

CAPITOLO I – FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DI EQUILIBRIO DI GIUNTI INCOLLATI A DOPPIA SOVRAPPOSIZIONE BILANCIATI ED A SEMPLICE SOVRAPPOSIZIONE SIMMETRICI

1. Introduzione

L'uso dei giunti incollati per scopi strutturali risulta molto conveniente in svariati settori dell'ingegneria, soprattutto in campo aeronautico e meccanico. Il loro impiego consente infatti di ridurre notevolmente i tempi e i costi di realizzazione, di beneficiare di cospicue resistenze nei riguardi della corrosione e della fatica, di contare su elevate tenacità nei confronti della frattura e su notevoli proprietà dissipative.

Negli anni più recenti tale impiego si è diffuso anche nel campo dell'Ingegneria Civile, con particolare riguardo alle applicazioni strutturali dei materiali compositi fibrorinforzati (FRP: *Fiber Reinforced Polymer*). Queste ultime consistono sia in interventi di riabilitazione di strutture esistenti, principalmente di conglomerato cementizio armato e di muratura, sia nella realizzazione di nuove costruzioni, interamente di FRP.

Il comportamento dei giunti incollati dipende da numerosi fattori quali le proprietà fisiche e meccaniche di aderendi e adesivo, dalla geometria degli stessi giunti, come ad esempio dalla lunghezza della zona di sovrapposizione, dalla lunghezza totale del provino, dallo spessore di aderendi ed adesivo.

L'esperienza ha anche insegnato come tale comportamento sia sensibile alle imperfezioni geometriche e meccaniche ed alle modalità di applicazione del carico.

1.1. Stato dell'arte

Storicamente, gli approcci utilizzati nello studio del comportamento meccanico dei giunti incollati sono essenzialmente due. Il primo è basato sull'analisi degli stati di tensione e di deformazione dei giunti in elasticità lineare. Il secondo, più moderno, si ispira ai principi della Meccanica della frattura, articolandosi in due filoni differenti.

Il primo di tali filoni, ambientato in elasticità lineare, fa uso del classico criterio di Griffith (L.E.F.M.: *Linear Elastic Fracture Mechanics*). Il secondo è basato su una opportuna modellazione dell'interfaccia aderendo/adesivo in grado di simulare le possibili modalità di frattura, tra cui le più frequenti e significative sono il tipo *opening* (modo I) e il tipo *sliding* (modo II).

Più dettagliatamente, l'analisi tensionale e deformativa dei giunti incollati si è sviluppata negli ultimi sessanta anni sia con modellazioni teoriche, sia con analisi numeriche, soprattutto con l'ausilio del metodo degli elementi finiti.

Per quanto riguarda i giunti a semplice sovrapposizione (*single-lap joint*), il primo lavoro, dovuto a Volkersen [1], risale al 1938 ed analizza il problema della giunzione rivettata di due piastre metalliche. Il vincolo realizzato dai rivetti è modellato mediante uno strato elastico omogeneo deformabile a taglio, del tutto assimilabile ad un letto continuo di molle elastiche, in grado di contrastare gli spostamenti assiali relativi tra le due piastre, sollecitate a sforzo normale.

Più tardi, nel 1944, Goland e Reissner [2] formulano un modello più generale di giunto a semplice sovrapposizione: gli aderenti sono schematizzati come travi, l'adesivo come uno strato elastico omogeneo deformabile sia a taglio che trasversalmente. Il tipo di collegamento da essi proposto è assimilabile a un duplice letto di molle elastiche, tra loro indipendenti, in grado di contrastare gli spostamenti relativi, sia assiali che flessionali.

Nel 1973, Hart-Smith [3] arricchisce il modello proposto da Goland e Reissner comprendendo nell'analisi il caso di adesivi elasto-plastici.

Per quanto riguarda i giunti a doppia sovrapposizione (*double-lap joint*), 1944, de Bruyne [4] estende ad essi la teoria di Volkersen.

Ancora Hart-Smith [5], nel 1973, amplia il suddetto studio al caso di adesivi elasto-plastici.

I modelli di Volkersen/de Bruyne e di Goland e Reissner, sopra richiamati, non tengono conto della deformabilità a taglio degli aderendi, sia per ragioni di semplicità, sia perché tale deformabilità è in genere ritenuta trascurabile rispetto a quella estensionale.

Tuttavia, poiché lo strato di adesivo può sopportare elevati sforzi di taglio, che si trasmettono attraverso l'interfaccia agli aderendi, anche questi ultimi possono essere cementati da tensioni tangenziali di notevole intensità. Conseguentemente, gli aderendi possono subire deformazioni taglienti non trascurabili, soprattutto in presenza di modeste rigidità a taglio, come accade ad esempio nel caso degli FRP, per i quali tali rigidità sono essenzialmente condizionate dall'esiguo valore del modulo di elasticità tangenziale della resina. Ne consegue che l'ipotesi semplificativa di trascurare la deformabilità tagliente degli aderendi può causare errori nell'analisi tenso-deformativa di giunti incollati.

Nel 1998, Tsai, Oplinger e Morton [6] propongono un modello di giunto a doppia sovrapposizione, adottabile anche per giunti a singola sovrapposizione, in grado di tener conto non solo della deformabilità estensionale degli aderendi, ma anche di quella tagliente. Il modello adottato per l'adesivo corrisponde a quello della teoria di Volkersen/de Bruyne. Gli aderendi sono sollecitati esclusivamente a sforzo normale.

Lo studio di giunti incollati, a semplice sovrapposizione, sollecitati sia a sforzo normale che a taglio e flessione è invece affrontato in un lavoro del 1989 di Bigwood e Crocombe [7]. In esso gli aderendi sono modellati come lastre/piastre sottili indeformabili a taglio (modello flessionale di Kirchhoff-Love). L'adesivo è schematizzato come nel succitato lavoro di Goland e Reissner.

Per il contributo rilevante fornito allo studio dei giunti incollati, nelle Appendici A1 e A2 sono riportati, rispettivamente, alcuni richiami sintetici delle teorie di Tsai, Oplinger e Morton [6] e di Bigwood e Crocombe [7].

In anni più recenti la bibliografia si è arricchita di numerosi studi numerici che hanno consentito di validare i vari modelli meccanici disponibili in letteratura e di apprezzare quantitativamente l'influenza dei diversi parametri sul comportamento meccanico dei giunti incollati [8-19].

Molto più recente è la ricerca basata sull'approccio della Meccanica della frattura ed in particolare della L.E.M.F. [20-27].

Il limite applicativo di tale approccio è rappresentato dalla ipotesi di comportamento elastico lineare fino a rottura di aderendi ed adesivi.

Nel caso di giunti incollati realizzati con materiali compositi fibrorinforzati, la suddetta ipotesi è certamente soddisfatta dagli aderendi ma è manifestamente disattesa dagli adesivi per le proprietà costitutive possedute dai prodotti più moderni presenti sul mercato.

Risulta perciò più realistica la modellazione dell'interfaccia aderendo/adesivo mediante legami costitutivi di tipo coesivo, come quelli indicati nelle figure 1.1a-b. Essi sono generalmente esprimibili attraverso relazioni fra loro indipendenti, che correlano, rispettivamente, l'interazione normale o tangenziale all'interfaccia, σ o τ , al concomitante spostamento relativo, δ o s , mobilitato tra le superfici adese del giunto. Gli spostamenti δ sono responsabili del modo I di frattura (per *opening*); gli spostamenti s sono responsabili del modo II (per *sliding*).

