

Capitolo 2

Principi e metodi di calcolo

2.1 Metodo delle densità di forza

In questo paragrafo introduciamo il metodo delle densità di forza, con il quale verrà svolta parte dell'analisi dei sistemi tensintegri.

Consideriamo una *struttura* come un insieme di n_n *nodi* nello spazio euclideo tridimensionale ed un insieme di n_e *elementi* rettilinei, che connettono i nodi a coppie. Chiameremo *topologia* della struttura la relazione che associa ogni elemento con la coppia di nodi collegati.

2.1.1 Equilibrio e congruenza

Gli elementi sono collegati in ogni nodo attraverso una cerniera sferica, quindi essi sono sollecitati esclusivamente da una forza assiale. Il bilancio delle forze agenti sul nodo generico P è:

$$\sum_j N_{PQ_j} \frac{(Q_j - P)}{\|Q_j - P\|} + \mathbf{f}_P = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

con la sommatoria estesa a tutti i nodi Q_j collegati a P da un elemento. L'elemento trave che connette P e Q_j è sollecitato dalla forza assiale N_{PQ_j} , considerata positiva se di trazione; \mathbf{f}_P è la forza esterna applicata in P . Definiamo la lunghezza dell'elemento PQ_j :

$$\ell_{PQ_j} := \|Q_j - P\|, \quad (2.2)$$

ed il parametro statico interno:

$$t_{PQ_j} := \frac{N_{PQ_j}}{\ell_{PQ_j}}, \quad (2.3)$$

che costituisce la cosiddetta *densità di forza*¹ dell'elemento PQ_j , pari alla forza assiale dell'elemento divisa per la sua lunghezza. L'equazione di equilibrio del nodo P si scrive quindi nel modo seguente:

$$\sum_j t_{PQ_j} (P - Q_j) = \mathbf{f}_P . \quad (2.4)$$

Scriviamo l'insieme di tutte le $3n_n$ equazioni di equilibrio nella forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{f} , \quad (2.5)$$

dove la *matrice di equilibrio* \mathbf{A} , una matrice $3n_n \times n_e$, lega il vettore delle densità di forza degli elementi \mathbf{t} al vettore delle forze nodali \mathbf{f} .

Le equazioni di congruenza, controparti cinematiche delle equazioni di equilibrio, sono scritte nel modo seguente. Per l'elemento generico PQ , indichiamone con λ_{PQ} , il *semi-quadrato della lunghezza corrente*:

$$\lambda_{PQ} = \frac{1}{2} \ell_{PQ}^2 = \frac{1}{2} (P - Q) \cdot (P - Q) . \quad (2.6)$$

Differenziando questa quantità rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{\lambda}_{PQ} = \ell_{PQ} \dot{\ell}_{PQ} = (P - Q) \cdot (\dot{P} - \dot{Q}) = (P - Q) \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) . \quad (2.7)$$

La (2.7) introduce il parametro cinematico interno

$$e_{PQ} := \dot{\lambda}_{PQ} = \ell_{PQ} \dot{\ell}_{PQ} , \quad (2.8)$$

che costituisce una misura della *velocità di deformazione* dell'elemento PQ . La generica equazione di congruenza si riscrive quindi nella forma seguente:

$$(P - Q) \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) = e_{PQ} , \quad (2.9)$$

mentre l'insieme di tutte le n_e equazioni di congruenza si può scrivere nella forma

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{e} , \quad (2.10)$$

dove la *matrice di congruenza* \mathbf{B} lega le velocità nodali \mathbf{v} al vettore delle velocità di deformazione \mathbf{e} ².

¹La dizione 'densità di forza' non ha significato fisico ma allude alle dimensioni di t .

²Per ottenere le equazioni di congruenza scritte in termini di piccoli spostamenti nodali e allungamenti, è sufficiente moltiplicare ambo i membri delle (2.9), (2.10) per un piccolo intervallo di tempo Δt ; la matrice \mathbf{B} resta la stessa.

Com'è noto, dall'identità delle potenze virtuali, la matrice di congruenza è uguale alla trasposta della matrice di equilibrio. La potenza della forza interna \mathbf{N}_{PQ} del generico elemento è:

$$W_{PQ}^{(int)} = \mathbf{N}_{PQ} \dot{\ell}_{PQ} = t_{PQ} e_{PQ} . \quad (2.11)$$

Per ogni sistema di forze e tensioni (\mathbf{f}, \mathbf{t}) in equilibrio e per ogni sistema congruente (\mathbf{v}, \mathbf{e}) , la potenza delle forze interne è pari alla potenza delle forze esterne:

$$W^{(int)} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = W^{(est)} . \quad (2.12)$$

Sostituendo la (2.10) e la (2.5) rispettivamente nel primo e nel secondo membro:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ; \quad (2.13)$$

quindi, dalle proprietà del prodotto scalare:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T . \quad (2.14)$$

2.1.2 Matrici di connessione

Il vantaggio del metodo delle densità di forza consiste nella scelta dei parametri interni \mathbf{t} ed \mathbf{e} . La conseguenza è che la matrice \mathbf{A} dipende linearmente dall'insieme delle coordinate nodali, nel modo descritto di seguito.

Indichiamo la configurazione del sistema con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n_n}$ il vettore che contiene tutte le coordinate nodali $\mathbf{p}_h \in \mathbb{R}^3$, $h = 1, \dots, n_n$:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_n} \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

Consideriamo l'elemento i -esimo cui corrisponde l' i -esima colonna \mathbf{a}_i della matrice di equilibrio \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \left[\begin{array}{ccc} \cdots & \left. \begin{array}{c} \mathbf{a}_i(\mathbf{p}) \\ \vdots \end{array} \right| & \cdots \end{array} \right] , \quad (2.16)$$

se h e k sono gli indici dei due nodi connessi dall' i -esimo elemento, la colonna \mathbf{a}_i ha la forma:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_k \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_h \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{posizione } h \\ \\ \longleftarrow \text{posizione } k \end{array} , \quad (2.17)$$

in cui gli unici elementi diversi da zero sono quelli corrispondenti alle equazioni di bilancio relative ai nodi h e k . I *vettori di ramo* \mathbf{a}_i si possono esprimere nella maniera seguente:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{C}_i \mathbf{p} , \quad (2.18)$$

dove \mathbf{C}_i , *matrice di connessione* dell'elemento i -esimo, di dimensioni $3n_n \times 3n_n$, ha la forma³:

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \mathbf{1} & \cdots & -\mathbf{1} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & -\mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} , \quad (2.19)$$

essendo $\mathbf{1}$ è l'identità in \mathbb{R}^3 ; i blocchi $\mathbf{1}$ e $-\mathbf{1}$ sono gli unici non nulli e occupano rispettivamente le posizioni hh , kk e hk , kh . Un'espressione alternativa delle equazioni di equilibrio è quindi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n_e} t_i \mathbf{a}_i(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n_e} t_i \mathbf{C}_i \mathbf{p} = \mathbf{f} . \quad (2.20)$$

Inoltre, vale la relazione

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \mathbf{C}_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} , \quad (2.21)$$

e l'equazione di congruenza per l'elemento i -esimo si può scrivere nella forma

$$e_i = \mathbf{C}_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} . \quad (2.22)$$

2.1.3 Vincoli

I nodi della struttura possono essere vincolati a non muoversi secondo certe direzioni: per *vincolo scalare* sul nodo P si intende la condizione che la sua velocità \mathbf{v}_P abbia componente nulla in una determinata direzione. Se \mathbf{n} è il versore di questa direzione, possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (2.23)$$

Per prendere in considerazione un vincolo scalare nella scrittura delle equazioni di congruenza (equilibrio) è sufficiente eliminare dal vettore \mathbf{v} (\mathbf{f}) e dalla

³Qui \mathbf{C}_i è rappresentata come una matrice a blocchi $n_n \times n_n$.

matrice \mathbf{B} (\mathbf{A}), della struttura senza vincoli, rispettivamente la componente e la colonna (riga) che corrispondono⁴ alla direzione del vincolo \mathbf{n} . Se i vincoli sono in numero tale da impedire completamente il moto di due nodi connessi da un elemento, allora dobbiamo eliminare da \mathbf{B} (\mathbf{A}) anche la riga (colonna) corrispondente. Nel seguito non prenderemo mai in considerazione quest'ultima eventualità.

