4

CAPACITÀ ROTAZIONALE DELLE CERNIERE PLASTICHE IN C.A.

Le strutture in cemento presentano, all'aumentare delle azioni esterne, un pronunciato comportamento non lineare. Nelle strutture iperstatiche, questo comportamento influenza la distribuzione delle sollecitazioni interne. Consideriamo ad esempio una trave su molti appoggi, riconducibile ad uno schema statico iperstatico di elemento doppiamente incastrato (Figura 4.1), sottoposta ad un carico uniformemente distribuito. La soluzione del calcolo elastico delle sollecitazioni coincide con la reale distribuzione delle sollecitazioni solo se le sezioni presentano la stessa rigidezza per momento flettente positivo o negativo e solo fino a quando nella sezione più sollecitata la tensione di trazione nel calcestruzzo non supera la resistenza a trazione del materiale. Nella Figura 4.2 sono riportati gli andamenti del momento flettente che agisce sull'appoggio e quello che agisce nella campata, in funzione del carico uniformemente distribuito al crescere del carico. Raggiunto il momento di fessurazione sull'appoggio, la perdita di rigidezza delle sezioni in prossimità della fessura causa la diminuzione del momento in queste sezioni, e per mantenere l'equilibrio, un aumento del momento flettente nella campata. Da questo livello di carico in poi la sollecitazione tende a "migrare" verso le sezioni che presentano una rigidezza flessionale maggiore (Figura 4.2). Nel caso particolare di trave su molti appoggi, la condizione di equilibrio impone che, per un fissato valore del carico

q, la somma tra il momento flettente che agisce nella sezione della campata e quello che agisce nella sezione dell'appoggio è costante (Figura 4.3) e pari a:

$$M_A + M_C = q\frac{L^2}{8} \tag{4.1}$$

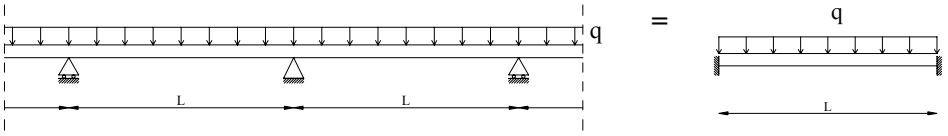


Figura 4.1:Trave continua sotto un carico uniformemente distribuito

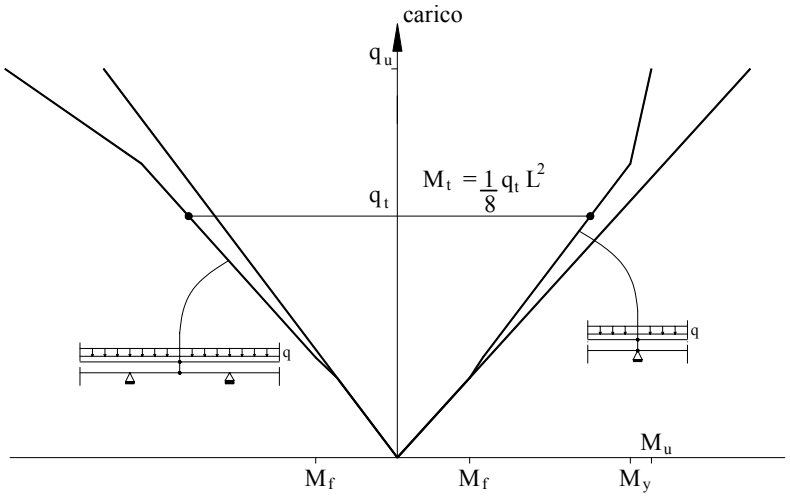


Figura 4.2: Variazione del momento flettente nella sezione sull'appoggio e nella sezione in campata all'aumentare dell'intensità del carico

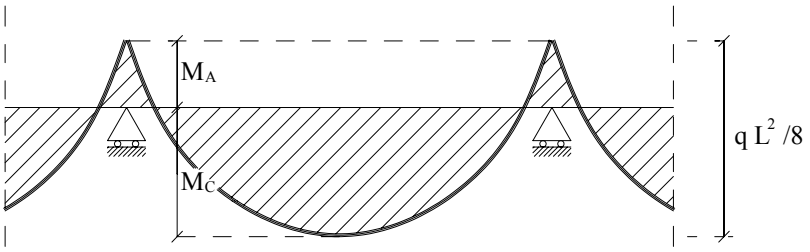


Figura 4.3: Condizione di equilibrio di una trave su molti appoggi

Raggiunto il valore di carico per cui nella sezione critica si raggiunge il momento di snervamento, in questa sezione si forma una cerniera plastica. Se il legame tra il momento-curvatura fosse elastico-perfettamente plastico il momento in questa sezione non aumenterebbe e la rottura potrebbe avvenire in due diversi modi:

- rottura locale legata ad una capacità di rotazione plastica minore della richiesta rotazione plastica;
- rottura per cinematismo: sulla struttura si formano un numero di cerniere plastiche tali da rendere la struttura labile.

In realtà, poiché il legame momento-curvatura presenta generalmente il ramo post-snervamento incrudente (dovuto dal rapporto di incrudimento dell'acciaio diverso dal valore unitario), la rotazione plastica della sezione in campata è accompagnata da un incremento di momento flettente (Figura 4.2), e la rottura avviene nella sezione che per prima esaurisce la capacità di rotazione plastica.

Formulazione analitica della capacità rotazionale: modelli presenti in letteratura

Tra il 1960 e il 1965 una commissione C.E.B. commissionò una serie di prove sperimentali su travi in cemento armato al fine di valutare i parametri fondamentali che influenzano la capacità di rotazione plastica. Alcuni risultati sperimentali e analitici di questi studi sono riportati negli atti di un convegno tenuto a Miami nel 1964. Risultato finale del programma gestito dal C.E.B è la formulazione, ottenuta interpolando cautelativamente i risultati sperimentali, proposta da (Siviero, 1976) in cui la rotazione plastica è funzione del rapporto tra la posizione dell'asse neutro e l'altezza utile della sezione:

$$\Theta_p = 0.004\left(\frac{x_{cu}}{d}\right)^{-1} \tag{4.2}$$

La relazione proposta, riportata nella Figura 4.4, fu recepita dal Model Code 78.

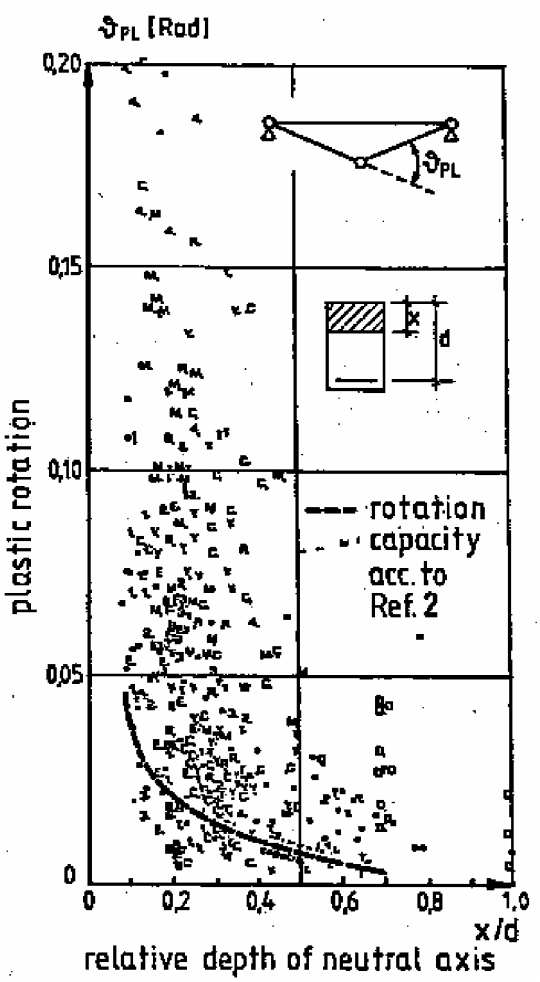


Figura 4.4: Rotazione plastica in funzione della posizione dell'asse neutro adimensionalizzata rispetto all'altezza utile, secondo (Siviero, 1976)

Dai risultati di alcune delle prove commissionate dal C.E.B., alcuni autori proposero delle formulazioni della capacità rotazionale basate sulla definizione della lunghezza di cerniera plastica: uguagliando l'area campita in Figura 4.5(a) con quella riportata in Figura 4.5(b), la rotazione plastica può essere calcolata con la seguente relazione:

$$\Theta_p = \left(\rho_u - \rho_y\right) L_p \tag{4.3}$$

dove ρ_u e ρ_y sono rispettivamente le curvature locali della sezione critica, fessurata, quando $M=M_u$ e $M=M_y$, valutate nelle ipotesi di

planeità delle sezioni (Bernoulli), di resistenza a trazione del calcestruzzo nulla e di perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo, L_p è la lunghezza "fittizia" della cerniera plastica, necessariamente minore della lunghezza L_{yu}, definita come distanza tra la sezione critica e la sezione in cui la sollecitazione flettente e pari a M_y (Figura 4.5).

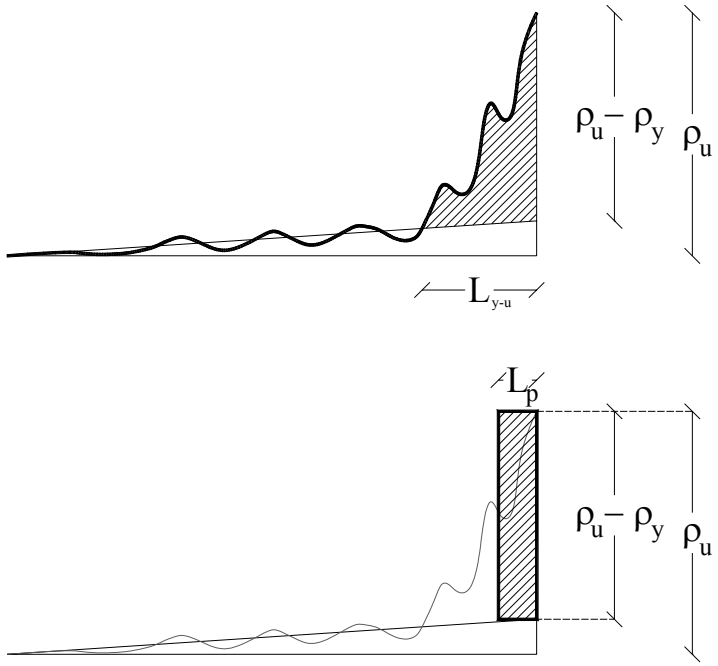


Figura 4.5: Definizione di lunghezza di cerniera plastica

(Baker e Amarakone, 1964) propongono la seguente formulazione per elementi in cemento armato non confinati:

$$\Theta_p = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{ce}}{x_{cu}} L_p \text{ [1] (se la sezione si parzializza)} \qquad (4.4)$$

$$\Theta_p = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{ce}}{d} L_p \text{ (se la sezione è completamente compressa)} \qquad (4.5)$$

[1] ε_{cu} e ε_{ce} sono rispettivamente la deformazione massima nel calcestruzzo e la deformazione elastica del calcestruzzo, l'autore propone di prendere il valore di 3.5‰ per la prima e il valore di 2‰ per la seconda.