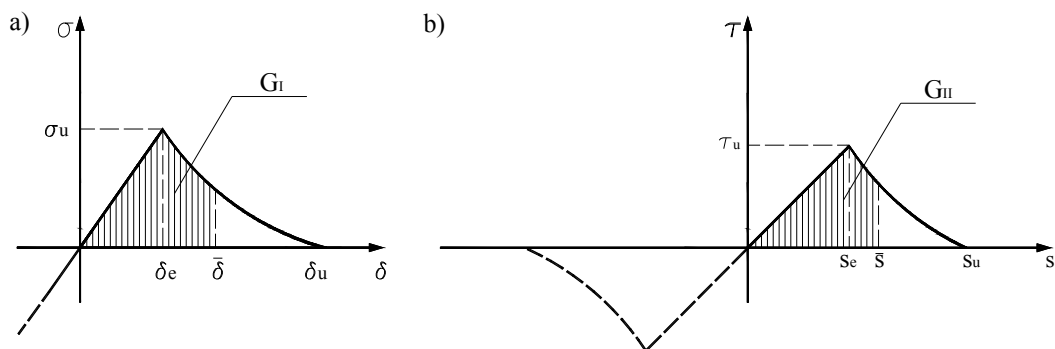


Figura 1.1 – Legami di interfaccia: a) legame $\sigma(\delta)$; b) legame $\tau(s)$.

In letteratura hanno riscosso notevole successo lavori che hanno studiato il comportamento di giunti incollati nei confronti del modo II di frattura, assumendo un legame di interfaccia del tipo di figura 1.1b [28-29]. Il modo II è di solito quello predominante, dal momento che i giunti sono realizzati principalmente per trasferire sforzi assiali.

I risultati di tali studi hanno consentito, tra l'altro, di conseguire realistiche stime del carico di collasso per delaminazione di placcaggi eseguiti su strutture di c.a. mediante l'applicazione di lamine o tessuti di FRP.

La possibile compresenza nei giunti di sforzi taglienti e flessionali, accanto a quelli normali, sia pure il più delle volte di intensità inferiore a questi ultimi, giustifica l'interesse tecnico per modelli che consentono di analizzarne il comportamento nei confronti della frattura per modo misto I/II.

Esistono in letteratura illuminanti lavori sull'argomento, cui va riconosciuto il merito di aver evidenziato gli aspetti fondamentali del problema e di aver dimostrato, con l'ausilio di analisi numeriche e sperimentali, spesso sofisticate, l'efficacia del modello di interfaccia [30-35].

Entrando più nel merito, oltre ad assumere che le due leggi $\sigma(\delta)$ e $\tau(s)$ siano tra loro indipendenti, si suole ammettere che l'energia totale di frattura, G , possa essere decomposta additivamente nella forma:

$$G = G_I + G_{II} . \quad (1.1)$$

Nella (1.1), i due addendi hanno il seguente significato (Fig.1a-b):

$$G_I = \int_0^{\bar{\delta}} (\delta) d\delta, \quad (1.2a)$$

$$G_{II} = \int_0^{\bar{s}} \tau(s) ds, \quad (1.2b)$$

e devono soddisfare il seguente criterio di frattura (per modo misto I/II) [36-37]:

$$\frac{G_I}{G_{I0}} + \frac{G_{II}}{G_{II0}} \leq 1, \quad (1.3)$$

dove i denominatori delle due frazioni a primo membro rappresentano, rispettivamente, le aree sottese dai due diagrammi delle figure 1.1, per $\bar{\delta} = \delta_u$ e $\bar{s} = s_u$. In altri termini, tali aree rappresentano, nell'ordine, le energie di frattura per il modo I e per il modo II.

1.2. Obiettivi della tesi in tema di giunti incollati

Ciò premesso, relativamente ai giunti incollati, la tesi si propone di sviluppare un'analisi organica del loro comportamento adottando leggi di interfaccia del tipo di quelle rappresentate nelle figure 1.1. Più specificamente, sono prese in considerazione leggi di interfaccia bilineari (Figg. 1.2), costituite da un primo ramo elastico lineare, seguito da un successivo ramo, anch'esso lineare, corrispondente ad un comportamento *softening* dell'adesivo. Tali legami sono accreditati nella bibliografia più recente come sufficientemente accurati per scopi tecnici.

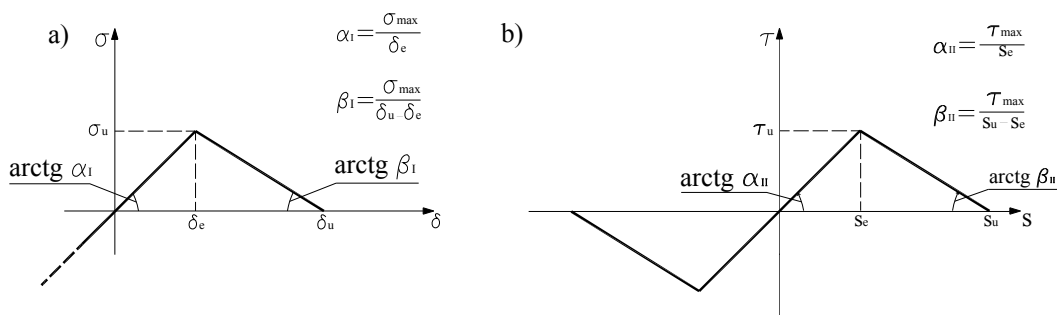


Figura 1.2 – Legami di interfaccia bilineari: a) legame $\sigma(\delta)$; b) legame $\tau(s)$.

Sono formulati e discussi i competenti problemi non lineari di equilibrio di giunti, cosiddetti a doppia sovrapposizione bilanciati tra aderendi di FRP e quelli di giunti, cosiddetti, a semplice sovrapposizione simmetrici, sia nel caso di sollecitazione da taglio e flessione che nel caso di sollecitazione da sforzo normale (Figg. 1.3). Le non linearità dipendono esclusivamente dal tipo di legami costitutivi assunti per l'interfaccia, mentre per gli aderendi si ipotizza un comportamento indefinitamente elastico lineare.

Dei suddetti problemi viene proposta una semplice procedura risolutiva, di tipo iterativo.

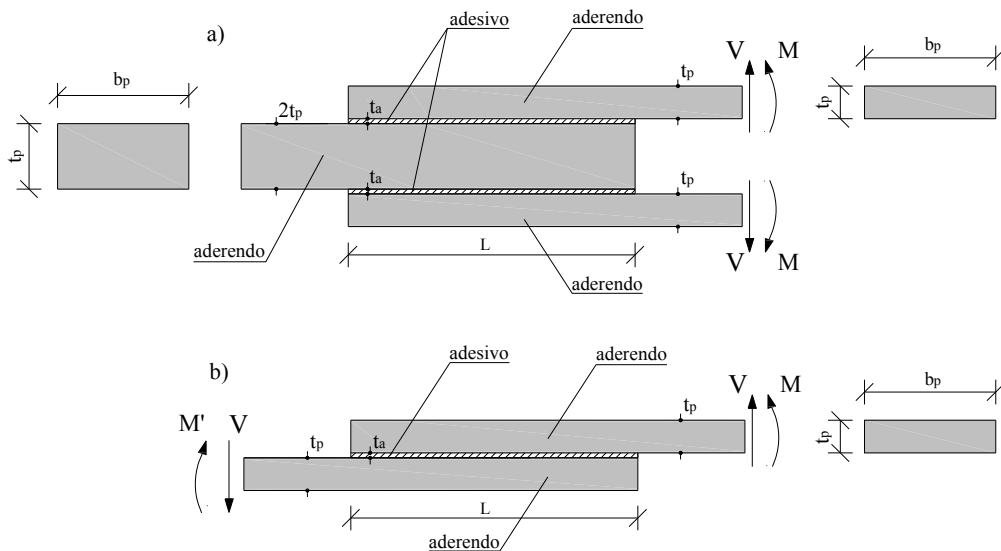


Figura 1.3 – Giunti incollati: a) a doppia sovrapposizione bilanciato; b) a semplice sovrapposizione simmetrico.