Se si indica con n_c il numero totale di vincoli scalari, il *numero di gradi di libertà* per la struttura risulta:

$$n_l = 3n_n - n_c ; \quad (2.24)$$

quindi, la matrice \mathbf{B} (\mathbf{A}) ha in tutto n_l colonne (righe).

2.2 Condizione di indeterminazione

Per chiarezza di esposizione, riepiloghiamo ciò che abbiamo visto nel paragrafo precedente.

Abbiamo implicitamente introdotto i seguenti spazi vettoriali:

$$\mathcal{V}_e = \text{spazio vettoriale degli elementi} \quad (\dim \mathcal{V}_e = n_e) , \quad (2.25)$$

$$\mathcal{V}_n = \text{spazio vettoriale dei nodi} \quad (\dim \mathcal{V}_n = n_l) . \quad (2.26)$$

Tra questi spazi abbiamo considerato gli operatori:

$$\mathbf{A} : \mathcal{V}_e \xrightarrow{\text{lin}} \mathcal{V}_n , \quad \mathbf{B} : \mathcal{V}_n \xrightarrow{\text{lin}} \mathcal{V}_e ; \quad (2.27)$$

i quali agiscono sui vettori

$$\mathbf{t}, \mathbf{e} \in \mathcal{V}_e , \quad \mathbf{f}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_n \quad (2.28)$$

secondo le (2.5), (2.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{t} &= \mathbf{f} && \text{(equazioni di bilancio) ,} \\ \mathbf{B}\mathbf{v} &= \mathbf{e} && \text{(equazioni di compatibilità geometrica) .} \end{aligned}$$

Inoltre, vale

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \text{(identità delle potenze virtuali) ,} \quad (2.29)$$

da cui si trae che:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T . \quad (2.30)$$

⁴Supponiamo che la direzione del vincolo coincida con uno dei versori della base nella quale abbiamo rappresentato la velocità \mathbf{v}_P (forza esterna \mathbf{f}_P) del nodo vincolato.

2.2.1 Sottospazi fondamentali

Le caratteristiche di una struttura dipendono dalla sua matrice di equilibrio \mathbf{A} , o dalla matrice di congruenza \mathbf{A}^T , attraverso i quattro sottospazi vettoriali ad essa associati, l'immagine ed il nucleo di \mathbf{A} e di \mathbf{A}^T :

$$\text{Im } \mathbf{A} , \text{ Ker } \mathbf{A} , \text{ Im } \mathbf{A}^T , \text{ Ker } \mathbf{A}^T .$$

Poichè la matrice \mathbf{A} è un'applicazione lineare tra lo spazio delle sollecitazioni negli elementi e lo spazio dei carichi esterni in equilibrio con esse e, analogamente, la matrice \mathbf{B} è un'applicazione lineare tra lo spazio delle velocità nodali e lo spazio delle velocità di deformazione degli elementi congruenti con esse, il significato fisico dei sottospazi fondamentali è il seguente.

Lo spazio generato dalle colonne di \mathbf{A} ($\text{Im } \mathbf{A}$) è lo spazio vettoriale dei carichi che possono essere equilibrati dalla struttura, i cosiddetti carichi *compatibili*; questo spazio, coincidendo con quello generato dalle righe di \mathbf{B} , rappresenta anche le velocità nodali a cui è associata una velocità di variazione di lunghezza degli elementi congruente, le cosiddette velocità nodali *estensionali*.

Lo spazio nullo di \mathbf{A} ($\text{Ker } \mathbf{A}$) è lo spazio vettoriale delle sollecitazioni negli elementi *autoequilibrate*, cioè, in equilibrio con carichi esterni nulli; queste prendono il nome di *presollecitazioni* o *self-stresses*. In questo spazio, che coincide con lo spazio nullo a sinistra di \mathbf{B} , sono contenute anche le velocità di deformazione *incompatibili* vale a dire quelle velocità di deformazione che, se assegnate agli elementi, non permettono di preservare la connettività della struttura.

Lo spazio generato dalle righe di \mathbf{A} ($\text{Im } \mathbf{A}^T$) rappresenta l'insieme delle sollecitazioni negli elementi che sono in equilibrio con i carichi compatibili; inoltre questo spazio, essendo generato anche dalle colonne di \mathbf{B} , contiene le velocità di deformazione *congruenti* che assegnate agli elementi preservano la connettività della struttura.

Infine lo spazio nullo a sinistra di \mathbf{A} ($\text{Ker } \mathbf{A}^T$) contiene i carichi che non possono essere equilibrati dalla struttura, i cosiddetti carichi *incompatibili*; poichè questo spazio è anche il nucleo di \mathbf{B} , esso rappresenta le velocità nodali che non provocano alcuna variazione di lunghezza negli elementi, le cosiddette velocità nodali *inestensionali* o *meccanismi*.

2.2.2 Regola di Maxwell estesa

Com'è noto, i sottospazi fondamentali sono complementi ortogonali nei rispettivi spazi vettoriali dei nodi e degli elementi; in simboli,

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathbf{A} &\perp \text{Ker } \mathbf{A}^T, \\ \text{Ker } \mathbf{A} &\perp \text{Im } \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Le dimensioni di questi sottospazi si denotano con

$$n_r = \text{Dim}(\text{Im } \mathbf{A}) = \text{Dim}(\text{Im } \mathbf{A}^T); \quad (2.32)$$

$$n_{ss} = \text{Dim}(\text{Ker } \mathbf{A}); \quad (2.33)$$

$$n_m = \text{Dim}(\text{Ker } \mathbf{A}^T). \quad (2.34)$$

Se la matrice \mathbf{A} ha $3n_n$ righe e n_e colonne, allora il suo rango n_r è pari a:

$$n_r = 3n_n - n_m = n_e - n_{ss}, \quad (2.35)$$

da cui si ottiene:

$$3n_n - n_e = n_m - n_{ss}. \quad (2.36)$$

Nella relazione precedente il numero di meccanismi comprende anche i 6 moti rigidi del sistema. Se ci sono n_c vincoli scalari applicati sui nodi la (2.36) diventa:

$$3n_n - n_c - n_e = n_m - n_{ss}; \quad (2.37)$$

in questo caso, n_m include i moti rigidi non eliminati dai vincoli. Nel caso di sistemi piani ogni nodo possiede due gradi di libertà e la precedente si riscrive:

$$2n_n - n_c - n_e = n_m - n_{ss}. \quad (2.38)$$

In ogni caso, ricordando che n_l è il numero totale di gradi di libertà si ha:

$$n_l - n_e = n_m - n_{ss}. \quad (2.39)$$

Le (2.36), (2.37), (2.38), (2.39) esprimono la *regola di Maxwell* nella forma *estesa* da Calladine [1]. L'importanza di questa regola è chiara dalla classificazione seguente.

2.2.3 Classificazione strutturale

La conoscenza del rango n_r del sistema e, di conseguenza la conoscenza di n_{ss} e n_m , fornisce informazioni sull'esistenza e l'unicità delle soluzioni dei sistemi (2.5) e (2.10). I sistemi strutturali si suddividono in quattro classi a seconda che i valori di n_{ss} e di n_m siano maggiori o uguali a zero.

