Capitolo 1

Introduzione ai sistemi tensintegri

1.1 Caratterizzazione

Una categoria di strutture molto particolare viene considerata per la prima volta nel 1948 da Richard Buckmister Fuller e dall'artista Kenneth Snelson[1].

Snelson realizza delle sculture (Fig. 1.1), costituite da elementi tesi e compressi, con la particolarità di avere un piccolo numero di elementi compressi (*puntoni*), mai contigui l'uno all'altro e collegati tra loro tramite un sistema continuo di elementi tesi (*tiranti*). La scultura, dal punto di vista strutturale è un *sistema reticolare spaziale con cerniere esclusivamente nodali i cui elementi possono essere puntoni o tiranti soltanto. Ogni nodo della struttura connette un puntone e più tiranti. Il sistema possiede dei meccanismi infinitesimi, che vengono resi stabili individuando uno stato di sollecitazione autoequilibrato (presollecitazione o self-stress)*[2].

Fuller conia il termine "*tensegrity*", combinando le parole "tensile" ed "integrity", per sottolineare una caratteristica di questi sistemi: gli elementi tesi costituiscono un insieme connesso, che separa ogni elemento compresso da tutti gli altri. Snelson, invece, preferisce le parole "*floating compression*" ma il termine di Fuller è ormai ampiamente accettato in letteratura. Al termine *tensegrity* conviene far corrispondere in Italiano, secondo una proposta di F. Cafarella, l'aggettivo *tensintegro*.

Nello studio di sistemi composti da puntoni e tiranti, altri autori hanno

[1]Tra Fuller e Snelson nascerà una controversia in merito alla paternità della scoperta. Anche un altro personaggio, David George Emmerich, in Francia e nello stesso periodo, afferma di essere l'inventore di questo nuovo sistema strutturale.

[2]Vedi il paragrafo successivo.

Figura 1.1: “Easy-K”, una delle sculture di Snelson.

dato definizioni diverse di sistema tensintegro [4, 14, 32]. La proprietà che riflette il carattere peculiare di un sistema tensintegro, come inteso da Fuller e Snelson nel 1948, è la *proprietà di ricerca di forma* che ha importanza centrale quando si tenta di costruire uno di questi sistemi.

Consideriamo, ad esempio, il sistema di Fig. 1.2, supponiamo di fissare le lunghezze di tutti gli elementi e di realizzare le connessioni tra di essi. Quando avremo connesso tutti gli elementi tranne uno, osserveremo che l’insieme ottenuto non ha alcuna rigidezza o consistenza; la lunghezza dell’ultimo elemento viene determinata quando si tenta di avvicinare (se l’elemento è un tirante) o di allontanare (se l’elemento è un puntone) gli ultimi due nodi. Si nota che la distanza tra questi nodi può variare fino a raggiungere un minimo (massimo), in corrispondenza del quale la struttura acquisisce una sua consistenza. Se si forzano i due nodi ad un ulteriore avvicinamento (allontanamento), il sistema acquista uno stato di sollecitazione negli elementi autoequilibrato.

Avendo in mente questo esempio, la proprietà di ricerca di forma può essere enunciata come segue:

Per un sistema tensintegro composto da n_e elementi, se la lunghezza di $(n_e - 1)$ elementi è fissata, allora alla configurazione presollecitata in equilibrio stabile corrisponde una lunghezza minima (massima) dell’ultimo tirante (puntone). Questa costituisce la caratterizzazione dei sistemi tensintegri adottata in questa tesi, oltre alla condizione di avere sempre un solo puntone in ogni nodo.

Molte delle caratteristiche di base di un sistema tensintegro sono comuni a quelle possedute da un semplice sistema in due dimensioni, a cui si farà

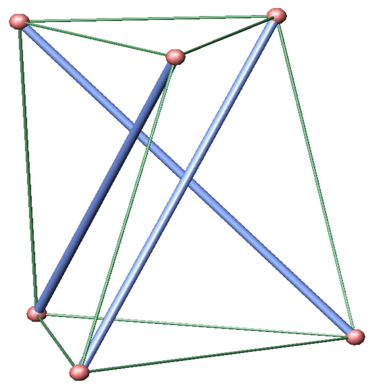

Figura 1.2: Un sistema tensintegro elementare.