dove:

$$L_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{z}{d}\right)^{1/4} d \tag{4.6}$$

z è la luce di taglio (distanza tra la sezione in cui il momento flettente è massimo e quella in cui il momento flettente è nullo) e k_1, k_2 e k_3 sono i parametri che tengono conto rispettivamente del tipo di acciaio, della presenza dello sforzo normale e della resistenza del calcestruzzo, pari a:
k_1 = 0.7 per acciaio lavorato a caldo e 0.9 per acciaio lavorato a freddo,
k_3 = 0.6 quando R_{ck} = 41.369 MPa e 0.9 quando R_{ck} = 13.79 MPa,

$$k_2 = \left(1 + 0.5\frac{P}{P_u}\right) \tag{4.7}$$

dove P è lo sforzo normale applicato alla sezione mentre P_u è lo sforzo normale massimo nel caso in cui la sezione è soggetta solo a compressione.
Nel caso in cui è necessario considerare l'influenza del confinamento esercitato dalle staffe sul legame costitutivo del calcestruzzo, la rotazione plastica è pari a:

$$\Theta_p = 0.8\left(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1}\right) k_1 k_3 \frac{z}{d} \tag{4.8}$$

dove:

$$\varepsilon_{c2} = 0.0015\left[1 + 150\rho_s + \left(0.7 - 10\rho_s\right)\frac{d}{x_{cu}}\right] \tag{4.9}$$

e ρ_s è il rapporto tra il volume delle staffe sul volume del calcestruzzo.
Dalle prove effettuate al laboratorio del P.C.A. (Portland Cement Association), all'interno del programma gestito dal C.E.B.,

(Mattock, 1964) trova che la capacità rotazionale dipende, oltre che dalla luce da taglio, anche dal rapporto tra $(q-q')/q_b$[1]:

$$\Theta_p = \Theta_u \left[1 + \left(1.14\sqrt{\frac{z}{d}} + 1 \right) \left(1 - \left(\frac{q - q'}{q_b} \right) \sqrt{\frac{d}{16.2}} \right) \right]^2 \tag{4.10}$$

dove:

$$\Theta_u = \left(\rho_u - \rho_{el} \right) \frac{d}{2}^3 \tag{4.11}$$

Per calcolare le curvature locali l'autore propone di considerare una deformazione ultima nel calcestruzzo pari a:

$$\varepsilon_{cu} = 0.003 + \frac{0.5}{z} \tag{4.12}$$

Nel 1966, a seguito di altre prove effettuate al laboratorio del P.C.A., Corley propone una semplificazione della formulazione proposta da Mattock:

$$\Theta_p = \Theta_u \left(1 + \frac{0.4}{\sqrt{d}} \frac{z}{d} \right) \tag{4.13}$$

Che comporta:

$$L_p = \frac{\Theta_p}{\Theta_u} \frac{d}{2} = 0.5d + 0.2\sqrt{d} \left(\frac{z}{d} \right) \tag{4.14}$$

---

[1] q è la percentuale meccanica di armatura tesa, q' la percentuale meccanica di armatura compressa e q_b la percentuale meccanica di armatura tesa bilanciata, calcolata considerando una deformazione ultima del calcestruzzo pari al 3‰

[2] Nell'articolo dell'autore, la capacità rotazionale è indicata con Θ_{tu}

[3] ρ_u e ρ_{el} sono rispettivamente la curvatura locale calcolata nella sezione critica in condizioni ultime e la curvatura locale elastica calcolata sempre nelle condizioni ultime

e una deformazione ultima del calcestruzzo:

$$\varepsilon_c = 0.003 + 0.02\frac{b}{z} + \left(\frac{\rho_s f_y}{20}\right)^2 \tag{4.15}$$

A risposta del lavoro di Corley, (Mattock, 1967) propone una formulazione semplificata dell'equazione (4.14) e dell'equazione (4.15):

$$L_p = \frac{\Theta_p}{\Theta_u}\frac{d}{2} = 0.5d + 0.05z \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_c = 0.003 + 0.02\frac{b}{z} + 0.2\rho_s \tag{4.17}$$

Problema comune a tutte le formulazioni proposte in quegli anni è una sovrastima della capacità rotazionale nel caso di sezioni debolmente armate, dovuta all'ipotesi di crisi legata allo schiacciamento del calcestruzzo. Al contrario se la rottura è legata al raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio, la curva che rappresenta la rotazione plastica in funzione della percentuale geometrica di armatura non è sempre decrescente, ma presenta una cuspide che individua la massima capacità rotazionale in corrispondenza della percentuale di armatura per cui si giunge contemporaneamente alla deformazione ultima in entrambi i materiali. Per percentuali di armatura minori, la crisi è regolata dalla deformazione ultima dell'acciaio, mentre per percentuali di armatura maggiori, dalla deformazione ultima del calcestruzzo. Nella Figura 4.6 è riportato l'andamento della rotazione plastica di una trave semplicemente appoggiata, armata con acciaio lavorato a freddo in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa, secondo (Langer, 1987) e confrontata con i risultati sperimentali di (Eifler e Plauk, 1974).

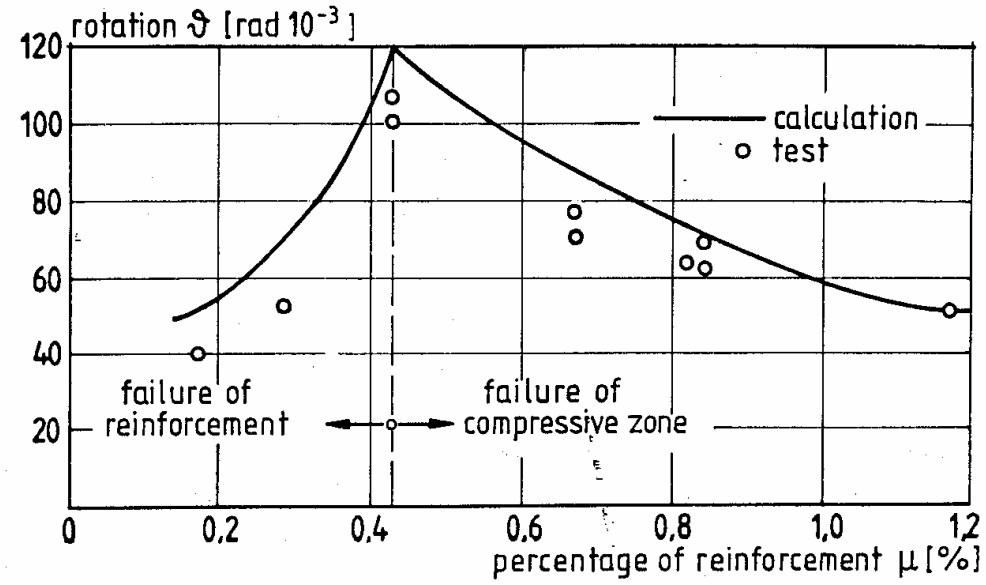


Figura 4.6: Capacità rotazionale in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa, secondo (Langer, 1987) e risultati sperimentali di (Eifler e Plauk, 1974)

Un altro importante parametro non contemplato da queste formulazioni è l'aumento di rotazione plastica negli elementi in cui le fessure sono inclinate per effetto del taglio. (Corley, 1966) trova sperimentalmente che nelle travi in cui le fessure sono inclinate la rotazione plastica è maggiore che in quelle con fessure verticali. Il problema di considerare un incremento di rotazione plastica per la presenza di fessure inclinate è introdotto da (Dilger, 1966), che seguendo l'approccio di Baker, suddivide la rotazione plastica in due parti: quella generata dalla flessione, calcolata dal diagramma momento-curvatura locale della sezione fessurata, e quello generato dalla presenta del taglio, calcolato traslando il diagramma del momento flettente (rotazioni A e B di Figura 4.7). La lunghezza w (Figura 4.7) in cui il diagramma del momento flettente è costante dipende dall'inclinazione delle fessure rispetto all'asse della trave.

Nel 1970 Bachman confronta la rotazione plastica di alcune travi sperimentali con i valori calcolati utilizzando la formulazione proposta da (Corley, 1966), il cui risultato è una sovrastima delle rotazioni plastiche calcolate nelle travi in cui le lesioni sono inclinate (Trave A5), mentre nelle travi in cui le lesioni sono

verticali, la rotazione plastica analitica è più alta di quella sperimentale (trave A2) (Figura 4.8).

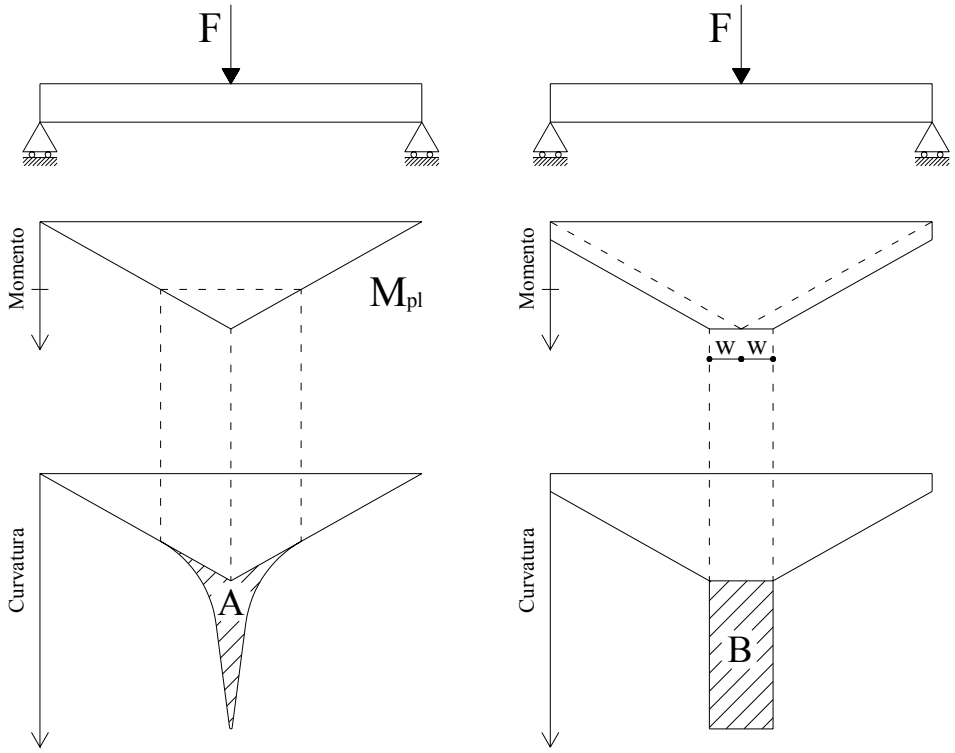


Figura 4.7: Influenza delle fessure inclinate secondo (Dilger, 1966)

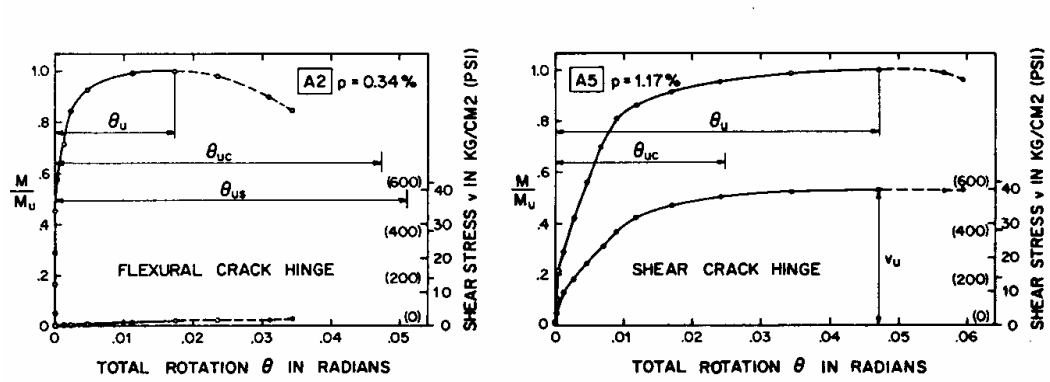


Figura 4.8: Legame momento-rotazione rispettivamente delle travi A2 e A5, (Bachmann, 1970)