Riferendosi, per fissare le idee, al caso di aderendi con sezione rettangolare, un giunto a doppia sovrapposizione bilanciato è caratterizzato dalla circostanza che gli aderendi esterni hanno spessore, profondità (o larghezza) e modulo elastico longitudinale uguali. L'aderendo intermedio ha, invece, uno spessore doppio dei precedenti, con i quali condivide però la profondità ed il modulo elastico longitudinale.

Gli aderendi di un giunto a semplice sovrapposizione simmetrico soddisfano le stesse condizioni degli aderendi esterni di un giunto a doppia sovrapposizione bilanciato.

I giunti presi in esame hanno una notevole rilevanza tecnica per la loro ampia diffusione ed affidabilità. Anche la particolare condizione di carico, simmetrica, presa in esame per i giunti a doppia sovrapposizione bilanciati, è ricorrente nelle applicazioni e pertanto significativa sotto il profilo tecnico.

Si suppone di poter disaccoppiare il problema di taglio e flessione da quello estensionale e cioè di trascurare gli effetti mutui tra tensioni tangenziali e normali mobilitate all'interfaccia. Com'è ben noto in letteratura [7], tale ipotesi conduce a risultati sufficientemente corretti dal punto di vista tecnico se le caratteristi-

che meccaniche degli aderendi sono pressoché le stesse, come di fatto accade nei casi esaminati.

In virtù delle semplificazioni conseguenti al disaccoppiamento, è possibile individuare un numero ristretto di parametri adimensionali, funzioni delle caratteristiche meccaniche e geometriche di aderendi e adesivo, sufficienti per predire e governare agevolmente il comportamento meccanico dei giunti.

Al variare di tali parametri entro un'ampia gamma di valori, la tesi si propone di valutare la resistenza ultima dei giunti per separazione dell'interfaccia (modalità *opening* e/o *sliding*) sulla base del criterio (1.3).

L'analisi è corredata da abachi, che possono risultare di prezioso ausilio nei problemi di progetto e/o di verifica.

2. Giunto a doppia sovrapposizione bilanciato sollecitato a taglio e flessione

Si prende in esame il problema di equilibrio di un giunto incollato a doppia sovrapposizione bilanciato. Gli aderendi sono di FRP e sono sollecitati a taglio e flessione. L'analisi è limitata al caso di carico simmetrico rispetto al piano medio del giunto, ad esso complanare (Fig. 2.1). Tale circostanza è frequente nelle applicazioni e ne giustifica l'interesse tecnico.

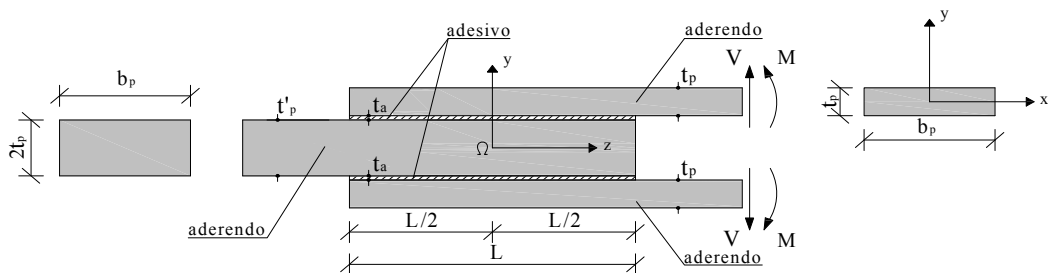


Figura 2.1 – Giunto a doppia sovrapposizione bilanciato sollecitato simmetricamente a taglio e flessione.

I due aderendi esterni sono profondi (o larghi) b_p e spessi t_p ; l'aderendo intermedio è largo b_p e spesso $t'_p = 2t_p$. Sia gli aderendi esterni che quello intermedio sono modellati come travi di Eulero-Bernoulli, non deformabili a taglio. Com'è ben noto, la loro rigidezza flessionale è data dal prodotto del momento di inerzia della sezione retta intorno all'asse centrale baricentrico parallelo all'asse x , I_p , per il modulo di elasticità normale del materiale FRP lungo la direzione dell'asse del giunto, E_p , comune sia agli aderendi esterni che a quello interno.

Lo strato di adesivo, spesso t_a , è modellato da un letto continuo di molle indipendenti, ortogonali all'interfaccia, in grado di contrastare gli spostamenti relativi tra gli aderendi, nella direzione dell'asse y .

Il legame costitutivo delle suddette molle è rappresentato in figura 2.2, dove σ rappresenta l'interazione aderendo/adesivo per unità di superficie, positiva se di trazione e δ è lo spostamento relativo tra gli aderendi, positivo se corrisponde ad un allontanamento di questi ultimi.

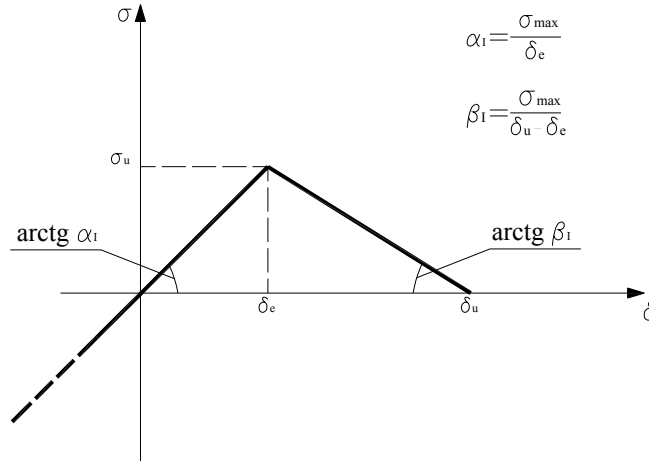


Figura 2.2 – Legame di interfaccia.

Esso è indefinitamente elastico in compressione, mentre in trazione è elastico lineare fino ad un valore ultimo dell'interazione, σ_u , cui corrisponde un allontanamento, δ_e , tra gli aderendi; per valori più elevati di δ il legame è lineare di tipo *softening* fino ad un valore ultimo, δ_u , a partire dal quale l'interfaccia non reagisce più.