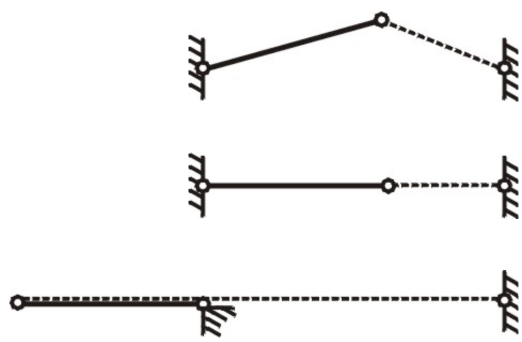

Figura 1.3: Arco a tre cerniere. L'elemento a tratto continuo ha lunghezza fissa, quello tratteggiato ha lunghezza variabile. Configurazione generica (in alto). Configurazione corrispondente alla lunghezza minima (al centro). Configurazione corrispondente alla lunghezza massima (in basso).

spesso riferimento in questo capitolo. La Fig. 1.3, in alto, rappresenta questo sistema, un arco a tre cerniere, composto da tre nodi e due elementi. Il tratto continuo sta a significare che la lunghezza dell'elemento è fissata, il tratteggio, che la lunghezza può essere variata a piacimento rispettando la congruenza del sistema. La figura Fig. 1.3, al centro, mostra la configurazione per cui la lunghezza variabile è minima; in questo caso la configurazione è stabile se entrambi gli elementi sono tiranti. La Fig. 1.3, in basso, mostra la configurazione per cui la lunghezza variabile è massima; in questo caso per la stabilità del sistema l'elemento rappresentato a tratto interrotto deve essere un puntone, l'altro elemento un tirante[3].

1.2 Meccanismi infinitesimi del primo ordine

I sistemi tensintegri appartengono alla classe più generale dei meccanismi infinitesimi del primo ordine, le cui proprietà sono qui illustrate.

La Fig. 1.4 mostra un arco a tre cerniere, i cui elementi sono uguali ed hanno lunghezza di fabbricazione ℓ_f; questa lunghezza è minore di quella che gli elementi devono avere per essere connessi al nodo centrale, pari ad ℓ_0. Gli elementi sono tiranti con rigidezza $k =$ cost, positiva quando sono in trazione. Si assume come configurazione di riferimento quella in cui il sistema è presollecitato alla tensione $\mathtt{N}_0$, corrispondente alla lunghezza ℓ_0:

$$\mathtt{N}_0 = k(\ell_0 - \ell_f) \ . \tag{1.1}$$

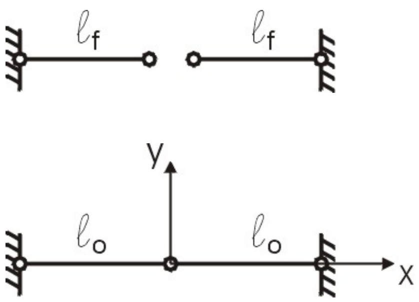

Figura 1.4: Meccanismo infinitesimo. Prima (in alto) e dopo (in basso) l'assemblaggio.

[3]La condizione di stabilità per un sistema tensintegro sarà trattata nel paragrafo 2.3.

1.2.1 Cinematica e statica

Nel sistema di riferimento della Fig. 1.4 (in basso), se il nodo centrale si sposta di d_y nella direzione y, la deformazione degli elementi, ovvero il loro allungamento $\Delta\ell$, è un infinitesimo del secondo ordine rispetto a d_y:

$$\Delta\ell = O(d_y^2) \ . \tag{1.2}$$

Per questo motivo il sistema prende il nome di *meccanismo infinitesimo del primo ordine*. Il vettore $\mathbf{m} = (0, 1)^T$ rappresenta la direzione dello spostamento lungo il meccanismo. Nel caso di uno spostamento d_x lungo x, ortogonale ad $\mathbf{m}$, gli allungamenti degli elementi sono dello stesso ordine di d_x, come nel caso dei sistemi isostatici o iperstatici[4].