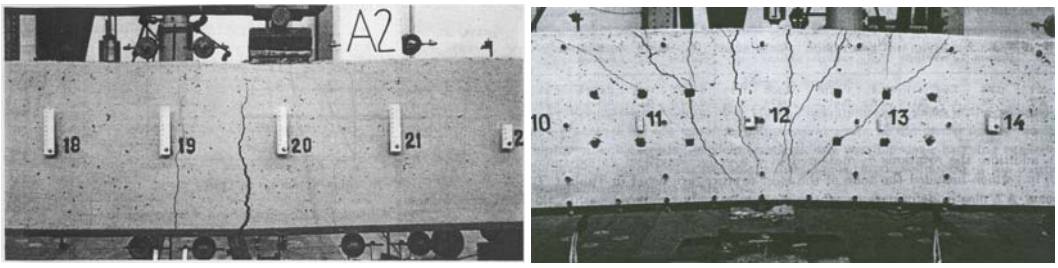


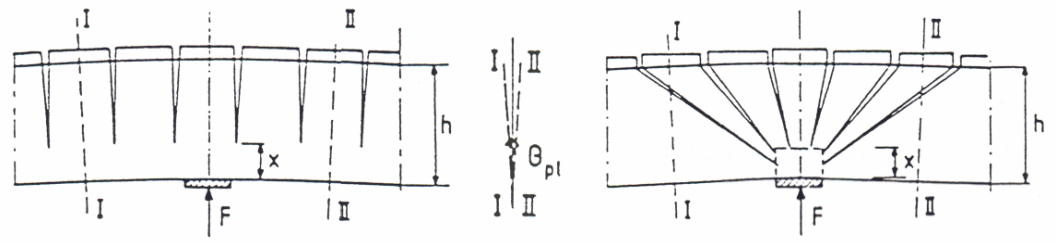
Figura 4.9: (a) Flexural hinge (trave A2) e (b) Flexural-shear hinge (trave A5) (Bachmann, 1970)

Per questo motivo, (Bachmann, 1970) propone un modello per valutare la capacità di rotazione plastica che descriva meglio il fenomeno rispetto ai precedenti metodi.
In primis l'autore definisce due tipi di cerniere plastiche:

- Flexural hinge (cerniera plastica per flessione): nel caso in cui le lesioni sono verticali (Figura 4.9(a));
- Flexural-shear hinge (cerniera plastica per flessione e taglio): nel caso in cui le lesioni sono inclinate (Figura 4.9(b)).

La zona della cerniera plastica è discretizzata in conci e, trascurando la deformazione del calcestruzzo teso tra le fessure, la rotazione dipende solo dall'apertura delle fessure (Figura 4.10):

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{d - c_0} = \frac{1}{d - c_0} \sum_{i=1}^{n} w_i \tag{4.18}$$



(a) Flexural hinge *(b) Flexural-shear hinge*

Figura 4.10: Discretizzazione della cerniera plastica come conci secondo (Bachman, 1970)

Il procedimento descritto in (Bachman, 1970) prende in considerazione un concio di lunghezza pari alla distanza tra le fessure (Figura 4.11) e noti i legami costitutivi dei materiali, la distribuzione delle deformazioni nell'elemento si trova risolvendo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$d\sigma_s \frac{\pi\Phi}{4} = \tau_b(s)\pi\Phi dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{4}{\Phi}\tau_b(s) \tag{4.19}$$

$$ds = \varepsilon_s(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \varepsilon_s(\sigma_s) \tag{4.20}$$

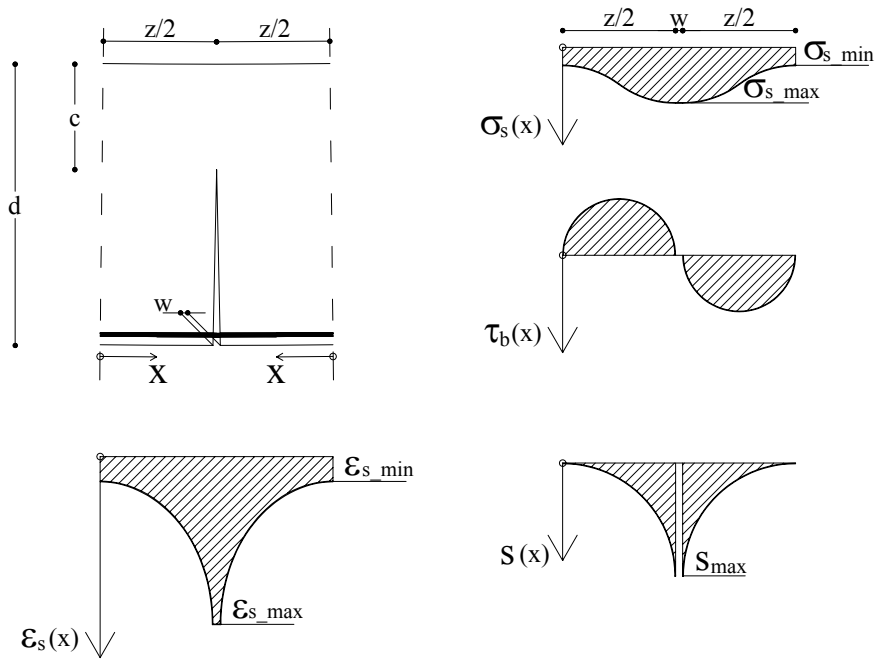


Figura 4.11: Distribuzione delle tensioni e deformazioni nel modello proposto da (Bachman, 1970)

Nel caso in cui la trave è armata con acciaio ferroso o con barre lisce, la tensione d'aderenza può essere considerata costante per ogni valore dello scorrimento (Bachman, 1970), questa semplificazione permette di risolvere in forma chiusa il suddetto sistema di equazioni differenziali (Eq.ni (4.19) e (4.20)). Indicando con τ_b* la tensione d'aderenza tra acciaio e calcestruzzo, la

differenza tra la sollecitazione massima e minima della barra può essere ricavata dall'equazione (4.19), e risulta pari a:

$$\sigma_{s\_max} - \sigma_{s\_min} = \tau_b^* \frac{4}{\Phi}\frac{z}{2} \tag{4.21}$$

e dall'equazione (4.20) si ottiene il valore dello scorrimento massimo:

$$s_{max} = \int_0^{z/2} \varepsilon_s(x)dx = \frac{\Phi}{4\tau_b^*}\int_{\sigma_{s\_min}}^{\sigma_{s\_max}} \varepsilon_s(\sigma_s)d\sigma_s \tag{4.22}$$

Noto il valore di s_{max} e della deformazione ε_{s_max}, si valuta l'apertura delle fessure:

$$w = 2s_{max}\left(1 + \varepsilon_{s\_max}\right) \tag{4.23}$$

Se sono presenti fessure inclinate, il procedimento è analogo al precedente, ma con diversa distribuzione della sollecitazione nella barra rispetto al caso di fessure verticali. La distribuzione della sollecitazione nella barra tesa, nei punti in cui le barre intersecano una fessura, può essere calcolata dall'equazione di equilibrio a rotazione delle azioni che agiscono sul concio compreso tra due fessure. Prendendo in considerazione il caso di un nodo trave-colonna, e scrivendo l'equazione di equilibrio a rotazione intorno al centro di pressione O della generica porzione di trave delimitata dalla sezione di massimo momento in valore assoluto e da una fessura diagonale (Figura 4.12), si ottiene:

$$M_u = T_s(z)jd + \frac{z}{2}V_s(z) \tag{4.24}$$

dove T_s è la risultate degli sforzi di trazione valutata ad una distanza z dalla sezione critica, $V_s(z)$ è il contributo offerto dalle staffe all'assorbimento del taglio, nel tratto lungo z, e può essere scritta come:

$$V_s(z) = \eta V_u \frac{z}{d} \tag{4.25}$$

dove η il rapporto tra l'aliquota di taglio assorbita dalle staffe, V_s, e il taglio a rottura V_u:

$$\eta = \frac{V_s}{V_u} \tag{4.26}$$

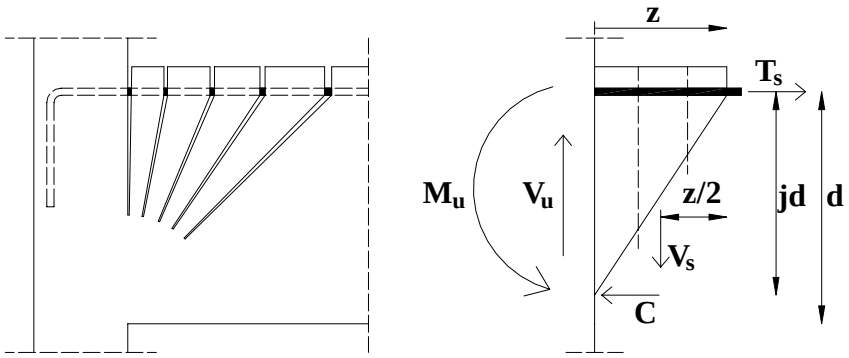


Figura 4.12:Concio di trave compreso tra la sezione di rottura e una fessura inclinata distante x (Bachman, 1970)

Dall'equazione (4.24) e (4.25) è possibile ricavare:

$$T_s(z) = \frac{1}{jd}\left(M_u - z^2 \eta \frac{T_u}{2d}\right) = A_s \sigma_s(z) \tag{4.27}$$

da cui:

$$\sigma_s(z) = \sigma_{so}\left(1 - \frac{\eta}{2\zeta}\left(\frac{z}{d}\right)^2\right) \tag{4.28}$$

Per una migliore comprensione del risultato, si è preferito utilizzare la simbologia utilizzata nella tesi piuttosto che quella proposta dall'autore nel suo lavoro.
Nella Figura 4.13 è riportata l'equazione (4.28) in funzione della distanza dalla sezione critica. I valori della sollecitazione calcolati

con questa equazione rappresentano la reale distribuzione delle tensioni nell'acciaio solo negli elementi in cui il fenomeno del tension stiffening è praticamente nullo, nel caso di barre nervate, l'equazione (4.28) definisce la tensione nell'armatura solo nelle sezioni fessurate, nelle sezioni non fessurate la perdita d'aderenza e il fenomeno del tension stiffening modificano la distribuzione di questa tensione.

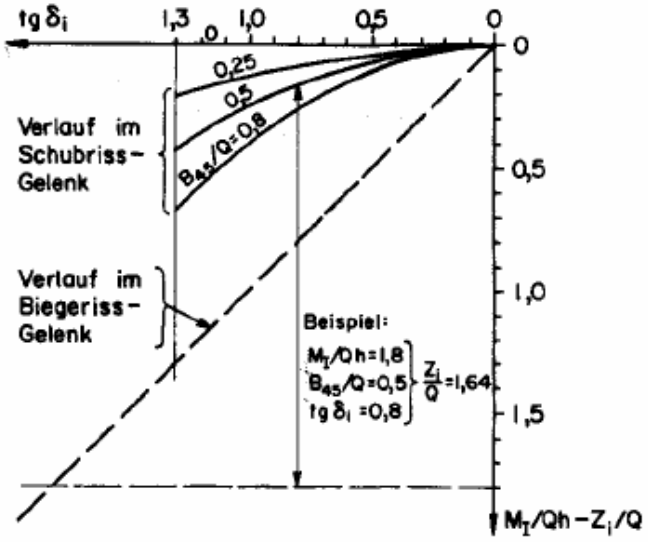


Figura 4.13: Influenza delle fessure inclinate sulla tensione dell'acciaio teso secondo (Bachman, 1970)

Nella Figura 4.14 è riportata la rotazione plastica in funzione della tensione tangenziale, quindi del taglio, secondo la procedura proposta da (Bachmann, 1970). Il grafico può essere suddiviso in due zone: per piccoli valori del taglio, a parità di momento ultimo, le fessure si presentano verticali, la funzione che rappresenta la rotazione plastica decresce, fino al valore del taglio per cui la formazione delle lesioni non avviene più perpendicolarmente all'asse. Per valori maggiori del taglio, le lesioni si presentano inclinate e c'è un brusco incremento della rotazione plastica, per poi decrescere nuovamente all'aumentare del taglio.