Per ovvie ragioni di simmetria, lo spostamento relativo, δ , coincide con l'inflessione laterale di ciascuno degli aderendi esterni, v . Inoltre è agevole ricondursi al problema di equilibrio dello schema ausiliario di figura 2.3, costituito dalla trave che modella l'aderendo superiore, vincolata su un letto di molle del tipo di quelle sopra introdotte. Nella stessa figura 2.3b sono indicate le determinazioni positive delle caratteristiche della sollecitazione, taglio e momento flettente, agenti su un tronco elementare di aderendo di lunghezza dz .

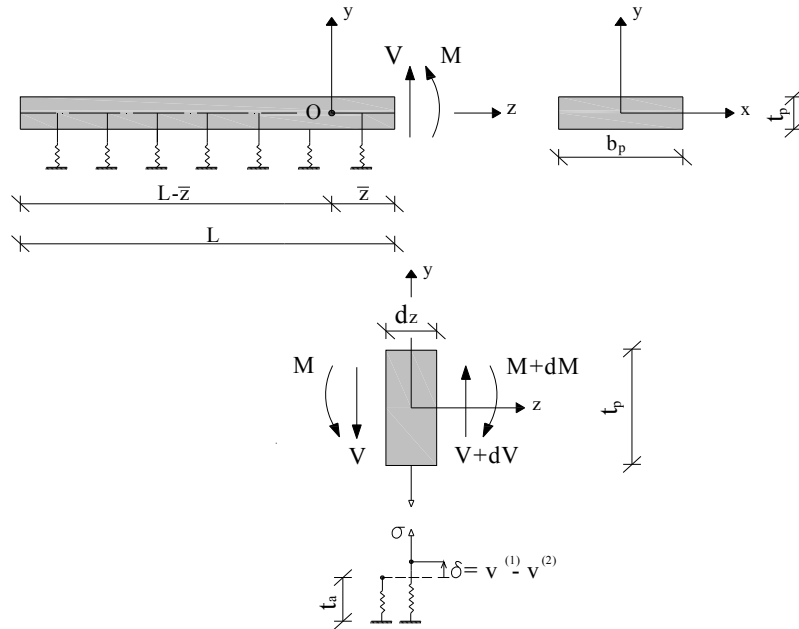


Figura 2.3 – a) Schema ausiliario; b) Tronco elementare.

Con i simboli di figura 2.3 il legame costitutivo delle molle può essere espresso nella maniera seguente:

$$\sigma = \begin{cases} \alpha_1 \delta & \text{se } \delta \leq \delta_e, \\ \beta_1 (\delta_u - \delta) & \text{se } \delta_e \leq \delta \leq \delta_u, \\ 0 & \text{se } \delta > \delta_u. \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\beta_1 (\delta_u - \delta) \quad \text{se } \delta_e \leq \delta \leq \delta_u, \quad (2.1b)$$

$$0 \quad \text{se } \delta > \delta_u. \quad (2.1c)$$

Il problema di equilibrio preso in esame è non lineare per il particolare legame costitutivo delle molle; inoltre, esso non ammette soluzione per qualsiasi condizione di carico.

A tal riguardo si osserva che, se esiste una soluzione del suddetto problema, necessariamente deve esistere un valore della coordinata z per cui è nullo lo spostamento esibito dalla trave di figura 2.3a, come anche la reazione della corrispondente molla.

Si osserva inoltre che l'estremità della trave, dove sono applicati V e M, non può esibire spostamenti di entità maggiore di δ_u . In particolare, se l'entità di tale spostamento è anche minore di δ_e , per le ben note proprietà del problema della trave elastica su suolo elastico alla Winkler, tutte le molle dello schema ausiliario reagiscono in campo elastico lineare. Se, invece, il suddetto spostamento presenta un valore compreso tra δ_e e δ_u , per continuità, deve esistere necessariamente una sezione della trave che esibisca un'inflexione laterale pari a δ_e . In figura 2.3a è denotata con \bar{z} la distanza di siffatta sezione dalla estremità della trave dove sono applicati i carichi attivi, V e M: è conveniente assumere tale sezione come origine del sistema di riferimento.

E' agevole verificare che le molle alla sinistra dell'origine lavorano esclusivamente in campo elastico lineare, mentre quelle alla destra, che esibiscono spostamenti compresi tra δ_e e δ_u , lavorano nel campo non lineare di figura 2.2, a comportamento *softening*.

Conseguentemente, l'equazione indefinita di equilibrio dello schema ausiliario,

$$E_p I_p \frac{d^4 \delta}{dz^4} - b_p \sigma(\delta) = 0 \quad , \quad (2.2)$$

può essere specializzata nei due tratti sopra individuati come appresso specificato:

$$E_p I_p \frac{d^4 \delta_1}{dz^4} - \alpha_1 b_p \delta_1 = 0 \quad \forall z \in [-L - \bar{z}, 0], \quad (2.2a)$$

$$E_p I_p \frac{d^4 \delta_2}{dz^4} - \beta_1 b_p (\delta_u - \delta_2) = 0 \quad \forall z \in [0, \bar{z}], \quad (2.2b)$$

essendo δ_1 e δ_2 , rispettivamente, le restrizioni di δ agli intervalli $[-L - \bar{z}, 0]$ e $[0, \bar{z}]$.

Si dividono tutti i termini delle due equazioni per la rigidezza flessionale degli aderenti $E_p I_p$, e si pone:

$$\omega_{11}^4 = \frac{\alpha_1 b_p}{4 E_p I_p}, \quad (2.3a)$$

$$\omega_{21}^4 = \frac{\beta_1 b_p}{E_p I_p}, \quad (2.3b)$$

dove le due quantità, ω_{11} e ω_{21} , hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza.

Gli integrali generali delle due equazioni differenziali possono esprimersi nella forma:

$$\delta_1(z) = A e^{-\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + B e^{-\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) + C e^{\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + D e^{\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z), \quad (2.4a)$$

$$\delta_2(z) = \delta_u + E e^{\omega_{21}z} + F e^{-\omega_{21}z} + G \cos(\omega_{21}z) + H \sin(\omega_{21}z), \quad (2.4b)$$

essendo A, B, C, D, E, F, G, H delle costanti arbitrarie da determinarsi con le competenti condizioni al contorno.

Queste ultime, in parte di tipo statico ed in parte di tipo cinematico, sono:

$$\left. \frac{d^2 \delta_1}{dz^2} \right|_{z=-(L-\bar{z})} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\left. \frac{d^3 \delta_1}{dz^3} \right|_{z=-(L-\bar{z})} = 0, \quad (2.5b)$$

$$\delta_1(0) = \delta_2(0), \quad (2.5c)$$

$$\left. \frac{d\delta_1}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{d\delta_2}{dz} \right|_{z=0}, \quad (2.5d)$$

$$\left. \frac{d^2\delta_1}{dz^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{d^2\delta_2}{dz^2} \right|_{z=0}, \quad (2.5e)$$

$$\left. \frac{d^3\delta_1}{dz^3} \right|_{z=0} = \left. \frac{d^3\delta_2}{dz^3} \right|_{z=0}, \quad (2.5f)$$

$$-E_p I_p \left. \frac{d^2\delta_2}{dz^2} \right|_{z=\bar{z}} = -M, \quad (2.5g)$$

$$-E_p I_p \left. \frac{d^3\delta_2}{dz^3} \right|_{z=\bar{z}} = V. \quad (2.5h)$$

