

Capitolo 5

Modello per FRC fessurato

Nel presente capitolo la procedura numerica per lo studio della propagazione delle fessure in materiali coesivi omogenei, esposta nel capitolo precedente, viene estesa all'analisi di materiali fibrorinforzati ed in particolare del FRC [14]. Si esamina un materiale caratterizzato da una microstruttura periodica, cioè da una distribuzione periodica di fibre e fessure.

5.1 Posizione del problema

Il calcestruzzo fibrorinforzato è un materiale composito ottenuto introducendo fibre corte d'acciaio in una matrice di calcestruzzo. Come discusso nel Capitolo 1, l'aggiunta di fibre corte d'acciaio ad una matrice cementizia, caratterizzata da un comportamento fragile a trazione con sviluppo di microfessure anche per bassi valori della sollecitazione, rallenta il processo di fessurazione nel materiale, grazie all'azione di richiusura esercitata dalle fibre. Le fibre, infatti, si oppongono all'apertura delle fessure, aumentando la duttilità e la capacità di assorbimento di energia del materiale composito. Inoltre, dai dati sperimentali, riportati e commentati nel Capitolo 1, la risposta a trazione del calcestruzzo fibrorinforzato risulta caratterizzata da tre tratti [12, 11]:

- risposta elastica lineare fino al raggiungimento della resistenza a trazione della matrice, momento in cui le microfessure iniziano a propagarsi;
- incrudimento dovuto all'azione di richiusura delle fibre che risulta proporzionale all'apertura della fessura;
- softening, dopo che la massima resistenza a trazione del composito è raggiunta, in conseguenza, sia del processo di sfilamento e distacco della fibra dalla matrice, sia della fessurazione della matrice stessa.

Si deve inoltre sottolineare che il fenomeno di distacco e sfilamento della fibra dalla matrice oltre che il processo di fessurazione della matrice stessa influenza in modo significativo la risposta del FRC a trazione, come è anche emerso dallo studio della cella unitaria, svolto nel Capitolo 3.

In passato, numerosi autori hanno affrontato il problema di studiare la risposta del calcestruzzo fibrorinforzato, tenendo in conto l'azione di richiusura delle fibre, mediante i concetti della meccanica della frattura. Jenq et al. [9] hanno proposto una procedura per l'analisi della risposta del FRC a flessione basata sulla determinazione del fattore di intensificazione critico e dello spostamento di apertura critico in presenza delle fibre. Mobasher et al. [16] hanno sviluppato un modello per lo studio del FRC utilizzando per la valutazione della R-curve della sola matrice di calcestruzzo la procedura sviluppata da Ouyang and Shah [18, 19] e determinando l'azione di richiusura delle fibre dai risultati sperimentali delle prove di pull-out. Karihaloo et al. [7, 8] hanno sviluppato un modello per lo studio della risposta a trazione del FRC, ipotizzando una distribuzione periodica di fibre e fessure e utilizzando la sovrapposizione degli effetti. In questo modello la propagazione della fessura è studiata mediante il principio di Irwin. Carpinteri e Massabò [15, 4, 5] hanno studiato il comportamento di un elemento di trave soggetto a flessione considerando la presenza di elementi di rinforzo. Gli autori hanno utilizzato due diversi modelli di meccanica della frattura non lineare per analizzare il processo di collasso del composito: 'bridged-crack model' (modello di fessura cucita) e 'cohesive crack-model' (modello della fessura coesiva). Nel primo modello il materiale è considerato costituito da due fasi. Si assume una distribuzione di tensioni singolare all'apice della fessura e la fessura si propaga quando il fattore di intensificazione delle tensioni raggiunge il valore critico caratteristico del composito, secondo il principio di Irwin. Tale valore è dato da due distinte componenti, la prima è rappresentata dal fattore di intensificazione delle tensioni critico della sola matrice, la seconda è legata all'azione di richiusura esercitata dai rinforzi sulla fessura. Il secondo modello, invece, studia il materiale composito come un materiale omogeneo. In questo caso il campo di tensioni all'apice della fessura è finito ed è definito da una legge coesiva, caratteristica del composito, di conseguenza la fessura si propaga quando il fattore di intensificazione delle tensioni si annulla e quindi quando le tensioni all'estremità della fessura raggiungono il valore della resistenza del composito, definito dalla legge coesiva introdotta. La legge di bridging che esprime l'azione di richiusura dei rinforzi in funzione dello spostamento di apertura della fessura e la legge coesiva che rappresenta la relazione tra le tensioni e lo spostamento di apertura all'apice della fessura sono determinate dai risultati sperimentali e da analisi micromeccaniche. In entrambi i modelli il problema integrale non lineare, che descrive l'evoluzione della fessura in una sezione del composito soggetta a flessione monotona, è risolta imponendo sia l'equilibrio sia la congruenza cinematica.

La risposta del materiale a trazione può essere determinata applicando le tecniche di omogeneizzazione e la meccanica della frattura. Le tecniche di omogeneizzazione permettono, infatti di esprimere la legge tensione-deformazione come relazione tensione media-deformazione media in un volume elementare rappresentativo (RVE). La meccanica della frattura consente di studiare l'evoluzione delle fessure nella matrice cementizia. Per lo studio di materiali cementizi, come già è stato più volte sottolineato, a causa della presenza di una zona di processo all'apice della fessura di dimensioni non trascurabile, è necessario utilizzare i concetti della meccanica della frattura non lineare.

In questo capitolo, per studiare la risposta a trazione del materiale si sviluppa una procedura, basata su un criterio energetico, in grado di seguire il processo di fessurazione della matrice tenendo in conto l'azione di richiusura esercitata dalle fibre. La procedura sviluppata, estensione di quella proposta per materiali omogenei coesivi, è basata sui modelli R -curve e tiene conto della presenza della zona di processo mediante l'introduzione di una interfaccia all'apice della fessura. Il danneggiamento del materiale composito FRC è modellato perciò considerando la propagazione della fessura nella matrice, tenendo opportunamente in conto l'azione di richiusura delle fibre. Le fibre si considerano caratterizzate da una risposta non lineare dovuta al processo di sfilamento e distacco della fibra dalla matrice. La R -curve considerata è quella tipica della matrice, mentre l'azione di richiusura delle fibre viene tenuta in conto nella determinazione dell'energia di rilascio. Quest'ultima è valutata mediante una procedura di omogeneizzazione non lineare costituita da due passi; il primo considera il problema di omogeneizzazione del calcestruzzo lineare elastico fessurato, già affrontato nel Capitolo 3, il secondo tiene in conto la presenza delle fibre.

In particolare, il metodo numerico sviluppato permette di valutare, al generico istante del processo evolutivo, la risposta non lineare del materiale composito risolvendo un'equazione algebrica non lineare, che rappresenta la condizione di evoluzione della zona danneggiata ed i cui coefficienti sono ottenuti mediante la risoluzione di problemi elastici lineari. La procedura consente, così, di determinare il comportamento di softening, risolvendo per ogni istante temporale una singola equazione algebrica non lineare tramite un algoritmo di tipo iterativo.

Nel seguito si considerano solo problemi 2-D nel Modo I di frattura anche se sono possibili estensioni agli altri modi. In particolare si esamina un materiale caratterizzato da una microstruttura periodica, cioè da una distribuzione periodica di fibre e fessure. Si individua una cella unitaria, volume elementare rappresentativo del materiale, si introduce un modello di danno per FRC, si descrive la procedura sviluppata per il materiale composito ed infine si presentano alcune applicazioni numeriche.

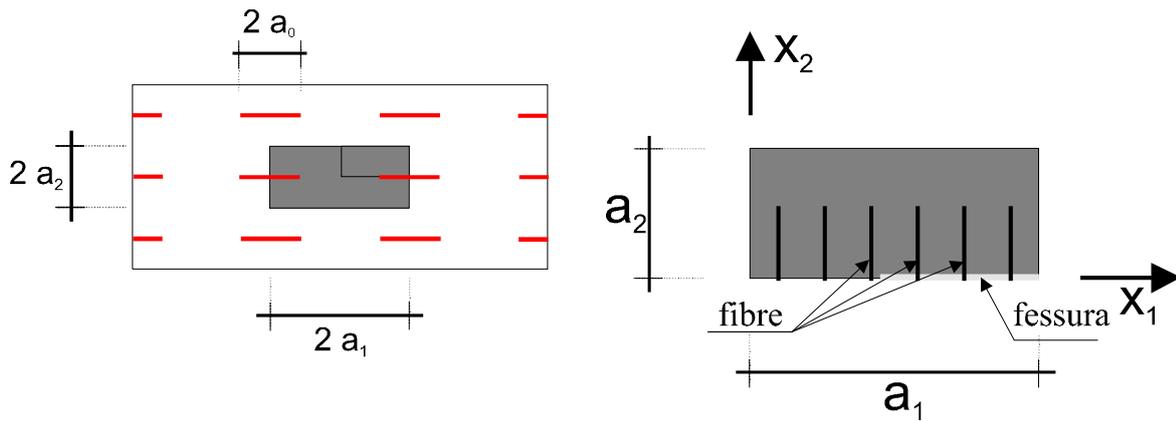


Figura 5.1: Solido periodico e cella unitaria utilizzata per l'analisi.

