

# Capitolo 2

## Meccanica della frattura ed omogeneizzazione

I processi di danneggiamento nei compositi fibrorinforzati sono dovuti principalmente alla formazione e propagazione di microvuoti e di microfessure nella matrice cementizia. I modelli micromeccanici sviluppati ed esposti nei capitoli successivi, in grado di cogliere la risposta meccanica del FRC, sono basati sulla meccanica della frattura e sulle tecniche di omogeneizzazione, perciò in questo capitolo sono riportati alcuni concetti fondamentali di meccanica della frattura e di omogeneizzazione.

Per quanto riguarda la meccanica della frattura nell'ambito di quella lineare verranno richiamati il criterio energetico di Griffith per la propagazione di una fessura, la definizione dei fattori di intensificazione delle tensioni, il criterio di frattura di Irwin e la relazione tra i due approcci energetico (Griffith) e locale (Irwin) [4, 6, 3]. Nell'ambito della meccanica della frattura non lineare verrà richiamato il modello di frattura coesiva, la definizione della lunghezza della fessura equivalente e la R-curve [3].

Per quanto riguarda le tecniche di omogeneizzazione si approfondirà quella introdotta da Eshelby e la sua estensione al caso di materiali periodici [13, 1].

### 2.1 Meccanica della frattura lineare

Il fenomeno della propagazione delle fessure in materiali fragili può essere studiato sia in termini energetici (globali) mediante il criterio di Griffith che in termini tensionali (locali) tramite il criterio di Irwin.

#### 2.1.1 Criterio energetico di Griffith

La meccanica della frattura elastica lineare (LEFM) ha le sue origini nell'articolo di Griffith del 1920. Prima di allora non si riusciva a spiegare perchè la reale re-

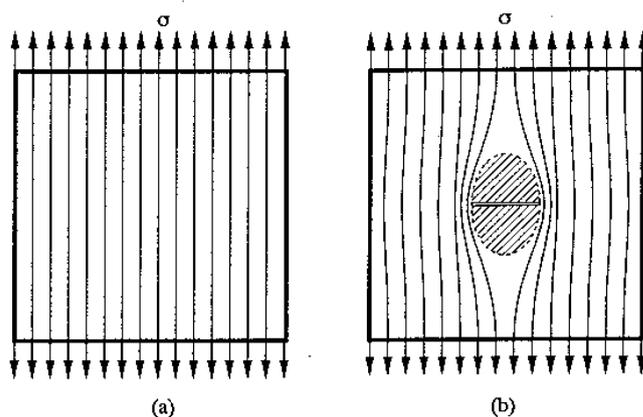


Figura 2.1: Linee di flusso delle tensioni principali in una lastra sottile soggetta a tensioni uniformi all'infinito: (a) lastra non fessurata; (b) lastra fessurata.

sistenza dei materiali fragili risultasse significativamente inferiore a quella prevista teoricamente. Griffith dimostrò che tale discrepanza è legata alla concentrazione di tensioni che si sviluppa alle estremità delle fessure presenti nel materiale. Infatti, se un foglio di materiale elastico perfettamente fragile è uniformemente teso le linee di flusso delle tensioni sono dritte e parallele alla direzione dello sforzo. Introducendo un foro nel pannello le linee di flusso sono costrette ad aggirarlo e si genera una concentrazione di tensioni alle estremità del foro (vedi figura 2.1). La concentrazione risulta più elevata quanto più il foro tende ad assumere la forma di una fessura. Sufficientemente lontano dal foro la distribuzione delle tensioni risulta non disturbata dalla presenza del difetto.

Il valore delle tensioni che si sviluppano alle estremità di una fessura sono state calcolate da Inglis (1913) come il caso limite della soluzione del foro ellittico. Dalla soluzione di Inglis, Griffith ha dedotto che il classico criterio di resistenza non poteva essere applicato nel caso di materiali fragili fessurati, in quanto all'estremità della fessura, la tensione tende all'infinito indipendentemente dal valore del carico applicato. Inoltre osservò che per fare formare o propagare la fessura una certa quantità di energia per unità di area deve essere fornita al materiale per vincere la resistenza di coesione presente tra le molecole ai due lati della fessura. Tale energia risulta nell'ambito della LEFM una costante del materiale mentre in un ambito più generale può dipendere dalla evoluzione del processo di fessurazione. Un problema fondamentale della meccanica della frattura è di valutare le due aliquote di energia quella disponibile per l'avanzamento della fessura e quella necessaria per l'evoluzione del processo di fessurazione.

Se si considera una lastra di spessore  $b$  caratterizzata dalla presenza di una fessura di lunghezza  $a$  (vedi figura 2.2) l'energia necessaria per fare avanzare la fessura di

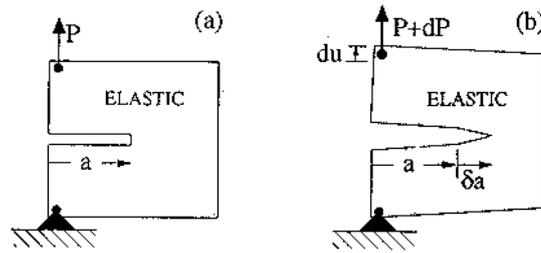


Figura 2.2: Crescita della fessura in un elemento strutturale: (a) situazione iniziale; (b) crescita della fessura nel piano in seguito ad un incremento di carico.

una quantità infinitesima  $da$ , in presenza di un fissato livello di carico, risulta:

$$dW^F = G_f da b \quad (2.1)$$

dove  $G_f$  è il rilascio di energia critico detto anche energia di frattura che, come già detto, nell'ambito della LEFM, è una proprietà del materiale non dipendente dal processo fessurativo. L'energia totale fornita alla struttura in un processo infinitesimo considerato, pari al lavoro delle forze esterne  $dW$ , può essere divisa in due aliquote, una immagazzinata come energia elastica  $dU$  e l'altra disponibile sia per guidare altri processi  $dW^R$ , sia per generare energia cinetica  $dK$ . Quando il fenomeno è quasi statico ( $dK = 0$ ) e la frattura è l'unico processo che consuma energia, risulta:

$$dW - dU = dW^R = G da b \quad (2.2)$$

dove  $G$  è il rilascio specifico di energia. La quantità  $G$  è una funzione che dipende dalle condizioni geometriche e al contorno attuali e non dalla loro evoluzione. Il criterio di Griffith ha la seguente formulazione generale:

$$\begin{array}{lll} G < G_f & da = 0 & dK = 0 \Rightarrow \text{Assenza di propagazione (stabile)} \\ G = G_f & da \geq 0 & dK = 0 \Rightarrow \text{Propagazione quasi-statica} \\ G > G_f & da > 0 & dK > 0 \Rightarrow \text{Propagazione dinamica (instabile)} \end{array} \quad (2.3)$$

Queste condizioni esprimono il fatto che se l'energia disponibile è minore di quella necessaria la fessura non si propaga e la struttura rimane stabile, se l'energia disponibile uguaglia quella necessaria, la fessura può propagarsi staticamente cioè in presenza di forze di inerzia trascurabili, infine se l'energia disponibile supera quella necessaria, la struttura diventa instabile e la fessura può propagarsi dinamicamente.

Il problema centrale è la determinazione dell'aliquota di energia disponibile alla propagazione della fessura  $dW^R$  [3].

Si consideri ancora la struttura piana con il difetto iniziale di lunghezza  $a$  soggetto ad un carico concentrato, rappresentata in figura 2.2, dove  $u$  è lo spostamento del punto di applicazione del carico. Se si considera un processo generale dove sia lo spostamento  $u$  che la lunghezza della fessura  $a$  possono variare, l'equazione (2.2) diviene:

$$G da b = dW - dU = P(u, a) du - \left( \left[ \frac{\partial U(u, a)}{\partial u} \right] \Big|_a du + \left[ \frac{\partial U(u, a)}{\partial a} \right] \Big|_u da \right) \quad (2.4)$$

dove  $da$ ,  $du$ ,  $dW$  e  $dU$  sono le variazioni rispettivamente della lunghezza della fessura, del valore dello spostamento, del lavoro dei carichi esterni e dell'energia di deformazione. Richiamando il ben noto secondo teorema di Castigliano:

$$P(u, a) = \left[ \frac{\partial U(u, a)}{\partial u} \right] \Big|_a \quad (2.5)$$

si può valutare  $G$  dall'equazione (2.4):

$$G = G(u, a) = -\frac{1}{b} \left[ \frac{\partial U(u, a)}{\partial a} \right] \Big|_u \quad (2.6)$$

Questo risultato mostra che il rilascio specifico di energia è pari alla derivata dell'energia elastica  $U$  rispetto alla lunghezza della fessura  $a$  eseguita mantenendo lo spostamento costante.