Inoltre, nell'origine del sistema di riferimento, per le considerazioni sopra riportate, deve risultare:

$$\delta_1(0) = \delta_2(0) = \delta_e. \quad (2.6)$$

E' agevole verificare che risulta:

$$\frac{d\delta_1}{dz} = \omega_{11} + \left[\begin{array}{l} (-A + B)e^{-\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + (-A - B)e^{-\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) + \\ + (C + D)e^{\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + (-C + D)e^{\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) \end{array} \right], \quad (2.7a)$$

$$\frac{d^2\delta_1}{dz^2} = 2\omega_{11}^2 \left[\begin{array}{l} -B e^{-\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + A e^{-\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) + \\ -C e^{\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) + D e^{\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) \end{array} \right], \quad (2.7b)$$

$$\frac{d^3\delta_1}{dz^3} = 2 \omega_{11}^3 \left[(A+B)e^{-\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + (-A+B)e^{-\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) + \right. \\ \left. + (-C+D)e^{\omega_{11}z} \cos(\omega_{11}z) + (-C-D)e^{\omega_{11}z} \sin(\omega_{11}z) \right], \quad (2.7c)$$

$$\frac{d\delta_2}{dz} = \omega_{21} \left[E e^{\omega_{21}z} - F e^{-\omega_{21}z} - G \sin(\omega_{21}z) + H \cos(\omega_{21}z) \right], \quad (2.8a)$$

$$\frac{d^2\delta_2}{dz^2} = \omega_{21}^2 \left[E e^{\omega_{21}z} + F e^{-\omega_{21}z} - G \cos(\omega_{21}z) - H \sin(\omega_{21}z) \right], \quad (2.8b)$$

$$\frac{d^3\delta_2}{dz^3} = \omega_{21}^3 \left[E e^{\omega_{21}z} - F e^{-\omega_{21}z} + G \sin(\omega_{21}z) - H \cos(\omega_{21}z) \right]. \quad (2.8c)$$

Orbene, la (2.5a), tenendo conto della (2.7a), porge:

$$2 \omega_{11}^2 \left[-B e^{\omega_{11}(L-\bar{z})} \cos[\omega_{11}(L-\bar{z})] - A e^{\omega_{11}(L-\bar{z})} \sin[\omega_{11}(L-\bar{z})] + \right. \\ \left. + D e^{-\omega_{11}(L-\bar{z})} \cos[\omega_{11}(L-\bar{z})] + C e^{-\omega_{11}(L-\bar{z})} \sin[\omega_{11}(L-\bar{z})] \right] = 0. \quad (2.9)$$

da cui, posto:

$$a = e^{\omega_{11}(L-\bar{z})} \cos[\omega_{11}(L-\bar{z})], \quad (2.10a)$$

$$b = e^{\omega_{11}(L-\bar{z})} \sin[\omega_{11}(L-\bar{z})], \quad (2.10b)$$

$$c = e^{-\omega_{11}(L-\bar{z})} \cos[\omega_{11}(L-\bar{z})], \quad (2.10c)$$

$$d = e^{-\omega_{11}(L-\bar{z})} \sin[\omega_{11}(L-\bar{z})], \quad (2.10d)$$

discende la seguente altra:

$$2 \omega_{11}^2 [-aB - bA + cD + dC] = 0. \quad (2.11)$$

Analogamente, dalla (2.5b), tenendo conto della (2.7c), si ricava:

$$2 \omega_{11}^3 \left[\begin{array}{l} (A+B)e^{\omega_{11}(L-\bar{z})} \cos[\omega_{11}(L-\bar{z})] + \\ -(-A+B)e^{\omega_{11}(L-\bar{z})} \text{sen}[\omega_{11}(L-\bar{z})] + \\ +(-C+D)e^{-\omega_{11}(L-\bar{z})} \cos[\omega_{11}(L-\bar{z})] + \\ +(C+D)e^{-\omega_{11}(L-\bar{z})} \text{sen}[\omega_{11}(L-\bar{z})] \end{array} \right] = 0. \quad (2.12)$$

Inoltre, con le posizioni (2.10a-d), quest'ultima relazione può anche risciversi come:

$$2 \omega_{11}^3 [a(A+B) - b(-A+B) + c(-C+D) + d(C+D)] = 0. \quad (2.13)$$

Con analoghi ragionamenti, dalle rimanenti relazioni (2.10) discendono la seguenti altre:

$$A + C = + \delta_u + E + F + G, \quad (2.14)$$

$$\omega_{11} [(-A+B) + (C+D)] = \omega_{21} [E - F + H], \quad (2.15)$$

$$2 \omega_{11}^2 [-B + D] = \omega_{21}^2 [E + F - G], \quad (2.16)$$

$$2 \omega_{11}^3 [(A+B) + (-C+D)] = \omega_{21}^3 [E - F - H], \quad (2.17)$$

$$-\omega_{21}^2 [E e^{\omega_{21}\bar{z}} + F e^{-\omega_{21}\bar{z}} - G \cos(\omega_{21}\bar{z}) - H \text{sen}(\omega_{21}\bar{z})] = -\frac{M}{E_p I_p}, \quad (2.18)$$

$$-\omega_{21}^3 [E e^{\omega_{21}\bar{z}} - F e^{-\omega_{21}\bar{z}} + G \text{sen}(\omega_{21}\bar{z}) - H \text{cos}(\omega_{21}\bar{z})] = \frac{V}{E_p I_p}. \quad (2.19)$$

In definitiva, le relazioni (2.11)-(2.19) possono esprimersi in una forma più compatta utilizzando la notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} -b & -a & d & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (a+b) & (a-b) & (d-c) & (d+c) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -\omega_{11} & \omega_{11} & \omega_{11} & \omega_{11} & -\omega_{21} & \omega_{21} & 0 & -\omega_{21} \\ 0 & -2\omega_{11}^2 & 0 & 2\omega_{11}^2 & -\omega_{21}^2 & -\omega_{21}^2 & \omega_{21}^2 & 0 \\ 2\omega_{11}^3 & 2\omega_{11}^3 & -2\omega_{11}^3 & 2\omega_{11}^3 & -\omega_{21}^3 & \omega_{21}^3 & 0 & \omega_{21}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\omega_{21}\bar{z}} & -e^{-\omega_{21}\bar{z}} & \text{cos}(\omega_{21}\bar{z}) & \text{sen}(\omega_{21}\bar{z}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\omega_{21}\bar{z}} & e^{-\omega_{21}\bar{z}} & -\text{sen}(\omega_{21}\bar{z}) & \text{cos}(\omega_{21}\bar{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta_u \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M}{E_p I_p \omega_{21}^2} \\ \frac{V}{E_p I_p \omega_{21}^3} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Le (2.20), con la funzione obiettivo (2.6), consentono di determinare iterativamente la posizione \bar{z} , corrispondente ad assegnati valori di M e di V, nonché i valori delle costanti di integrazione, sempre che il problema di equilibrio ammetta soluzione.

In particolare, è possibile determinare i valori di V ed M per cui, all'estremità, $z = \bar{z}$, del giunto, si attinge la condizione limite $\delta(\bar{z}) = \delta_u$. Essi rappresentano i valori ultimi supportabili dal giunto.

3. Giunto a doppia sovrapposizione bilanciato sollecitato a sforzo normale

Si prende in considerazione il problema di equilibrio di un giunto incollato a doppia sovrapposizione bilanciato con aderendi di FRP sollecitati a sforzo normale (Fig. 3.1).