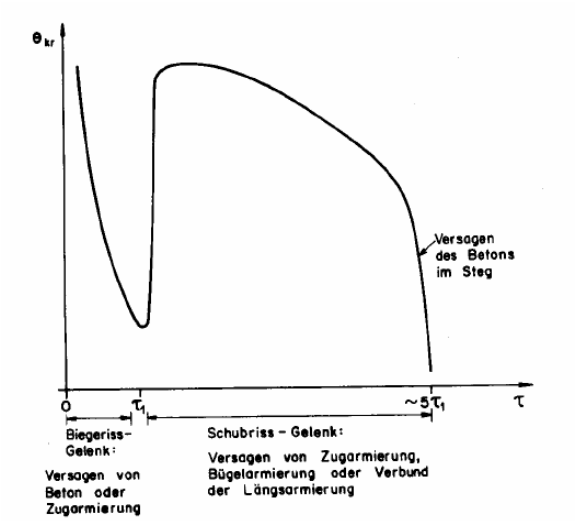


Figura 4.14: Andamento della rotazione plastica in funzione della tensione tangenziale secondo (Bachman, 1970)

Anche le indagini parametriche effettuate da (Langer, 1987 e Li, 1998) dimostrano che negli elementi in cui le fessure sono inclinate la capacità rotazionale è più grande di quella calcolata considerando le fessure verticali (Figura 4.14 e 4.15).

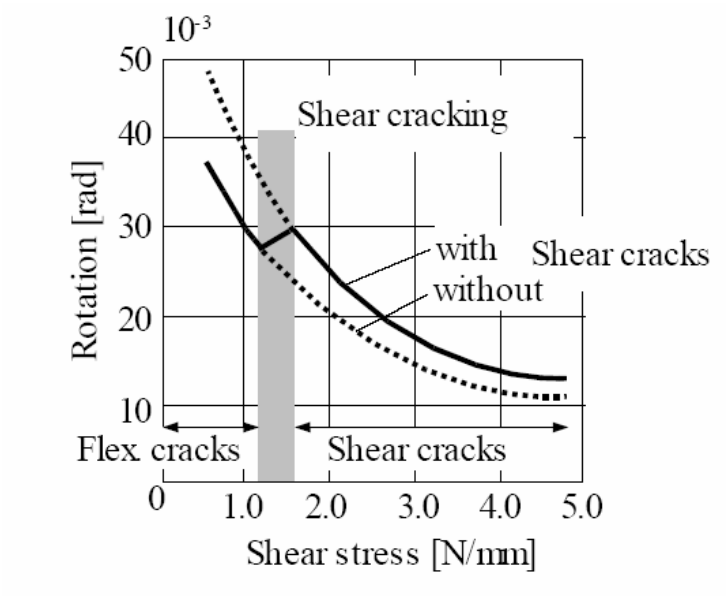


Figura 4.15: Influenza del taglio sulla capacità rotazione delle cerniere plastiche in funzione della tensione tangenziale secondo (Langer, 1987)

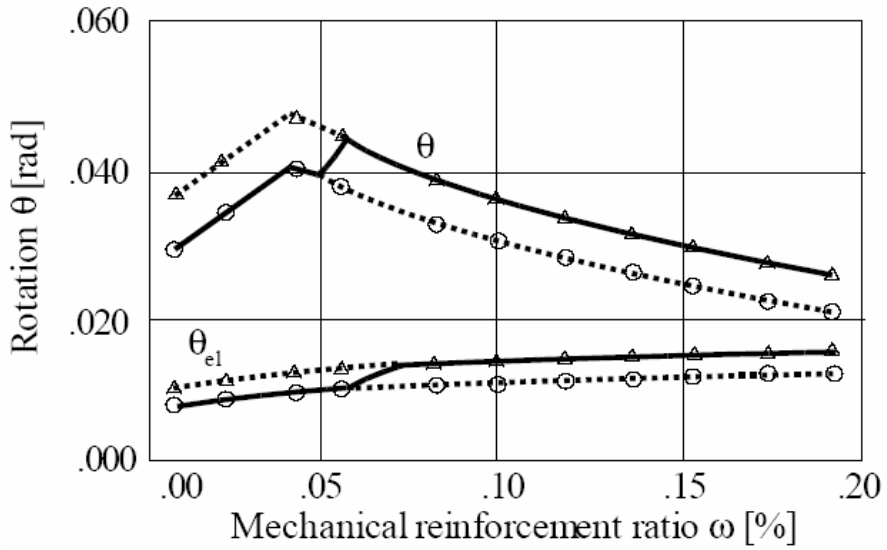


Figura 4.16: Influenza del taglio sulla capacità rotazione delle cerniere plastiche in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa secondo (Li, 1998)

(Tue et al., 1996) valutano la capacità rotazionale delle travi in cemento armato, integrando il legame momento-curvatura media. Per tener conto del tension stiffening, gli autori utilizzano il legame dell'acciaio modificato secondo le indicazioni fornite dal (Model Code 90, 1993). Nella Figura 4.17 è riportato il modello proposto dagli autori, il diagramma momento-curvatura medio è costituito da una trilatera i cui punti di discontinuità rappresentano rispettivamente il momento e la curvatura valutati nella fase di prima fessurazione, di snervamento e ultimo per il raggiungimento di una deformazione ultima nel calcestruzzo o nell'acciaio.

L'incremento della capacità rotazionale per la presenza delle fessure diagonali è valutato effettuando una traslazione del diagramma del momento (Figura 4.17), secondo quanto proposto da (Dilger, 1966). Il valore del taglio per cui iniziano a formarsi queste fessure è calcolato con la formulazione proposta dal bollettino CEB Manual on Cracking and Deformation (1981) La capacità rotazionale Θ_p è la somma del contributo dovuto alla flessione e del contributo dovuto alla presenza delle fessure diagonali.

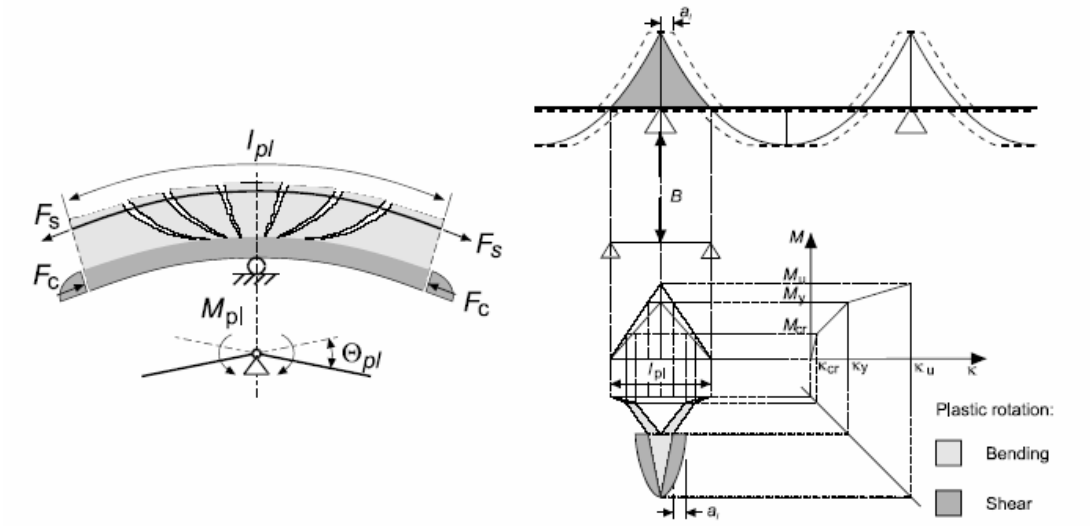


Figura 4.17: Modello per valutare la rotazione plastica secondo (Tue et al., 1996)

Nella Figura 4.18 è riportata la capacità rotazionale secondo la formulazione proposta, per gli acciai di tipo N, H e S (Eurocodice 2), sia in presenza di fessure verticali che di fessure inclinate.

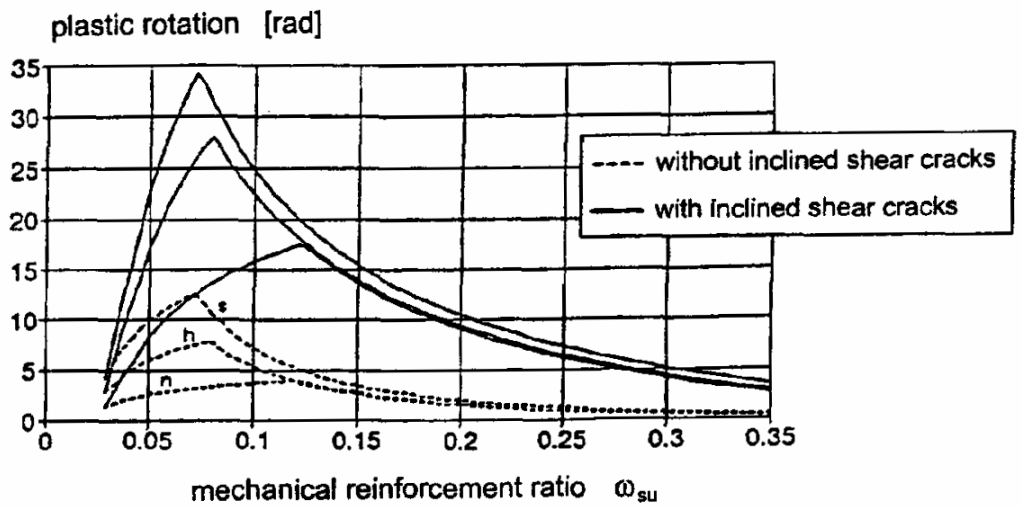


Figura 4.18: Rotazione plastica in funzione della percentuale meccanica di armatura tesa secondo (Tue et al., 1996)

Per studiare l'influenza delle caratteristiche meccaniche dell'acciaio sulla capacità rotazionale delle strutture in cemento

armato, (Cosenza et al., 1993, 1998) effettuano un'analisi parametrica, con il modello formulato in (Cosenza et al., 1991), su una trave isostatica sollecitata da un momento flettente variabile linearmente, facendo crescere sia il rapporto di incrudimento da 1.05 a 1.45 che la deformazione ultima da 0.4% a 1.4%. Le analisi parametriche riguardano una trave le cui dimensioni geometriche sono 30 cm x 60 cm x 600 cm (base x altezza x luce) armata con 2 Φ 12.
Gli autori trovano che le curve vengono ben rappresentate dalle seguenti formulazioni analitiche:

$$\Theta_p = \gamma \varepsilon_u^{\alpha} \left(\frac{f_u}{f_y} - 1 \right)^{\beta} \tag{4.29}$$

per l'acciaio lavorato a freddo e:

$$\Theta_p = \gamma \left(\frac{f_u}{f_y} - 1 \right)^{\beta} \left[\left(\varepsilon_u - \varepsilon_{sh} \right) + \delta \left(\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y \right) \right]^{\alpha} \tag{4.30}$$

per l'acciaio lavorato a caldo, dove i coefficienti α, β, δ e γ dipendono dalla snellezza, dalla distanza tra le lesioni, dalla posizione dell'asse neutro a rottura e dalle caratteristiche di aderenza.
Tarando i coefficienti con i risultati dell'analisi numerica, gli autori suggeriscono i seguenti valori:
$\gamma = 1.3$ $\alpha = 0.73$ $\beta = 0.92$ $\delta = 4$