5.2 Micromeccanica del FRC

Nonostante l'effettiva distribuzione di fibre nel FRC risulti irregolare, per ottenere un modello semplice ma efficace per uno stato di tensione monoassiale, pura trazione, si considerano solo fibre nella direzione della sollecitazione. Inoltre, si assume che le fibre siano a uguale distanza l'una dall'altra, in tal modo il calcestruzzo fibrorinforzato soggetto a trazione monoassiale risulta un materiale periodico. Si introduce una distribuzione periodica di microfessure di uguale lunghezza ortogonali alle fibre.

Tenendo in conto queste assunzioni si studia il comportamento del FRC considerando un solido infinito elastico caratterizzato da una distribuzione doppiamente periodica di fibre e fessure soggetto ad una deformazione di dilatazione in direzione ortogonale alle fessure, come rappresentato in figura 5.1. Le ipotesi introdotte sono comunemente adottate in letteratura per la modellazione del calcestruzzo fibrorinforzato [10, 7, 8]. Le microfessure sono caratterizzate da una lunghezza iniziale $2a_0$ che può crescere con l'incremento della sollecitazione. La cella ripetitiva, annerita in figura 5.1, risulta doppiamente simmetrica sia rispetto all'asse x_1 sia rispetto all'asse x_2 . Volendo determinare la risposta del composito nella direzione delle fibre, cioè in direzione x_2 , l'analisi può essere sviluppata considerando solo un quarto della cella ripetitiva, la cella unitaria V_u di dimensioni a_1 e a_2 , rappresentata in figura 5.1. La cella V_u è caratterizzata dalla presenza di un difetto iniziale di lunghezza a_0 e di un numero di fibre pari a n_s .

5.3 Modello di danno per FRC

Si introduce un modello di danno per il calcestruzzo fibrorinforzato che tiene conto, sia del processo di softening della matrice, sia del processo di sfilamento e distacco

della fibra dalla matrice che influenza l'azione di richiusura delle fibre. Per studiare la fessurazione del calcestruzzo si introduce un modello di fessura coesiva, come quello descritto nel Capitolo 3, mentre per le fibre si considera la risposta non lineare basata sui risultati ottenuti dall'analisi della cella unitaria sviluppata al Capitolo 4.

5.3.1 Modello coesivo per il calcestruzzo

Per studiare il processo di propagazione delle fessure nel calcestruzzo si assume il modello di frattura coesiva, già ampiamente descritto nel Capitolo 3, qui si riportano soltanto i concetti fondamentali [3, 6, 1]. Per modellare la zona di processo si introduce un'interfaccia all'apice della fessura. La zona di processo è caratterizzata da un legame di softening tra tensioni coesive σ e spostamenti relativi di interfaccia Δv che può essere espresso dalla formula $\sigma = K^{int}(1 - D)\Delta v$, dove D è la variabile di danno ($0 \leq D \leq 1$). Inoltre, dalle condizioni (3.21), risulta che quando lo spostamento relativo dell'interfaccia raggiunge il valore Δv_0 , $\Delta v = \Delta v_0$, la zona di processo inizia a propagarsi e la tensione di trazione raggiunge la resistenza a trazione del materiale f_t , $\sigma = f_t$, mentre il danno è ancora nullo, $D = 0$; quando lo spostamento raggiunge il valore Δv_c , $\Delta v = \Delta v_c$, la tensione si annulla, $\sigma = 0$ e si verifica il completo danneggiamento $D = 1$. In uno stadio intermedio cioè per $\Delta v_0 < \Delta v < \Delta v_c$ risulta $f_t > \sigma > 0$, e $0 < D < 1$.

Si introduce un'ascissa ξ coassiale alla fessura con l'origine nell'apice del difetto iniziale a_0 per individuare la posizione e la lunghezza della zona di processo. Quando la zona di processo risulta interamente sviluppata, la sua lunghezza è L . Si definisce il parametro ζ pari all'estensione della zona danneggiata. Si possono verificare due diverse situazioni, rappresentate nella figura 3.8; zona di processo non completamente sviluppata $\zeta = \ell < L$, dove ℓ è la lunghezza della zona di processo in evoluzione, zona di processo completamente sviluppata, $\zeta = \bar{\xi} + L > L$. Nella tabella seguente sono illustrate le due condizioni precedentemente descritte:

$$\begin{array}{lcl}
 \zeta = \ell & \implies & \begin{array}{ll} \text{per } \xi = 0 & \Delta v < \Delta v_c \quad \sigma > 0 \quad D < 1 \\ \text{per } \xi = \ell & \Delta v = \Delta v_0 \quad \sigma = f_t \quad D = 0 \end{array} \\
 \\
 \zeta = \bar{\xi} + L & \implies & \begin{array}{ll} \text{per } \xi = 0 & \Delta v > \Delta v_c \quad \sigma = 0 \quad D = 1 \\ \text{per } \xi = \bar{\xi} & \Delta v = \Delta v_c \quad \sigma = 0 \quad D = 1 \\ \text{per } \xi = \bar{\xi} + L & \Delta v = \Delta v_0 \quad \sigma = f_t \quad D = 0 \end{array}
 \end{array}$$

Per caratterizzare interamente l'interfaccia si deve perciò:

- assumere una legge di softening $\sigma - \Delta v$ come legame costitutivo e determinare la relazione $D - \Delta v$ tra variabile di danno e spostamenti relativi;
- fissare una lunghezza L della zona di processo;

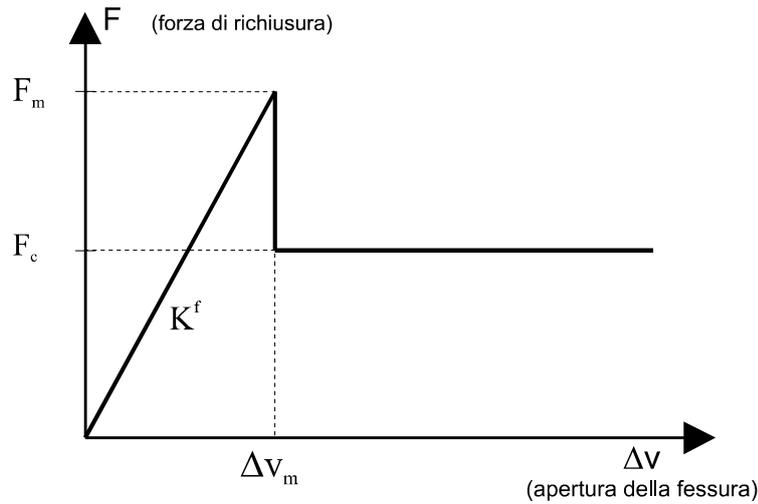


Figura 5.2: Legame costitutivo per la fibra.

- definire una distribuzione di spostamenti $\Delta v(\xi, \zeta)$ lungo l'interfaccia; sostituendo la $\Delta v(\xi, \zeta)$ nella $D - \Delta v$ si ottiene la distribuzione del danno $D(\xi, \zeta)$.

5.3.2 Modello per le fibre

Per tener in conto il processo di distacco e sfilamento della fibra dalla matrice si assume una legge costitutiva elasto-plastica per le fibre [17, 20]. Il modello introdotto per la fibra deve rappresentare, sia il comportamento della fibra stessa, sia dell'interfaccia fibra-matrice, e si basa sui risultati della cella unitaria esaminata nel Capitolo 4.

Si assume, che le forze di richiusura siano lineari elastiche e proporzionali allo spostamento di apertura della fessura fino a quando il distacco della fibra dalla matrice non è completo ed il valore critico della forza F_m non è raggiunto. A questo punto ha inizio il processo di sfilamento della fibra e le forze di richiusura si riducono ad un valore pari a F_c dovuto al solo attrito.

In figura 5.2 è riportato il legame tra le forze di richiusura e lo spostamento di apertura dell'interfaccia che rappresenta la legge costitutiva introdotta per modellare l'azione di richiusura delle n_s fibre presenti nella cella unitaria. Ciascuna fibra unisce due punti che giacciono su due lati opposti dell'interfaccia. La relazione tra lo spostamento relativo Δv_i nella direzione x_2 , che corrisponde alla fibra i -esima, e la forza di richiusura F_i ortogonale alla fessura è fornita da:

$$\begin{aligned} F_i &= K^f \Delta v_i & \text{se } \Delta v_i < \Delta v_m \\ F_i &= F_c & \text{se } \Delta v_i \geq \Delta v_m \end{aligned} \quad (5.1)$$

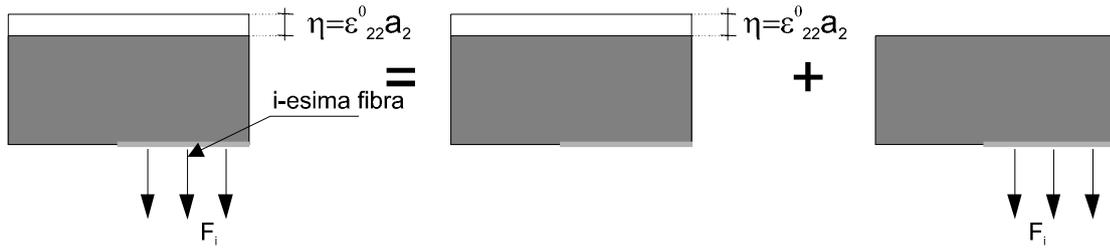


Figura 5.3: Schema di calcolo per l'analisi della cella unitaria.

dove K^f è la rigidezza della fibra, F_c è la forza residua di richiusura dovuta al solo attrito e F_m è la forza massima corrispondente allo spostamento limite relativo Δv_m ortogonale alla fessura.