Un ragionamento analogo si può sviluppare utilizzando il carico applicato  $P$  al posto dello spostamento  $u$  come variabile indipendente e introducendo l'energia complementare  $U^*(P, a)$ , funzione di  $P$  e  $a$ . Seguendo la stessa procedura, l'energia di rilascio  $G$  si può valutare come derivata dell'energia complementare  $U^*$  rispetto ad  $a$  mantenendo il carico applicato  $P$  costante:

$$G = G(u, a) = -\frac{1}{b} \left[ \frac{\partial U^*(P, a)}{\partial a} \right] \Big|_P \quad (2.7)$$

Questo risultato può essere considerato valido in generale perchè anche in presenza di carichi distribuiti è sempre possibile definire una forza  $P$  ed uno spostamento  $u$  generalizzati e calcolare il carico esterno con la formula seguente:

$$dW = P du \quad (2.8)$$

In particolare Griffith applicò il criterio energetico per valutare la propagazione della fessura in una lastra infinita uniformemente tesa e intagliata da una fessura di lunghezza  $2a$ , rappresentata in figura 2.3. Dimostrò che l'energia specifica rilasciata da una lastra di spessore unitario soggetta ad una tensione uniforme  $\sigma$ , dovuta alla presenza di una fessura di lunghezza  $2a$ , risulta:

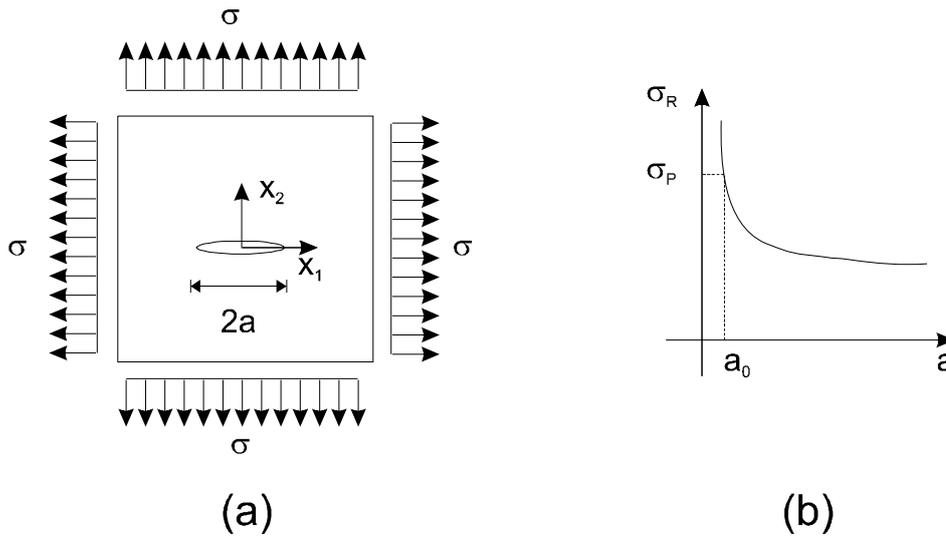


Figura 2.3: (a) Lastra soggetta a tensione uniforme all'infinito; (b) tensione di rottura in funzione della lunghezza della fessura ottenuta con il principio di Griffith.

$$G = \pi a^2 \frac{\sigma^2}{E'} \quad (2.9)$$

dove  $E'$  è pari al modulo elastico  $E$  in uno stato piano di tensione mentre vale  $E/(1 - \nu^2)$  in uno stato piano di deformazione. Dall'equazione (2.3) che esprime la condizione di propagazione quasi-statica della fessura e dall'equazione (2.9) si ottiene il criterio di rottura e l'andamento della tensione di rottura in funzione della semilunghezza della fessura  $a$ :

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{E' G_f}{\pi a}} \quad (2.10)$$

Dalla semplice inversione della equazione (2.10) si può calcolare la semilunghezza critica della fessura  $a_R$  in corrispondenza della quale si verifica la propagazione per un determinato carico applicato  $\sigma$ .

In figura 2.3 è rappresentato l'andamento della  $\sigma_R$  in funzione di  $a$  dato dall'equazione (2.10) si può notare come al tendere di  $a$  a zero la resistenza del materiale tenda all'infinito, mentre al tendere di  $a$  all'infinito la resistenza del materiale si annulla. Se si suppone l'esistenza di una resistenza intrinseca del materiale  $\sigma_P$  si può definire una semilunghezza  $a_0$  pari a:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{G_f E'}{\sigma_P^2} \quad (2.11)$$

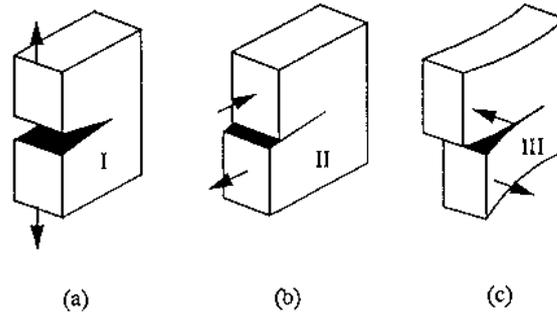


Figura 2.4: Tre possibili modi di deformazione della fessura: (a) Modo I: "opening mode"; (b) Modo II: "sliding mode"; (c) Modo III: "tearing mode".

al di sotto della quale lo snervamento a trazione precede la propagazione della fessura. La semilunghezza  $a_0$  può essere vista come la dimensione del difetto preesistente nel materiale [6, 12].

### 2.1.2 Criterio locale o tensionale di Irwin

Il problema della LEFM è stato riformulato in termini dello stato tensionale all'apice della fessura da Irwin (1957) [8], il quale ha anche dimostrato l'equivalenza tra l'approccio locale da lui proposto e quello energetico globale di Griffith. Irwin mise in evidenza come la presenza di una fessura in un corpo modifichi il comportamento lineare elastico ed isotropo del corpo solo in una ristretta zona all'estremità della fessura. In questa zona, infatti si verifica una concentrazione di tensioni. Inoltre Irwin osservò che le dimensioni, la forma e le condizioni al contorno del corpo non hanno alcuna influenza sull'andamento di tali tensioni ma solo sulla loro intensità.

Un approccio generalmente usato è quello di dividere lo stato di tensione in tre stati elementari detti modo I, II e III e rappresentati in figura 2.4. Il Modo I, detto anche 'opening mode', è caratterizzato da uno stato di tensioni piane e simmetriche che genera un'apertura della fessura, cioè spostamenti delle facce della fessura normali al loro piano. Il Modo II, detto anche 'in-plane shear/sliding mode', si riferisce ad uno stato di tensioni piane antisimmetriche che causa uno spostamento relativo delle facce della fessura nel loro piano. Il Modo III, detto anche 'anti-plane shear/tearing mode', è caratterizzato da uno stato di tensioni che generano uno spostamento relativo delle due facce fuori dal loro piano [9].

Per calcolare la concentrazione di tensione che si verifica all'estremità di una fessura in un corpo elastico è necessario risolvere matematicamente il problema di corpi elastici contenenti fessure. Tale problema risulta molto complesso da un punto di vista matematico ed è possibile arrivare a soluzioni in forma chiusa solo in casi

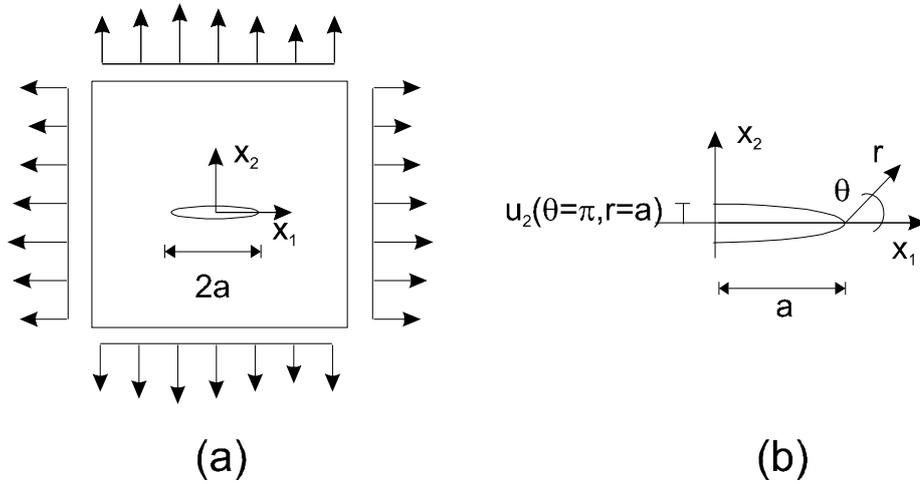


Figura 2.5: (a) Lastra soggetta a deformazioni uniformi all'infinito; (b) particolare della fessura.

semplici per esempio nel caso di solidi bidimensionali infinitamente estesi soggetti al Modo I, II o III di frattura. Nel seguito si riporteranno le soluzioni relative al Modo I, quelle relative agli altri modi risultano analoghe.

Se si considera un solido bidimensionale infinito soggetto ad uno stato piano di tensioni o di deformazioni, come rappresentato in figura 2.5, e si assume un sistema di riferimento ortogonale  $x_1 - x_2$  con  $x_1$  coincidente con l'asse della fessura, il campo tensionale vicino all'apice è definito dalle relazioni seguenti:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.12)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.13)$$

$$\tau_{12} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.14)$$

dove  $r$  e  $\theta$  sono le coordinate polari locali con origine all'apice  $x_1 = \pm a$  della fessura (vedi figura 2.5) e  $K_I$  è il cosiddetto fattore di intensificazione delle tensioni (stress intensity factor) relativo al Modo I di frattura.

Nell'ipotesi di deformazioni piane la componente  $\sigma_{33}$  della tensione si può determinare con la usuale formula:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.15)$$

Si deve sottolineare che le espressioni delle componenti della tensione sono valide solo in prossimità della fessura cioè quando il rapporto  $r/a$  tende a zero. Inoltre le tensioni sono caratterizzate da un andamento asintotico con singolarità  $r^{-\frac{1}{2}}$ . La potenza  $-1/2$  e le funzioni della variabile polare  $\theta$  presenti nelle relazioni (2.12), (2.13) e (2.14) non dipendono dalle condizioni all'infinito ma solo dalle condizioni al contorno sulle due facce della fessura. Il campo tensionale all'estremità della fessura è determinato perciò univocamente dal fattore d'intensificazione  $K_I$  che è funzione della lunghezza della fessura, delle condizioni all'infinito e, per lastre finite, delle condizioni al contorno. Le dimensioni fisiche di  $K_I$  risultano  $[F][L]^{-\frac{3}{2}}$ . Per il caso esaminato  $K_I$  è dato dall'espressione:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.16)$$

In generale l'andamento delle tensioni risulta asintotico in tutti i corpi fessurati indipendentemente dalla loro geometria mentre il fattore di intensificazione delle tensioni dipende dalla configurazione geometrica, dalle condizioni al contorno e da una dimensione caratteristica del corpo e può essere espresso, nel caso di fessure in mezzi infiniti o in strisce infinite, come prodotto del fattore di intensificazione delle tensioni nel caso di singola fessura (equazione (2.16)) in un mezzo infinito per un coefficiente  $F_I$ :

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.17)$$

Il coefficiente  $F_I$  risulta funzione di una dimensione caratteristica del corpo e della lunghezza della fessura. I fattori di intensificazione delle tensioni solo in alcuni casi più semplici possono essere espressi in forma chiusa e sono riportati in opportuni manuali [14].