Basandosi sui risultati di una numerosa campagna sperimentale, (Panagiotakos e Fardis, 2001) propongono la seguente formulazione per valutare la capacità rotazionale:

$$\Theta_{u,mon}(\%) = \left(1 + \frac{\alpha_{sl}}{8} \right) \left(0.15^{\upsilon} \right) \left(\frac{\max\left(0.01, \frac{\rho' f_y'}{f_c'} \right)}{\max\left(0.01, \frac{\rho f_y}{f_c'} \right)} \frac{L_s}{h} f_c' \right)^{0.425} \tag{4.31}$$

per carichi monotoni, dove L_s è la luce da taglio, distanza tra la sezione di momento massimo e di momento nullo, pari a M/V; ρ e ρ' sono rispettivamente la percentuale geometrica di armatura tesa e compressa; f_y e f_y' sono rispettivamente tensione di snervamento dell'acciaio teso e compresso;
$\nu = N/(A_g f_c)$, dove A_g è l'area della sezione di solo calcestruzzo;
$\alpha_{st,mon}$ = 1.25 per acciaio duttile lavorato a caldo
1 per acciaio Tempcore
0.5 per acciaio lavorato a freddo
α_{sl} coefficiente per tener conto della fixed end rotation:
= 1.0 se le barre possono scorrere dall'ancoraggio
= 0 se non possono scorrere

Mentre per carichi ciclici, propongono:

$$\Theta_{u,cyc}(\%) = \alpha_{st,cyc}\left(1+\frac{\alpha_{sl}}{2}\right)\left(1-0.4a_{wall}\right)\left(0.2^{\upsilon}\right)\times \times\left(f_c^{'}\right)^{0.175}\left(\frac{L_s}{h}\right)^{.4} 1.1^{\left(100\alpha\rho_{sx}\frac{fyh}{f_c^{'}}\right)}\left(1.3^{100\rho_d}\right) \tag{4.32}$$

$\alpha_{st,mon}$ = 1.125 per acciaio duttile lavorato a caldo
1 per acciaio Tempcore
0.8 per acciaio lavorato a freddo
α coefficiente per l'effetto di confinamento:

$$\alpha = \left(1-\frac{s_h}{2b_c}\right)\left(1-\frac{s_h}{2h_c}\right)\left(1-\frac{\sum b_i^2}{6b_c h_c}\right) \tag{4.33}$$

dove b_c, h_c sono rispettivamente la larghezza e l'altezza della sezione di calcestruzzo confinata e b_i la distanza tra due successive barre longitudinali, vincolate agli angoli delle staffe; f_{yh} è la tensione di snervamento dell'armatura trasversale;
$\rho_{sx} = A_{sx}/(b_w s_h)$ rapporto geometrico dell'armatura trasversale parallela alla direzione x del carico, s_h distanza tra le barre;
ρ_d = rapporto tra l'area di acciaio disposta lungo una diagonale e il prodotto tra la base e l'altezza utile della sezione trasversale;
a_{wall} = 1 per pannelli
=0 per travi e colonne

Nello stesso lavoro, propongono una formulazione anche per la lunghezza della cerniera plastica, che può essere calcolata con:

$L_{pl,cyc} = 0.12L_s + 0.014a_{sl}\Phi f_y$, per carico ciclico e:

$L_{pl,mon} = 1.5L_{pl,cyc} = 0.18L_s + 0.021a_{sl}\Phi f_y$, per carico monotono.

Le Norme Tecniche per le Costruzioni (2005), in particolare l'allegato 2 sugli edifici (O.P.C.M. n°3431 del 03/05/2005), nelle verifiche di deformabilità delle strutture in cemento armato, indicano che la capacità di rotazione plastica può essere valutata mediante sperimentazione diretta, una modellazione numerica in grado di considerare il contributo di calcestruzzo, acciaio ed aderenza, o applicando una delle seguenti formulazioni:

$$\Theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0.016\left(0.3^{\upsilon}\right)\left[\frac{\max(0.01;\omega')}{\max(0.01;\omega)} f_c\right]^{0.225} \times \\ \times \left(\frac{L_v}{h}\right)^{0.35} 25^{\left(\alpha\rho_{sx}\frac{f_{yw}}{f_c}\right)}\left(1.25^{100\rho_d}\right) \tag{4.34}$$

$$\Theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}}\left(\Theta_y + \left(\rho_u - \rho_y\right)L_p\left(1 - \frac{0.5L_p}{L_v}\right)\right) \tag{4.35}$$

dove y_{el} è pari a 1 o 1.5 rispettivamente per elementi definiti primari o secondari; ρ_{sx} è la percentuale geometrica di armature trasversali; ρ_d è la percentuale di eventuali armature diagonali in ciascuna direzione e α è un fattore di efficienza del confinamento dato da:

$$\alpha = \left(1 - \frac{s_h}{2b_0}\right)\left(1 - \frac{s_h}{2h_0}\right)\left(1 - \frac{\sum b_i^2}{6b_0h_0}\right) \tag{4.36}$$

h e b l'altezza e la base della sezione, h_0 e b_0 l'altezza e la base del nucleo confinato, f_c , f_y e f_{wy} sono la resistenza a compressione del calcestruzzo e la resistenza a snervamento dell'acciaio,

longitudinale e trasversale, s_h l'interasse delle staffe nella zona critica, Θ_y è la rotazione rispetto alla corda corrispondente allo snervamento, ρ_u è la curvatura ultima valutata considerando le deformazioni ultime del conglomerato (tenuto conto del confinamento) e dell'acciaio (da stimare sulla base dell'allungamento uniforme al carico massimo. In mancanza di informazioni si può assumere che la deformazione ultima dell'acciaio sia pari al 4%); ρ_y è la curvatura a snervamento valutata considerando l'acciaio alla deformazione di snervamento ε_{sy}, L_p è la lunghezza di cerniera plastica valutabile come:

$$L_p = 0.1L_v + 0.17h + 0.24\frac{\Phi f_y}{\sqrt{f_c}} \tag{4.37}$$

L_v è la luce da taglio e Φ il diametro delle barre longitudinali.

Capacità rotazionale: proposta di una nuova formulazione

Nel corso degli anni, sono state date diverse definizione della capacità rotazionale: indicando con L_{yu} la lunghezza della zona interessato da deformazioni plastiche (distanza tra la sezione in cui il momento è pari al momento ultimo e la sezione in cui il momento è pari al momento di snervamento), la capacità rotazionale può essere calcola integrando sulla lunghezza L_{yu} la differenza tra la curvatura locale $\rho_l(z)$, valuta nella condizione in cui nella sezione maggiormente sollecitata agisce un momento pari al momento di ultimo, e la curvatura locale $\rho_y(z)$, corrispondente ad un momento massimo pari a M_y (area campita nella Figura 4.19(a)):

$$\Theta_p = \int_{L_{yu}} \left(\rho_l(z) - \rho_y(z)\right) dz \tag{4.38}$$

integrando sulla lunghezza L_{yu} la differenza tra la curvatura locale e la curvatura di snervamento (area campita nella Figura 4.19(b)):

$$\Theta_p = \int_{L_{yu}} \left(\rho_l(z) - \rho_y\right) dz \tag{4.39}$$

infine, come differenza tra la rotazione ultima e la rotazione di snervamento (area campita nella Figura 4.19(c)):

$$\Theta_p = \Theta_u - \Theta_y = \int_L \left(\rho_l(z) - \rho_y(z)\right) dz \tag{4.40}$$

dove L è la lunghezza dell'elemento.

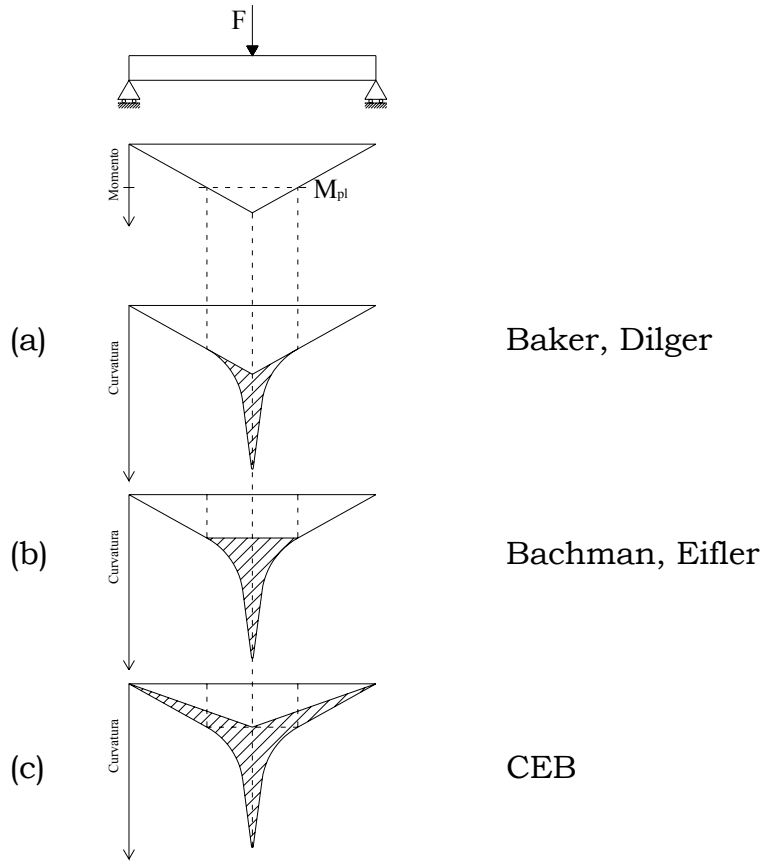


Figura 4.19: Definizione della capacità rotazionale

Le curvature locali devono tener conto della perdita d'aderenza e del conseguente tension stiffening.
I valori della rotazione plastica valutati con la formulazione (c) risultano sempre maggiori dei casi (a) e (b).

Nel capitolo precedente abbiamo visto come l'integrale delle curvature medie sia equivalente all'integrale delle curvature locali, per questo motivo, partendo dalla definizione del legame momento-curvatura media quadrilineare proposto, si è ricavata una espressione analitica della capacità di rotazione plastica degli elementi monodimensionali in cemento armato.
In questo lavoro, la rotazione plastica è definita come l'integrale della differenza tra la curvatura media e la curvatura allo snervamento:

$$\Theta_p = \int_0^{L_{yu}} [\rho_m(z) - \rho_y] dz \tag{4.41}$$

Prendiamo in considerazione una trave isostatica (Figura 4.20 (a)); caricata in mezzeria da una forza concentrata. Trascurando il peso proprio, la funzione che descrive il momento flettente, in una generica ascissa z, quando nella sezione maggiormente sollecitata agisce un momento pari a M_u, è:

$$M(z) = \begin{cases} \dfrac{2M_u}{L} z & \text{se} \quad z \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2M_u}{L}(z - L) & \text{se} \quad z > \dfrac{L}{2} \end{cases} \tag{4.42}$$

Sia la struttura che lo schema di carico sono simmetrici, è quindi possibile applicare le proprietà di simmetria e studiare lo schema riportato in Figura 4.20 (b).
La lunghezza L_{yu} del tratto in cui le deformazioni dell'acciaio sono maggiori della deformazione di snervamento si ricava dall'equazione (4.42), sostituendo a M(z) il momento di snervamento M_y:

$$L_{yu} = \frac{L}{2}\left(\frac{M_u - M_y}{M_u}\right) \tag{4.43}$$

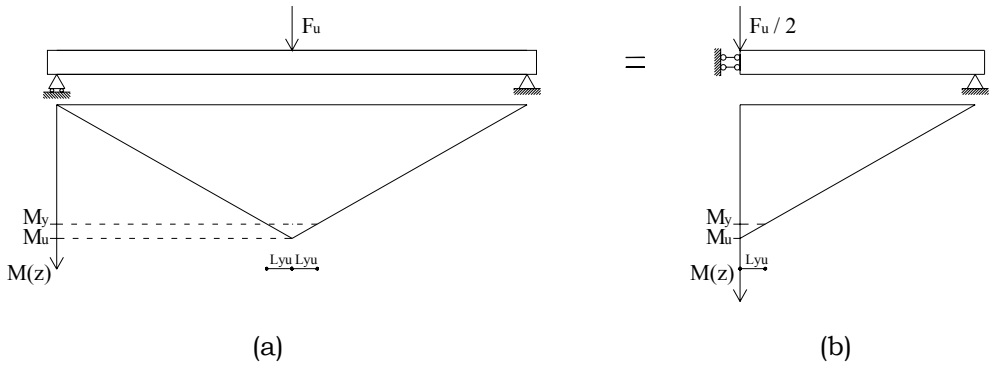


Figura 4.20: Schema statico della trave analizzata (a) e semplificazione per la condizione di simmetria dello schema strutturale e di carico