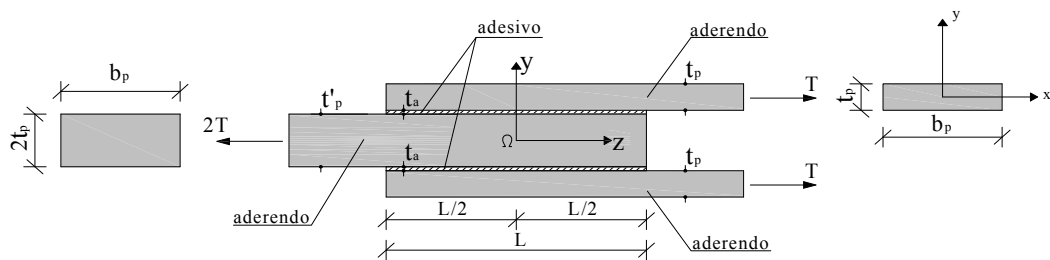


Figura 3.1 – Giunto a doppia sovrapposizione bilanciato sollecitato a sforzo normale.

I due aderendi esterni, sono profondi (o larghi) b_p e spessi t_p ; l'aderendo interno è largo b_p e spesso $t'_p = 2t_p$ (giunto bilanciato). Sia gli aderendi esterni che quello interno sono modellati secondo la teoria tecnica della trave ammettendo l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. La loro rigidezza estensionale è data dal prodotto dell'area della sezione retta per il modulo di elasticità normale del materiale FRP nella direzione longitudinale del giunto, E_p .

Lo strato di adesivo, di spessore t_a , è modellato mediante un letto continuo di molle indipendenti, disposte parallelamente all'asse del giunto in modo da contrastare gli spostamenti relativi assiali degli aderendi a contatto.

Il legame costitutivo di tali molle è rappresentato in figura 3.2, dove τ denota l'interazione aderendo/adesivo per unità di superficie ed s è lo spostamento relativo assiale tra gli aderendi.

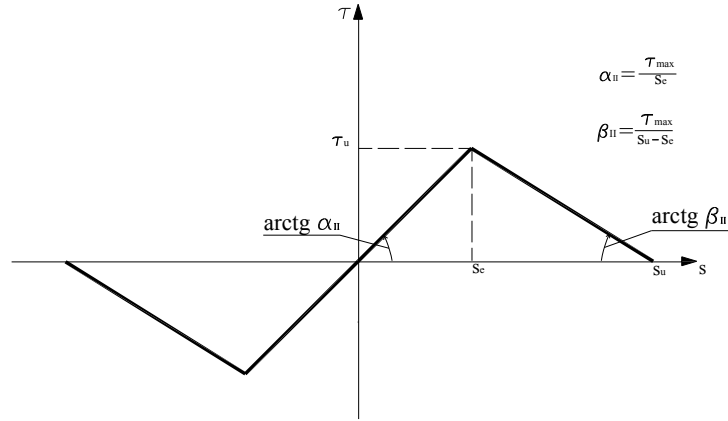


Figura 3.2 – Legame di interfaccia.

Esso può essere espresso analiticamente nella maniera seguente:

$$\tau(s) = \begin{cases} \alpha_{II} s & \text{se } |s| \leq s_e, \\ \beta_{II} (s_u - s) & \text{se } s_e \leq |s| \leq s_u, \\ 0 & \text{se } |s| > s_u. \end{cases} \quad (3.1a)$$

$$\beta_{II} (s_u - s) \quad \text{se } s_e \leq |s| \leq s_u, \quad (3.1b)$$

$$0 \quad \text{se } |s| > s_u. \quad (3.1c)$$

Il problema di equilibrio in esame presenta, rispetto al precedente caso esaminato al §2., alcune peculiarità sostanziali, ascrivibili alla circostanza che lo spostamento relativo, s , tra gli aderenti a contatto, non coincide con lo spostamento assoluto degli aderenti esterni, come invece accade per la sollecitazione di taglio e flessione.

Per evidenti ragioni di simmetria i due aderenti esterni presentano il medesimo spostamento assiale, $w^{(e)}$. Pertanto, se si denota con $w^{(i)}$ lo spostamento assiale dell'aderendo intermedio, i due spostamenti relativi tra gli aderenti esterni e quest'ultimo sono eguali tra loro e valgono $s = w^{(e)} - w^{(i)}$.

L'equazione indefinita di equilibrio alla traslazione in direzione z di ciascuno degli aderenti esterni e quella dell'aderendo intermedio possono scriversi, rispettivamente, nella forma:

$$E_p A_p \frac{d^2 w^{(e)}}{dz^2} - \tau(s) b_p = 0 \quad , \quad (3.2)$$

$$2 E_p A_p \frac{d^2 w^{(i)}}{dz^2} + 2 \tau(s) b_p = 0, \quad (3.3)$$

essendo $A_p = b_p t_p$.

Sottraendo la seconda di tali equazioni dalla prima, attraverso semplici passaggi ulteriori, si ottiene:

$$\frac{d^2 s}{dz^2} - \frac{2 b_p}{E_p A_p} \tau(s) = 0. \quad (3.4)$$

E' agevole convincersi che, essendo il giunto bilanciato, lo scorrimento, s , come anche l'interazione τ , sono simmetrici rispetto all'asse y (Fig. 3.1).

Conseguentemente, come condizioni al contorno da affiancare alla equazione differenziale (3.4) possono utilizzarsi le seguenti due:

$$E_p A_p \left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (3.5a)$$

$$E_p A_p \left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=\frac{L}{2}} = T. \quad (3.5b)$$

Ciò premesso, il problema di valore al contorno costituito dalla (3.4) insieme con le (3.5), è identificabile con il problema di equilibrio dello schema ausiliario rappresentato in figura 3.3. Nella suddetta figura sono anche indicate le determinazioni positive della caratteristica di sforzo normale agente su un tronco elementare dello schema ausiliario di lunghezza dz .

Tale schema consiste in una trave elastica, di rigidezza estensionale $E_p A_p$, di lunghezza $L/2$. Essa è sollecitata ad una estremità, scarica all'altra estremità ed è vincolata su un letto continuo di molle indipendenti, in grado di contrastare

lo spostamento assiale, s , secondo una legge costitutiva del tipo di figura 3.2. Si rileva che, rispetto ai valori che competono all'adesivo del giunto considerato, i coefficienti angolari dei due rami rettilinei del legame costitutivo delle molle dello schema ausiliario risultano raddoppiati.

Ne consegue che le reazioni nelle molle dello schema ausiliario sono il doppio delle corrispondenti interazioni mobilitate nel giunto di partenza, mentre i loro allungamenti sono uguali ai corrispondenti spostamenti relativi tra ciascuno degli aderendi esterni e l'aderendo intermedio.