Si sottolinea che lo spostamento di apertura della fessura  $\Delta v$  solo in questo capitolo si indicherà con  $w$  per uniformarsi alle notazioni più utilizzate nei testi di meccanica della frattura.

Lo spostamento  $u_2$  in direzione  $x_2$  dei punti lungo la faccia della fessura ( $\theta = \pi$ ) è caratterizzato da un andamento parabolico avente tangente parallela all'asse  $x_2$  all'apice ed è dato dalla seguente formula:

$$u_2(\theta = \pi) = \frac{2}{E'} \sqrt{\frac{r}{\pi}} K_I \quad (2.18)$$

Sostituendo l'espressione di  $K_I$ , data dall'equazione (2.16), nella (2.18), l'apertura della fessura COD (crack opening displacement) si ottiene come somma dello spostamento della faccia superiore ed inferiore della fessura:

$$w = u_2^+ - u_2^- = \frac{4\sigma}{E'} r \quad (2.19)$$

Al centro della fessura per  $r = a$  si ottiene la massima apertura della fessura che risulta:

$$w = \frac{4\sigma}{E'} a \quad (2.20)$$

Nel Modo II e nel Modo III di frattura l'andamento delle tensioni è caratterizzato dalla stessa singolarità presente nel Modo I ed è definito rispettivamente dai fattori di intensificazione  $K_{II}$  e  $K_{III}$ .

Per un corpo soggetto a diversi sistemi di carico che generano differenti modi di frattura, il campo tensionale all'apice della fessura può essere determinato utilizzando la sovrapposizione delle tensioni prodotte da ogni singolo modo infatti le espressioni (2.12), (2.13) e (2.14) e i fattori di intensificazione delle tensioni sono stati determinati nell'ambito dell'elasticità lineare e dipendono linearmente dai carichi applicati. La generica componente di tensione risultante può essere espressa dalla seguente formula:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} (K_I g_{ij}^I(\theta) + K_{II} g_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} g_{ij}^{III}(\theta)) \quad (2.21)$$

dove  $g_{ij}^I$ ,  $g_{ij}^{II}$  e  $g_{ij}^{III}$  sono funzioni di  $\theta$  e  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  sono i fattori di intensificazione delle tensioni relativi ai vari modi.

Se ogni modo di deformazione risulta generato da diversi sistemi di carico anche in questo caso si può usare la sovrapposizione degli effetti per determinare il fattore di intensificazione delle tensioni globale per ogni singolo modo, per esempio  $K_I$  può essere calcolato con la seguente espressione valida anche per  $K_{II}$  e  $K_{III}$ :

$$K_I = K_{I1} + K_{I2} + K_{I3} + \dots + K_{In} \quad (2.22)$$

dove  $K_{Ij}$  è il fattore di intensificazione delle tensioni del Modo I relativo al sistema di carico j-esimo [4].

Espressioni simili alla (2.21) possono essere ricavate per il campo di spostamenti.

Si può adesso introdurre il criterio di Irwin per la frattura di materiali fragili. Secondo questo criterio la fessura si propaga quando il fattore di intensificazione delle tensioni  $K_I$  che definisce il campo tensionale all'apice raggiunge un valore critico  $K_{Ic}$ . Il fattore di intensificazione critico  $K_{Ic}$ , detto anche "resistenza della frattura" (fracture toughness), è una costante del materiale. Nel Modo I il criterio è espresso dalla seguenti formule:

$$\begin{aligned} K_I < K_{Ic} &\Rightarrow \text{Assenza di propagazione (stabile)} \\ K_I = K_{Ic} &\Rightarrow \text{Propagazione quasi-statica} \\ K_I > K_{Ic} &\Rightarrow \text{Propagazione dinamica (instabile)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

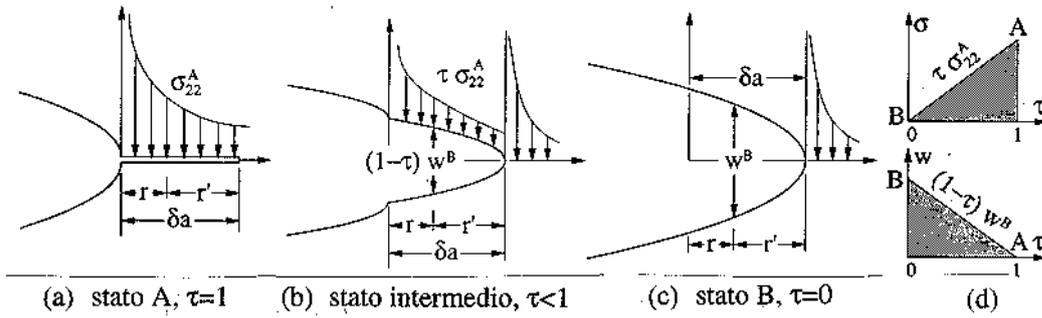


Figura 2.6: Riduzione proporzionale delle tensioni di richiusura.

### 2.1.3 Equivalenza dell'approccio tensionale di Irwin con l'approccio energetico di Griffith

Irwin (1957) dimostrò l'equivalenza tra la formulazione energetica globale e quella tensionale locale del problema della propagazione delle fessure in materiali fragili. Ricavò la relazione tra l'energia di rilascio  $G$ , pari alla variazione dell'energia potenziale totale del sistema corrispondente ad un incremento unitario della fessura, e il fattore di intensificazione delle tensioni  $K_{I,II,III}$  che definisce il campo di tensioni all'apice della fessura.

Per ottenere tale relazione Irwin esaminò il caso di una lastra infinita caratterizzata dalla presenza di un difetto iniziale di lunghezza  $2a$  e da spostamenti bloccati al contorno, costituita da materiale perfettamente fragile, in uno stato di tensioni o deformazioni piane. Si consideri il Modo I di frattura e si immagina di fare avanzare la fessura di una quantità infinitesima  $da$  nella direzione dell'asse  $x_1$ . Lo stato iniziale  $A$  e quello finale  $B$  sono rappresentati in figura 2.6. Lo stato  $A$  è ottenuto introducendo una fessura di lunghezza  $da$ , all'apice del difetto preesistente, mantenuta chiusa da tensioni esterne di richiusura  $\sigma_{22}^A$  pari alle tensioni  $\sigma_{22}$  effettivamente presenti nello stato  $A$ . Lo stato  $B$  è ottenuto riducendo tale campo di tensioni a zero in modo proporzionale, cioè lo stato  $B$  rappresenta la completa apertura della fessura di un tratto  $da$  lungo cui gli spostamenti risultano pari a  $u_2^B$ . Essendo  $da$  infinitesimo si può assumere che per  $x_1 \in [a, a + da]$  il campo di tensioni  $\sigma_{22}^A$  e il campo di spostamenti  $u_2^B$  siano forniti rispettivamente dalle equazioni (2.13) e (2.18) valide solo in prossimità dell'apice della fessura. Gli stati intermedi come quello rappresentato in figura 2.6 (b) sono caratterizzati da tensioni di richiusura ridotte pari a  $\tau\sigma_{22}^A$  dove  $\tau$  è un parametro scalare che vale 1 nello stato  $A$  e 0 nello stato finale  $B$ . L'apertura della fessura deve anch'essa variare in modo lineare dal valore nullo iniziale alla distribuzione di spostamenti finale  $u_2^B$  quindi in uno stato intermedio si avrà un campo di spostamenti pari a  $(1 - \tau)u_2^B$ . L'energia di rilascio  $G$  può essere calcolata

come variazione dell'energia potenziale totale associata al processo di apertura del tratto  $da$  della fessura. Il lavoro elementare per unità di area compiuto in un dato punto dalle tensioni di richiusura  $\sigma_{22}$  quando la fessura si apre di  $du_2$  è dato da  $-\sigma_{22}du_2$  dove il segno meno è dovuto alla diversa orientazione delle tensioni e degli spostamenti. Il lavoro esterno per unità di superficie in uno stato intermedio in cui il parametro  $\tau$  varia di  $d\tau$  è fornito dall'espressione:

$$d\left(\frac{dW}{bdr}\right) = -(\tau \sigma_{22}^A) d[(1 - \tau) u_2^B] = -\tau \sigma_{22}^A (-d\tau u_2^B) \quad (2.24)$$

dove  $b$  è lo spessore del corpo. Integrando rispetto a  $\tau$  si ottiene il lavoro totale per unità di area passando dallo stato  $A$  allo stato  $B$ :

$$\frac{dW_{A-B}}{bdr} = \sigma_{22}^A u_2^B \int_1^0 \tau d\tau = -\frac{1}{2} \sigma_{22}^A u_2^B \quad (2.25)$$

Il lavoro totale compiuto dalle forze di richiusura risulta pari alla variazione di energia elastica, perchè, per le particolari condizioni al contorno, il lavoro compiuto dalle forze applicate all'infinito risulta nullo, ed è ottenuto integrando l'equazione (2.25) rispetto ad  $r$ :

$$U_B - U_A = W_{A-B} = -\frac{1}{2} b \int_0^{\delta a} \sigma_{22}^A u_2^B dr \quad (2.26)$$

Dall'equazione (2.13) ponendo  $\theta = 0$  il campo di spostamento  $\sigma_{22}^A$  risulta:

$$\sigma_{22}^A = \frac{K_I^A}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.27)$$

dove  $r$  ha origine all'apice della fessura nello stato  $A$ , mentre il campo di spostamenti  $u_2^B$  si ottiene dall'equazione (2.18):

$$u_2^B = \frac{2}{E'} \sqrt{\frac{r'}{\pi}} K_I^B \quad (2.28)$$

dove  $r'$  ha origine all'apice della fessura nello stato  $B$ . Operando il cambio di variabili  $r' = da - r$  nell'equazione (2.28) e sostituendo la (2.27) e la (2.28) nella (2.26) si ottiene:

$$dU = -b \frac{2K_I^A K_I^B}{\pi E'} \int_0^{da} \sqrt{\frac{da-r}{r}} dr = -b \frac{K_I^A K_I^B}{\pi E'} da$$

Tenendo in conto che per condizioni fisse al contorno l'equazione (2.4) diviene  $Gbda = -dU$  e che  $K_I^B \rightarrow K_I^A$  per  $da \rightarrow 0$  si ottiene la relazione tra l'energia di rilascio e il fattore di intensificazione delle tensioni di Irwin:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.29)$$

Analogamente per il Modo II e III risulta:

$$G = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (2.30)$$

$$G = \frac{K_{III}^2}{E'} \quad (2.31)$$

Si può inoltre determinare la relazione tra l'energia di frattura critica  $G_f$  ed il fattore di intensificazione critico delle tensioni  $K_{Ic}$  che nel Modo I è fornita dalla seguente formula:

$$G_f = \frac{K_{Ic}^2}{E'} \quad (2.32)$$

Tale equazione esprime l'equivalenza tra il criterio di propagazione della frattura locale o tensionale proposto da Irwin e quello globale o energetico proposto da Griffith.