Il legame momento-curvatura, decritto nel capitolo precedente, è rappresentato nel piano M-ρ, dalla seguente relazione:

$$\rho_m(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_f}{M_f} M & \text{se} \quad M \le M_f \\ \rho_f + \dfrac{\rho_y - \rho_f}{M_y - M_f}\left(M - M_f\right) & \text{se} \quad M_f < M \le M_y \\ \rho_y + \dfrac{\rho_p - \rho_y}{M_p - M_y}\left(M - M_y\right) & \text{se} \quad M_y < M \le M_p \\ \rho_p + \dfrac{\rho_{mu} - \rho_p}{M_u - M_p}\left(M - M_p\right) & \text{se} \quad M_p < M \end{cases} \tag{4.44}$$

Sostituendo l'equazione (4.44) nell'equazione (4.42), si ottiene una funzione che descrive l'andamento della curvatura media al variare dell'ascissa della trave, che nel tratto L_{yu} è:

$$\rho_m(M(z)) = \rho_m(z) = \begin{cases} \rho_{mu} - \dfrac{\rho_{mu} - \rho_p}{L_{pu}} z & \text{se} \quad z \le L_{pu} \\ \rho_p - \dfrac{\rho_p - \rho_y}{L_{yu} - L_{pu}}\left(z - L_{pu}\right) & \text{se} \quad L_{pu} < z \le L_{yu} \end{cases} \tag{4.45}$$

dove L_{pu} è la distanza dalla sezione critica in cui il momento flettente è pari a M_p, quindi pari a:

$$L_{pu} = \frac{L}{2}\left(\frac{M_u - M_p}{M_u}\right) \tag{4.46}$$

Sostituendo l'equazione (4.45) alla definizione di rotazione plastica (equazione (4.41)), si ottiene:

$$\begin{aligned}\Theta_p &= \int_0^{L_{yu}} \left[\rho_m(z) - \rho_y\right] dz = \\ &= \int_0^{L_{pu}} \left[\rho_{mu} - \frac{\rho_{mu} - \rho_p}{L_{pu}} z - \rho_y\right] dz + \int_{L_{pu}}^{L_{yu}} \left[\rho_p - \frac{\rho_p - \rho_y}{L_{yu} - L_{pu}}\left(z - L_{pu}\right) - \rho_y\right] dz\end{aligned} \tag{4.47}$$

da cui:

$$\Theta_p = L_{yu}\left[\left(\frac{\rho_{mu} + \rho_p}{2} - \rho_y\right)\left(\frac{M_u - M_p}{M_u - M_y}\right) + \left(\frac{\rho_p + \rho_y}{2} - \rho_y\right)\left(\frac{M_p - M_y}{M_u - M_y}\right)\right] \tag{4.48}$$

Nel caso in cui il coefficiente n_p, coefficiente che compare nelle equazioni che definiscono la curvatura ρ_m e il momento M_p (capitolo 3 o Appendice), risulta pari a zero, in nessun concio compreso tra due fessure contigue la deformazione plastica dell'acciaio si diffonde per tutta la lunghezza e il legame momento-curvatura media è descritto da una funzione trilatera (fessurazione-snervamento-rottura). In questo caso la capacità rotazionale è pari a:

$$\Theta_p = \frac{\rho_{mu} - \rho_y}{2} L_{yu} \tag{4.49}$$

che, sostituendo l'equazione che definisce la curvatura media ultima (equazione (3.16)), diventa:

$$\Theta_p = \left(\frac{2}{3s_{rm}} \frac{\varepsilon_{so} - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0)} \Phi \sqrt{\frac{\left(\sigma_{so} - f_y\right) Y_{sr}^{C_2} \left(1 + \alpha\right)^{C_4}}{C_1 \varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} \left(1 + \upsilon\right)^{C_3}}}\right) L_{yu} \tag{4.50}$$

Le formulazioni analitiche della capacità rotazionale, equazioni (4.48) e (4.50), sono valide per elementi sottoposti a carichi monotoni, sia nel caso di sollecitazione di flessione semplice che di pressoflessione retta in quanto lo sforzo normale non modifica la distribuzione delle azioni flettenti e il suo contributo alla capacità rotazionale compare nella definizioni di momento e di curvature medie.
Nel caso in cui le fessure si propano perpendicolarmente all'asse dell'elemento da analizzare, lo stato di sollecitazione e di deformazione nelle sezioni fessurate, si ricava imponendo le condizioni di equilibrio e congruenza, ipotizzando che il calcestruzzo non resiste a trazione, che la sezione rimane piana a deformazione avvenuta e la perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo. Quando le fessure non si formano perpendicolarmente all'asse dell'elemento, la sollecitazione nella barra d'acciaio, nei punti in cui interseca una fessura, può essere calcolata dall'equilibrio a rotazione intorno al centro delle compressioni delle sollecitazioni che agiscono sul concio compreso tra due fessure (Bachmann, 1970).
In questo caso, riprendendo come schema di riferimento quello riportato in Figura 4.21, la distribuzione delle tensioni nella barra è descritta dall'equazione (4.28).

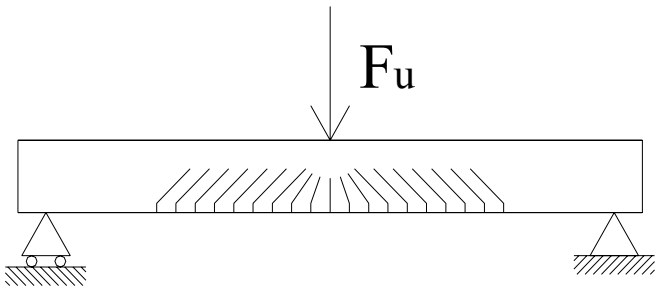


Figura 4.21: Schematizzazione del quadro fessurativo di una trave tozza

In questo caso, con il procedimento appena descritto per le travi in cui il quadro fessurativo è composto da lesioni verticali, si ottiene:

$$L_{yu} = d\sqrt{\frac{2\zeta}{\eta}\left(\frac{\sigma_{so} - f_{sy}}{\sigma_{so}}\right)}\,[1] \tag{4.51}$$

$$L_{pu} = d\sqrt{\frac{2\zeta}{\eta}\left(\frac{\sigma_{so} - \sigma_{sp}}{\sigma_{so}}\right)} \tag{4.52}$$

dove ζ è la snellezza dell'elemento è risulta pari a:

$$\zeta = \frac{L_v}{d} \tag{4.53}$$

e:

$$\sigma_{sp} = \sigma_{so}\left(1 - \frac{\eta}{2\zeta}\left(\frac{n_p s_{rm}}{d}\right)^2\right) \tag{4.54}$$

Il numero di conci in cui la deformazione plastica si diffonde in tutte le sezioni è:

$$n_p = \max\left(0; \frac{L_{yu}}{s_{rm}}\sqrt{1 - \frac{As_{rm}^{\ 2}}{4\left(\sigma_{so} - f_{sy}\right)}}\right) \tag{4.55}$$

La rotazione plastica, quindi, è pari a:

---

[1] L'ipotesi semplificativa:

$$\frac{M_u - M_y}{M_u} \approx \frac{\sigma_{so} - f_{sy}}{\sigma_{so}}$$

non è sempre valida, in quanto il braccio della coppia interna è generalmente diversa se $M=M_y$ o $M=Mu$, soprattutto nei casi in cui la percentuale di armatura è minore della percentuale di armatura bilanciata, ciò per il raggiungimento delle condizioni di crisi per deformazione ultima dell'acciaio.

$$\Theta_p = \int_0^{L_{yu}} \left[\rho_m(z) - \rho_y\right] dz =$$
$$= \int_0^{L_{pu}} \left[\rho_{mu} - \left(\rho_{mu} - \rho_p\right)\left(\frac{z}{L_{pu}}\right)^2 - \rho_y\right] dz + \tag{4.56}$$
$$+ \int_{L_{pu}}^{L_{yu}} \left[\rho_p - \left(\rho_p - \rho_y\right)\left(\frac{z - L_{pu}}{L_{yu} - L_{pu}}\right)^2 - \rho_y\right] dz$$

risolvendo i due integrali si ottiene:

$$\Theta_p = \frac{2}{3}\left(\frac{L_{yu}^{\ 2}}{L_{pu} + L_{yu}}\left(\rho_p - \rho_y\right) + L_{pu}\left(\rho_{mu} - \rho_y\right)\right) \tag{4.57}$$

Che nel caso in cui n_p è uguale a zero, è pari a:

$$\Theta_p = \frac{2}{3} L_{yu}\left(\rho_{mu} - \rho_y\right) \tag{4.58}$$

La capacità rotazionale definita dall'equazione (4.58) o (4.59) può essere sfruttata nel caso in cui, nonostante le lesioni inclinate siano effetto del taglio, la crisi sia di tipo flessionale.

La snellezza è il parametro che definisce il passaggio dalla fessurazione verticale alla fessurazione inclinata. Nel modello proposto si è ipotizzato che le fessure diagonali si formano quando la snellezza ζ della trave è più piccola di un valore limite ζ_{lim} definito:

$$\zeta_{lim} = \frac{M_{sy}}{Vd} \tag{4.59}$$

dove d è l'altezza utile della sezione, M_{sy} è il momento di snervamento e V è il taglio agente sull'elemento quando si formano le fessure diagonali; tale valore, secondo il bollettino (CEB Design Manual on Cracking and Deformation, 1985), è pari a:

$$V = \tau_r \kappa (1 + 50\rho_l) bd \tag{4.60}$$

con:

$$\kappa = 1.6 - d \geq 1 \text{ (d in metri.)} \tag{4.61}$$

$$\rho_l = {A_{sl}}/{bd} \leq 0.02 \tag{4.62}$$

dove A_{sl} è l'area dell'armatura tesa, b la larghezza della sezione e τ_r è una tensione che dipende dalla resistenza cilindrica a compressione nel calcestruzzo f_c ed è riportato nella Tabella 20.

Tabella 20: Valore di τ_r in funzione di f_c

f_c (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50
τ_r (MPa)	0.35	0.40	0.45	0.51	0.57	0.62	0.67	0.72	0.77

Nei prossimi paragrafi, gli elementi saranno definiti "tozzi" o "snelli" rispettivamente se la loro snellezza è minore o maggiore della snellezza limite.
Tra i parametri che influenzano la capacità rotazionale rientra anche lo schema di carico. Nell'appendice sono riportati le formulazioni della capacità rotazionale per diverse distribuzioni della sollecitazione flettente.
Nel caso in cui sia necessario considerare nella rotazione plastica la "fixed end rotation", si deve sommare alla rotazione plastica calcolata con la formulazione appena proposta, il contributo plastico della fixed end rotation, secondo la formulazione proposta nel capitolo precedente, che è pari a:

$$\Theta_{f\_plastica} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{so} - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0, M_u)} \sqrt{\frac{\sigma_{so} - f_y}{A}} \tag{4.63}$$

Confronto tra la formulazione proposta e le prove sperimentali

Nella Figura 4.22 è riportato lo schema statico delle prove sperimentali riportate nel bollettino CEB "Ductility" (1993) effettuate da Bosco e Debernardi. Le caratteristiche geometriche delle travi sono riportate nella Tabella 21. Tutti i campioni presentano una snellezza costante e pari a L/H= 10 e un armatura caratterizzata da una tensione di snervamento pari a f_{sy}=586±24 MPa, una tensione di rottura pari f_{su}=672±19 MPa e una deformazione corrispondente alla tensione di picco pari a ε_{su}=7% (Debernardi e Taliano, 2002). La resistenza a compressione del calcestruzzo è 27.8 MPa, mentre quella a trazione è 2.97 MPa.