5.4 Procedura sviluppata

L'analisi del processo di fessurazione del FRC viene effettuata sulla base dei modelli R-curve e cioè del bilancio energetico $G(\zeta) = R(\zeta)$, dove G è l'energia di rilascio o variazione di energia elastica della cella V_u in corrispondenza di una variazione infinitesima dell'estensione della zona di processo $d\zeta$, e $R(\zeta)$ è la resistenza del materiale quando la lunghezza della zona danneggiata è pari a ζ .

Nella procedura proposta si considerano le R-curve caratteristiche della sola matrice di calcestruzzo e si tiene conto della presenza delle fibre nel calcolo dell'aliquota di energia $G(\zeta)$.

La determinazione della funzione $R(\zeta)$ in presenza di una zona di processo all'apice della fessura è stata ampiamente trattata nel Capitolo 3, qui si riporta solo la sua espressione finale:

$$R(\zeta) = \frac{1}{2} K^{int} \int_{(\zeta-L)^+}^{\zeta} \frac{\Delta v(\xi, \zeta)^2}{2} \frac{\partial D(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} d\xi \quad (5.2)$$

dove $\Delta v(\xi, \zeta)$ e $D(\xi, \zeta)$ rappresentano rispettivamente le distribuzioni degli spostamenti relativi e del danno lungo l'interfaccia ed L la lunghezza della zona di processo.

Per valutare l'energia di rilascio $G(\zeta)$ si calcola, per ogni valore della lunghezza della zona danneggiata ζ , l'energia elastica immagazzinata nella cella unitaria, caratterizzata dalla presenza di un difetto iniziale e di n_s fibre, utilizzando una tecnica di omogeneizzazione non lineare. Tale tecnica, che si basa sulla sovrapposizione degli effetti, si può dividere nei due seguenti passi, rappresentati in figura 5.3:

- omogeneizzazione del calcestruzzo fessurato;

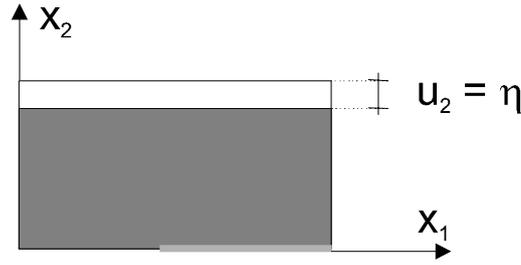


Figura 5.4: Cella unitaria soggetta ad uno spostamento uniforme all'estremità superiore.

- effetto delle fibre sulla risposta della cella unitaria.

5.4.1 Omogeneizzazione del calcestruzzo fessurato

Il problema dell'omogeneizzazione del solo calcestruzzo fessurato è stato già trattato nel Capitolo 3, si riportano di seguito solo alcuni punti fondamentali [2, 21, 13].

La rigidità effettiva in direzione x_2 corrispondente ad una lunghezza della zona danneggiata ζ , si ottiene dalla soluzione del problema elasto-statico della cella unitaria V_u soggetta ad una deformazione media ε_{22}^0 . Tale stato di deformazione si ottiene imponendo uno spostamento uniforme $\eta = \varepsilon_{22}^0 a_2$, sul lato superiore della cella, come rappresentato in figura 5.4.

Le equazioni di campo del problema sono quelle classiche mentre quelle al contorno sono espresse dalla (3.1) e devono tener conto delle condizioni di periodicità e dello spostamento imposto η sul lato superiore della cella. La tensione media σ_{22}^0 è valutata come la media delle tensioni nel volume V_u e il modulo effettivo in direzione x_2 risulta $\bar{C}_{22} = \sigma_{22}^0 / \varepsilon_{22}^0$. La reazione totale $P^{(\eta)}$ in corrispondenza dello spostamento imposto η si può calcolare come:

$$P^{(\eta)} = K \eta \quad (5.3)$$

dove K è la rigidità globale della cella unitaria associata ad una deformazione di dilatazione in direzione x_2 . Nota $P^{(\eta)}$ si possono determinare la tensione media σ_{22}^0 ed il modulo effettivo \bar{C}_{22} in direzione x_2 corrispondenti alla deformazione media $\varepsilon_{22}^0 = \eta / a_2$ con le seguenti espressioni:

$$\sigma_{22}^0 = \frac{P^{(\eta)}}{a_1} = \frac{K \eta}{a_1} \quad \bar{C}_{22} = \frac{\sigma_{22}^0}{\varepsilon_{22}^0} = \frac{K a_2}{a_1} \quad (5.4)$$

Inoltre si possono valutare gli spostamenti relativi dei punti dell'interfaccia dove le fibre sono presenti, prodotti dallo spostamento imposto η . In particolare, lo

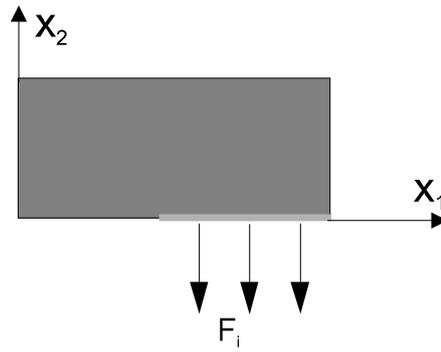


Figura 5.5: Effetto delle fibre sulla cella unitaria.

spostamento $\Delta v_i^{(\eta)}$ nella direzione x_2 del punto che corrisponde all' i -esima fibra risulta proporzionale a η ed è espresso dalla seguente formula:

$$\Delta v_i^{(\eta)} = \mu_i \eta \quad (5.5)$$

dove μ_i è un coefficiente di influenza. Si deve sottolineare come tutte le variabili ed in particolare K , $P^{(\eta)}$, μ_i e $\Delta v_i^{(\eta)}$ risultino funzioni dell'estensione della zona danneggiata ζ .

5.4.2 Effetto delle fibre sulla cella unitaria

Per tener conto della azione di richiusura esercitata dalle fibre, si studia la cella unitaria, caratterizzata da un'estensione della zona danneggiata pari a ζ , soggetta ad n_s forze concentrate F_i , rappresentata in figura 5.5.

L'analisi viene condotta studiando n_s schemi strutturali, ciascuno caratterizzato dalla presenza di una singola forza F_i . L' i -esimo problema elasto-statico, che considera l'applicazione della forza F_i , è governato dalle classiche equazioni di campo e dall'equazioni al contorno fornite dalle (3.1) con $\eta = 0$. La soluzione del problema fornisce la reazione totale $P_i^{(F_i)}$ valutata per $x_2 = a_2$ e lo spostamento $\Delta v_j^{(F_i)}$ del punto corrisponde alla fibra j -esima:

$$P_i^{(F_i)} = \lambda_i F_i \quad \Delta v_j^{(F_i)} = \Lambda_{ji} F_i \quad (5.6)$$

dove λ_i è un coefficiente di influenza, Λ_{ji} è un parametro di flessibilità, $i = 1..n_s$ e $j = 1..n_s$. Si deve sottolineare come le grandezze λ_i , $P_i^{(F_i)}$, Λ_{ji} e $\Delta v_j^{(F_i)}$ risultino funzioni dell'estensione della zona danneggiata ζ . Inoltre, in corrispondenza di un fissato valore di ζ , tra le n_s fibre, n_e agiscono ancora elasticamente, secondo l'equazione $F_i = K^f \Delta v_i$ con $i = 1..n_e$, mentre le rimanenti $n_s - n_e$ sono caratterizzate da forze di richiusura costanti pari a $F_i = F_c$ con $i = n_e + 1..n_s$.

5.4.3 Risposta globale del FRC

La risposta globale del calcestruzzo fibrorinforzato si determina sovrapponendo i risultati ottenuti dall'omogeneizzazione del calcestruzzo fessurato con quelli calcolati applicando le n_s forze F_i alla cella unitaria.