## 2.2 Meccanica della frattura non lineare

Anche nell'ambito della meccanica della frattura non lineare (NLFM) il processo di fessurazione può essere studiato con un approccio tensionale (locale) mediante i modelli di frattura coesiva o con un approccio energetico (globale) mediante la metodologia della 'R-curve'. Per maggiore chiarezza si preferisce in questo caso prima descrivere l'approccio locale e poi quello globale.

### 2.2.1 Modello di frattura coesiva

Nel paragrafo precedente sono stati introdotti alcuni concetti della LEFM che prevede che il processo di frattura sia concentrato all'estremità della fessura.

In realtà, nei materiali cementizi, la zona prospiciente l'apice della fessura reale risulta danneggiata e microfessurata ed è caratterizzata dalla presenza di forze di richiusura dovute agli aggregati, alle inclusioni e alle eventuali fibre che si oppongono alla propagazione della macrofessura in evoluzione. In questa zona detta 'zona di processo' avvengono fenomeni microscopici non lineari e dissipativi. Nel caso in cui tale zona risulti piccola rispetto alle dimensioni della fessura reale i concetti della LEFM sono pienamente applicabili, viceversa se le sue dimensioni sono confrontabili con quelle della fessura va opportunamente modellata.

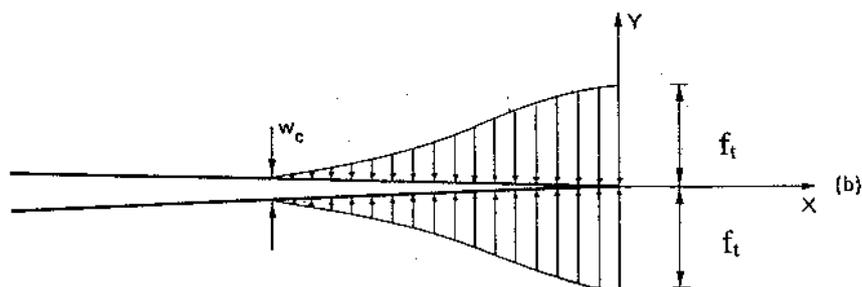


Figura 2.7: Forze coesive di richiusura presenti nella zona di processo.

La zona di processo può essere simulata imponendo una distribuzione di forze coesive dietro l'estremità della fessura. Tali modelli sono stati inizialmente introdotti da Dugdale [5], da Barenblatt [2], più recentemente sono stati riproposti da numerosi ricercatori tra cui Hillerborg [7] con il nome di 'Modello di frattura fittizia o coesiva'.

Si illustrerà di seguito il modello di frattura coesiva nel Modo I di propagazione che prevede che l'intero processo di frattura sia concentrato nella zona di processo e sia caratterizzato da una legge tensioni-spostamenti di softening. In figura 2.7 è rappresentata la zona di processo vista come un prolungamento fittizio della fessura reale. Infatti il punto che separa la zona di processo dalla fessura reale è detto estremo della fessura reale mentre il punto che separa la zona di processo dal materiale integro è detto estremo della fessura fittizia.

Le ipotesi alla base del modello coesivo sono le seguenti [6]:

- la zona di processo inizia a svilupparsi quando la tensione principale massima raggiunge la resistenza a trazione del materiale  $f_t$  e si propaga in direzione ortogonale alla tensione principale di trazione;
- il materiale nella zona di processo risulta parzialmente danneggiato ma può ancora trasferire delle tensioni e i meccanismi che permettono a livello microscopico di trasferire tensioni, nei materiali eterogenei, come il calcestruzzo, sono processi di danneggiamento quali l'interazione tra inerti e malta, lo sfilamento delle fibre;
- il materiale si comporta in modo elastico lineare fuori dalla zona di processo;
- il modello risulta accettabile se in nessun punto della struttura al di fuori della zona di processo la tensione principale di trazione raggiunge la massima resistenza a trazione del materiale.

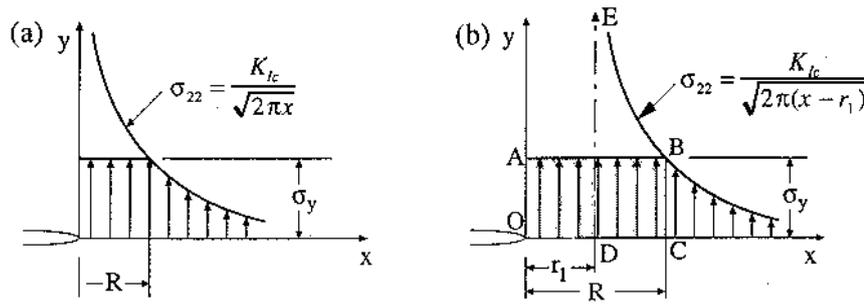


Figura 2.8: Stima di Irwin delle estensione della zona di processo.

Le forze di trazione coesive agenti nella zona di processo sono definite come funzioni decrescenti della distanza  $w$  tra le due facce della fessura. Le assunzioni usualmente fatte che verranno introdotte anche nello sviluppo dei modelli presentati nei capitoli successivi sono le seguenti:

- assenza di componenti tangenziali;
- legge di softening tra tensioni coesive  $\sigma$  e spostamenti  $w$  di tipo lineare, bilineare (comunemente usate per il calcestruzzo) o di tipo esponenziale;
- introduzione di un valore  $w_c$  detto apertura critica della fessura tale che per spostamenti maggiori di  $w_c$  il materiale non risulta più in grado di trasferire tensioni;
- area al di sotto della curva  $\sigma - w$  pari all'energia di frattura  $G_f$ .

## 2.2.2 Stima della lunghezza della zona di processo

La definizione di una lunghezza della zona di processo è un problema molto dibattuto in letteratura. Se ne può ottenere una approssimativa stima seguendo una procedura proposta da Irwin (1958) nel caso di materiali duttili.

Irwin considerò che la distribuzione di tensioni  $\sigma_{22}$ , nel Modo I di frattura, all'apice della fessura, lungo la direzione della fessura stessa fosse fornita dall'equazione (2.13) con  $\theta = 0$ . In figura 2.8 è rappresentato l'andamento della  $\sigma_{22}$  dato da  $\sigma_{22} = K_I/\sqrt{2\pi x}$  ottenuta dalla (2.13), sostituendo  $x$  ad  $r$ , tale espressione delle tensioni risulta valida solo per valori di  $x$  piccoli rispetto alle dimensioni della struttura. Per una prima stima della lunghezza  $R$  della zona di processo, si pone un limite alle tensioni ammissibili pari alla tensione di snervamento  $\sigma_y$ , assumendo quindi, che per  $x = R$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_y$ ,  $R$  può essere immediatamente valutata:

$$R = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.33)$$

In realtà la zona non elastica deve essere più grande perchè la risultante delle tensioni presenti in tale zona deve essere uguale a quella fornita dalle tensioni calcolate elasticamente  $\sigma_{22} = K_I/\sqrt{2\pi x}$ , affinché, per il principio di Saint Venant, il campo di tensioni ad una certa distanza dalla zona di processo rimanga invariato. A tal fine, si fa slittare l'apice della fessura reale di una quantità incognita  $r_1$  ottenendo una fessura elastica equivalente rappresentata in figura 2.8. Graficamente l'area al di sotto della distribuzione elastica di tensioni pari a BCDE deve risultare uguale all'area al di sotto della distribuzione plastica di tensioni OABCO (vedi figura 2.8):

$$\int_{r_1}^R K_I [2\pi(x - r_1)]^{-1/2} dx = R\sigma_y \quad (2.34)$$

Dalla condizione  $\sigma_{22} = \sigma_y$  per  $x = R$ , ponendo  $\sigma_{22} = K_I/\sqrt{2\pi(x - r)}$  si ottiene:

$$R - r_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.35)$$

Dall'equazione (2.34) e (2.35) si può ricalcolare  $R$ :

$$R = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.36)$$

Anche se l'espressione (2.36) fornisce una stima molto approssimata, è importante notare che la dimensione della zona di processo risulta proporzionale al quadrato del rapporto tra il fattore di intensificazione delle tensioni e la resistenza del materiale ed il parametro di proporzionalità dipende dal tipo di problema esaminato ed in particolare dal materiale e dalle esatte condizioni di carico. La massima dimensione della zona di processo è quella che corrisponde alla situazione critica quando  $K_I = K_{Ic}$  e risulta:

$$R_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.37)$$

Si può estendere tale stima della lunghezza della zona di processo ai materiali quasi-fragili. Si considera la situazione critica, quando  $K_I = K_{Ic}$  il punto all'apice della fessura ha completato il processo di softening ed è caratterizzato da  $\sigma_{22} = 0$ , mentre gli altri punti della zona di processo sono in uno stato intermedio di frattura.