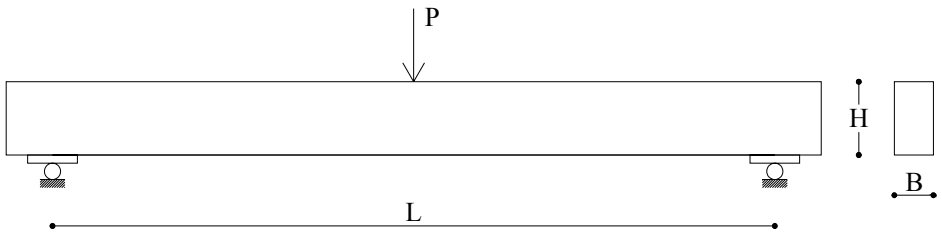


Figura 4.22: Schema statico delle travi sperimentali riportate in (Bosco e Debernardi, 1993)

Tabella 21: Caratteristiche geometriche delle travi sperimentali riportate in (Bosco e Debernardi, 1993)

				Armatura inferiore			Armatura superiore			staffe	
trave	B (mm)	H (mm)	L (m)	n	Φ	δ	n	Φ	δ '	Φ	passo
T1A1	100	200	2	1	12	24	1	8	22	6	150
T2A1	100	200	2	2	12	24	2	8	22	6	150
T3A1	100	200	2	3	12	24	2	8	22	6	150
T4A1	200	400	4	2	12	35	2	10	45	6	200
T5A1	200	400	4	4	12	35	2	10	45	6	200
T6A1	200	400	4	8	12	40	2	10	45	6	200
T7A1	200	400	4	12	12	50	2	12	45	6	200
T10A1	300	600	6	9	12	35	2	12	70	6	150
T11A1	300	600	6	18	12	50	2	12	70	6	150

In (Debernardi e Taliano, 2002) sono riportati i risultati sperimentali del momento flettente massimo corrispondente al carico di snervamento P_y e del carico massimo P_u (Tabella 22). Lo schema statico è quello di una trave isostatica, quindi la distribuzione della sollecitazione flettente è indipendente dallo stato di deformazione, e il valore della sollecitazione flettente massimo può essere valutato analiticamente con la classica formula:

$$M(P) = \gamma BH\frac{L^2}{8} + P\frac{L}{4} \tag{4.64}$$

dove γ è il peso specifico del calcestruzzo.
Nella Tabella 23 sono riportati i momenti flettenti corrispondenti al carico di snervamento P_y e al carico massimo P_u.
Le differenze tra i valori analitici e sperimentali possono essere spiegati dalla presenza di una piastra in corrispondenza della mezzeria, necessaria per l'applicazione della strumentazione sperimentale. Considerando la presenza di questa piastra, lo schema statico con cui valutare la sollecitazione flettente è riportato nella Figura 4.23 ed il momento massimo, per ogni valore del carico P, risulta pari a:

$$M(P) = \gamma BH\frac{L^2}{8} + P\frac{L-x}{4} + \frac{P}{x}\frac{x^2}{8} = \gamma BH\frac{L^2}{8} + \frac{P}{4}\left(L - \frac{x}{2}\right) \tag{4.65}$$

dove x è la larghezza della piastra. I risultati analitici valutati attraverso l'equazione (4.66) considerando una dimensione della piastra pari a 0.8h sono riportati nella Tabella 23.

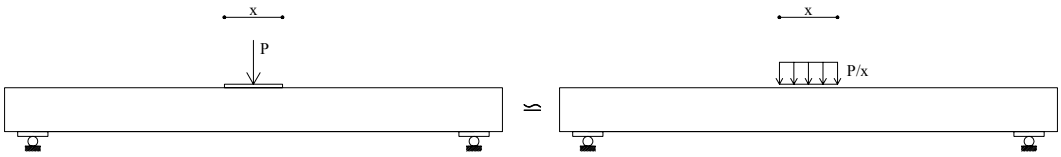


Figura 4.23: Schema statico delle travi sperimentali riportate in (Bosco e Deberardi, 1993), in presenza di una piastra

La presenza di questa piastra sarà considerata nella valutazione analitica della capacità rotazionale, inserendo nella formulazione un tratto in cui la curvatura media è costante (vedere Appendice).

Tabella 22: Valori sperimentali del carico di snervamento P_y e del carico di picco P_u nelle curve carico-spostamento delle travi sperimentali riportate in (Bosco e Debernardi, 1993)

trave	carico	
	P_y	P_u
T1A1	22.80	25.39
T2A1	46.60	50.54
T3A1	68.90	69.23
T4A1	37.80	58.07
T5A1	92.50	108.23
T6A1	196.10	201.55
T7A1	210.00	223.32
T10A1	199.30	213.56
T11A1	374.00	377.42

Tabella 23: Momenti flettenti sperimentali e analitici corrispondenti al carico P_y e P_u delle travi sperimentali riportate in (Bosco e Debernardi, 1993)

trave	momenti flettenti					
	P_y			P_u		
	sper	Eq. (4.65)	Eq. (4.66)	sper	Eq. (4.65)	Eq. (4.66)
T1A1	10.80	11.65	10.81	12.00	12.94	12.01
T2A1	21.80	23.55	21.83	23.60	25.52	23.66
T3A1	32.00	34.70	32.16	32.10	34.86	32.31
T4A1	39.30	41.72	39.18	58.30	61.99	58.09
T5A1	90.50	96.42	90.21	105.00	112.15	104.88
T6A1	182.70	200.02	186.85	192.40	205.47	191.93
T7A1	194.40	213.92	199.81	212.80	227.24	212.24
T10A1	298.00	318.81	300.64	320.80	340.20	320.72
T11A1	544.20	580.86	546.75	551.50	585.99	551.57

Nella Figura 4.24 è riportata la curva analitica che descrive la capacità rotazionale della trave T1A1 in funzione del momento flettente. Nello stesso grafico è riportata anche la curva sperimentale. La curva analitica descrive molto bene la curva sperimentale, sia in termini di resistenza che di deformabilità.

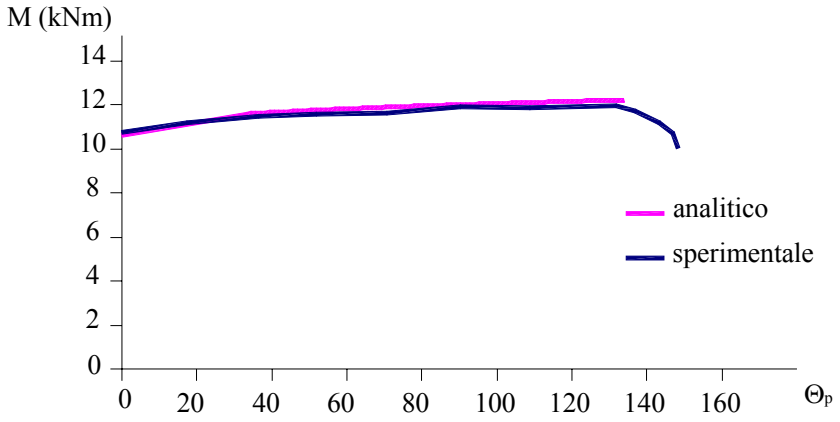


Figura 4.24: Curva momento-rotazione plastica della trave T1A1 (Bosco e Debernardi, 1993), confronto tra i risultati sperimentali e analitici

La stessa curva è stata valutata anche per la trave T2A1, in questo caso, come illustrato nella Figura 4.25 , la trave sperimentale presenta un valore più alto del momento di snervamento ed è più deformabile, nonostante queste differenze, il modello analitico riesce a cogliere bene i risultati sperimentali.

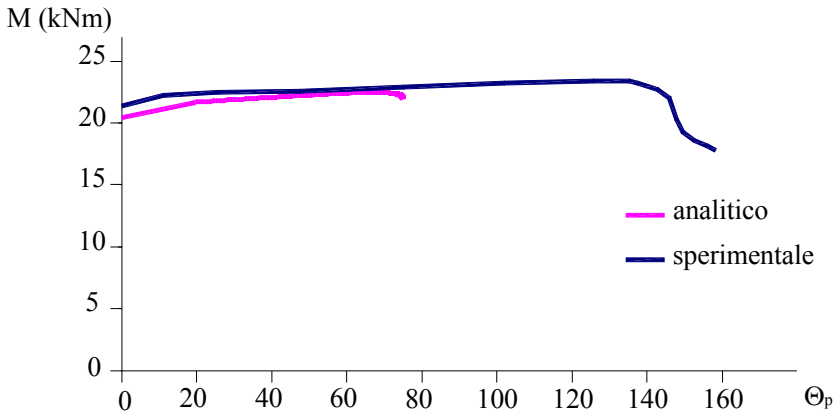


Figura 4.25: Curva momento-rotazione plastica della trave T2A1 (Bosco e Debernardi, 1993), confronto tra i risultati sperimentali e analitici

Le rotazioni plastiche sperimentali e analitiche delle altre travi testate da (Bosco e Deberardi, 1993) sono riportate nella Tabella 24, dove Θ_p (P_u) è la rotazione corrispondente al valore di carico massimo, mentre Θ_{pmax} rappresenta la rotazione plastica massima corrispondente all'ultimo punto del ramo di softening nelle curva momento-rotazione o carico-spostamento.

Tabella 24: Rotazioni plastiche sperimentali e analitiche delle sperimentali riportate in (Bosco e Deberardi, 1993)

trave	sperimentali		analitica
	Θ_p (P_u)	Θ_{pmax}	Θ_p
T1A1	104.00	145.60	140
T2A1	122.90	145.00	64.43
T3A1	7.80	85.10	12.06
T4A1	148.20	179.00	221.48
T5A1	124.50	146.50	71.27
T6A1	17.60	41.00	11.95
T7A1	2.00	7.40	4.11
T10A1	43.10	84.10	57.65
T11A1	7.30	34.40	10.61

Confronto tra la formulazione proposta e la formulazione proposta dalle norme italiane

Nel paragrafo precedente, equazione (4.35), abbiamo visto come la formulazione della rotazione plastica riportata nell'O.P.C.M. n°3431/2005, sia molto simile a quella proposta da (Panagiotakos e Fardis, 2001), a meno del coefficiente α_{sl} moltiplicativo della tensione di snervamento dell'acciaio che rappresenta il contributo aggiuntivo alla capacità rotazionale dovuto alla fixed end rotation. Questo termine, scomparso in quest'ultima formulazione, è presente nell'O.P.C.M. n°3274/2003, per questo motivo, ritenendolo un errore di trascrizione, nel valutare la lunghezza della cerniera plastica è stata utilizzata la seguente relazione:

$$L_p = 0.1L_v + 0.17h + \alpha_{sl} 0.24 \frac{\Phi f_y}{\sqrt{f_c}} \tag{4.66}$$

Un'ulteriore ipotesi è stata fatta sul coefficiente γ_{el} che secondo la definizione delle norme è pari a 1.5 se l'elemento può essere definito primario, uguale a 1 se secondario. Senza considerare questa distinzione γ_{el} è preso pari a 1, di conseguenza, l'espressione analitica della capacità rotazionale, secondo la definizione delle norme, è:

$$\Theta_{p\_NI} = \Theta_u - \Theta_y = \left(\rho_u - \rho_y\right) L_p \left(1 - \frac{L_p}{L_v}\right) \tag{4.67}$$

Nella Figura 4.26 è riportata la capacità rotazionale di una trave semplicemente armata, in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa. Lo schema statico è sempre quello riportato nella figura (4.230(b)). La trave ha le dimensioni di 300 mm di base e 500 mm di altezza ed è costituita da un calcestruzzo di classe $R_{ck}30$, l'acciaio ha un rapporto di incrudimento pari a 1.15, una tensione di snervamento pari a 450 MPa e una deformazione ultima pari a 8%. La luce della trave, pari a 3 m, è tale da poter definire l'elemento snello.