Lo spostamento Δv_i del punto in corrispondenza della fibra i -esima si calcola utilizzando le equazioni (5.1), (5.5), e (5.6₂):

$$\Delta v_i = \Delta v_i^{(\eta)} + \sum_{j=1}^{n_s} \Delta v_i^{(F_j)} = \mu_i \eta + K^f \sum_{j=1}^{n_e} \Lambda_{ij} \Delta v_j + F_c \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \Lambda_{ij} \quad (5.7)$$

dove $i = 1..n_s$ e quindi la (5.7) rappresenta un sistema di equazioni. Indicando con I_{ij} le componenti della matrice identità $n_e \times n_e$, le prime n_e relazioni fornite dalla (5.7) possono essere riscritte in forma matriciale come segue:

$$(\mathbf{I} - K^f \mathbf{\Lambda}) \mathbf{V} = \boldsymbol{\mu} \eta + \boldsymbol{\alpha} F_c \quad (5.8)$$

dove \mathbf{V} è il vettore degli spostamenti Δv_j e $\boldsymbol{\alpha}$ è il vettore di componenti $\alpha_i = \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \Lambda_{ij}$. Quindi, risolvendo il sistema algebrico (5.8) il vettore \mathbf{V} può essere ottenuto come:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{I} - K^f \mathbf{\Lambda})^{-1} \boldsymbol{\mu} \eta + (\mathbf{I} - K^f \mathbf{\Lambda})^{-1} \boldsymbol{\alpha} F_c = \mathbf{Z} \eta + \mathbf{S} F_c \quad (5.9)$$

con $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - K^f \mathbf{\Lambda})^{-1} \boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{S} = (\mathbf{I} - K^f \mathbf{\Lambda})^{-1} \boldsymbol{\alpha}$.

Il valore degli n_e spostamenti fornito dalla (5.9) può essere introdotto nelle rimanenti $n_s - n_e$ equazioni (5.7) per valutare gli spostamenti dei punti soggetti alle forze costanti F_c :

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= \left[\mu_i + \sum_{j=1}^{n_e} \Lambda_{ij} K^f Z_j \right] \eta + \left[\sum_{j=1}^{n_e} \Lambda_{ij} K^f S_j + \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \Lambda_{ij} \right] F_c \quad (5.10) \\ &= \widehat{Z}_i \eta + \widehat{S}_i F_c \quad \text{for } i = n_e + 1..n_s \end{aligned}$$

dove \widehat{Z}_i e \widehat{S}_i risultano rispettivamente:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_i &= \mu_i + \sum_{j=1}^{n_e} \Lambda_{ij} K^f Z_j \\ \widehat{S}_i &= \sum_{j=1}^{n_e} \Lambda_{ij} K^f S_j + \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \Lambda_{ij} \end{aligned}$$

La reazione totale P si ottiene combinando le equazioni (5.3), (5.6₁) e (5.9) e

risulta:

$$\begin{aligned}
 P &= P^{(\eta)} + \sum_{i=1}^{n_s} P^{(F_i)} = P^{(\eta)} + \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i F_i \\
 &= \left[K + K^f \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i Z_i \right] \eta + \left[K^f \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i S_i + \sum_{i=n_e+1}^{n_s} \lambda_i \right] F_c \\
 &= \bar{K} \eta + \bar{\lambda} F_c
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

dove \bar{K} è un parametro di rigidezza globale, mentre $\bar{\lambda}$ è un coefficiente d'influenza e sono definiti come segue:

$$\begin{aligned}
 \bar{K} &= K + K^f \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i Z_i \\
 \bar{\lambda} &= K^f \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i S_i + \sum_{i=n_e+1}^{n_s} \lambda_i
 \end{aligned}$$

5.4.4 Propagazione della fessura

Secondo il criterio energetico, basato sui modelli R -curve, la zona danneggiata avanza di $d\zeta$ quando è soddisfatto il bilancio energetico $G(\zeta) = R(\zeta)$.

L'energia di rilascio $G(\zeta)$ può essere calcolata come derivata dell'energia elastica rispetto a ζ , $\partial U / \partial \zeta$, mantenendo lo spostamento η costante. L'energia elastica U per un fissato valore di ζ si può valutare, utilizzando l'equazione (5.1) come segue:

$$\begin{aligned}
 U(\zeta, \eta) &= -\frac{1}{2} P \eta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_s} (F_i \Delta v_i) \\
 &= -\frac{1}{2} P \eta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} (F_i \Delta v_i) - \frac{1}{2} (n_s - n_e) F_c \Delta v_m
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Introducendo le equazioni (5.9) e (5.11), l'energia elastica (5.12) può essere riscritta:

$$\begin{aligned}
 U(\zeta, \eta) &= -\frac{1}{2} (\bar{K} \eta + \bar{\lambda} F_c) \eta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} [F_i (Z_i \eta + S_i F_c)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} (n_s - n_e) F_c \Delta v_m \\
 &= -\frac{1}{2} [A \eta^2 + B \eta F_c + C (F_c)^2]
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

dove A , B e C sono definiti dalle formule seguenti:

$$\begin{aligned} A &= \bar{K} + \sum_{i=1}^{n_e} K^f (Z_i)^2 \\ B &= \bar{\lambda} + \sum_{i=1}^{n_e} 2K^f Z_i S_i \\ C &= \sum_{i=1}^{n_e} K^f S_i^2 + \frac{(n_s - n_e) \Delta v_m}{F_c} \end{aligned} \quad (5.14)$$

I coefficienti A , B e C dell'espressione quadratica (5.13), definiscono l'energia elastica e risultano funzioni della lunghezza della zona danneggiata ζ . Utilizzando l'equazione (5.13) l'energia di rilascio $G(\zeta)$ viene valutata:

$$G(\zeta) = \left. \frac{\partial U(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} \right|_{\eta} = -\frac{1}{2} \left[\frac{dA(\zeta)}{d\zeta} \eta^2 + \frac{dB(\zeta)}{d\zeta} \eta F_c + \frac{dC(\zeta)}{d\zeta} (F_c)^2 \right] \quad (5.15)$$

Note la $R(\zeta)$ e la $G(\zeta)$ fornite rispettivamente dalle equazioni (5.2) e (5.15) la condizione di evoluzione della zona danneggiata risulta:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[\frac{dA(\zeta)}{d\zeta} \eta^2 + \frac{dB(\zeta)}{d\zeta} \eta F_c + \frac{dC(\zeta)}{d\zeta} (F_c)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} K^{int} \int_{(\zeta-L)^+}^{\zeta} \frac{\Delta v(\xi, \zeta)^2}{2} \frac{\partial D(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} d\xi \end{aligned} \quad (5.16)$$

La (5.16) è un'equazione algebrica di secondo grado che deve essere risolta rispetto a η per ogni valore della lunghezza della zona danneggiata ζ . Una volta calcolata $\eta(\zeta)$ è possibile valutare la reazione totale $P(\zeta)$ dall'espressione (5.11) e quindi la risposta della cella unitaria in termini di tensione media e deformazione media.

La procedura numerica sviluppata è costituita dai seguenti passi:

1. introdurre una legge di softening locale $\sigma - \Delta v$ come legge costitutiva dell'interfaccia;
2. assegnare la distribuzione di spostamenti $\Delta \hat{v}(\xi, \zeta)$ lungo l'interfaccia tale che $\Delta \hat{v}(\xi, \zeta)$ risulti una funzione monotona decrescente di ξ , e che per $\zeta = \ell < L$, $\Delta \hat{v}(0, \zeta) < \Delta v_c$ e $\Delta \hat{v}(\ell, \zeta) = \Delta v_0$, per $\zeta = L$, $\Delta \hat{v}(0, \zeta) = \Delta v_c$ e $\Delta \hat{v}(L, \zeta) = \Delta v_0$ e per $\zeta > L$, $\Delta \hat{v}(0, \zeta) > \Delta v_c$, $\Delta \hat{v}(\zeta - L, \zeta) = \Delta v_c$ e $\Delta \hat{v}(\zeta, \zeta) = \Delta v_0$;
3. determinare la distribuzione del danno $D(\xi, \zeta)$ lungo la zona di processo sostituendo la $\Delta \hat{v}(\xi, \zeta)$ assegnata nel legame costitutivo dell'interfaccia $\sigma - \Delta v$, ottenendo per $\zeta = \ell < L$, $D(0, \zeta) < 1$ e $D(\ell, \zeta) = 0$, per $\zeta = L$, $D(0, \zeta) = 1$ e $D(L, \zeta) = 0$ e per $\zeta > L$, $D(0, \zeta) = 1$, $D(\zeta - L, \zeta) = 1$ e $D(\zeta, \zeta) = 0$;