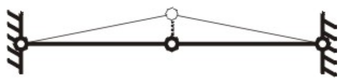

Figura 1.5: Cinematica. Il meccanismo del sistema.

Sotto l'aspetto statico, per un carico ortogonale al meccanismo (Fig. 1.6 a destra) la relazione carico-spostamento è lineare a tratti, il punto di discontinuità corrisponde alla perdita di tensione in un tirante, a cui corrisponde una perdita di rigidezza. Per un carico agente secondo il meccanismo (Fig. 1.6 a sinistra) la relazione carico-spostamento è ben approssimata da una cubica avente flesso nell'origine, il sistema diviene più rigido all'aumentare del carico. La tangente del flesso rappresenta la rigidezza iniziale del sistema, nulla (tangente orizzontale) se la presollecitazione è nulla. *La rigidezza iniziale dipende soltanto dal valore di* $\mathtt{N}_0$ *e dai parametri geometrici*, come mostrato nella sezione seguente.

1.2.2 Aspetto energetico

Limitando l'attenzione al caso di soli spostamenti secondo il meccanismo, si esprima la lunghezza di un elemento funzione di y, la coordinata corrente del nodo centrale, e si sviluppi in serie di potenze rispetto alla configurazione di riferimento:

$$\ell(y) = \sqrt{\ell_0^2 + y^2} = \ell_0 + \frac{y^2}{2\ell_0} + O(y^4) \tag{1.3}$$

[4]Vedi il paragrafo 2.2.

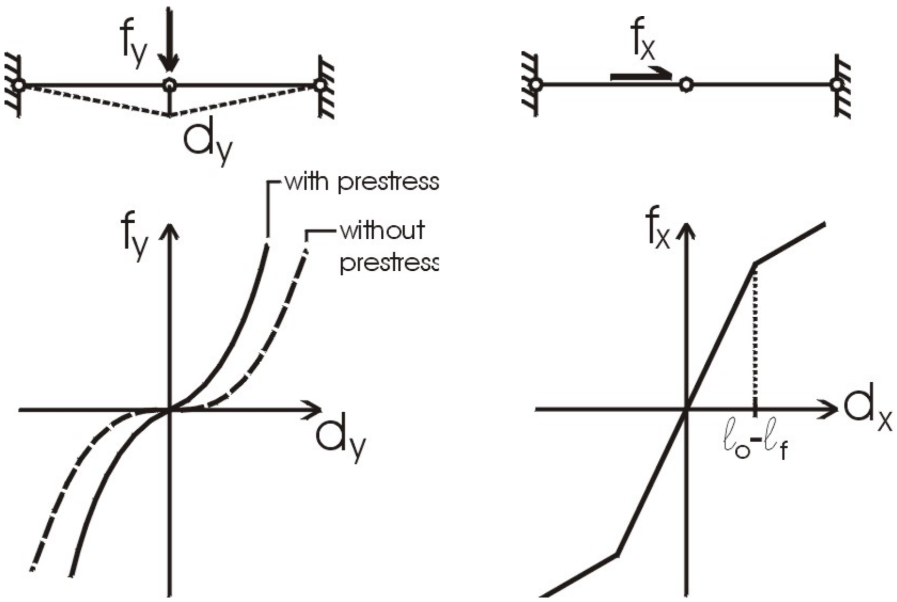

Figura 1.6: Statica. Carico ortogonale al meccanismo (a destra). Carico secondo il meccanismo (a sinistra).