Sistemi isostatici, $n_{ss} = 0$, $n_m = 0$. In questo caso la matrice di equilibrio è quadrata e di ordine massimo, vale a dire, la soluzione dei sistemi (2.5) e (2.10) esiste ed è unica per qualsiasi condizione di carico e per qualsiasi valore delle velocità di deformazione degli elementi.

Sistemi iperstatici, $n_{ss} > 0$, $n_m = 0$. In questo caso i vincoli sono sovrabbondanti e il sistema delle equazioni di equilibrio è indeterminato, ammettendo più di una soluzione per qualsiasi condizione di carico; la struttura può possedere n_{ss} stati di sollecitazione autoequilibrati indipendenti. Nel contempo, il sistema delle equazioni di congruenza è sovradeterminato e non ammette in generale soluzione; esistono però delle velocità di deformazione degli elementi per i quali la soluzione esiste ed è unica.

Sistemi labili, $n_{ss} = 0$, $n_m > 0$. In questo caso i vincoli non sono sufficienti a rendere rigida la struttura, il sistema delle equazioni di congruenza è indeterminato, ammettendo più di una soluzione per qualsiasi velocità di deformazione degli elementi; esistono n_m meccanismi indipendenti. Contemporaneamente, il sistema delle equazioni di equilibrio è sovradeterminato, e non ammette soluzione eccetto per particolari condizioni di carico per cui la soluzione esiste ed è unica.

Sistemi labili e iperstatici, $n_{ss} > 0$, $n_m > 0$. In questo caso le affermazioni dei due casi precedenti valgono contemporaneamente, le equazioni di equilibrio (congruenza) non ammettono in generale soluzione, eccetto per particolari vettori di carico (velocità di deformazione) per cui la soluzione esiste ma non è unica. Questi sistemi presentano n_{ss} stati di sollecitazione autoequilibrati e n_m cinematismi indipendenti.

2.2.4 Condizione di indeterminazione

I meccanismi infinitesimi del primo ordine, e quindi i sistemi tensintegri, in quanto possiedono sia meccanismi che stati di sollecitazione autoequilibrati, appartengono all'ultima classe. Essi quindi soddisfano la *condizione di indeterminazione*, onde la matrice di equilibrio non ha rango massimo. Nel caso di una matrice quadrata, questa condizione equivale a:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0 . \quad (2.40)$$

Occorre notare che un sistema che soddisfa la condizione di indeterminazione non è necessariamente un meccanismo infinitesimo del primo ordine. Può accadere che il sistema sia composto da una parte labile e una parte iperstatica; oppure può darsi il caso di un meccanismo infinitesimo di ordine superiore al secondo (Fig. 2.1). Il caso dei meccanismi infinitesimi del primo ordine è quello illustrato nell'esempio di Fig. 1.3. Il sistema, di topologia assegnata e geometria variabile, è, nella maggior parte dei casi, un sistema isostatico (Fig. 1.3, in alto). Esistono però delle configurazioni in cui il rango della matrice di equilibrio decresce di una unità (Fig. 1.3, al centro e in basso), il sistema diventa indeterminato ed acquisisce uno stato di sollecitazione autoequilibrato ed un meccanismo; il self-stress corrisponde a sollecitazioni nei due elementi che possono essere uguali (Fig. 1.3, al centro) od opposte (Fig. 1.3, in basso); il meccanismo corrisponde ad una velocità del nodo diretta verticalmente. Lo stesso può accadere per il sistema labile di Fig. 2.2 in alto;

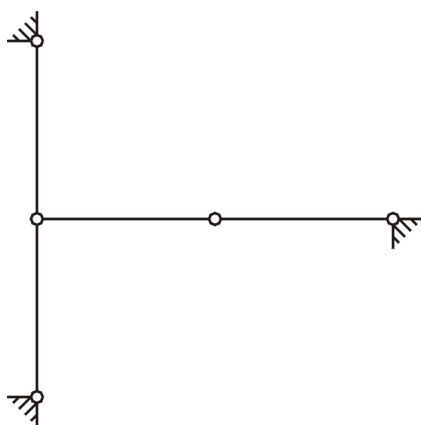


Figura 2.1: Un meccanismo infinitesimo del terzo ordine.

in questa configurazione il sistema possiede un meccanismo, mentre, con la stessa topologia ma una geometria diversa (Fig. 2.2, in basso), il sistema acquisisce uno stato di sollecitazione autoequilibrato ed un meccanismo in più; in questa configurazione il sistema è un meccanismo infinitesimo del primo ordine. Vedremo nel paragrafo 2.5 come la condizione di indeterminazione sia legata alla proprietà di ricerca di forma.

2.2.5 Trasformazioni affini

La classificazione dei sistemi strutturali appena illustrata è invariante per trasformazioni affini dello spazio euclideo, cioè per quelle trasformazioni che

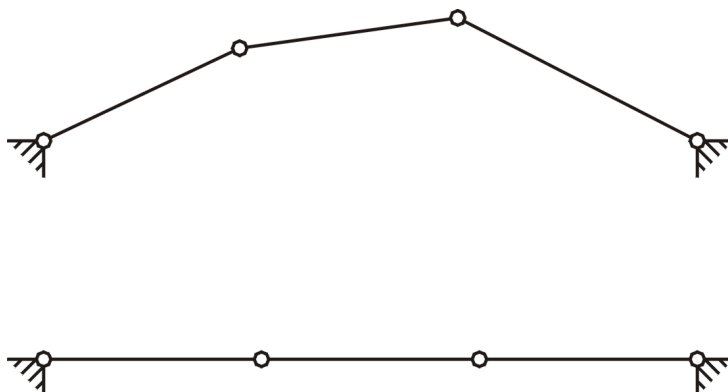


Figura 2.2: Sistema con quattro cerniere.

conservano il parallelismo avendo determinante non nullo. Denotando con $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^3$ una trasformazione affine dello spazio tridimensionale, applichiamo \mathbf{L} nodo per nodo alla configurazione \mathbf{p} del sistema originale, attraverso la matrice $3n_n \times 3n_n$ scritta di seguito:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & & & \\ & \mathbf{L} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

dove gli unici elementi non nulli sono i blocchi \mathbf{L} sulla diagonale. La configurazione del sistema trasformato \mathbf{q} si ottiene quindi da:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}\mathbf{p}. \quad (2.42)$$

Le colonne \mathbf{a}_i di \mathbf{A} sono funzioni lineari delle coordinate nodali secondo la (2.18), si ottiene quindi per la configurazione trasformata \mathbf{q} :

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{q}) = \mathbf{C}_i\mathbf{q} = \mathbf{C}_i\mathbf{L}\mathbf{p} = \mathbf{L}\mathbf{C}_i\mathbf{p} = \mathbf{L}\mathbf{a}_i(\mathbf{p}), \quad (2.43)$$

poichè, com'è facile verificare, le matrici \mathbf{C}_i e \mathbf{L} commutano. In conclusione, data l'espressione (2.20) delle equazioni di equilibrio, si può scrivere per \mathbf{A} l'uguaglianza

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{L}\mathbf{A}(\mathbf{p}), \quad (2.44)$$

che mostra come *la classe a cui appartiene un sistema non varia se si cambiano le coordinate nodali secondo una trasformazione affine.*

2.3 Condizione di stabilità

Al fine di stabilire un criterio per determinare se un sistema dato sia un meccanismo infinitesimo del primo ordine oppure no, introduciamo il concetto di *carico geometrico* e la *condizione di stabilità*. Le definizioni seguenti si applicano sia ai sistemi labili che sono in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne, sia ai sistemi labili e iperstatici in cui è presente uno stato di sollecitazione autoequilibrato non nullo.