4. assegnare il valore L sulla base dei possibili valori che può assumere la lunghezza della zona di processo per il calcestruzzo;
5. calcolare la R -curve cioè la relazione $R(\zeta)$ mediante l'equazione (5.2);
6. assegnare $n_e = n_s$;
7. determinare K , μ_i , λ_i e Λ_{ij} per via numerica, mediante un'analisi agli elementi finiti, per ciascun valore della lunghezza della zona danneggiata ζ ;
8. valutare i coefficienti $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ e $C(\zeta)$ dell'espressione quadratica (5.13);
9. calcolare le derivate $dA(\zeta)/d\zeta$, $dB(\zeta)/d\zeta$ e $dC(\zeta)/d\zeta$ come differenze finite: $\Delta A(\zeta)/\Delta\zeta$, $\Delta B(\zeta)/\Delta\zeta$ e $\Delta C(\zeta)/\Delta\zeta$;
10. valutare l'energia di rilascio $G(\zeta)$ dall'equazione (5.15);
11. determinare $\eta(\zeta)$ risolvendo l'equazione algebrica di secondo grado (5.16);
12. noto $\eta(\zeta)$, determinare lo spostamento relativo Δv_i nel punto corrispondente alla fibra i -esima dall'espressione (5.9) per $i = 1..n_e$;
13. se $\Delta v_i \geq \Delta v_m$, assegnare $n_e = n_e - 1$ e ricominciare dal passo 8, altrimenti continuare;
14. valutare $P(\zeta)$ dall'equazione (5.11);
15. calcolare la risposta della cella unitaria in termini di tensione media $\sigma_{22}^o(\zeta) = P(\zeta)/a_1$ e deformazione media $\varepsilon_{22}^o(\zeta) = \eta(\zeta)/a_2$ e il modulo effettivo $\overline{C}_{22}(\zeta) = \sigma_{22}^o(\zeta)/\varepsilon_{22}^o(\zeta)$.

Si deve sottolineare come la procedura sviluppata sia in grado di determinare la risposta non lineare a trazione del FRC risolvendo per ogni valore di ζ l'equazione non lineare algebrica (5.16) i cui coefficienti $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ e $C(\zeta)$ sono ricavati per mezzo di analisi numeriche elastiche lineari. Al contrario in un'analisi al passo del processo evolutivo è necessario risolvere ad ogni incremento temporale un sistema di equazioni non lineari utilizzando particolari tecniche numeriche (arc-length), che inducono per il problema di softening con possibile snap-back in esame, un notevole aggravio computazionale. La procedura perciò si rivela semplice da un punto di vista computazionale in quanto le iterazioni necessarie sono effettuate solo su una singola equazione.

5.4.5 Azione di richiusura distribuita

L'azione di richiusura svolta dalle fibre è efficace non solo in corrispondenza della posizione della fibra stessa, ma tutta la zona intorno risente della presenza della fibra. Dai risultati dell'analisi della cella unitaria, sviluppata al Capitolo 4, ed in particolare dalle deformate rappresentate in figura 4.8, si può vedere come la fibra influenza l'apertura della fessura in una zona più o meno estesa intorno alla fibra stessa. La forza di richiusura, quindi, si diffonde in un intorno della fibra. Per tener conto di queste considerazioni si è pensato di introdurre nel modello delle fibre al posto di forze concentrate F_i , forze distribuite q_i agenti in un intorno della fibra di lunghezza β . In tal caso Δv_i è sostituito dallo spostamento medio $\Delta \bar{v}_i$, calcolato nell'intorno della fibra i -esima di estensione β nel modo seguente:

$$\Delta \bar{v}_i = \frac{1}{\beta} \int_{\beta} \Delta v \, d\xi \quad (5.17)$$

Il legame tra azioni di richiusura e spostamenti relativi diventa:

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{K^f}{\beta} \Delta \bar{v}_i = k^f \Delta \bar{v}_i & \text{se } \Delta \bar{v}_i < \Delta v_m \\ q_i &= \frac{F_c}{\beta} = f_c & \text{se } \Delta \bar{v}_i \geq \Delta v_m \end{aligned} \quad (5.18)$$

Il primo passo della tecnica di omogeneizzazione non lineare proposta rimane invariato e la reazione totale $P^{(\eta)}$ e lo spostamento relativo medio $\Delta \bar{v}_i$ in corrispondenza della fibra i -esima sono determinati in funzione di η :

$$P^{(\eta)} = K\eta \quad \Delta \bar{v}_i = \tilde{\mu}_i \eta \quad (5.19)$$

dove $\tilde{\mu}_i$ è un coefficiente di influenza. Si può notare che la (5.19)₁ coincide con la (5.3).

Nel secondo passo della tecnica di omogeneizzazione non lineare si deve tener conto dell'azione di richiusura distribuita esercitata dalle fibre. Si studiano, perciò, n_s schemi strutturali, ciascuno caratterizzato dalla cella unitaria soggetta ad una forza di richiusura distribuita $q_i = F_i/\beta$, agente in un intorno di estensione β della fibra i -esima. La soluzione del problema i -esimo fornisce:

$$P_i^{(q_i)} = \tilde{\lambda}_i q_i \quad \Delta \bar{v}_j^{(q_i)} = \tilde{\Lambda}_{ji} q_i \quad (5.20)$$

dove $P_i^{(q_i)}$ è la reazione totale e $\Delta \bar{v}_j^{(q_i)}$ è lo spostamento medio nell'intorno della fibra j -esima prodotto dalla pressione q_i agente nell'intorno della fibra i -esima. Inoltre $\tilde{\lambda}_i$ e $\tilde{\Lambda}_{ji}$ sono rispettivamente un coefficiente di influenza e un parametro di flessibilità. Anche nel caso di azioni di richiusura distribuite in corrispondenza di un fissato valore ζ , tra le n_s fibre, n_e risultano ancora in campo elastico con $q_i = k^f \Delta \bar{v}_i$

e $i = 1..n_e$, mentre le rimanenti $n_s - n_e$ sono caratterizzate da forze di richiusura costanti $q_i = f_c$ e $i = n_e + 1..n_s$.

A questo punto sovrapponendo i risultati degli schemi analizzati, si valuta, analogamente al caso di forze concentrate, lo spostamento relativo medio $\Delta\bar{v}_i$ in corrispondenza della fibra i -esima utilizzando le equazioni (5.19₂) e (5.20₂):

$$\Delta\bar{v}_i = \Delta\bar{v}_i^{(\eta)} + \sum_{j=1}^{n_s} \Delta\bar{v}_i^{(q_j)} = \tilde{\mu}_i \eta + k^f \sum_{j=1}^{n_e} \tilde{\Lambda}_{ij} \Delta\bar{v}_j + f_c \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \tilde{\Lambda}_{ij} \quad (5.21)$$

dove $i = 1..n_s$. Riscrivendo in forma matriciale le prime n_e equazioni risulta:

$$\bar{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{I} - k^f \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right)^{-1} \bar{\boldsymbol{\mu}} \eta + \left(\mathbf{I} - k^f \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right)^{-1} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} f_c = \bar{\mathbf{Z}} \eta + \bar{\mathbf{S}} f_c \quad (5.22)$$

dove $\bar{\mathbf{V}}$ è il vettore dei $\Delta\bar{v}_j$ e $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ è il vettore di componenti $\tilde{\alpha}_i = \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \tilde{\Lambda}_{ij}$.

Il valore degli n_e spostamenti fornito dalla (5.22) può essere introdotto nelle rimanenti $n_s - n_e$ equazioni (5.21) per valutare lo spostamento medio dei punti nell'intorno delle fibre non più elastiche, soggetti cioè a forze costanti f_c :

$$\begin{aligned} \Delta\bar{v}_i &= \left[\tilde{\mu}_i + \sum_{j=1}^{n_e} \tilde{\Lambda}_{ij} k^f \bar{Z}_j \right] \eta + \left[\sum_{j=1}^{n_e} \tilde{\Lambda}_{ij} k^f \bar{S}_j + \sum_{j=n_e+1}^{n_s} \tilde{\Lambda}_{ij} \right] f_c \\ &= \tilde{Z}_i \eta + \tilde{S}_i f_c \quad \text{for } i = n_e + 1..n_s \end{aligned} \quad (5.23)$$

La razione totale P si ottiene combinando le equazioni (5.19₁) e (5.20₁) e risulta:

$$\begin{aligned} P &= P^{(\eta)} + \sum_{i=1}^{n_s} P^{(q_i)} = P^{(\eta)} + \sum_{i=1}^{n_s} \tilde{\lambda}_i q_i \\ &= \left[K + k^f \sum_{i=1}^{n_e} \tilde{\lambda}_i \bar{Z}_i \right] \eta + \left[k^f \sum_{i=1}^{n_e} \tilde{\lambda}_i \bar{S}_i + \sum_{i=n_e+1}^{n_s} \tilde{\lambda}_i \right] f_c \\ &= \hat{K} \eta + \hat{\lambda} F_c \end{aligned} \quad (5.24)$$

dove \hat{K} è un parametro di rigidità globale mentre $\hat{\lambda}$ è un coefficiente d'influenza. L'energia elastica U per un fissato valore di ζ si può valutare con la seguente espressione:

$$U(\zeta, \eta) = -\frac{1}{2}P\eta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_s}(q_i \Delta\bar{v}_i \beta) \quad (5.25)$$

$$= -\frac{1}{2}P\eta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_e}(q_i \Delta\bar{v}_i \beta) - \frac{1}{2}(n_s - n_e) f_c \Delta v_m \beta$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\widehat{K}\eta + \widehat{\lambda} f_c\right)\eta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_e}[q_i (\bar{Z}_i \eta + \bar{S}_i f_c) \beta] \quad (5.26)$$

$$- \frac{1}{2}(n_s - n_e) f_c \Delta v_m \beta \quad (5.27)$$

$$= -\frac{1}{2}[A\eta^2 + B\eta f_c + C(f_c)^2] \quad (5.28)$$

dove A , B e C sono definiti come segue:

$$A = \widehat{K} + \sum_{i=1}^{n_e} k^f (\bar{Z}_i)^2 \beta \quad (5.29)$$

$$B = \widehat{\lambda} + \sum_{i=1}^{n_e} 2 k^f \bar{Z}_i \bar{S}_i \beta$$

$$C = \sum_{i=1}^{n_e} k^f \bar{S}_i^2 \beta + \frac{(n_s - n_e) \Delta v_m}{f_c} \beta$$