Lungo la zona di processo si assume una distribuzione di tensioni  $\sigma_{22}$ , rappresentata in figura 2.9, pari a:

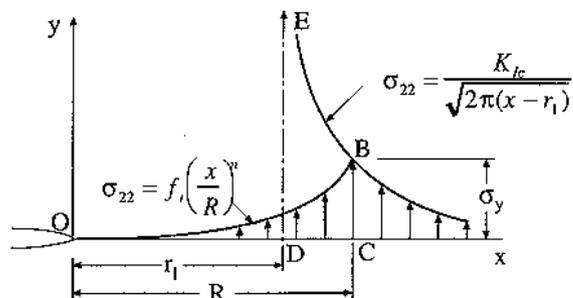


Figura 2.9: Stima della lunghezza della zona di processo per un materiale caratterizzato da un comportamento di softening.

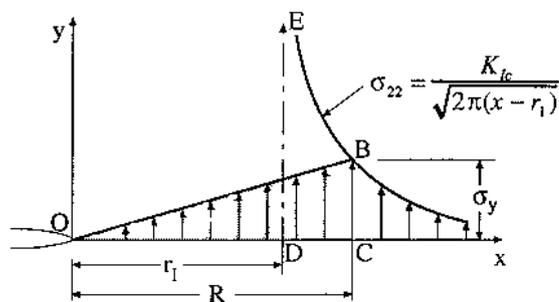


Figura 2.10: Stima della lunghezza della zona di processo nel caso di un materiale caratterizzato da softening lineare.

$$\sigma_{22} = f_t \left( \frac{x}{R_c} \right)^n \quad (2.38)$$

dove  $f_t$  è la resistenza a trazione del materiale, e per  $n = 1$  si ottiene una distribuzione lineare di tensioni rappresentata in figura 2.10. Seguendo il procedimento di Irwin si uguaglia la risultante della distribuzione elastica delle tensioni pari all'area DEBCD e la risultante delle tensioni nella zona di processo pari all'area OBCDO:

$$\int_{r_1}^{R_c} K_{Ic} [2\pi(x - r_1)]^{-1/2} dx = \int_0^{R_c} f_t \left( \frac{x}{R_c} \right)^n dx = \frac{1}{n+1} R_c f_t \quad (2.39)$$

Questa equazione insieme alla (2.35) che diviene:

$$R_c - r_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{f_t} \right)^2 \quad (2.40)$$

fornisce il valore di  $R_c$ :

$$R_c = \frac{n+1}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{f_t} \right)^2 = \eta \frac{E' G_f}{f_t^2} \quad (2.41)$$

dove si è utilizzata l'espressione (2.32) introdotta da Irwin. Va comunque sottolineato come l'equazione (2.41) fornisca, anche in questo caso, unicamente una stima approssimata della lunghezza della zona di processo. Se  $R_c$  risulta sufficientemente piccolo rispetto alle dimensioni della struttura, LEFM può essere applicata altrimenti bisognerà opportunamente analizzare e tener in conto i processi non lineari che avvengono in tale zona all'apice della fessura.

Nel caso dei modelli di frattura coesivi introdotti nel paragrafo precedente, alcuni studiosi tra cui Hillerborg e Petersson (1976) hanno definito come lunghezza caratteristica,  $\ell_{ch}$  la quantità:

$$\ell_{ch} = \frac{E' G_f}{f_t^2} \quad (2.42)$$

che dipende dalla resistenza e dall'energia di frattura del materiale [3].

Nella tabella successiva sono riportate alcune stime della lunghezza della zona di processo ottenute mediante misure sperimentali da vari autori per i materiali cementizi [9]:

<b>Materiale</b>	$\ell(mm)$	<b>Fonte</b>
Malta	100 – 200	Hillerborg (1983)
Cls ad alta resistenza (50-100MPa)	150 – 300	Hilsdorf & Brameshuber (1991)
Cls normale	200 – 500	Hillerborg (1983)

Dalla tabella si evince che non è possibile studiare mediante LEFM la risposta dei regolari provini utilizzati in laboratorio.

### 2.2.3 Fessura elastica equivalente

Il processo di fessurazione dei materiali quasi-fragili, per i quali la dimensione della zona di processo non è trascurabile rispetto alle dimensioni dell'intera struttura, è un fenomeno non lineare. Se l'estensione della zona di processo risulta non trascurabile ma comunque ridotta si possono usare modelli semplificati, che studiano la risposta del provino lontano dalla fessura, introducendo una fessura fittizia il cui apice è collocato in un punto della zona di processo, come è stato esposto nel paragrafo precedente. Il problema è quello di valutare l'estensione della fessura equivalente e quindi di collocare il suo apice. L'estensione della fessura equivalente è definita mediante la seguente formula:

$$\Delta a_e = a_e - a_0 \quad (2.43)$$

dove  $a_e$  è la lunghezza della fessura equivalente mentre  $a_0$  è la lunghezza del difetto iniziale.

Una stima dell'estensione della fessura equivalente si può ottenere con il procedimento utilizzato nel paragrafo precedente. Se si assicura, infatti, l'equivalenza tra la risultante delle tensioni all'apice della fessura reale con quella all'apice della fessura equivalente, in presenza dello stesso carico, l'introduzione della fessura fittizia al posto di quella reale non genera significativi cambiamenti nei campi di tensione, deformazione e spostamenti lontani dalla fessura stessa. In questo caso  $\Delta a_e$  risulta uguale a  $r_1$  ed è fornita dalla seguente formula:

$$\Delta a_e = r_1 = R - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{f_t} \right)^2 \quad (2.44)$$

Nella situazione critica l'estensione della fessura equivalente diventa:

$$\Delta a_{ec} = R_c - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{f_t} \right)^2 \quad (2.45)$$

### 2.2.4 R-curve

I modelli basati sulle  $R$ -curve permettono di descrivere il processo di propagazione della fessura e di determinare le curve carico-spostamento per materiali quasi-fragili. In questi modelli viene esteso il criterio energetico di Griffith introdotto nell'ambito della LEFM,  $G = G_f$ , al caso di materiali caratterizzati da una resistenza all'avanzamento della fessura  $R$  non costante. In generale nei modelli  $R$ -curve si assume

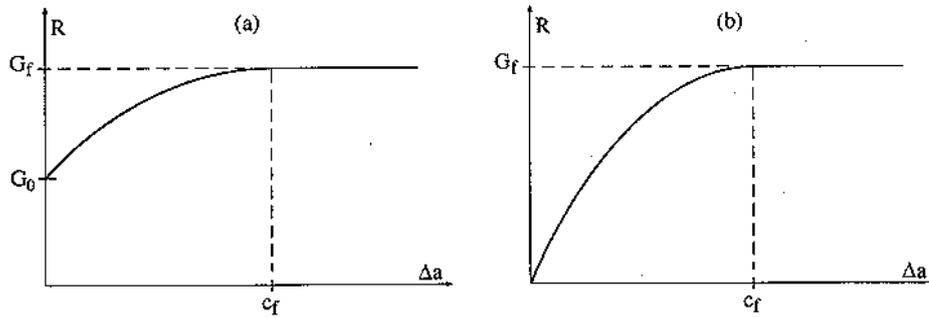


Figura 2.11: Due possibili  $R$ -curve: (a) con soglia iniziale; (b) senza soglia iniziale.

che la resistenza dipenda solo dall'estensione della fessura equivalente  $\Delta a_e$ , quindi, la  $R$ -curve risulta:

$$R = R(\Delta a_e) \quad (2.46)$$

ed il criterio di avanzamento della frattura diventa:

$$G = R \quad (2.47)$$

dove  $G$  è l'energia di rilascio definita dall'equazione (2.2). Nel seguito del paragrafo si indicherà semplicemente con  $\Delta a$  la  $\Delta a_e$ .

Entro certi limiti le funzioni  $R(\Delta a)$  possono essere viste come proprietà del materiale, come è stato proposto da Irwin (1960), anche se ultimamente si sta sempre di più diffondendo la convinzione che la forma della  $R$ -curve dipenda significativamente dalle caratteristiche geometriche della struttura. Si rende in tal caso necessario ottenere la  $R$ -curve per la struttura in esame prima di iniziare l'analisi del processo di frattura. La determinazione delle  $R$ -curve avviene di solito per via sperimentale, mediante diversi metodi, qui omessi per brevità [3], che sono basati sulla determinazione dei valori delle coppie  $(G, \Delta a)$  in vari istanti della crescita quasi statica della fessura. Infatti, in condizioni di propagazione quasi-statica,  $G = R$ , tali coppie rappresentano punti della curva  $R - \Delta a$ .

In figura 2.11 sono rappresentate due possibili  $R$ -curve. Si può notare come per la  $R$ -curve, rappresentata in figura 2.11(a), l'energia di rilascio  $G$  che guida il fenomeno di propagazione deve raggiungere una certa soglia  $G_0$  prima che la crescita della fessura abbia inizio, mentre, in figura 2.11(b), la fessura inizia a crescere immediatamente. In entrambi i casi la resistenza aumenta con il propagarsi della fessura fino ad un certo valore limite  $G_f$ . Questo valore corrisponde al completo sviluppo della zona di processo che inizierà da questo punto in poi a traslare mantenendo invariata la forma. Chiamando  $c_f$  il valore della lunghezza della fessura per

il quale la  $R$ -curve diventa una retta parallela all'asse delle  $x$ ,  $c_f$  e  $G_f$  dipendono dal materiale. Se si assume che la  $R$ -curve sia indipendente dalla geometria e dalle dimensioni del problema  $c_f$  e  $G_f$  dipendono solo dal materiale.