2.3.1 Carico geometrico

Diamo la definizione seguente. *A partire da una configurazione in equilibrio, si consideri un "piccolo" spostamento nodale secondo il meccanismo $\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{A}^T$. Per carico geometrico \mathbf{g} si intende l'azione esterna da applicare sui nodi per mantenere il sistema in equilibrio (Fig. 2.3). Questo carico è causato solo dal cambio di direzione degli elementi, poichè la deformazione degli elementi è trascurabile. Esso dipende dalla geometria del sistema ed è direttamente proporzionale al valore della eventuale presollecitazione.*

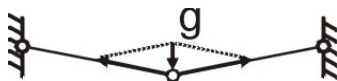


Figura 2.3: Il carico geometrico associato al meccanismo.

Le equazioni di equilibrio, scritte nella configurazione iniziale \mathbf{p} e in quella ottenuta imponendo il meccanismo $(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$, con $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{v}\Delta t$, sono:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{t} = \mathbf{f} , \quad (2.45)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})\mathbf{t} = \mathbf{f} + \mathbf{g} . \quad (2.46)$$

Le densità di forza \mathbf{t} rimangono le stesse poichè \mathbf{v} è un meccanismo e quindi la deformazione degli elementi è nulla. Sottraendo membro a membro le (2.45), (2.46) si ha:

$$[\mathbf{A}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) - \mathbf{A}(\mathbf{p})]\mathbf{t} = \mathbf{g} ; \quad (2.47)$$

tenendo conto della linearità della matrice di equilibrio rispetto al vettore delle coordinate nodali, si ottiene:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}(\mathbf{v}\Delta t)\mathbf{t} . \quad (2.48)$$

Quindi, il carico geometrico si ottiene dalle relazioni di equilibrio scritte sostituendo le coordinate nodali con le componenti del meccanismo; ricordando l'espressione (2.20), la (2.48) si riscrive come:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n_e} t_i \mathbf{C}_i \mathbf{v} \Delta t , \quad (2.49)$$

Per il nodo P si ha:

$$\mathbf{g}_P = \sum_j t_{PQ_j} (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_j}) \Delta t , \quad (2.50)$$

con la sommatoria estesa ai nodi Q_j connessi a P da un elemento.

Si possono verificare due situazioni. Il vettore appena definito può appartenere all'immagine della matrice di equilibrio oppure no. Se il carico geometrico non appartiene all'immagine di \mathbf{A} , il sistema, oltre ai carichi compatibili (quelli generati dalle colonne di \mathbf{A}), può sostenere una ulteriore condizione di carico, generata dal vettore \mathbf{g} . Diversamente, se \mathbf{g} appartiene all'immagine di \mathbf{A} , lo stato di sollecitazione negli elementi non aumenta la capacità della struttura di sostenere una generica condizione di carico.

2.3.2 Condizione di stabilità

Può darsi il caso in cui la configurazione di equilibrio presollecitata sia instabile. Per analizzare la stabilità di una configurazione di equilibrio è sufficiente calcolare il segno del lavoro compiuto dal carico geometrico in seguito ad uno spostamento lungo il meccanismo. *Per un sistema labile in equilibrio stabile il lavoro del carico geometrico compiuto per un spostamento lungo il meccanismo è positivo:*

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \Delta t > 0 , \quad \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{A}^T . \quad (2.51)$$

Sostituendo la (2.48) nella precedente e dividendo per $(\Delta t)^2$, si ottiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} > 0 , \quad \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{A}^T . \quad (2.52)$$

Utilizzando le espressioni (2.19) e (2.20) la precedente si riscrive come:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n_e} t_i \mathbf{C}_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n_e} t_i [(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_k) \mathbf{v}_h + (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_h) \mathbf{v}_k] , \quad (2.53)$$

dove h e k sono gli indici dei due nodi connessi dall'elemento i -esimo; raccogliendo i termini, la condizione di stabilità diventa:

$$\sum_{i=1}^{n_e} t_i (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_k)^2 > 0 , \quad \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{A}^T . \quad (2.54)$$

In conclusione, affinché un dato sistema sia un meccanismo infinitesimo del primo ordine per esso deve valere la condizione (2.51), o l'equivalente (2.54). Per un sistema appartenente alla classe dei sistemi labili ed iperstatici questa condizione significa che lo stato di sollecitazione autoequilibrato negli elementi impartisce una rigidità positiva anche nei confronti di spostamenti secondo i possibili meccanismi. Anche questa condizione, come vedremo in seguito, è legata alla proprietà di ricerca di forma.

La condizione di stabilità non è verificata nel caso dei sistemi parte labili e parte iperstatici e del sistema mostrato nella Fig. 2.1. Infatti questi non sono meccanismi infinitesimi del primo ordine: il carico geometrico è nullo, poichè gli elementi presollecitati non sono affetti dal meccanismo.

2.4 Risposta statica

In questo paragrafo illustreremo il procedimento di analisi di una generica struttura reticolare secondo il metodo delle densità di forza, seguendo i lavori di Pellegrino [28, 30]. In particolare, vedremo l'estensione della teoria elastica lineare classica alle strutture che appartengono alla terza e alla quarta classe descritte in precedenza (sistemi labili o sistemi labili e iperstatici in equilibrio nella configurazione iniziale), mantenendo l'ipotesi di piccoli spostamenti.

Fatto ciò, daremo un cenno al calcolo iterativo di una struttura elastica non lineare in grandi spostamenti.

2.4.1 Decomposizione di una matrice secondo i valori singolari

La decomposizione di \mathbf{A} secondo i valori singolari è correlata agli autovalori/autovettori delle matrici quadrate e simmetriche $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Si può mostrare che:

$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ hanno gli stessi autovalori non nulli e i valori singolari di \mathbf{A} sono le radici quadrate di questi autovalori;

i vettori singolari sinistri di \mathbf{A} sono gli autovettori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e i vettori singolari destri di \mathbf{A} sono gli autovettori di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Ogni matrice \mathbf{A} di dimensioni $n_l \times n_e$ e rango n_r ammette la decomposizione

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{W}^T, \quad (2.55)$$

dove:

\mathbf{U} è una matrice ortogonale di dimensioni $n_l \times n_l$, le cui colonne sono i vettori ortonormali \mathbf{u}_i , $i = 1, \dots, n_l$;

\mathbf{W} è una matrice ortogonale di dimensioni $n_e \times n_e$, le cui colonne sono i vettori ortonormali \mathbf{w}_i , $i = 1, \dots, n_e$;

\mathbf{V} è una matrice di dimensioni $n_l \times n_e$, in cui gli unici elementi non nulli sono i primi n_r elementi con indici uguali:

$$v_{ii} \neq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n_r ; \quad (2.56)$$

$$v_{ii} = 0 \quad , \quad i = (n_r + 1), \dots, n_l ; \quad (2.57)$$

$$v_{ij} = 0 \quad , \quad i \neq j . \quad (2.58)$$

Gli elementi v_{ii} di \mathbf{V} sono i *valori singolari* di \mathbf{A} ; i vettori \mathbf{u}_i e \mathbf{w}_i sono, rispettivamente, l' i -esimo vettore singolare sinistro e l' i -esimo vettore singolare destro di \mathbf{A} . Dalla decomposizione (2.55) seguono le relazioni:

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \begin{cases} v_{ii}\mathbf{u}_i , & i = 1, \dots, n_r , \\ \mathbf{0} , & i = n_r + 1, \dots, n_l ; \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \begin{cases} v_{ii}\mathbf{w}_i , & i = 1, \dots, n_r , \\ \mathbf{0} , & i = n_r + 1, \dots, n_e . \end{cases} \quad (2.60)$$

Conviene indurre questa partizione sulle matrici \mathbf{U} e \mathbf{W} :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_r | \mathbf{U}_m] , \quad \mathbf{U}_r = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{n_r}] , \quad \mathbf{U}_m = [\mathbf{u}_{n_r+1} \dots \mathbf{u}_{n_l}] ; \quad (2.61)$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_r | \mathbf{W}_s] , \quad \mathbf{W}_r = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{n_r}] , \quad \mathbf{W}_s = [\mathbf{w}_{n_r+1} \dots \mathbf{w}_{n_e}] . \quad (2.62)$$

In pratica, nel calcolo matriciale numerico, il rango di una matrice viene stabilito una volta effettuata la decomposizione (2.55). Nessuno dei valori singolari che si trovano (in numero pari a $\min(n_l, n_e)$) è identicamente nullo sebbene qualcuno abbia un valore molto piccolo. Posti i valori singolari in ordine decrescente, il rango di una matrice viene stabilito pari ad n_r se si individua un notevole 'salto' tra una prima sequenza di n_r valori singolari, decrescenti in modo più o meno uniforme, ed i restanti, molto piccoli, ($\min(n_l, n_e) - n_r$) valori singolari. Una misura di questo salto può essere fornita dal rapporto tra i valori singolari v_{r+1} e v_r .