Determinata l'energia elastica $U(\zeta, \eta)$ nel caso di azioni di richiusura distribuite, si può valutare l'energia di rilascio $G(\zeta)$, tramite la formula (5.15) dove i coefficienti A , B e C sono dati dalla (5.29), ed applicare la procedura numerica illustrata al paragrafo precedente.

5.5 Applicazioni numeriche

Nelle applicazioni numeriche sviluppate si considera una legge di softening lineare, come legame costitutivo dell'interfaccia $\sigma - \Delta v$, rappresentata in figura 3.7, che risulta:

$$\begin{aligned} \sigma &= K^{int} \Delta v && \text{quando } \Delta v \leq \Delta v_0 \\ \sigma &= K^{int} \Delta v_0 \frac{\Delta v_c - \Delta v}{\Delta v_c - \Delta v_0} && \text{quando } \Delta v_0 < \Delta v < \Delta v_c \\ \sigma &= 0 && \text{quando } \Delta v_c \leq \Delta v \end{aligned} \quad (5.30)$$

L'area al di sotto della curva $\sigma - \Delta v$ è pari a G_f energia di frattura del materiale. Si deve sottolineare come il valore di G_f , utilizzato nelle applicazioni illustrate di seguito, è pari alla metà dell'energia di frattura caratteristica del materiale, in quanto,

per la simmetria, si esamina solo un quarto della cella ripetitiva. Inoltre si assume che la distribuzione di spostamenti relativi $\Delta\hat{v}(\xi, \zeta)$ lungo la zona di processo sia una funzione cubica di ξ , data dall'espressione:

$$\Delta\hat{v}(\xi, \zeta) = \frac{\Delta v_c - \Delta v_0}{L^3} [2 \xi^3 + 3(L - 2\zeta) \xi^2 - 6(L - \zeta) \zeta \xi + (3L - 2\zeta) \zeta^2] + \Delta v_0 \quad (5.31)$$

ricavata nel capitolo precedente. In questo caso la funzione $R(\zeta)$ può essere valutata come segue:

$$R(\zeta) = \frac{1}{2} K^{int} \frac{\Delta v_c \Delta v_0}{L^3} [(\zeta - L)^+ - \zeta]^2 [2(\zeta - L)^+ - 2\zeta + 3L] \quad (5.32)$$

Nei grafici riportati di seguito la risposta della cella unitaria viene rappresentata con l'andamento della reazione totale P in funzione dello spostamento imposto η . La relazione tensione media-deformazione media e il modulo effettivo in direzione x_2 per il materiale composito possono essere ottenuti facilmente con le seguenti espressioni:

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{\eta}{a_2} \quad \sigma_{22}^0 = \frac{P}{a_1} \quad \bar{C}_{22} = \frac{\sigma_{22}^0}{\varepsilon_{22}^0}$$

FRC con $G_f = 0.025 \text{ N/mm}$

Si analizza una cella unitaria, definita dai seguenti parametri geometrici e del materiale:

$$\begin{aligned} a_1 &= 120 \text{ mm} & a_2 &= 87 \text{ mm} \\ a_0 &= 10 \text{ mm} & L &= 400 \text{ mm} \\ E_c &= 30000 \text{ N/mm}^2 & \nu_c &= 0.2 \\ G_f &= 0.025 \text{ N/mm} & f_t &= 3.0 \text{ N/mm}^2 \\ K^{int} &= 10^7 \text{ N/mm}^3 & K^f &= 1500 \div 2000 \text{ N/mm} \\ n_s &= 5 \\ F_m &= 20 \div 30 \text{ N} & F_c &= F_m \end{aligned}$$

Sfruttando i dati introdotti $\Delta v_0 = f_t/K^f = 3 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$ e $\Delta v_c = 2 \cdot G_f/f_t = 0.01667 \text{ mm}$. Si considera l'azione di richiusura delle fibre distribuita in un intorno di estensione $\beta = 24 \text{ mm}$.

In figura 5.6, è rappresentata la risposta a trazione del calcestruzzo fibrorinforzato, valutata con la procedura proposta in tre diversi casi:

- caso 1 (c1): $K^f = 2000 \text{ N/mm}$, $F_c = 20 \text{ N}$;
- caso 2 (c2): $K^f = 1500 \text{ N/mm}$, $F_c = 20 \text{ N}$;
- caso 3 (c3): $K^f = 2000 \text{ N/mm}$, $F_c = 30 \text{ N}$.

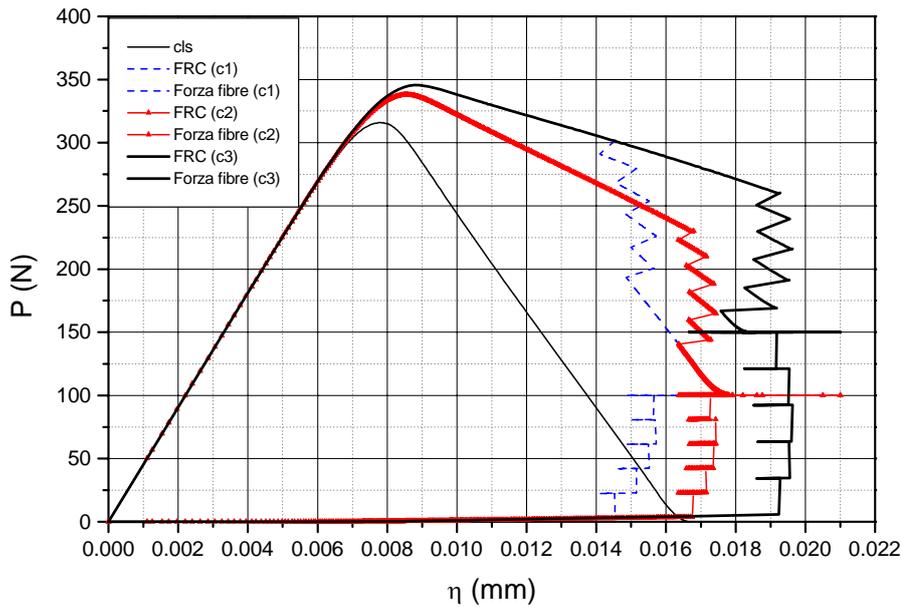


Figura 5.6: Risposta a trazione del FRC, caratterizzato da una matrice con energia di frattura $G_f = 0.025 \text{ N/mm}$, per diversi valori della rigidezza K^f delle fibre della forza di richiusura limite F_c .

Inoltre in figura 5.6 è riportato il comportamento della sola matrice fessurata di calcestruzzo e l'azione di richiusura delle fibre nei tre casi esaminati. Si può osservare che:

- la differenza tra il carico di picco della sola matrice e del FRC è ridotta;
- la presenza delle fibre influenza il comportamento post-picco del materiale composito aumentandone la duttilità;
- le irregolarità nell'andamento della risposta del FRC corrispondono ciascuna al momento in cui una fibra si scolla completamente dalla matrice e l'azione di richiusura da essa esercitata raggiunge il valore massimo $F_m = F_c$;
- dal confronto dei risultati del caso 1 e 2, la rigidezza K^f delle fibre non influenza la duttilità del materiale ma solo il momento in cui le fibre si attivano cioè la forza di richiusura raggiunge il valore massimo F_c ;
- all'aumentare di K^f (vedi caso 1) il debonding delle fibre dalla matrice avviene per spostamenti più piccoli;

- l'incremento della forza totale di richiusura delle fibre $n_s \cdot F_c$ (vedi caso 3) aumenta la duttilità del FRC, cioè incrementa l'energia che il materiale è in grado di dissipare prima del collasso;
- la reazione totale P tende all'azione totale di richiusura delle fibre quando il calcestruzzo è completamente fessurato.

