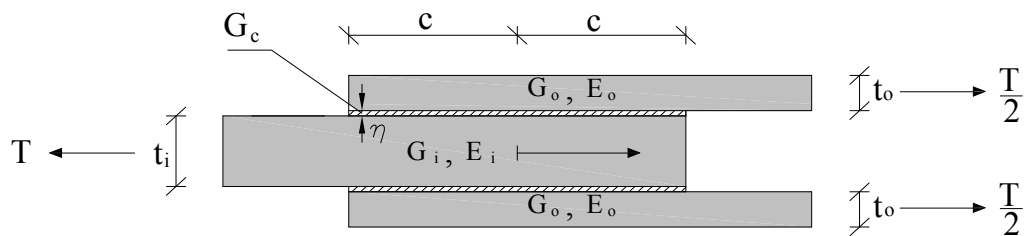


Figura A1.1 – Giunto a doppia sovrapposizione.

La lunghezza di sovrapposizione è pari a $2c$. Gli spessori degli aderendi esterni ed interni sono rispettivamente t_o e t_i . I simboli E_o e G_o denotano invece il modulo di Young (in direzione longitudinale) e il modulo elastico tangenziale degli aderendi esterni, mentre i simboli E_i e G_i denotano gli analoghi moduli corrispondenti dell'aderendo interno.

I simboli G_c e η denotano, infine, rispettivamente, il modulo elastico tangenziale e lo spessore dei due strati di adesivo.

Con le notazioni di figura A1.1, le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale degli aderendi, esterni ed interno, sono:

$$\frac{dT_o}{dx} + \tau_c = 0, \quad (A1.1)$$

$$\frac{dT_i}{dx} - 2\tau_c = 0. \quad (A1.2)$$

La deformazione da scorrimento degli aderendi è tenuta in conto ipotizzando la cinematica descritta in figura A1.2, dove per ragioni di simmetria è rappresentato solo metà giunto.

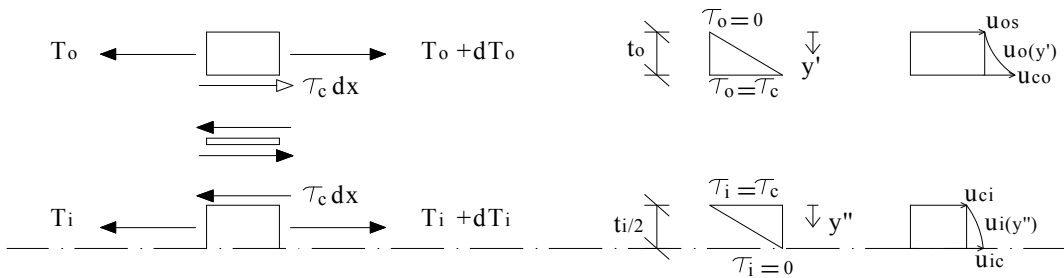


Figura A1.2 – Linearità delle distribuzioni delle tensioni e delle deformazioni nello spessore degli aderendi.

Di conseguenza, le tensioni tangenziali, τ_o e τ_i , relative rispettivamente all'aderendo esterno ed interno, sono esprimibili attraverso le seguenti relazioni:

$$\tau_o = \frac{\tau_c}{t_o} y', \quad (A1.3)$$

$$\tau_i = \tau_c - \frac{\tau_c}{t_i} 2y'', \quad (A1.4)$$

dove y' e y'' sono, nell'ordine, le ordinate nei due sistemi di coordinate locali (Fig. A1.2) aventi come origine le sommità dell'aderendo esterno e di quello interno.

Dalle equazioni (A1.3) e (A1.4) si deduce che la tensione tangenziale τ_o si annulla per $y' = 0$ mentre la τ_i si annulla per $y'' = t_i/2$. Inoltre in corrispondenza dell'interfaccia aderendo esterno-adesivo ed di quella aderendo interno-adesivo, il valore delle tensioni τ_i e τ_o è lo stesso di quello della tensione tangenziale τ_c , agente nello strato di adesivo.