La decomposizione secondo i valori singolari costituisce un buon metodo per individuare i quattro sottospazi fondamentali della matrice di equilibrio, $\text{Im } \mathbf{A}$, $\text{Ker } \mathbf{A}^T$, $\text{Im } \mathbf{A}^T$, $\text{Ker } \mathbf{A}$, fornendo direttamente le rispettive basi ortonormali con le matrici \mathbf{U}_r , \mathbf{U}_m , \mathbf{W}_r , \mathbf{W}_s . Questo metodo richiede più tempo di calcolo del tradizionale metodo di eliminazione di Gauss, ma restituisce una corrispondenza uno a uno tra i vettori singolari in \mathbf{U}_r e \mathbf{W}_r che risulta molto utile ai fini del calcolo strutturale.

2.4.2 Teoria lineare dei meccanismi presolleccitati

Nel paragrafo 2.1 abbiamo introdotto le equazioni di equilibrio,

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{f} , \quad (2.63)$$

che legano le densità di forza \mathbf{t} alle forze esterne \mathbf{f} . Le quantità cinematiche in gioco in questa parte sono gli spostamenti nodali, contenuti nel vettore \mathbf{d} , e le deformazioni generalizzate degli elementi, contenute nel vettore \mathbf{s} ; queste quantità sono ottenute rispettivamente dalle velocità nodali \mathbf{v} e dalle velocità di deformazione \mathbf{e} dopo averle moltiplicate per un intervallo di tempo Δt . Per il nodo P e l'elemento i si ha:

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{v}_P \Delta t , \quad (2.64)$$

$$s_i = e_i \Delta t = l_i \Delta l_i . \quad (2.65)$$

Per piccoli spostamenti, il legame tra spostamenti e deformazioni è sempre quello fornito dalla matrice di congruenza $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{d} = \mathbf{s} . \quad (2.66)$$

A queste due equazioni va aggiunta la relazione costitutiva che lega densità di forza e deformazioni degli elementi. La deformazione del generico elemento i è la somma di una parte non elastica \bar{s}_i , dovuta a deformazioni termiche o imposte, e una parte elastica $c_i t_i$ proporzionale alla densità di forza secondo il *coefficiente di cedevolezza* c_i dato da:

$$c_i = \frac{l_{fi}}{E_i A_i} l_i^2 , \quad (2.67)$$

in cui E_i , A_i , l_{fi} , l_i sono, rispettivamente, il modulo di Young, l'area della sezione retta, la lunghezza di fabbricazione e la lunghezza iniziale dell'elemento⁵. In forma vettoriale la relazione costitutiva diventa:

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{C}\mathbf{t} , \quad (2.68)$$

dove \mathbf{C} è la matrice diagonale che contiene i coefficienti di cedevolezza c_i .

Consideriamo una struttura che possieda dei meccanismi e si trovi in una configurazione di equilibrio stabile sotto l'azione delle forze iniziali \mathbf{f}_0 e lo stato di presolleccitazione \mathbf{t}_0 :

$$\mathbf{A}\mathbf{t}_0 = \mathbf{f}_0 \quad ^6 . \quad (2.69)$$

⁵Nell'espressione del coefficiente di cedevolezza compare la lunghezza dell'elemento al quadrato per tenere conto delle dimensioni di s e t .

⁶Nel caso di un meccanismo infinitesimo del primo ordine, può esserci uno stato di sollecitazione autoequilibrato anche in assenza di carichi esterni.

Supponiamo inoltre che la posizione di equilibrio sia stabile.

Dato un generico incremento di carico \mathbf{f} , la risposta della struttura è data dalla combinazione di due comportamenti: un *comportamento deformativo*, in cui il carico è equilibrato da variazioni delle sollecitazioni negli elementi (carico estensionale); un *comportamento geometrico*, in cui si hanno spostamenti secondo i meccanismi senza alcuna variazione delle lunghezze degli elementi, e il carico è equilibrato mediante il cambiamento di direzione degli elementi stessi (carico geometrico). In seguito, si indicherà il primo comportamento come *modo 1* ed il secondo come *modo 2*. In generale, il carico estensionale, che appartiene all'immagine di \mathbf{A} , non è ortogonale al carico geometrico associato ai meccanismi. Decomponendo \mathbf{A} secondo la (2.55) otteniamo le basi per i sottospazi fondamentali, che riportiamo di seguito per chiarezza di esposizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_r &= [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{n_r}], & \text{carichi estensionali o spostamenti congruenti;} \\ \mathbf{U}_m &= [\mathbf{u}_{n_r+1} \dots \mathbf{u}_{n_l}], & \text{carichi incompatibili o meccanismi;} \\ \mathbf{W}_r &= [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{n_r}], & \text{sollecitazioni equilibrate o deformazioni congruenti;} \\ \mathbf{W}_s &= [\mathbf{w}_{n_r+1} \dots \mathbf{w}_{n_e}], & \text{self-stress o deformazioni incompatibili.} \end{aligned}$$

Consideriamo il comportamento estensionale del sistema (modo 1), . L'incremento di sollecitazione dovuto a \mathbf{f} è dato dalla combinazione lineare seguente:

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{W}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{t}_r + \mathbf{t}_s ; \quad (2.70)$$

con $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ e $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{n_{ss}}$. Il primo termine a secondo membro è uno stato di sollecitazione in equilibrio con un generico carico estensionale, indicato con $\mathbf{f}^{(1)}$; il secondo termine è uno stato di sollecitazione autoequilibrato che determineremo in seguito attraverso le condizioni di congruenza. Per esplicitare la relazione tra i carichi estensionali ed il primo termine soltanto, scriviamo i passaggi seguenti, servendoci della (2.55) e dell'ortonormalità dei vettori singolari:

$$\mathbf{A} \mathbf{t}_r = \mathbf{U} \mathbf{V} \mathbf{W}^T \mathbf{W}_r \mathbf{x}_r = \mathbf{U}_r \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r = \mathbf{f}^{(1)} ; \quad (2.71)$$

nella seconda uguaglianza abbiamo introdotto la matrice diagonale \mathbf{V}_r , composta dalle prime n_r righe e colonne di \mathbf{V} . Definiamo la matrice di equilibrio ridotta $\mathbf{A}^R := \mathbf{U}_r \mathbf{V}_r$, di dimensioni $n_l \times n_r$, per cui vale:

$$\mathbf{A}^R \mathbf{x}_r = \mathbf{f}^{(1)} . \quad (2.72)$$

Quanto al comportamento geometrico (modo 2) calcoliamo il carico geometrico associato a ciascun meccanismo secondo la (2.48) o la (2.49):