In un processo quasi statico di frattura l'uguaglianza  $G = R$  è soddisfatta quando la fessura si propaga. Per una struttura caratterizzata dalla presenza di un singolo carico  $P$  o di una forza generalizzata  $P$  che tiene in conto il sistema di carichi applicati, si può determinare la risposta carico spostamento  $P(u)$  dalla  $R$ -curve semplicemente imponendo  $G(P(u), a) = R(a - a_0)$  e usando l'espressione di  $G$  data dall'equazione (2.6) o dall'equazione (2.7) determinate nell'ambito della LEFM.

## 2.3 Tecniche di omogeneizzazione

In questo capitolo si utilizzerà la notazione estesa per i tensori del quarto ordine per rendere più chiari i concetti esposti, nei capitoli successivi si adotterà invece la notazione ridotta.

### 2.3.1 Moduli elastici effettivi

La valutazione delle proprietà meccaniche di solidi eterogenei può essere ottenuta attraverso le tecniche di omogeneizzazione. Per l'analisi dei materiali compositi è conveniente introdurre il concetto di Volume Elementare Rappresentativo (RVE). Si definisce RVE un campione di composito tale che risulti strutturalmente tipico dell'intero materiale e contenga un numero sufficiente delle diverse fasi presenti nel materiale, cioè l'RVE deve risultare grande se confrontato con la scala della microstruttura, ma nello stesso tempo piccolo rispetto all'intero corpo. Un volume elementare così definito è rappresentativo delle proprietà del mezzo composito che risultano indipendenti dalle condizioni al contorno se queste sono macroscopicamente uniformi. Il volume elementare rappresentativo RVE fornisce un valido confine tra la teoria del continuo e quella microscopica, per scale più grandi del volume elementare rappresentativo si può usare la meccanica del continuo, per scale più piccole è necessario analizzare la microstruttura del materiale.

In presenza di tensioni e di deformazioni nel volume elementare rappresentativo la tensione media  $\bar{\sigma}_{ij}$  e deformazione media  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  sono definite dalle seguenti espressioni:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2.48)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (2.49)$$

dove  $V$  è il volume del RVE.

Si considera il caso in cui l'RVE è soggetto a condizioni al contorno di tipo omogeneo. Sono dette condizioni al contorno omogenee quelle condizioni che applicate sulla superficie di un corpo omogeneo producono un campo a sua volta omogeneo nel corpo. Queste condizioni al contorno sono ottenute imponendo o un campo di spostamenti sulla frontiera del corpo  $\partial V$  così definito:

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (2.50)$$

dove  $\varepsilon_{ij}^0$  sono deformazioni costanti, o un campo di tensioni:

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (2.51)$$

dove  $\sigma_{ij}^0$  sono tensioni costanti e  $\mathbf{n}$  è il vettore della normale uscente al contorno  $\partial V$ .

Nel calcolare la deformazione media in un materiale composito, risolvendo il problema elastico del volume elementare soggetto alla condizione al contorno espressa dalla (2.50), si deduce che la deformazione media  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  coincide con quella costante  $\varepsilon_{ij}^0$  applicata su  $\partial V$ . Tale risultato rappresenta il teorema della deformazione media. Analogamente, per il teorema della tensione media, applicando le condizioni al contorno espresse dalla (2.51), la tensione media  $\bar{\sigma}_{ij}$  nel composito risulta uguale alle tensioni costanti  $\sigma_{ij}^0$  [1].

Si possono ora definire i moduli elastici effettivi di un materiale composito. Si consideri un RVE eterogeneo soggetto alle condizioni al contorno di deformazione omogenea (2.50) che producono una deformazione media del materiale  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0$ . Il calcolo delle tensioni medie  $\bar{\sigma}_{ij}$  permette di valutare i moduli effettivi elastici. Lo spostamento  $u_i(\mathbf{x})$  può essere determinato in funzione dello spostamento  $u_i^{(kl)}(\mathbf{x})$  indotto da una deformazione  $\varepsilon_{kl}^0 = 1$  con la seguente espressione:

$$u_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_{kl}^0 u_i^{(kl)}(\mathbf{x}) \quad (2.52)$$

facendo una sommatoria sugli indici  $k$  ed  $l$ . Il campo di deformazione ed il campo di tensione in un punto  $\mathbf{x}$  sono forniti rispettivamente da:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{kl}^0 \left( u_{i,j}^{(kl)}(\mathbf{x}) + u_{j,i}^{(kl)}(\mathbf{x}) \right) \quad (2.53)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} C_{ijpq}(\mathbf{x}) \left( u_{p,q}^{(kl)}(\mathbf{x}) + u_{q,p}^{(kl)}(\mathbf{x}) \right) \varepsilon_{kl}^0 \quad (2.54)$$

dove  $C_{ijpq}(\mathbf{x})$  sono i moduli elastici del materiale composito che per un composito a due fasi possono assumere i valori  $C_{ijpq}^{(1)}(\mathbf{x})$  o  $C_{ijpq}^{(2)}(\mathbf{x})$ , caratteristici delle due fasi. Facendo la media delle tensioni secondo la (2.48) si ottiene:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (2.55)$$

dove  $\bar{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon_{kl}^0$  per il teorema della deformazione media e  $C_{ijkl}^*$  sono detti moduli elastici effettivi e sono dati da:

$$C_{ijkl}^* = \frac{1}{2V} \int_V C_{ijpq}(\mathbf{x}) (u_{p,q}^{(kl)}(\mathbf{x}) + u_{q,p}^{(kl)}(\mathbf{x})) dV \quad (2.56)$$

Per un composito a due fasi, perfettamente aderenti, la deformazione media e la tensione media risultano rispettivamente:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = c_1 \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + c_2 \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} \quad (2.57)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = c_1 \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + c_2 \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \quad (2.58)$$

dove  $c_\alpha$  con  $\alpha = 1, 2$  indica la frazione di volume delle fasi ( $c_1 + c_2 = 1$ ), e  $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)}$  e  $\bar{\sigma}_{ij}^{(\alpha)}$  rappresentano rispettivamente la deformazione media e la tensione media nella fase  $\alpha$ . Utilizzando il teorema della deformazione media, le equazioni (2.55), (2.57), (2.58) e l'equazione costitutiva nelle varie fasi data da:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(\alpha)} = C_{ijkl}^{(\alpha)} \bar{\varepsilon}_{kl}^{(\alpha)} \quad (2.59)$$

si ottiene:

$$C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^0 = C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{kl}^0 + c_2 \left( C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)} \right) \varepsilon_{kl}^{(2)} \quad (2.60)$$

Con l'equazione (2.60) i moduli elastici effettivi si possono determinare immediatamente conoscendo la deformazione media nella fase  $\alpha = 2$ . Introducendo i tensori  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  tali che:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{A}_1 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \mathbf{A}_2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad e \quad c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} \quad (2.61)$$

si può ottenere una equivalente espressione per il tensore effettivo  $\mathbf{C}^*$ :

$$\mathbf{C}^* = c_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{C}^{(1)} + c_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{C}^{(2)} \quad (2.62)$$

dove  $\mathbf{I}$  è l'identità del quarto ordine.

Imponendo sul composito condizioni al contorno di tensione omogenea (2.51) i moduli complementari effettivi  $S_{ijkl}^*$  che legano la tensione media alla deformazione media possono essere definiti mediante un analogo procedimento che fornisce:

$$S_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 = S_{ijkl}^{(1)} \sigma_{kl}^0 + c_2 \left( S_{ijkl}^{(2)} - S_{ijkl}^{(1)} \right) \sigma_{kl}^{(2)} \quad (2.63)$$

e quindi:

$$\mathbf{S}^* = c_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{S}^{(1)} + c_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{S}^{(2)} \quad (2.64)$$

dove  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  sono tali che:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{B}_1 \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{B}_2 \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad e \quad c_1 \mathbf{B}_1 + c_2 \mathbf{B}_2 = \mathbf{I}$$

### 2.3.2 Metodi basati sull'inclusione di Eshelby

I modelli micromeccanici rappresentano un efficiente strumento per stimare la rigidità effettiva dei materiali compositi ed un gran numero di risultati e confronti sperimentali sono disponibili in letteratura [13, 1]. Tra questi il modello più semplice è lo schema del cilindro o della sfera composti proposto da Hashin (1962). In questo metodo il materiale composito è modellato come un insieme di sfere o cilindri di differenti dimensioni immersi in una matrice continua. Nello schema "self-consistent" (S-C) formulato da Budiansky (1965) e Hill (1965), le inclusioni sono considerati come micro-inclusioni immerse in un solido elastico omogeneo caratterizzato dai moduli elastici incogniti del composito. Le proprietà effettive del composito sono quindi valutate mediante una procedura numerica iterativa per tenere in conto l'effetto di interazione tra le fasi. Si esporrà di seguito con maggior dettaglio la tecnica dell'inclusione di Eshelby a partire dalla quale sono stati sviluppati numerosi modelli anche per valutare le proprietà meccaniche di materiali in presenza di fessure.

La tecnica proposta da Eshelby fornisce i moduli elastici effettivi nel caso di un'inclusione ellissoidale in un mezzo infinito, costituito dalla matrice, soggetto ad una assegnata deformazione media. La soluzione trovata nel caso di inclusione ellittica include molti casi particolari tra cui la sfera, il cilindro ellittico e la fessura.

Eshelby esaminò il problema di un mezzo omogeneo infinito caratterizzato da un tensore elastico  $\mathbf{C}^{(1)}$  soggetto ad una distorsione  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , legata per esempio ad una deformazione termica, in un dominio ellissoidale  $\Omega$ . Un campo di tensioni interne si sviluppa in quanto la naturale deformazione di  $\Omega$  risulta impedita dal materiale intorno. La deformazione totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  in  $\Omega$  è data dalla somma della distorsione e della deformazione elastica risultante che è legata alle tensioni dalla legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{(1)} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad \text{in } \Omega \quad (2.65)$$

Eshelby (1957) dimostrò che se  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  è uniforme nel dominio  $\Omega$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  è uniforme e si calcola tramite la relazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.66)$$

dove  $\mathbf{P}$  è detto tensore di Eshelby. Espressioni esplicite delle componenti di  $\mathbf{P}$  in termini dei moduli  $\mathbf{C}^{(1)}$  per vari tipi di inclusioni sono fornite da Mura [13].