(cf. la (1.2)). L'energia del sistema è quella elastica dei due tiranti:

$$\mathcal{E}(y) = k(\Delta\ell)^2 = k[\ell(y) - \ell_f]^2 = k[(\ell_0 - \ell_f)^2 + (1 - \frac{\ell_f}{\ell_0})y^2 + O(y^4)] \ . \quad (1.4)$$

La forza verticale associata allo spostamento del nodo centrale è data dalla derivata dell'energia secondo y:

$$\mathcal{E}'(y) = f_y(y) = 2k\left(1 - \frac{\ell_f}{\ell_0}\right)y + O(y^3) = 2\frac{\mathtt{N}_0}{\ell_0}\ y + O(y^3)\ ; \quad (1.5)$$

come si vede, questa forza è del primo ordine nello spostamento lungo y. Calcolando la derivata di questa espressione in $y = 0$, si ottiene la *rigidezza* iniziale del sistema per una forza verticale:

$$f_y'(0) = 2\frac{\mathtt{N}_0}{\ell_0}\ , \quad (1.6)$$

questa rigidezza risulta *direttamente proporzionale* al valore della presollecitazione. Essa viene chiamata *rigidezza geometrica* del sistema [2] ed è causata dalla variazione di direzione della forza assiale degli elementi.

1.2.3 Dinamica

L'equazione del moto del sistema, sempre considerando solo spostamenti lungo y, si ottiene scrivendo il bilancio dell'energia. L'energia elastica $\mathcal{E}$, cinetica $\mathcal{C}$, e il tasso di dissipazione dell'energia $\mathcal{D}$, si scrivono rispettivamente:

$$\mathcal{E}(y) = k[\ell(y) - \ell_f]^2 \ , \tag{1.7}$$

$$\mathcal{C}(\dot{y}) = \frac{1}{2}\mathtt{m}\,\dot{y}^2 \ , \tag{1.8}$$

$$\mathcal{D}(y,\dot{y}) = 2\mathtt{c}[\dot{\ell}(y)]^2 \ . \tag{1.9}$$

Qui $\mathtt{m}$ è la massa concentrata nel nodo centrale; la dissipazione si ipotizza proporzionale al quadrato della velocità di variazione della lunghezza secondo il coefficiente $\mathtt{c}$. Il bilancio dell'energia si scrive:

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{C}} + \mathcal{D} = 0 \ . \tag{1.10}$$

Svolgendo i vari termini otteniamo, per la derivata dell'energia elastica:

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}'(y)\dot{y} = f_y(y)\dot{y} \ ; \tag{1.11}$$

per la derivata dell'energia cinetica:

$$\dot{\mathcal{C}} = \mathtt{m}\,\ddot{y}\dot{y} \ ; \tag{1.12}$$

riguardo al termine di dissipazione (1.9), la derivata della lunghezza si scrive:

$$\dot{\ell}(y) = \frac{y}{\ell(y)}\dot{y} \ . \tag{1.13}$$

Sostituendo le (1.11), (1.12), (1.13) nella (1.10) ed eliminando il termine comune $\dot{y}$ si ottiene l'equazione del moto:

$$\mathtt{m}\,\ddot{y} + 2\mathtt{c}\frac{y^2}{\ell^2(y)}\ \dot{y} + f_y(y) = 0 \ . \tag{1.14}$$

Il sistema vibra ad una frequenza che diminuisce al diminuire dell'ampiezza di oscillazione, fino ad un valore limite corrispondente alla rigidezza iniziale data dalla (1.6). Per piccoli spostamenti, la frequenza vale:

$$\nu_0 = 2\pi\sqrt{\frac{f_y'(0)}{\mathtt{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\mathrm{N}_0}{\mathtt{m}\,\ell_0}} \ . \tag{1.15}$$

Per piccoli spostamenti, l'energia dissipata è trascurabile, essendo il termine corrispondente proporzionale al quadrato di y. Questo esempio mostra una caratteristica ricorrente anche in casi più complicati: *se si suppone la dissipazione dipendente dalle velocità di allungamento degli elementi, poichè queste sono del secondo ordine nelle velocità nodali lungo il meccanismo, non si ottiene un efficace smorzamento delle vibrazioni* [25]. Per un meccanismo infinitesimo del primo ordine, *un efficace smorzamento delle vibrazioni si ottiene supponendo la dissipazione dipendente dalla velocità di rotazione relativa tra gli elementi; questa è sempre dello stesso ordine di grandezza rispetto alle velocità dei nodi lungo il meccanismo.*