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{t}_0 , \quad i = n_r + 1, \dots, n_l ; \quad (2.73)$$

definiamo quindi la matrice \mathbf{G} , di dimensione $n_l \times n_m$, che ha per colonne i carichi geometrici:

$$\mathbf{G} := [\mathbf{g}_{n_r+1} \cdots \mathbf{g}_{n_l}] . \quad (2.74)$$

Il generico carico geometrico, indicato con $\mathbf{f}^{(2)}$ sarà quindi dato dalla combinazione lineare seguente:

$$\mathbf{G} \mathbf{y}_m^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} . \quad (2.75)$$

con $\mathbf{y}_m^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_m}$, e sarà associato al meccanismo

$$\mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{U}_m \mathbf{y}_m^{(2)} . \quad (2.76)$$

Possiamo ora scrivere una relazione di equilibrio *invertibile* componendo i due modi. Definiamo la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$, di dimensioni $n_l \times n_l$ ottenuta affiancando le matrici \mathbf{A}^R e \mathbf{G} :

$$\tilde{\mathbf{A}} := [\mathbf{A}^R | \mathbf{G}] . \quad (2.77)$$

Sommando le equazioni (2.72) e (2.75), otteniamo:

$$\tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_m^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{f} ; \quad (2.78)$$

dove \mathbf{f} è un carico arbitrario dato dalla somma di un carico estensionale e di un carico geometrico. La matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ è invertibile poichè, per l'ipotesi di stabilità della configurazione iniziale, ha rango massimo. I vettori \mathbf{x}_r e $\mathbf{y}_m^{(2)}$ si ottengono dalla (2.78):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_m^{(2)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{f} . \quad (2.79)$$

Procediamo ora al calcolo delle sollecitazioni autoequilibrate \mathbf{t}_s dovute a $\mathbf{f}^{(1)}$. Le deformazioni \mathbf{s} dovute all'incremento di sollecitazione $\mathbf{t}_r + \mathbf{t}_s$ devono essere congruenti, cioè, devono essere ortogonali alle deformazioni incompatibili generate dalle colonne di \mathbf{W}_s :

$$\mathbf{W}_s^T \mathbf{s} = \mathbf{0} . \quad (2.80)$$

Ricordando la (2.68) e la (2.70), possiamo scrivere:

$$\mathbf{W}_s^T (\bar{\mathbf{s}} + \mathbf{C} \mathbf{t}) = \mathbf{W}_s^T [\bar{\mathbf{s}} + \mathbf{C} (\mathbf{W}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{W}_s \mathbf{x}_s)] . \quad (2.81)$$

Risolvendo rispetto ad \mathbf{x}_s si ottiene:

$$\mathbf{x}_s = -(\mathbf{W}_s^T \mathbf{C} \mathbf{W}_s)^{-1} (\mathbf{W}_s^T \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{W}_s^T \mathbf{C} \mathbf{W}_r \mathbf{x}_r) . \quad (2.82)$$

Determinato \mathbf{x}_s , si trova \mathbf{t} , dalla (2.70), e di conseguenza \mathbf{s} , dalla (2.68).

Gli spostamenti del sistema sono dati dalla somma dei due modi:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^{(1)} + \mathbf{d}^{(2)} ; \quad (2.83)$$

gli spostamenti dovuti al secondo modo sono già stati ricavati con il vettore $\mathbf{y}_m^{(2)}$ dalle (2.79) e (2.76).

Lo spostamento $\mathbf{d}^{(1)}$ è la somma di una parte dovuta alla deformazione degli elementi e di una parte dovuta ai meccanismi del sistema:

$$\mathbf{d}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_r} \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}_i}{v_{ii}} \mathbf{u}_i + \mathbf{U}_m \mathbf{y}_m^{(1)} ; \quad (2.84)$$

il primo termine è ottenuto dalla corrispondenza tra i vettori singolari. Il vettore $\mathbf{y}_m^{(1)}$ incognito si ottiene dalla condizione per cui i carichi geometrici devono compiere lavoro nullo per lo spostamento $\mathbf{d}^{(1)}$:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{0} ; \quad (2.85)$$

questa condizione discende dall'ortogonalità in energia dei modi 1 e 2, che dimostreremo più avanti. Sostituendo la (2.84) nella (2.85) e risolvendo rispetto a $\mathbf{y}_m^{(1)}$ otteniamo:

$$\mathbf{y}_m^{(1)} = -(\mathbf{G}^T \mathbf{U}_m)^{-1} \left(\mathbf{G}^T \sum_{i=1}^{n_r} \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}_i}{v_{ii}} \mathbf{u}_i \right) . \quad (2.86)$$

Per dimostrare la (2.85), utilizziamo il principio dei lavori virtuali. Consideriamo i tre sistemi seguenti: un sistema di spostamenti e deformazioni $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{s})$ e due sistemi di forze e sollecitazioni $(\mathbf{f}_0, \mathbf{t}_0)$ e $(\mathbf{f}_0 + \mathbf{G} \mathbf{y}_m^{(2)}, \mathbf{t}_0)$. Questi due si riferiscono alla configurazione iniziale del sistema ed a quella ottenuta da questa attraverso lo spostamento $\mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{U}_m \mathbf{y}_m^{(2)}$, con $\mathbf{y}_m^{(2)}$ arbitrario. Applicando il principio dei lavori virtuali per queste due configurazioni si ha:

$$\mathbf{f}_0^T \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{t}_0^T \mathbf{s} , \quad (2.87)$$

$$(\mathbf{f}_0 + \mathbf{G} \mathbf{y}_m^{(2)})^T \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{t}_0^T \mathbf{s} , \quad \forall \mathbf{y}_m^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_m} ; \quad (2.88)$$

sottraendo la prima dalla seconda si ottiene:

$$\mathbf{y}_m^{(2)T} \mathbf{G}^T \mathbf{d}^{(1)} = 0 , \quad \forall \mathbf{y}_m^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_m} , \quad (2.89)$$

data l'arbitrarietà di $\mathbf{y}_m^{(2)}$ si ottiene la (2.85).

Ciò che abbiamo appena dimostrato è il teorema di Betti per i lavori mutui associati ai modi 1 e 2: il lavoro dei carichi estensionali per gli spostamenti secondo i meccanismi è nullo (per l'ortogonalità tra $\text{Im} \mathbf{A}$ e $\text{Ker} \mathbf{A}$), quindi anche il lavoro del carico geometrico associato ai meccanismi per gli spostamenti dovuti ai carichi estensionali deve essere nullo. Possiamo quindi affermare che: *il modo 1 ed il modo 2 sono ortogonali in energia.*

2.4.3 Calcolo iterativo non lineare

Nel calcolo di una struttura reticolare, se si abbandona l'ipotesi di spostamenti piccoli, non si può considerare una relazione lineare tra forze e spostamenti. Per calcolare lo spostamento dovuto ad un certo incremento di carico, si ricorre allora ad un procedimento iterativo, in cui ad ogni iterazione si effettua un calcolo lineare.

Il metodo esposto nel paragrafo precedente fornisce la relazione lineare invertibile tra il “piccolo” spostamento \mathbf{d} e l'incremento di carico \mathbf{f} che lo genera, a partire da una certa configurazione di equilibrio \mathbf{p}_0 . Supponendo questa relazione nota per tutti i vettori di una base di \mathbf{V}_n , possiamo scrivere:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{p}_0) \mathbf{d} = \mathbf{f} , \quad (2.90)$$

dove $\mathbf{K}_T(\mathbf{p}_0)$ è la *matrice di rigidità tangente* del sistema nella configurazione di equilibrio considerata. Il motivo di questo nome sarà chiaro più avanti.