Se la matrice infinita contenente l'inclusione ellissoidale  $\Omega$  con la distorsione  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  è soggetta a spostamenti al contorno omogenei  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}$  all'infinito, cioè ad una deformazione media assegnata, la tensione totale in  $\Omega$  risulta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{C}^{(1)} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad \text{in } \Omega$$

Sostituendo la regione ellissoidale  $\Omega$ , caratterizzata da moduli elastici  $\mathbf{C}^{(1)}$ , con

un'inclusione equivalente con moduli elastici  $\mathbf{C}^{(2)}$  si ottiene:

$$\mathbf{C}^{(1)} (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{C}^{(2)} (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^0) \quad (2.67)$$

con  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}^*$ .

L'equazione (2.67) permette di determinare il tensore di concentrazione  $\mathbf{A}_2$  nel caso di una matrice infinita con tensore elastico  $\mathbf{C}^{(1)}$  caratterizzata dalla presenza di un'inclusione con tensore di rigidezza  $\mathbf{C}^{(2)}$ , tramite la seguente procedura. La deformazione nell'inclusione, tenendo conto che  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , è fornita dall'espressione:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.68)$$

Dall'equazione (2.67) risulta:

$$\mathbf{C}^{(1)} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{C}^{(2)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} \quad (2.69)$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{C}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^* = (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} \quad (2.70)$$

e quindi:

$$\mathbf{C}^{(1)} (\mathbf{P}^{-1} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^0)) = (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} \quad (2.71)$$

ovvero:

$$(\mathbf{C}^{(1)} \mathbf{P}^{-1} - (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)})) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.72)$$

Premoltiplicando primo e secondo membro per  $\mathbf{P} (\mathbf{C}^{(1)})^{-1}$  si ottiene:

$$\left( \mathbf{I} - \mathbf{P} (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}) \right) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.73)$$

ed infine si ricava il fattore di concentrazione come:

$$\mathbf{A}_2 = \left( \mathbf{I} - \mathbf{P} (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}) \right)^{-1} \quad (2.74)$$

Noto  $\mathbf{A}_2$  si può facilmente determinare il tensore effettivo elastico  $\mathbf{C}^*$  utilizzando l'equazione (2.62).

### 2.3.3 Mezzi periodici

Si consideri un mezzo periodico ottenuto dall'assemblaggio di celle unitarie  $V$  ripetitive a forma di parallelepipedo di dimensioni  $2a_1$ ,  $2a_2$ ,  $2a_3$  rispettivamente lungo gli assi coordinati  $x_1$ ,  $x_2$  ed  $x_3$ . Se una deformazione media  $\varepsilon_{ij}^0$  o una tensione media  $\sigma_{ij}^0$  con  $i, j = 1, 2, 3$  è applicata ad un solido caratterizzato da una microstruttura periodica il campo di tensioni e di deformazioni risultante sarà anch'esso periodico con periodicità  $V$ . Il problema elastostatico così formulato consiste nella determinazione

dei campi di spostamento, deformazione e tensione  $\{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$  che soddisfino le classiche equazioni di campo per un mezzo tridimensionale eterogeneo:

$$\sigma_{ij,j}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2.75)$$

$$2\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = u_{i,j}(x_1, x_2, x_3) + u_{j,i}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.76)$$

$$C_{ijhk}(x_1, x_2, x_3) \varepsilon_{hk}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.77)$$

dove gli indici ripetuti si intendono sommati, il pedice virgola  $(\bullet)_{,i}$  indica la derivata parziale  $\partial/\partial x_i$  e  $C_{ijhk}(x_1, x_2, x_3)$  sono le componenti del tensore costitutivo elastico che risultano anch'esse periodiche. In questo caso i campi di tensione e di deformazioni sono espressi dalle seguenti formule:

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^P(x_1, x_2, x_3) \quad (2.78)$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^P(x_1, x_2, x_3) \quad (2.79)$$

Inoltre  $\varepsilon_{ij}^0 = \bar{\varepsilon}_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^0 = \bar{\sigma}_{ij}$  sono le medie rispettivamente dei campi di tensione e deformazione e risultano:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) dV \quad (2.80)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) dV \quad (2.81)$$

mentre  $\varepsilon_{ij}^P$  e  $\sigma_{ij}^P$  sono le parti periodiche dei campi di deformazione e tensione e sono caratterizzate dall'aver media nulla in  $V$ :

$$0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^P(x_1, x_2, x_3) dV \quad (2.82)$$

$$0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^P(x_1, x_2, x_3) dV \quad (2.83)$$

Si può notare come assegnando una deformazione media  $\varepsilon_{ij}^0$ , l'equazione (2.78) deve essere considerata per imporre l'opportuna deformazione media e l'equazione (2.81) per determinare la tensione media risultante  $\sigma_{ij}^0$ , analogamente se si assegna un campo medio di tensioni, l'equazione (2.79) deve essere tenuta in conto mentre l'equazione (2.80) è necessaria per determinare il campo medio di deformazioni risultante.

I tensori di rigidità e complementare globali sono definiti come segue:

$$C_{ijhk}^* \varepsilon_{hk}^0 = \sigma_{ij}^0 \quad S_{ijhk}^* \sigma_{hk}^0 = \varepsilon_{ij}^0 \quad (2.84)$$

Combinando l'equazione (2.78) con l'equazione di congruenza (2.76) si ottiene l'espressione degli spostamenti:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij}^0 x_j + u_i^P(x_1, x_2, x_3) \quad (2.85)$$

dove  $u_i^P(x_1, x_2, x_3)$  è la parte periodica degli spostamenti tale che  $u_{i,j}^P(x_1, x_2, x_3) + u_{j,i}^P(x_1, x_2, x_3) = 2\varepsilon_{ij}^P(x_1, x_2, x_3)$ .

Per la periodicità e continuità degli spostamenti  $u_i^P(x_1, x_2, x_3)$  le seguenti condizioni devono essere soddisfatte al contorno della cella unitaria  $\partial V$ :

$$\begin{aligned} u_i^P(a_1, x_2, x_3) &= u_i^P(-a_1, x_2, x_3) & \forall x_2 \in [-a_2, a_2] \\ & & \forall x_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i^P(x_1, a_2, x_3) &= u_i^P(x_1, -a_2, x_3) & \forall x_1 \in [-a_1, a_1] \\ & & \forall x_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i^P(x_1, x_2, a_3) &= u_i^P(x_1, x_2, -a_3) & \forall x_1 \in [-a_1, a_1] \\ & & \forall x_2 \in [-a_2, a_2] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Tenendo in conto l'equazione (2.85) le condizioni di continuità (2.86) diventano:

$$\begin{aligned} u_i(a_1, x_2, x_3) - u_i(-a_1, x_2, x_3) - 2\varepsilon_{i1}^0 a_1 &= 0 & \forall x_2 \in [-a_2, a_2] \\ & & \forall x_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i(x_1, a_2, x_3) - u_i(x_1, -a_2, x_3) - 2\varepsilon_{i2}^0 a_2 &= 0 & \forall x_1 \in [-a_1, a_1] \\ & & \forall x_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i(x_1, x_2, a_3) - u_i(x_1, x_2, -a_3) - 2\varepsilon_{i3}^0 a_3 &= 0 & \forall x_1 \in [-a_1, a_1] \\ & & \forall x_2 \in [-a_2, a_2] \end{aligned} \quad (2.87)$$

D'altra parte per l'equilibrio della parte periodica delle tensioni su due celle adiacenti si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^P(a_1, x_2, x_3) n_j(a_1, x_2, x_3) &= -\sigma_{ij}^P(-a_1, x_2, x_3) n_j(-a_1, x_2, x_3) & \forall x_2 \in [-a_2, a_2] \\ & & \forall x_3 \in [-a_3, a_3] \\ \sigma_{ij}^P(x_1, a_2, x_3) n_j(x_1, a_2, x_3) &= -\sigma_{ij}^P(x_1, -a_2, x_3) n_j(x_1, -a_2, x_3) & \forall x_1 \in [-a_1, a_1] \\ & & \forall x_3 \in [-a_3, a_3] \\ \sigma_{ij}^P(x_1, x_2, a_3) n_j(x_1, x_2, a_3) &= -\sigma_{ij}^P(x_1, x_2, -a_3) n_j(x_1, x_2, -a_3) & \forall x_1 \in [-a_1, a_1] \\ & & \forall x_2 \in [-a_2, a_2] \end{aligned} \quad (2.88)$$

dove  $n_j$  è la normale esterna a  $\partial V$ . Si deve sottolineare come mentre la deformazione  $\varepsilon_{ij}^P$ , associata ad un campo di spostamenti  $u_i^P$ , che soddisfa le equazioni (2.86) ha

media nulla, le tensioni  $\sigma_{ij}^P$ , che soddisfano le equazioni (2.88), possono non avere media nulla, quindi per caratterizzare completamente le  $\sigma_{ij}^P$  è necessario imporre anche l'equazione (2.83).

Tenendo in conto le osservazioni fatte il problema elastostatico può essere riformulato nel modo seguente sia nel caso di deformazione media imposta che di tensione media assegnata.

Assegnato un campo di deformazioni medio  $\varepsilon_{ij}^0$  è possibile determinare  $\{u_i^P, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$  tali che soddisfino in  $R^3$ :

$$\sigma_{ij,j}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2.89)$$

$$2\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = 2\varepsilon_{ij}^0 + u_{i,j}^P(x_1, x_2, x_3) + u_{j,i}^P(x_1, x_2, x_3) \quad (2.90)$$

$$C_{ijhk}(x_1, x_2, x_3) \varepsilon_{hk}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.91)$$

e calcolare il campo di tensioni medio  $\sigma_{ij}^0$  tramite la (2.81) e il tensore elastico tramite la (2.84).