Nell'ipotesi di legame costitutivo elastico lineare omogeneo ed isotropo lo scorrimento negli aderendi è pari a:

$$\gamma_o = \frac{\tau_c}{G_o t_o}, \quad (A1.5)$$

$$\gamma_i = \frac{\tau_c}{G_i} \left(1 - \frac{2y''}{t_i} \right). \quad (A1.6)$$

Gli spostamenti longitudinali dell'aderendo esterno e di quello interno, u_o ed u_i , sono esprimibili nel modo seguente:

$$u_o(y') = u_{os} + \int_0^{y'} \gamma_o(y') dy' = u_{os} + \frac{\tau_c}{G_o t_o} \frac{y'^2}{2}, \quad (A1.7)$$

$$u_i(y'') = u_{ci} + \int_0^{y''} \gamma_i(y'') dy'' = u_{ci} + \frac{\tau_c}{G_i} \left(y'' - \frac{y''^2}{t_i} \right), \quad (A1.8)$$

dove u_{os} rappresenta lo spostamento longitudinale dell'aderendo esterno per $y' = 0$, mentre u_{ci} rappresenta l'analogo spostamento all'interfaccia tra adesivo e aderendo interno (Fig.A1.2).

Nell'ipotesi di perfetta adesione lo spostamento u_{ci} deve essere uguale allo spostamento u_{co} .

Dalla relazione (A1.7) per $y' = t_0$, si ricava:

$$u_{co} = u_o(t_0) = u_{os} + \frac{\tau_c t_0}{2 G_o} \quad (A1.9)$$

Risolvendo rispetto a u_{os} e sostituendo nella (A1.7) si ottiene in definitiva la relazione:

$$u_o(y') = u_{co} - \frac{\tau_c t_0}{2 G_o} + \frac{\tau_c}{2 G_o t_0} y'^2 \quad (A1.10)$$

Gli sforzi risultanti T_o ed T_i sono esprimibili nella forma:

$$T_o = \int_0^{t_0} \sigma_o(y') dy' \quad (A1.11)$$

$$T_i = 2 \int_0^{t_0/2} \sigma_c(y'') dy'' \quad (A1.12)$$

dove σ_o e σ_i rappresentano rispettivamente le tensioni normali agenti sulla sezione retta degli aderendi esterno ed interno. Ricordando le ben note relazioni che legano la tensione normale alla competente deformazione e quest'ultima alla componente longitudinale di spostamento, è agevole verificare che risulta:

$$\sigma_o(y') = E_o \frac{du_o}{dx} y' \quad (A1.13)$$

$$\sigma_i(y'') = E_i \frac{du_i}{dx} y'' \quad (A1.14)$$

Pertanto, in virtù delle (A1.11) e (A1.12), gli sforzi risultanti T_o ed T_i assumono la seguente espressione:

$$T_o = E_o \int_0^{t_0} \frac{du_o}{dx} y'' dy'' \quad (A1.15)$$

$$T_i = E_i \int_0^{t_i/2} \frac{du_i}{dx} y'' dy'' \quad . \quad (A1.16)$$

Attraverso facili passaggi è possibile ricavare l'espressione di T_o in funzione dello spostamento longitudinale, u_{co} , tra adesivo e aderendo esterno:

$$\begin{aligned} T_o &= E_o \int_0^{t_o} \left(\frac{du_{co}}{dx} - \frac{t_o}{2G_o} \frac{d\tau_c}{dx} + \frac{1}{2G_o t_o} \frac{d\tau_c}{dx} y'^2 \right) dy' = \\ &= E_o t_o \left(\frac{du_{co}}{dx} - \frac{t_o}{3G_o} \frac{d\tau_c}{dx} \right). \end{aligned} \quad (A1.17)$$

Con passaggi del tutto analoghi a quelli precedenti si ottiene l'espressione di T_i in funzione dello spostamento, u_{ci} , tra adesivo e aderendo interno:

$$\begin{aligned} T_i &= 2 E_i \int_0^{t_i/2} \left(\frac{du_{ci}}{dx} + \frac{y''}{G_i} \frac{d\tau_c}{dx} - \frac{y''^2}{G_i t_i} \frac{d\tau_c}{dx} \right) dy'' = \\ &= E_i t_i \left(\frac{du_{ci}}{dx} + \frac{t_i}{6 G_i} \frac{d\tau_c}{dx} \right). \end{aligned} \quad (A1.18)$$

Dai valori di u_{co} e di u_{ci} , è possibile risalire a quelli dello scorrimento γ_c , e della tensione tangenziale, τ_c , che competono allo strato di adesivo:

$$\gamma_c = \frac{1}{\eta} (u_{ci} - u_{co}), \quad (A1.19)$$

$$\tau_c = \frac{G_c}{\eta} (u_{ci} - u_{co}). \quad (A1.20)$$

Differenziando la (A1.20) rispetto alla variabile x si ottiene:

$$\frac{d\tau_c}{dx} = \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{du_{ci}}{dx} - \frac{du_{co}}{dx} \right). \quad (A1.21)$$