Dato il vettore \mathbf{p} , che determina la configurazione del sistema, e date le caratteristiche geometriche e materiali degli elementi, si possono calcolare le forze totali $\tilde{\mathbf{f}}$ che bilanciano il sistema in quella configurazione. Infatti, possiamo calcolare: le deformazioni degli elementi dalla (2.65); le sollecitazioni attraverso il legame costitutivo (2.68); le forze esterne dalle equazioni di equilibrio (2.63). In definitiva conosciamo la relazione non lineare:

$$\tilde{\mathbf{f}} : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n , \quad \mathbf{p} \longmapsto \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) . \quad (2.91)$$

Il problema consiste nell'ottenere la relazione inversa: assegnate le forze esterne $\bar{\mathbf{f}}$, trovare la configurazione $\bar{\mathbf{p}}$ per cui il sistema è in equilibrio. Il metodo più utilizzato per risolvere questo problema è il metodo di Newton per trovare gli zeri di una funzione, applicato a $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p})$. Questo metodo utilizza il gradiente di $\hat{\mathbf{f}}$, $\nabla \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p})$, che caratterizza lo spazio tangente a $\hat{\mathbf{f}}$ in \mathbf{p} . Sviluppando in serie di Taylor $\tilde{\mathbf{f}}$ in \mathbf{p} , e arrestando lo sviluppo al primo ordine, si ha:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) + \nabla \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \Delta\mathbf{p} + o(|\Delta\mathbf{p}|) . \quad (2.92)$$

Indicando con \mathbf{d} lo spostamento a partire da \mathbf{p} ,

$$\mathbf{d} = \Delta\mathbf{p} , \quad (2.93)$$

e con \mathbf{f} l'approssimazione lineare dell'incremento di carico corrispondente,

$$\mathbf{f} = \nabla \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \mathbf{d} , \quad (2.94)$$

possiamo confrontare la (2.94) con la (2.90). Si vede come il gradiente di $\hat{\mathbf{f}}$ sia espresso dalla matrice di rigidità tangente:

$$\nabla \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \nabla \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \mathbf{K}_T(\mathbf{p}) . \quad (2.95)$$

Senza entrare nei dettagli del metodo di Newton, ci limitiamo a determinare l'espressione della matrice di rigidezza tangente $\mathbf{K}_T^{(el)}$ di un elemento PQ . Questa forma si può utilizzare per assemblare direttamente⁷ la matrice di rigidezza tangente della struttura \mathbf{K}_T .

L'elemento che connette i nodi P e Q ha sei gradi di libertà (tre per ogni nodo) e le caratteristiche materiali seguenti: E , modulo di Young; A , area della sezione retta; ℓ_f , lunghezza di fabbricazione. La lunghezza corrente ℓ si ottiene dalla distanza tra i nodi nella configurazione corrente; lo sforzo normale corrente \mathbf{N} si ottiene da:

$$\mathbf{N} = \frac{EA}{\ell_f}(\ell - \ell_f) . \quad (2.96)$$

Da queste due quantità si ottiene la densità di forza dell'elemento:

$$t = \frac{\mathbf{N}}{\ell} . \quad (2.97)$$

La matrice di rigidezza tangente dell'elemento, nella configurazione corrente, lega gli spostamenti agli incrementi di carico:

$$\mathbf{K}_T^{(el)} \mathbf{d}^{(el)} = \mathbf{f}^{(el)} . \quad (2.98)$$

I vettori $\mathbf{d}^{(el)}$ e $\mathbf{f}^{(el)}$ sono partizionati secondo le quantità relative ai nodi P e Q :

$$\mathbf{d}^{(el)} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_P \\ \mathbf{d}_Q \end{bmatrix} , \quad (2.99)$$

$$\mathbf{f}^{(el)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_P \\ \mathbf{f}_Q \end{bmatrix} . \quad (2.100)$$

La matrice $\mathbf{K}_T^{(el)}$ risulta anch'essa partizionata ed ha la forma seguente:

$$\mathbf{K}_T^{(el)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} \end{bmatrix} ; \quad (2.101)$$

indicando con \mathbf{n} il versore di PQ che punta verso Q , il blocco \mathbf{K} si può scrivere come:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell_f} \mathbf{nn}^T + t(\mathbf{1} - \mathbf{nn}^T) . \quad (2.102)$$

Nella (2.102), il primo termine (secondo termine) a secondo membro è relativo al comportamento estensionale (geometrico). Infatti uno spostamento nodale secondo \mathbf{n} (nel piano ortogonale ad \mathbf{n}) causerà un incremento di forza proporzionale alla rigidezza del materiale $\frac{EA}{\ell_f}$ (alla rigidezza geometrica t)⁸.

⁷L'assemblaggio della matrice di rigidezza per elementi finiti è un procedimento ben noto che non verrà ripreso qui.

⁸Le matrici \mathbf{nn}^T e $(\mathbf{1} - \mathbf{nn}^T)$ proiettano un vettore, rispettivamente, lungo la direzione di \mathbf{n} e sul piano a questa ortogonale.

2.5 Ricerca di forma

Consideriamo il problema: “Dato un sistema di assegnata topologia in cui la natura degli elementi (puntone o tirante) è stabilita a priori, quali sono le condizioni da imporre sulla geometria affinché il sistema sia stabile?. Questo problema, che è stato affrontato da Connelly [4] e ripreso in seguito da Williams [39], richiede per la sua definizione e soluzione gli strumenti dell’analisi convessa. Lo studio dei sistemi tensintegri è stato posto in questi termini anche da Williamson, Skelton e Han [40], i quali hanno formulato un problema agli autovalori per rispondere alla domanda precedente. In questa tesi non assegneremo la natura degli elementi a priori ma a posteriori, una volta trovate le configurazioni che soddisfano le condizioni di indeterminazione e di stabilità.

Queste condizioni sono strettamente legate alla proprietà di ricerca di forma, come verrà ora dimostrato. Riprendiamo l’enunciato della proprietà di ricerca di forma: *per un sistema tensintegro composto da n_e elementi, se la lunghezza di $(n_e - 1)$ elementi è fissata, allora alla configurazione pre-sollecitata in equilibrio stabile corrisponde una lunghezza minima (massima) dell’ultimo tirante (puntone).*

Diamo una dimostrazione nel caso che l’ultimo elemento è un tirante. Formuliamo questo problema di estremo vincolato come segue:

$$\begin{cases} \min\{\lambda_{n_e}(\mathbf{p})\} , \\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_i} : \boldsymbol{\phi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} , \quad \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{(n_e-1)} ; \end{cases} \quad (2.103)$$

dove la funzione di vincolo $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^{n_i} \longrightarrow \mathbb{R}^{(n_e-1)}$ è definita per componenti nel modo seguente

$$\phi_i(\mathbf{p}) = \lambda_i(\mathbf{p}) - \lambda_{i0} , \quad i = 1, \dots, n_e - 1 ; \quad (2.104)$$

(λ_i , ricordando (2.6), è la funzione semiquadrato della lunghezza:

$$\lambda_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \ell_i^2(\mathbf{p}) , \quad i = 1, \dots, n_e). \quad (2.105)$$

Data la monotonia della funzione λ_i rispetto a ℓ_i , questo problema corrisponde alla ricerca del minimo della lunghezza ℓ_{n_e} dell’ultimo elemento, nelle configurazioni \mathbf{p} per cui gli altri $(n_e - 1)$ elementi hanno lunghezza fissata $\ell_{i0} = \sqrt{2\lambda_{i0}}$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, possiamo dire che $\bar{\mathbf{p}}$ è una soluzione del problema (2.103) se e solo se la coppia di vettori $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$ è soluzione del problema

$$\min\{\psi(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})\} , \quad (2.106)$$

con $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{n_l} \times \mathbb{R}^{(n_e-1)}$ e $\psi \in \mathbb{R}$ definita da

$$\psi(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \lambda_{n_e}(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{n_e-1} \sigma_i \phi_i(\mathbf{p}) . \quad (2.107)$$

La condizione di stazionarietà sulla funzione ψ impone che il suo gradiente sia il vettore nullo,

$$\nabla \psi(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} ; \quad (2.108)$$

poichè $\nabla_{\mathbf{p}} \phi_i = \nabla_{\mathbf{p}} \lambda_i$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{n_e,j} - \sum_{i=1}^{n_e-1} \sigma_i \lambda_{i,j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n_l \\ \phi_i(\mathbf{p}) = 0, \quad i = 1, \dots, (n_e - 1) . \end{array} \right. ; \quad (2.109)$$