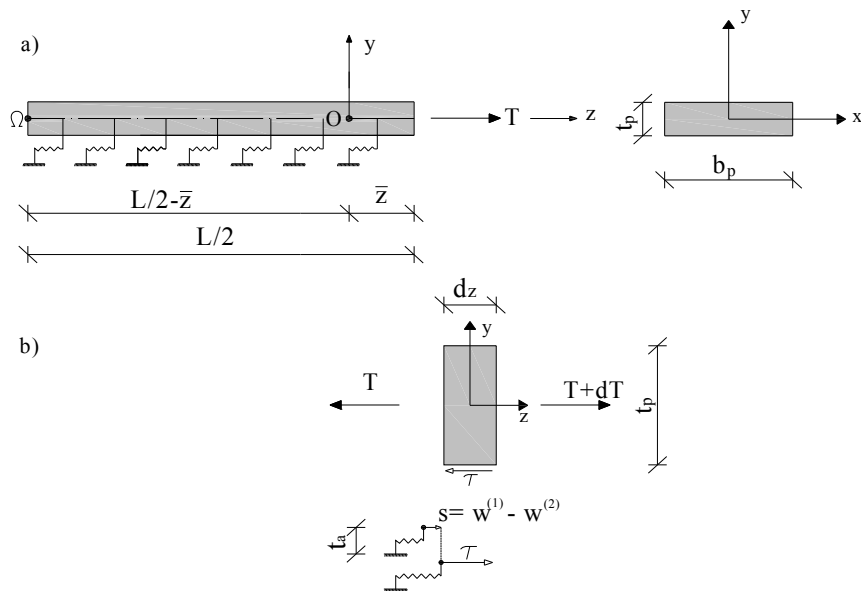


Figura 3.3 – a) Schema ausiliario; b) Tronco elementare.

Il problema di equilibrio dello schema ausiliario, come pure il problema di equilibrio del giunto originario, è non lineare per la particolare legge costitutiva delle molle che schematizzano l'adesivo. Inoltre, esso non ammette soluzione per qualsiasi condizione di carico.

A tal riguardo si osserva che, se esiste una soluzione del problema, necessariamente deve esistere un valore della coordinata z per il quale è nullo lo spostamento esibito dallo schema ausiliario, come anche la reazione della corrispondente molla.

E' agevole convincersi che l'estremità della trave ausiliaria, dove è applicato lo sforzo normale T, non può esibire spostamenti di entità superiore a s_u . In particolare, se l'entità di tale spostamento è anche minore di s_e , per le ben note proprietà della trave su suolo elastico, tutte le molle dello schema ausiliario reagiscono in campo elastico lineare. Se, invece, il suddetto spostamento presenta un valore compreso tra s_u ed s_e , per continuità, deve esistere necessariamente una sezione della trave che esibisca uno spostamento pari ad s_e . In figura 3.3a è indicata con \bar{z} la distanza di siffatta sezione della estremità caricata della trave: è conveniente assumere la suddetta sezione come origine del sistema di riferimento.

E' agevole verificare che le molle alla sinistra dell'origine lavorano esclusivamente in campo elastico lineare, mentre quelle alla destra, che esibiscono spostamenti compresi tra s_u ed s_e , lavorano nel campo non lineare, a comportamento *softening*, del legame costitutivo.

Conseguentemente, l'equazione (3.4) può essere specializzata nei due tratti sopra individuati come appresso specificato:

$$\frac{d^2 s_1}{dz^2} - \frac{2 b_p}{E_p A_p} \alpha_{II} s_1 = 0 \quad \forall z \in \left[\left(-\frac{L}{2} - \bar{z} \right), 0 \right], \quad (3.6a)$$

$$\frac{d^2 s_2}{dz^2} - \frac{2 b_p}{E_p A_p} \beta_{II} (s_u - s_2) = 0 \quad \forall z \in [0, \bar{z}]. \quad (3.6b)$$

essendo s_1 ed s_2 , rispettivamente, le restrizioni di s agli intervalli $\left[\left(-\frac{L}{2} - \bar{z} \right), 0 \right]$ e $[0, \bar{z}]$.

Si pone:

$$\omega_{III}^2 = \frac{2 b_p \alpha_{II}}{E_p A_p}, \quad (3.7a)$$

$$\omega_{2II}^2 = \frac{2 b_p \beta_{II}}{E_p A_p}, \quad (3.7b)$$

dove le due quantità ω_{1II}^2 e ω_{2II}^2 hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza.

Le (3.6) possono pertanto risciversi come:

$$\frac{d^2 s_1}{dz^2} - \omega_{1II}^2 s_1 = 0 \quad \forall z \in \left[-\left(\frac{L}{2} - \bar{z}\right), 0 \right], \quad (3.8a)$$

$$\frac{d^2 (s_2 - s_u)}{dz^2} + \omega_{2II}^2 (s_2 - s_u) = 0 \quad \forall z \in [0, \bar{z}]. \quad (3.8b)$$

Gli integrali generali delle (3.8) sono del tipo:

$$s_1(z) = A \cosh(\omega_{1II} z) + B \sinh(\omega_{1II} z), \quad (3.9a)$$

$$s_2(z) = s_u + C \cos(\omega_{2II} z) + D \sin(\omega_{2II} z), \quad (3.9b)$$

essendo A, B, C e D delle costanti arbitrarie da determinarsi con le competenti condizioni al contorno.

Queste ultime, sia di tipo statico che cinematico, sono le seguenti:

$$\left. \frac{ds_1}{dz} \right|_{z = -\left(\frac{L}{2} - \bar{z}\right)} = 0, \quad (3.10a)$$

$$s_1(0) = s_2(0), \quad (3.10b)$$

$$\left. \frac{ds_1}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{ds_2}{dz} \right|_{z=0}, \quad (3.10c)$$

$$E_p A_p \frac{ds_2}{dz} \Big|_{z=\bar{z}} = T . \quad (3.10d)$$

Inoltre, nell'origine del sistema di riferimento, per le considerazioni sopra riportate, deve risultare:

$$s_1(0) = s_2(0) = s_e . \quad (3.11)$$

Esplicitando le (3.10), si perviene alle seguenti relazioni:

$$A \omega_{1II} \sinh \left[-\omega_{1II} \left(\frac{L}{2} - \bar{z} \right) \right] + B \omega_{1II} \cosh \left[-\omega_{1II} \left(\frac{L}{2} - \bar{z} \right) \right] = 0 , \quad (3.12a)$$

$$A = s_u + C , \quad (3.12b)$$

$$B \omega_{1II} = D \omega_{2II} , \quad (3.12c)$$

$$-C \omega_{2II} \sin(\omega_{2II} \bar{z}) + D \omega_{2II} \cos(\omega_{2II} \bar{z}) = \frac{T}{E_p A_p} . \quad (3.12d)$$

In forma compatta le (3.12) possono anche esprimersi come.

$$\begin{bmatrix} \omega_{1II} \sinh \left[-\omega_{1II} \left(\frac{L}{2} - \bar{z} \right) \right] & \omega_{1II} \cosh \left[-\omega_{1II} \left(\frac{L}{2} - \bar{z} \right) \right] & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_{1II} & 0 & \omega_{2II} \\ 0 & 0 & -\omega_{2II} \sin(\omega_{2II} \bar{z}) & \omega_{2II} \cos(\omega_{2II} \bar{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_u \\ 0 \\ \frac{T}{E_p A_p} \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

Le (3.13), con la funzione obiettivo (3.11), consentono di determinare iterativamente la posizione \bar{z} per assegnati valori T , nonché i corrispondenti

valori delle costanti di integrazione, sempre che il problema di equilibrio ammetta soluzione.

Una volta determinata la funzione incognita $s(z)$, i valori delle interazioni mobilitate all'interfaccia del giunto, $\tau(s)$, si ottengono a partire dalle (3.1).