Analogamente assegnato un campo di tensioni medio  $\sigma_{ij}^0$  è possibile determinare  $\{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^P\}$  tali che soddisfino in  $R^3$ :

$$\sigma_{ij,j}^P(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2.92)$$

$$2\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = u_{i,j}(x_1, x_2, x_3) + u_{j,i}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.93)$$

$$C_{ijhk}(x_1, x_2, x_3) \varepsilon_{hk}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^P(x_1, x_2, x_3) \quad (2.94)$$

e infine valutare il campo di deformazioni medio  $\varepsilon_{ij}^0$  tramite la (2.80) e il tensore di elasticità tramite la (2.84).

Si dimostra che il problema periodico è ben posto ed ammette un'unica soluzione a meno di un moto rigido [17]. In generale per la risoluzione del problema periodico si adotta la rappresentazione in serie di Fourier delle variabili. Il problema periodico è stato formulato in  $R^3$  ma tenendo in conto la periodicità delle funzioni caratteristiche di tale problema può essere riformulato solo in  $V$  e la soluzione calcolata in  $V$  può essere poi estesa ad  $R^3$ .

### 2.3.4 Omogeneizzazione di mezzi periodici

Lo studio di materiali elastici caratterizzati da una distribuzione periodica di microdifetti è stato affrontato in letteratura da numerosi autori [15, 16, 11] e risulta molto complesso da un punto di vista matematico. In particolare Nemat-Nasser et al. [15, 16] hanno utilizzato le serie di Fourier per estendere la tecnica dell'inclusione di Eshelby ad un materiale elastico caratterizzato da una distribuzione periodica di inclusioni o di vuoti. Di seguito, si riporteranno solo alcuni cenni di tale studio, per la trattazione completa del problema si rimanda all'articolo [16].

Si consideri il solido elastico lineare infinitamente esteso ottenuto dall'assemblaggio di celle unitarie  $V$ , introdotto nel precedente paragrafo. Ciascuna cella è

caratterizzata dalla presenza di una inclusione di forma generica  $\Omega$ , così  $V - \Omega$  indica il volume occupato dalla matrice, mentre la percentuale in volume di  $\Omega$  è detta  $f$ .

La determinazione del tensore elastico effettivo  $\mathbf{C}^*$  per il solido descritto è ottenuta sostituendo la cella contenente il difetto con una cella equivalente caratterizzata da un tensore elastico pari a quello della matrice e soggetta ad una opportuna distorsione al posto dell'eterogeneità, in modo che i campi di spostamento e deformazione risultanti siano identici a quelli della cella originaria eterogenea. Quindi il problema è risolto mediante una procedura che rappresenta un'estensione della tecnica dell'inclusione di Eshelby al caso di solidi periodici che si sviluppa in due passi:

- risoluzione del problema della distorsione cioè determinazione della perturbazione del campo elastico dovuta alla assegnazione di una distorsione nella cella unitaria omogenea;
- introduzione di una eterogeneità o di un vuoto nella cella unitaria.

Si considera il problema della distorsione, cioè si assegna un arbitrario  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})$  nella cella unitaria omogenea, definito su tutto  $V$  ma diverso da zero solo in  $\Omega$ . I campi di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{x})$ , di spostamento  $\mathbf{u}^P(\mathbf{x})$  e di tensione  $\boldsymbol{\sigma}^P(\mathbf{x})$  risultanti sono periodici a causa della periodicità del problema ed anche la distorsione risulta periodica  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})$ , perciò possono essere espressi in termini di serie di Fourier:

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty'} \bar{\mathbf{u}}^P(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) \quad (2.95)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) \quad (2.96)$$

dove  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  con componenti  $\xi_j = 2\pi n_j/a_j$  ( $n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , con  $j$  non sommato e  $j = 1, 2, 3$ ) e l'apostrofo sulla sommatoria indica che il primo termine per  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  non viene considerato risultando  $\hat{\mathbf{u}}^P(\mathbf{0})$  una traslazione rigida. I coefficienti di Fourier sono espressi dalle seguenti formule:

$$\bar{\mathbf{u}}^P(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{u}^P(\mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) dV \quad (2.97)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) dV \quad (2.98)$$

Il campo di tensioni essendo il materiale lineare elastico si ottiene come:

$$\boldsymbol{\sigma}^P(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})) \quad (2.99)$$

dove  $\mathbf{C}$  è il tensore elastico caratteristico della cella omogenea. Assumendo le forze di volume nulle risulta:

$$\operatorname{div} (\mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}^P (\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^* (\mathbf{x}))) = \mathbf{0} \quad \text{in } V \quad (2.100)$$

Risolviendo questa equazione [15] si ottiene la relazione tra il campo di deformazione perturbato  $\boldsymbol{\varepsilon}^P (\mathbf{x})$  e la distorsione assegnata  $\boldsymbol{\varepsilon}^* (\mathbf{x})$ . Nel caso di distorsione costante in  $\Omega$  si può sostituire  $\boldsymbol{\varepsilon}^* (\mathbf{x})$  con la sua media volumetrica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$  e vale la seguente espressione [11]:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \mathbf{P}\mathbf{C}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \varepsilon_{ij} = P_{ijk} C_{hkst} \varepsilon_{st}^*$$

dove  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)}$  è la media delle deformazioni in  $\Omega$  e  $\mathbf{P}$  è l'analogo del tensore di Eshelby introdotto nel paragrafo precedente, e dipende dalla particolare configurazione periodica del sistema e dalla forma geometrica dell'inclusione.

Per ottenere il tensore elastico effettivo bisogna risolvere il problema dell'inclusione. Si applica un campo di deformazione media  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  alla cella eterogenea  $V$  caratterizzata dalla presenza di una inclusione di volume  $\Omega$ , il cui tensore elastico è  $\mathbf{C}'$ . Si può sostituire la cella eterogenea con una omogenea con un opportuno distorsione  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$  in  $\Omega$ . Si utilizza la condizione di consistenza [16] per stabilire l'uguaglianza tra i due campi di tensione della cella eterogenea e di quella omogenea equivalente:

$$\mathbf{C}' (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{P}\mathbf{C}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) = \mathbf{C} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + (\mathbf{P}\mathbf{C} - \mathbf{I}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) \quad \text{in } \Omega \quad (2.101)$$

dove  $\mathbf{I}$  è il tensore identità del quarto ordine. Dall'equazione (2.101) si può determinare la distorsione equivalente  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$  in termini dei tensori  $\mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{P}$ :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \left[ \left( (\mathbf{C} - \mathbf{C}')^{-1} - \mathbf{P} \right) \mathbf{C} \right]^{-1} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.102)$$

Inoltre in questo caso la tensione media  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$  nella cella unitaria  $V$  è:

$$\mathbf{C}^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{C} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 - f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) \quad (2.103)$$

usando la (2.102) si ottiene l'espressione del tensore elastico effettivo:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - f \left( (\mathbf{C} - \mathbf{C}')^{-1} - \mathbf{P} \right)^{-1} \quad (2.104)$$

Nel caso in cui l'inclusione sia rappresentata da un vuoto l'equazioni (2.101), (2.102), e (2.104) diventano:

$$\mathbf{0} = \mathbf{C} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + (\mathbf{P}\mathbf{C} - \mathbf{I}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) \quad \text{in } \Omega$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = [(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{C})]^{-1} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - f (\mathbf{C} - \mathbf{P}^{-1})$$

Seguendo questa procedura, cioè valutando opportunamente  $\mathbf{P}$  si può determinare il tensore elastico effettivo anche nel caso di una distribuzione periodica di fessure, il fattore di intensificazione delle tensioni nel Modo I, II e III e gli spostamenti relativi tra le due facce della fessura [16].



# Bibliografia

- [1] Aboundi J., *Mechanics of Composite Materials*, Elsevier Science Publishers, Netherlands, 1991.
- [2] Barenblatt G. I., The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 7, pp. 55-129, 1962.
- [3] Bazant Z.P., Planas J., *Fracture and Size Effects in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press LLC, 1998.
- [4] Broek D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- [5] Dugdale D.S., Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 8, pp. 100-108, 1960.
- [6] Carpinteri A., *Meccanica dei Materiali e della Frattura*, Pitagora Editrice Bologna, 1992.
- [7] Hillerborg A., Mod er N., Petersson P.E., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics in finite elements, *Cement Concrete Res.*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
- [8] Irwin G. R., Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate, *J. Appl. Mech. -T. ASME*, Vol. 24, pp 361-364, 1957.
- [9] Karihaloo B. L., *Fracture Mechanics & Structural Concrete*, Longman Group Limited, 1995.
- [10] Luciano R. Sacco E., Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 17 (4), pp. 599-617, 1998.
- [11] Luciano R., Barbero E. J., Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31 (21), pp. 2933-2944, 1994.

- [12] Massabò R., Meccanismi di rottura nei materiali fibrorinforzati, Tesi di dottorato, Politecnico di Torino, 1993.
- [13] Mura T., *Micromechanics of Defects in Solids*, (2nd edn rev), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nertherlands, 1987.
- [14] Murakami Y., *Stress intensity factors handbook*, Prgamon Press, 1987.
- [15] Nemat-Naser S., Taya M., On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids, *Q. Appl. Math.*, Vol. 39, pp 43-59, 1981.
- [16] Nemat-Nasser S., Yu N. and Hori M., Solids with periodically distributed cracks, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, pp. 2071-2095, 1993.
- [17] Suquet P.M., Elements of homogenization for inelastic solid mechanics, *Homogenization Techniques for Composite Media*, (Edited by Sanchez-Palencia and A. Zaoui), Lecture Notes in Physics Vol. 272, 1987.