(qui abbiamo indicato con $(\cdot)_{,j}$ la derivata rispetto alla componente j -esima di \mathbf{p}). La (2.109) si scrive in forma compatta come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{p}} \lambda_{n_e} - \sum_{i=1}^{n_e-1} \sigma_i \nabla_{\mathbf{p}} \lambda_i = \mathbf{0} , \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} . \end{array} \right. \quad (2.110)$$

A questo punto si può osservare che, in vista delle (2.21), (2.18) e dalla simmetria di \mathbf{C}_i , il gradiente della funzione λ_i è il vettore colonna \mathbf{a}_i della matrice di equilibrio \mathbf{A} del sistema:

$$\nabla_{\mathbf{p}} \lambda_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{C}_i \mathbf{p} ; \quad (2.111)$$

di conseguenza assumiamo per la prima delle equazioni (2.110) la forma:

$$\mathbf{a}_{n_e}(\mathbf{p}) - \mathbf{A}^R(\mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} , \quad (2.112)$$

dove abbiamo indicato con \mathbf{A}^R la matrice di equilibrio ridotta formata dalle prime $(n_e - 1)$ colonne di \mathbf{A} . Se la funzione ψ è stazionaria in $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$ allora le colonne della matrice di equilibrio calcolate in $\bar{\mathbf{p}}$ sono linearmente dipendenti e i moltiplicatori di Lagrange corrispondono alle densità di forza cambiate di segno,

$$t_i = -\bar{\sigma}_i , \quad (2.113)$$

autoequilibrate insieme a $t_{n_e} = 1$. Quindi, possiamo affermare che *la condizione di indeterminazione della matrice di equilibrio corrisponde alla condizione di stazionarietà della lunghezza di un elemento una volta fissate le lunghezze degli altri $(n_e - 1)$ elementi.*

Affinchè la configurazione $\bar{\mathbf{p}}$ sia un punto di minimo per la lunghezza λ_{n_e} occorre che l'Hessiana della funzione ψ calcolata con le derivate rispetto alle sola variabile \mathbf{p} sia definita positiva per ogni variazione di configurazione $d\mathbf{p}$ tangenziale ai vincoli:

$$\mathbf{H}_\psi(\bar{\mathbf{p}}) d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} > 0 \quad \forall d\mathbf{p} : d\mathbf{p} \cdot \nabla\phi_i = 0, \quad i = 1, \dots, (n_e - 1); \quad (2.114)$$

sostituendo ψ e considerando che $\nabla\phi_i = \mathbf{a}_i$, la precedente si riscrive come:

$$\left(\mathbf{H}_{\lambda_{n_e}}(\bar{\mathbf{p}}) - \sum_{i=1}^{n_e-1} \bar{\gamma}_i \mathbf{H}_{\phi_i}(\bar{\mathbf{p}}) \right) d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} > 0 \quad \forall d\mathbf{p} : d\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i = 0, \quad i = 1, \dots, (n_e - 1). \quad (2.115)$$

Poichè λ_{n_e} è stazionaria e $d\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i = 0$, allora il vettore $d\mathbf{p} = \mathbf{v} dt$ appartiene al nucleo di \mathbf{A}^T perchè lascia inalterate le lunghezze degli elementi; notiamo che nella (2.115) le hessiane sono uguali alle matrici di connessione (2.19):

$$\mathbf{H}_{\lambda_{n_e}} = \mathbf{C}_{n_e}, \quad \mathbf{H}_{\phi_i} = \mathbf{C}_i, \quad i = 1, \dots, (n_e - 1). \quad (2.116)$$

Ricordando l'interpretazione data dei moltiplicatori di Lagrange possiamo infine scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n_e} t_i \mathbf{C}_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker} \mathbf{A}^T. \quad (2.117)$$

Riconosciamo nella precedente la condizione di stabilità (2.53) o (2.54); possiamo quindi affermare che *la condizione di stabilità per un sistema labile ed iperstatico corrisponde alla condizione di minimo (massimo) per la lunghezza dell'ultimo tirante (puntone) una volta fissate le lunghezze degli altri $(n_e - 1)$ elementi*⁹.

2.6 Cambiamento di configurazione

La proprietà di ricerca di forma per i sistemi tensintegri suggerisce la possibilità di cambiare la configurazione di un sistema agendo sulle lunghezze degli elementi in modo da generare una successione di configurazioni tensintegre (ad esempio, allungando un elemento di una quantità fissata ed accorciando un tirante, oppure allungando un puntone, fino al raggiungimento

⁹Per dimostrare l'affermazione nel caso dell'ultimo puntone è sufficiente cercare il minimo della funzione $-\lambda_{n_e}$, ottenendo $t_{n_e} = -1$ dalla condizione di stazionarietà.

di una nuova configurazione di estremo). La trattazione di questo problema è stato affrontato in uno studio di Williams [39], studio che è presentato sommariamente di seguito.

2.6.1 La condizione di normalità

Questa condizione caratterizza lo spazio (piano) tangente alla varietà delle configurazioni che soddisfano la condizione di indeterminazione. Partendo da una configurazione stabile, ci si può spostare su questa varietà controllando comunque la condizione di stabilità.

Dato un moto del sistema definito dalle traiettorie dei nodi $\mathbf{p}(t)$, si può dimostrare che, se questo moto soddisfa la condizione di indeterminazione in ogni istante t , allora il vettore del carico geometrico \mathbf{g} è ortogonale in ogni istante al vettore delle velocità nodali $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = 0 . \quad (2.118)$$

Nell'esempio di Fig. 1.3, il carico geometrico è diretto verticalmente, infatti a partire da una configurazione con i tre nodi allineati, uno spostamento orizzontale preserva il meccanismo, così come lo stato di autosollecitazione, e vale ancora la condizione di indeterminazione.

2.6.2 Equazioni differenziali

Una volta stabilita la condizione di normalità, si può impostare il sistema di equazioni differenziali costituito dalle equazioni di congruenza in modo da risolvere il seguente problema:

Dato un sistema tensintegro in una configurazione stabile, cambiare la lunghezza di un elemento secondo una velocità di deformazione nota e trovare la variazione di lunghezza di un altro elemento in modo da mantenere il sistema in una configurazione stabile. Consideriamo un sistema tensintegro che possieda uno stato di self-stress ed un meccanismo, $n_m = n_{ss} = 1$. La matrice di equilibrio è quadrata, quindi $3n_n - n_e - 6 = n_l - n_e = 0$ (moti rigidi eliminati dai vincoli); l' i -esima equazione differenziale relativa all' i -esimo elemento è data da:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = e_i = \dot{l}_i \ell_i . \quad (2.119)$$

Indicando con j e k gli indici degli elementi di cui si è scelto di variare la lunghezza, imponiamo la velocità di deformazione e_j ,

$$e_j = e_{j0} ; \quad (2.120)$$

le lunghezze di tutti gli altri elementi sono costanti per cui possiamo scrivere:

$$e_i = 0, \quad \forall i \neq j, k. \quad (2.121)$$

Abbiamo ora a disposizione $(n_e - 1)$ equazioni differenziali in $n_l = n_e$ incognite corrispondenti alle coordinate dei nodi in funzione del tempo $\mathbf{p}(t)$. L'equazione differenziale da aggiungere alle (2.120), (2.121) è costituita dalla condizione di normalità, che sostituisce l'equazione per la velocità di deformazione incognita e_k . Il sistema risultante si può scrivere nella forma seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_j(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = e_{j0} ; \\ \mathbf{a}_i(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = 0, \quad \forall i \neq j, k ; \\ \mathbf{g}(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = 0 . \end{cases} \quad (2.122)$$