In particolare, in tal modo è possibile ricavare il valore di T per cui all'estremità, $z = \bar{z}$, del giunto si attinge la condizione limite $|s(\bar{z})| = s_u$. Esso rappresenta il valore ultimo supportabile dal giunto.

Come situazioni particolari, nelle Appendici A3 e A4, sono trattati i casi di legame costitutivo di interfaccia elastico lineare e rigido-softening, con tratto softening lineare. In tali casi è possibile ottenere semplici soluzioni in forma chiusa utili nei problemi ingegneristici.

3.1. Giunto a doppia sovrapposizione simmetrico non bilanciato sollecitato a sforzo normale

Rispetto alla situazione esaminata nel paragrafo precedente, tale tipo di giunto presenta l'unica variante che $t'_p \neq 2t_p$, ovvero che la rigidezza estensionale dell'aderendo intermedio, $E_p A'_p$, non è il doppio di quelle dei due aderendi esterni, entrambe pari a $E_p A_p$.

Con i simboli già introdotti, l'equazione indefinita di equilibrio di ciascuno degli aderendi esterni e quella dell'aderendo intermedio possono pertanto scriversi, rispettivamente, nella forma:

$$E_p A_p \frac{d^2 w^{(e)}}{dz^2} - \tau(s) b_p = 0 \quad , \quad (3.14)$$

$$E_p A'_p \frac{d^2 w^{(i)}}{dz^2} + 2 \tau(s) b_p = 0. \quad (3.15)$$

Sottraendo la seconda di tali equazioni dalla prima, attraverso ulteriori semplici passaggi, si ottiene:

$$\frac{d^2s}{dz^2} - \left(\frac{1}{E_p A_p} + \frac{2}{E_p A'_p} \right) \tau(s) b_p = 0. \quad (3.16)$$

ove $s = w^{(e)} - w^{(i)}$.

Non essendo il giunto bilanciato, la condizione al contorno (3.5a), relativa alla sezione di mezzeria, non può essere più invocata. Le condizioni al contorno da utilizzare, entrambe di tipo statico, sono invece le seguenti:

$$\left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=-L} = -\frac{1}{E_p A'_p} T, \quad (3.17a)$$

$$\left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=L} = \frac{1}{E_p A_p} T. \quad (3.17b)$$

E' agevole convincersi che il problema di valore al contorno (3.16)-(3.17) è riconducibile al problema di equilibrio dello schema ausiliario di figura 3.4.

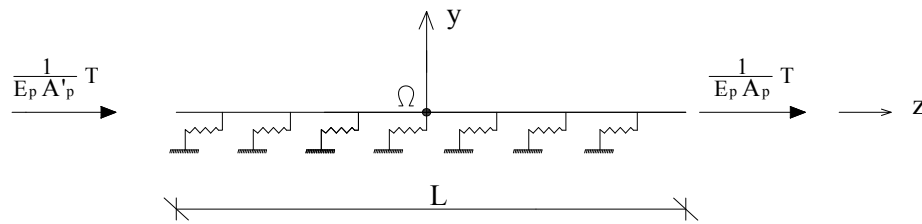


Figura 3.4 – Schema ausiliario.

A differenza dello schema ausiliario di figura 3.3a, esso ha lunghezza L , pari proprio a quella del giunto, e molle di rigidezza amplificata del fattore $\left(1 + \frac{2 A_p}{A'_p}\right)$ rispetto alle rigidezze $(\alpha_{II}, \beta_{II})$ dell'adesivo considerato.

Il problema di equilibrio dello schema ausiliario di figura 3.4 può essere discusso e trattato in maniera analoga al caso del giunto bilanciato, salvo a suddividere l'intervallo $\left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$ in tre parti mediante l'introduzione di due punti, O ed O' , in corrispondenza dei quali lo spostamento, s , delle corrispondenti molle è in valore assoluto pari ad s_e . Tali punti hanno dall'estremità del giunto distanze in genere differenti: nel tratto compreso tra i punti O ed O' le molle dello schema ausiliario lavorano in campo elastico lineare; nei due tratti esterni, in campo non lineare a comportamento *softening*.

I dettagli dello schema iterativo sono omessi per brevità, non introducendo ulteriori aspetti di originalità.

4. Giunto a semplice sovrapposizione simmetrico sollecitato a taglio e flessione ed a sforzo normale.

La trattazione del problema di equilibrio di giunti incollati a doppia sovrapposizione bilanciati, svolta nei precedenti paragrafi, può essere estesa senza eccessive difficoltà al caso di giunti incollati a semplice sovrapposizione simmetrici, sollecitati sia a taglio e flessione (Fig. 4.1a), che a sforzo normale (Fig. 4.1b).

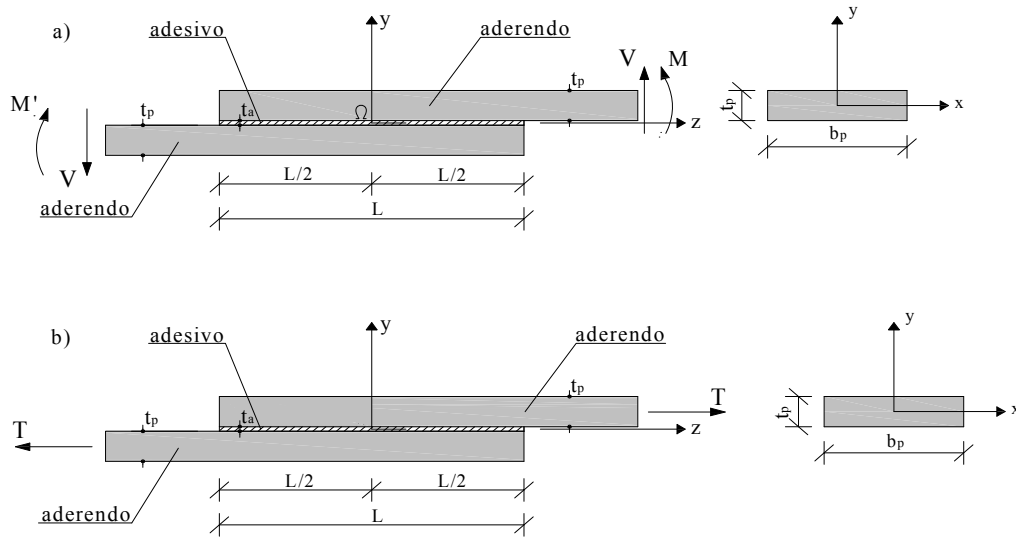


Figura 4.1 – Giunto incollato a semplice sovrapposizione simmetrico: a) Sollecitazione di taglio e flessione; b) Sollecitazione di sforzo normale (b).

L'estensione è presentata in dettaglio nell'Appendice A5, alla quale si rinvia. Sinteticamente, ci si limita qui a segnalare che, nelle applicazioni correnti, è possibile avvalersi degli stessi schemi ausiliari e delle stesse procedure iterative proposte per i giunti a doppia sovrapposizione bilanciati. Rispetto a quest'ultima situazione, per il solo problema di taglio e flessione, la lunghezza dello schema ausiliario da associare al giunto a semplice sovrapposizione è pari alla metà di quella effettiva del giunto, e i valori dei parametri costitutivi (α_1, β_1) del letto di molle sono il doppio di quelli che caratterizzano l'adesivo del giunto di partenza.