FRC con $G_f = 0.0125 \text{ N/mm}$

I parametri geometrici e del materiale che definiscono la cella esaminata sono di seguito riportati:

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 120 \text{ mm} & a_2 = 87 \text{ mm} \\
 a_0 = 10 \text{ mm} & L = 200 \text{ mm} \\
 E_c = 30000 \text{ N/mm}^2 & \nu_c = 0.2 \\
 G_f = 0.0125 \text{ N/mm} & f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2 \\
 K^{int} = 10^7 \text{ N/mm}^3 & K^f = 3000 \text{ N/mm} \\
 n_s = 5 & \\
 F_m = 20 \div 30 \text{ N} & F_c = F_m
 \end{array}$$

Sfruttando i dati introdotti $\Delta v_0 = f_t/K^f = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$ e $\Delta v_c = 2 \cdot G_f/f_t = 0.00833 \text{ mm}$. Si considera, anche in questo caso, l'azione di richiusura delle fibre distribuita in un intorno di estensione $\beta = 24 \text{ mm}$. Si è assunta la lunghezza della zona di processo L pari alla metà di quella dell'analisi precedente, in quanto secondo la formula (2.42), discussa nel Capitolo 2, la L risulterebbe direttamente proporzionale a G_f .

In figura 5.7, è rappresentata la risposta a trazione del FRC, nei seguenti casi:

- caso 1 (c1): $F_c = 20 \text{ N}$;
- caso 2 (c2): $F_c = 30 \text{ N}$.

Inoltre in figura 5.6 è riportato il comportamento della sola matrice fessurata di calcestruzzo e l'azione di richiusura delle fibre nei casi esaminati. Si può osservare che

- la risposta del calcestruzzo risulta molto più fragile che nell'analisi precedente a causa del ridotto valore dell'energia di frattura;
- la presenza delle fibre migliora il comportamento post-picco del materiale composito, aumentandone la duttilità, nei vari casi esaminati;
- dal confronto tra i risultati dei due casi, l'incremento della forza totale di richiusura delle fibre $n_s \cdot F_c$ genera un incremento della capacità di dissipare energia del FRC;
- anche in questa analisi, la reazione totale P tende all'azione totale di richiusura delle fibre quando il calcestruzzo è completamente fessurato.

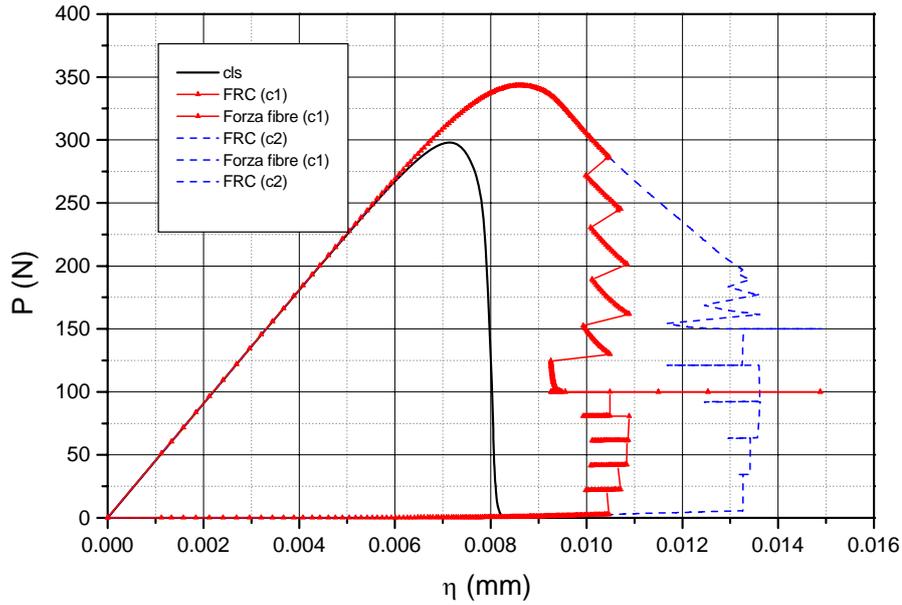


Figura 5.7: Risposta a trazione del FRC , caratterizzato da una matrice con energia di frattura $G_f = 0.0125 \text{ N/mm}$, per diversi valori della rigidezza K^f delle fibre della forza di richiusura limite F_c .

Celle con differente energia di frattura

Le due celle esaminate differiscono solo per il valore dell'energia di frattura e della lunghezza della zona di processo: per la cella 1 (c1) $G_f = 0.0125 \text{ N/mm}$ e $L = 200 \text{ mm}$, mentre per la cella 2 (c2) $G_f = 0.025 \text{ N/mm}$ e $L = 400 \text{ mm}$. Entrambe le celle sono, invece, caratterizzate dai seguenti parametri:

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 120 \text{ mm} & a_2 = 87 \text{ mm} \\
 a_0 = 10 \text{ mm} & f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2 \\
 E_c = 30000 \text{ N/mm}^2 & \nu_c = 0.2 \\
 K^{int} = 10^7 \text{ N/mm}^3 & K^f = 2500 \text{ N/mm} \\
 n_s = 5 & \beta = 24 \text{ mm} \\
 F_m = 20 \text{ N} & F_c = F_m
 \end{array}$$

In figura 5.8 è rappresentata la risposta della sola matrice, del FRC e l'andamento della forza totale di richiusura delle fibre per le due diverse celle. Si può notare come:

- per la cella 1, caratterizzata da un'energia di frattura più bassa, il comportamento sia della sola matrice sia del materiale composito risulta più fragile rispetto a quello della cella 2;

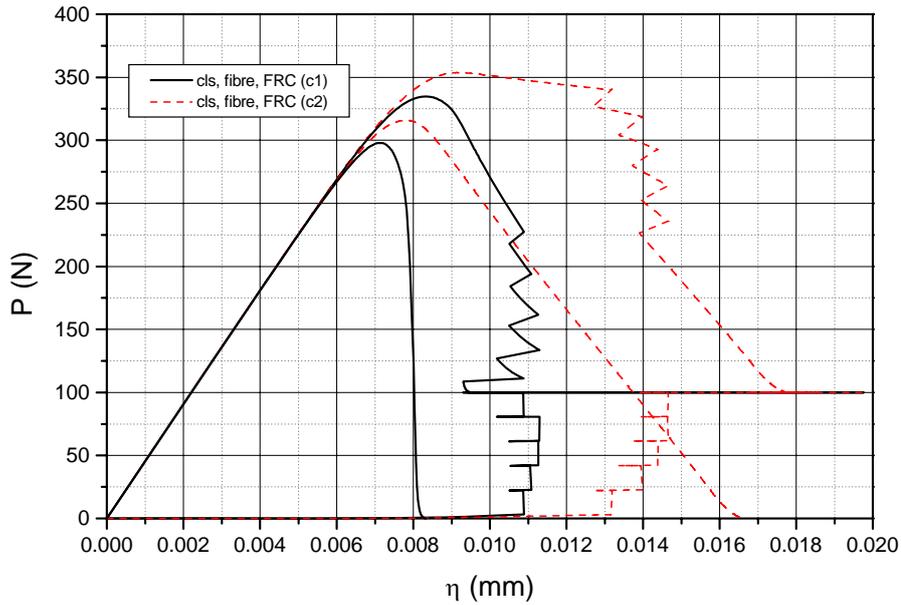


Figura 5.8: Confronto tra la risposta di due celle caratterizzate da una differente energia di frattura.

- le fibre si attivano, cioè raggiungono la massima forza di richiusura, nella cella 2 per spostamenti η più elevati;
- una variazione dell'energia di frattura della matrice non modifica in modo significativo il carico di picco del FRC;
- in entrambe le celle la presenza delle fibre aumenta la duttilità del materiale.

Azione di richiusura concentrata e distribuita delle fibre

Si esamina una cella caratterizzata dalle seguenti proprietà geometriche e del materiale:

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 120 \text{ mm} & a_2 = 87 \text{ mm} \\
 a_0 = 10 \text{ mm} & L = 400 \text{ mm} \\
 E_c = 30000 \text{ N/mm}^2 & \nu_c = 0.2 \\
 G_f = 0.025 \text{ N/mm} & f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2 \\
 K^{int} = 10^7 \text{ N/mm}^3 & K^f = 2500 \text{ N/mm} \\
 n_s = 5 & \\
 F_m = 20 \text{ N} & F_c = F_m
 \end{array}$$

sia modellando le forze di richiusura come azioni concentrate sia come azioni distribuite in un intorno della fibra stessa di estensione $\beta = 24 \text{ mm}$.