D'altra parte, ricavando il termine $\frac{du_{co}}{dx}$ dalla (A1.17), il termine $\frac{du_{ci}}{dx}$ dalla (A1.18) e sostituendoli nella (A1.21) risulta:

$$\frac{d\tau_c}{dx} = \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{T_i}{E_i t_i} - \frac{t_i}{6 G_i} \frac{d\tau_c}{dx} - \frac{T_o}{E_o t_o} - \frac{t_o}{3 G_o} \frac{d\tau_c}{dx} \right). \quad (A1.22)$$

Se si differenzia ancora una volta tale relazione rispetto alla variabile x , risulta anche:

$$\frac{d^2\tau_c}{dx^2} = \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{1}{E_i t_i} \frac{dT_i}{dx} - \frac{t_i}{6 G_i} \frac{d^2\tau_c}{dx^2} - \frac{1}{E_o t_o} \frac{dT_o}{dx} - \frac{t_o}{3 G_o} \frac{d^2\tau_c}{dx^2} \right), \quad (A1.23)$$

ovvero:

$$\frac{d^2\tau_c}{dx^2} \left[1 + \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{t_i}{6 G_i} + \frac{t_o}{3 G_o} \right) \right] = \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{2}{E_i t_i} + \frac{1}{E_o t_o} \right) \tau_c. \quad (A1.24)$$

L'equazione differenziale così ottenuta può essere scritta nella forma:

$$\frac{d^2\tau_c}{dx^2} = \alpha^2 \lambda^2 \tau_c. \quad (A1.25)$$

Nella relazione (A1.25) si è posto:

$$\lambda^2 = \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{2}{E_i t_i} + \frac{1}{E_o t_o} \right), \quad (A1.26)$$

$$\alpha = \left[1 + \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{t_i}{6 G_i} + \frac{t_o}{3 G_o} \right) \right]^{-2} \quad (A1.27)$$

Il parametro λ è detto parametro di allungamento, mentre il parametro α è detto parametro di deformazione trasversale.

L'integrale generale dell'equazione (A1.25) è:

$$\tau_c = A \sinh(\beta x) + B \cosh(\beta x), \quad (\text{A1.28})$$

dove A e B sono due costanti di integrazione ed il parametro β è pari al prodotto di λ per α :

$$\beta^2 = \lambda^2 \alpha^2 = \frac{\frac{G_c}{\eta} \left(\frac{2}{E_i t_i} + \frac{1}{E_o t_o} \right)}{1 + \frac{G_c}{\eta} \left(\frac{t_i}{6 G_i} + \frac{t_o}{3 G_o} \right)}. \quad (\text{A1.28})$$

Le costanti A e B possono essere determinate utilizzando le condizioni al contorno:

- per $x = -c$

$$2 \int_{-c}^{+c} \tau_c dx = T_i = T \quad \text{ed inoltre } T_o = 0, \quad (\text{A1.29})$$

- per $x = c$

$$2 \int_{-c}^{+c} \tau_c dx = T_o = \frac{T}{2} \quad \text{ed inoltre } T_i = 0, \quad (\text{A1.30})$$

Da queste ultime si trae:

$$A = \frac{\beta T}{4 \cosh(\beta c)} \frac{1 - \frac{E_i t_i}{2 E_o t_o}}{1 + \frac{E_i t_i}{2 E_o t_o}}, \quad (\text{A1.31})$$

$$B = \frac{\beta T}{4 \sinh(\beta c)}. \quad (\text{A1.32})$$

In definitiva si ottiene:

$$\tau_c = \frac{\beta T}{4 \cosh(\beta c)} \frac{1 - \frac{E_i t_i}{2 E_o t_o}}{1 + \frac{E_i t_i}{2 E_o t_o}} \sinh(\beta x) + \frac{\beta T}{4 \sinh(\beta c)} \cosh(\beta x). \quad (\text{A1.33})$$

Nel lavoro [6] è anche trattato il caso di giunto a singola sovrapposizione e si perviene ad una generalizzazione di quello di Volkersen [1] che invece trascura la deformabilità tagliante degli aderendi.