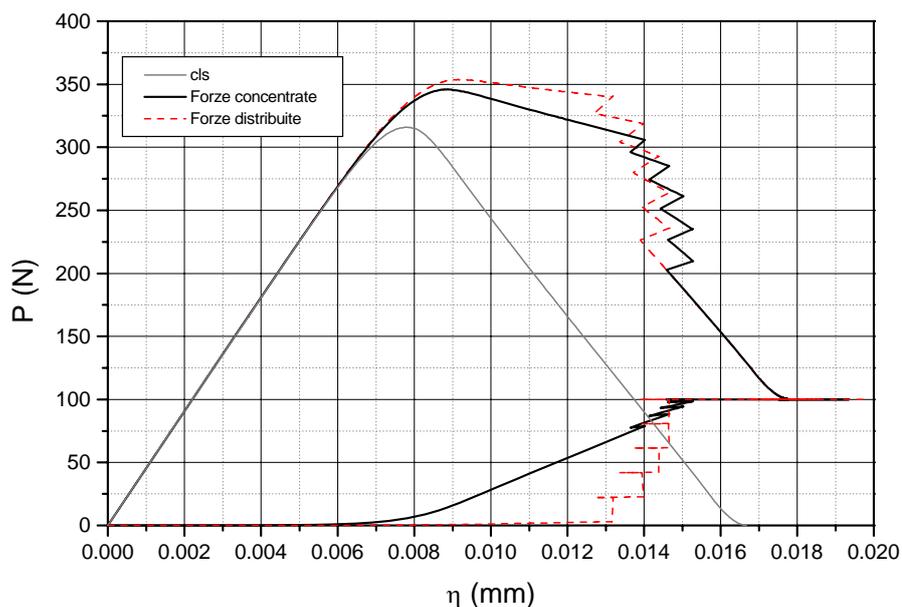


Figura 5.9: Confronto tra la risposta del FRC ottenuta considerando le forze di richiusura delle fibre concentrate o distribuite.

In figura 5.9 è rappresentata la risposta del FRC nei due casi di azione di richiusura delle fibre concentrata e distribuita. Nel caso di forze distribuite le fibre si attivano prima, cioè raggiungono la forza massima di richiusura F_c per spostamenti η più piccoli, ma la differenza in termini di risposta globale delle celle è ridotta. Questo risultato è dovuto al fatto che nel modello che considera l'azione di richiusura distribuita in un intorno della fibra, il carico uniforme q_i , corrispondente alla fibra i -esima, quando è attivato, agisce comunque su tutta la zona di diffusione β . In altre parole anche nel caso di forze distribuite, l'azione di richiusura si manifesta attraverso la risultante delle pressioni q_i che è applicata in corrispondenza della posizione della fibra stessa. Questo implica che la risposta globale ottenuta nel caso di azioni distribuite è molto simile a quella determinata nell'ipotesi di forze concentrate; al contrario la distribuzione degli spostamenti di interfaccia, nel caso di pressioni uniformi a tratti di richiusura risulta più regolare e, sulla base dei risultati della singola cella riportati nel Capitolo 4, più realistica.

5.6 Conclusioni

Si è sviluppata una procedura in grado di cogliere la risposta a trazione del calcestruzzo fibrorinforzato. Tale procedura rappresenta un'estensione di quella sviluppata

nel Capitolo 3, per i materiali omogenei coesivi. Consiste in un bilancio energetico, basato sui modelli R -curve, dove la funzione di resistenza $R(\zeta)$ è quella caratteristica della matrice cementizia, mentre l'azione di richiusura esercitata dalle fibre viene tenuta in conto nella determinazione dell'energia di rilascio G . L'energia di rilascio viene valutata mediante una tecnica di omogeneizzazione non lineare che sfrutta la sovrapposizione degli effetti e si sviluppa in due passi, nel primo passo si studia la sola matrice di calcestruzzo fessurata, nel secondo passo si tiene in conto la presenza delle fibre.

La procedura sviluppata permette di valutare la risposta non lineare del materiale studiando un'equazione algebrica di secondo grado, che rappresenta la condizione di propagazione della fessura, i cui coefficienti sono calcolati risolvendo problemi elastici lineari. In questo modo, il metodo numerico proposto è in grado di determinare la risposta di softening del FRC, risolvendo un'equazione algebrica non lineare invece che un sistema di equazioni non lineari le cui dimensioni dipendono dai gradi di libertà del problema esaminato. Le iterazioni necessarie sono perciò eseguite su una singola equazione. La procedura si dimostra perciò semplice ed efficace in quanto richiede ridotti oneri computazionali rispetto ad un'analisi non lineare al passo.

Dai risultati delle applicazioni numeriche sviluppate si può osservare come la presenza delle fibre generi un significativo incremento della duttilità nella risposta a trazione del calcestruzzo. La duttilità del FRC cresce con l'aumentare del valore dell'azione totale di richiusura esercitata dalle fibre.

Le irregolarità nella risposta del materiale composito rappresentano gli stati in cui le fibre raggiungono la loro massima capacità portante. Tali irregolarità non sono presenti nella risposta a trazione del FRC determinata sperimentalmente, in quanto l'effettiva distribuzione random delle fibre, cioè la presenza di fibre con varia inclinazione, diversa lunghezza immersa e differente valore della forza di richiusura massima, rende più uniforme l'azione esercitata dalle fibre stesse. L'analisi effettuata considerando una distribuzione periodica di fibre e fessure riesce comunque a cogliere almeno qualitativamente la risposta del materiale e l'incremento di duttilità prodotto dalla presenza delle fibre. Inoltre la procedura è in grado di seguire con facilità anche le suddette irregolarità cioè gli snap-back locali che corrispondono al raggiungimento del completo distacco delle fibre dalla matrice. Tali irregolarità risulterebbero difficili da seguire mediante un'analisi al passo.

Bibliografia

- [1] Bazant Z.P., Planas J., *Fracture and Size Effects in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press LLC, 1998.
- [2] Budiansky B., O'Connell R. J., Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 12, pp. 81-97, 1976.
- [3] Carpinteri A., *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora Editrice Bologna, 1992.
- [4] Carpinteri A., Massabò R., Bridged versus cohesive crack in the flexural behavior of brittle matrix composites, *Int. J. of Fracture*, Vol. 81, pp. 125-145, 1996.
- [5] Carpinteri A., Massabò R., Continuous versus discontinuous bridged crack model for fiber-reinforced materials in flexure, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 34(8), pp. 2321-2338, 1997.
- [6] Karihaloo B. L., *Fracture Mechanics & Structural Concrete*, Longman Group Limited, 1995.
- [7] Karihaloo B. L., Wang J., Grzybowski M., Doubly periodic arrays of bridged cracks and short fibre reinforced cementitious composites. *J. Mech Phys Solids*, Vol. 44, pp. 1565-1586, 1996.
- [8] Karihaloo B.L., Wang J., A damage zone modelled by three dissimilar arrays of interacting bridged cracks. *Proceedings ICF 9, Sydney "Advanced in Fracture Research"*, Vol. 2, pp. 1185-1192, 1997.
- [9] Jenq Y. S., ASCE S. M., Shah S. P., M. ASCE, Crack propagation in fiber-reinforced concrete, *J. Struct. Eng. ASCE*, Vol. 112(1), pp 19-34, 1986.
- [10] Grimaldi A., Luciano R., Modellazione micromeccanica e valutazione della resistenza a rottura di calcestruzzi rinforzati con fiber. *Atti of "X Congresso Nazionale Aimeta"*, Napoli, Ottobre 3-5, 1995.

- [11] Soroushian P. and Cha-Don Lee, Tensile Strength of Steel Fiber Reinforced Concrete Correlation with Some Measures of Fiber Spacing. *ACI Materials Journal*, Vol. 87(6), 1990.
- [12] Lim T.Y., Paramasivam P., and Lee S.L., Analytical Model for Tensile Behavior of Steel-Fiber Concrete. *ACI Materials Journal*, Vol. 84(4), pp. 286-298, 1987.
- [13] Luciano R., Sacco E., Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 17(4), pp. 599-617, 1998.
- [14] Marfia S., Sacco E., Micromechanical analysis of fiber reinforced concrete, *Atti del 12th International Conference on Composite Materials, ICCM-12*, Parigi, 5-9 Luglio, 1999.
- [15] Massabò R., Meccanismi di rottura nei materiali fibrorinforzati, Tesi di dottorato, Politecnico di Torino, 1993.
- [16] Mobasher B., Ouyang C., Shah S. P., Modeling of fiber toughening in cementitious materials using an R-curve approach, *Int. J. of Fract.*, Vol. 50, pp. 199-219, 1991.
- [17] Nammur G., Naam A. E., Bond stress model for fiber reinforced concrete based on bond stress-slip relationship. *ACI Materials Journal*, Vol. 1, pp. 45-57, 1986.
- [18] Ouyang C., Mobasher B., Shah S. P., An R-curve approach for fracture of quasi brittle materials, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 37(4), pp. 901-916, 1990.
- [19] Ouyang C., Shah S. P., Geometry-dependent R-curve for quasi brittle materials, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 74(11), pp. 2831-2836, 1991.
- [20] Victor C. Li, Stang H., Interfacial property characterization and Strengthening Mechanisms in Fiber Reinforced Cement Based Composites. *Advanced Cement Based Materials*, Vol. 6(1), pp. 1-20, 1997.
- [21] Suquet P. M., Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In *Homogenization Techniques for Composite Media*, (Edited by E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui), Lecture Notes in Physics Vol. 272, Springer-Verlag, 1987.