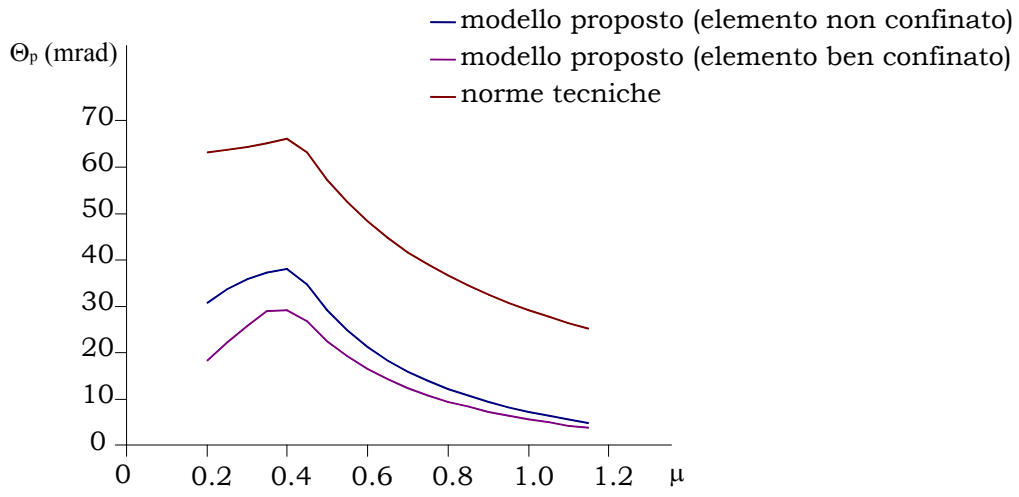


Figura 4.26: Rotazione plastica in funzione della percentuale di armatura tesa di una trave snella: confronto con la formulazione proposta dalle norme tecniche italiane

Come illustrato nella Figura 4.26, per tutte le percentuali di armatura, la capacità rotazionale valutata attraverso l'equazione (4.67) risulta molto più grande di quella calcolata con la formulazione proposta in questa tesi, per tutti i valori del coefficiente di confinamento.
Nel caso esaminato, nella formulazione presente nelle norme tecniche, il parametro moltiplicativo della differenza tra le curvature locali della sezione fessurata corrispondenti alla condizione di snervamento e alla condizione ultima, è pari, per ogni valore della percentuale di armatura tesa, a:

$$L_p\left(1-\frac{L_p}{L_v}\right)\simeq 335.6\text{mm} \tag{4.68}$$

Trascurando l'effetto del tension stiffening e considerando una variazione lineare delle curvature, la capacità rotazionale può essere valutata attraverso la seguente relazione:

$$\Theta_{p\_no\_ts}=\Theta_u-\Theta_y=\left(\rho_u-\rho_y\right)\frac{L_{yu}}{2} \tag{4.69}$$

dove L_{yu} è la distanza tra la sezione in cui $M=M_y$ e la sezione in cui $M=M_u$, che per lo schema considerato, può essere valutata con la seguente relazione:

$$L_{yu}=\frac{M_u-M_y}{M_u}L_v \tag{4.70}$$

Per la definizione di lunghezza di cerniera plastica, $L_{yu}/2$ deve essere maggiore del valore fornito dall'equazione (4.68), condizione che, come illustrato nella Figura 4.27, non si verifica mai.

Nel caso in cui la luce della trave sia tale da poterla definire tozza, ed in particolare per L=2d, le curve che riportano la capacità rotazionale in funzione della percentuale di armatura compressa (Figura 4.28) mostrano come l'equazione (4.67) fornisce dei valori di capacità rotazionale più vicini, e quasi sempre più piccoli, della capacità rotazionale valutata con il modello proposto.

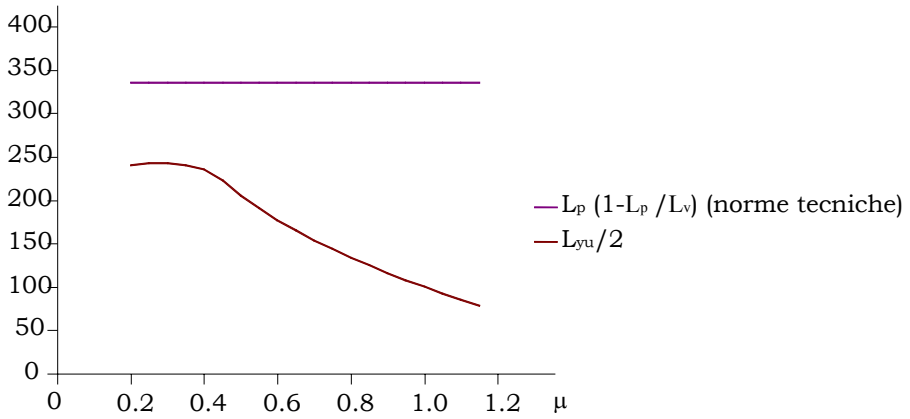


Figura 4.27: Confronto tra i parametri che definiscono l'effetto del tension stiffening e della lunghezza della cerniera plastica in una trave snella

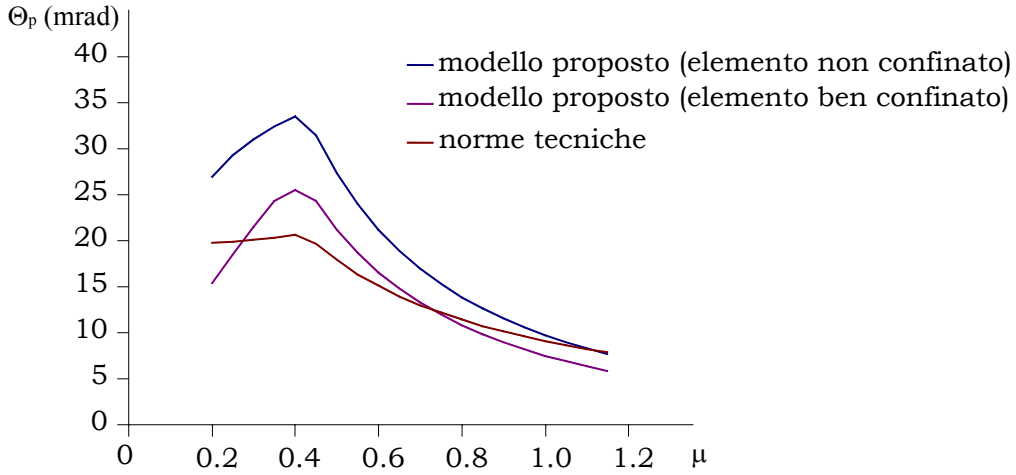


Figura 4.28: Rotazione plastica in funzione della percentuale di armatura tesa di una trave tozza: confronto con la formulazione proposta dalle norme tecniche italiane

Gli stessi risultati si ottengono nel caso in cui il confronto si effettui su un elemento pilastro snello (Figura 4.29(a)) o tozzo (Figura 4.29(b)). Nel caso esaminato la sezione trasversale del pilastro è armata simmetricamente e sottoposta ad uno stato di sollecitazione di pressoflessione con ν=0.1.

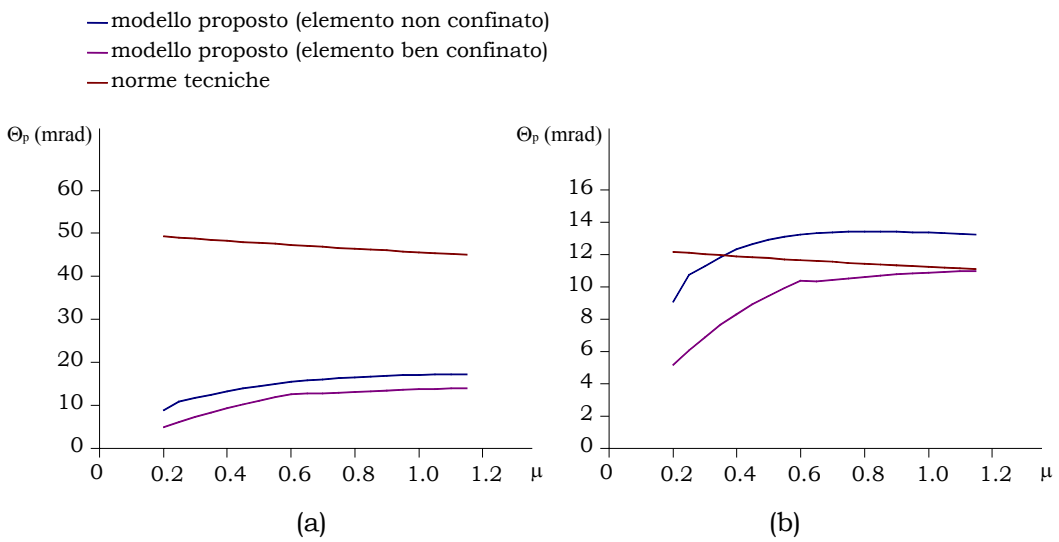


Figura 4.29: Rotazione plastica in funzione della percentuale di armatura tesa di una pilastro snello (a) e tozzo (b): confronto con la formulazione proposta dalle norme tecniche italiane

Il confronto tra le due formulazioni della capacità rotazionale ha evidenziato come, nei casi esaminati, la rotazione plastica ottenuta con la formulazione presente nell'O.P.C.M. sovrastima la duttilità degli elementi in cemento armato snelli.

Applicazioni numeriche: duttilità di strutture isostatiche

L'espressione della capacità rotazionale, introdotta nel paragrafo precedente, è stata applicata per valutare i principali parametri che influenzano la duttilità, in termini di rotazione, di un elemento monodimensionale in cemento armato. Lo schema statico esaminato è quello riportato nella Figura 4.30: trascurando il peso proprio della struttura, il momento flettente varia linearmente e la lunghezza dell'elemento coincide con la luce da taglio L_v. La capacità rotazionale, pari all'integrale delle curvature medie sulla lunghezza L_{yu} del tratto in cui avvengono le deformazioni plastiche, generalmente, dipende da tre fattori: il comportamento locale della sezione critica fessurata, la diffusione (o viceversa la localizzazione) delle deformazioni plastiche all'interno del concio e la distribuzione

lungo l'asse dell'elemento delle deformazioni e delle corrispondenti curvature.
Punto di partenza di tutti i confronti è la trave semplicemente inflessa le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono quelle riportate nella Tabella 25.

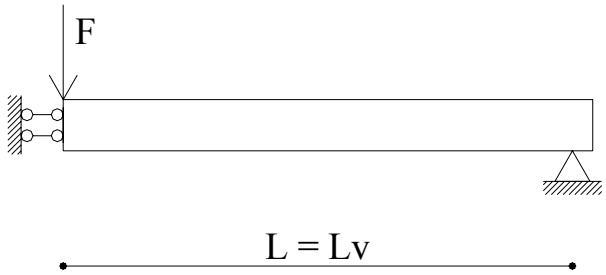


Figura 4.30: Schema statico della trave analizzata nelle analisi parametriche

Tabella 25: Parametri meccanici e geometrici della trave tipo analizzata nelle analisi parametriche

Caratteristiche geometriche					
L_v	8 ‰	H	δ	Diametro barre	staffe
6 metri	30 cm	50 cm	5 cm	Φ 20	Φ 8 / 15
Caratteristiche meccaniche					
R_{ck}	ε_{cu}	f_{sy}	Y_{sr}	ε_{su}	copriferro
30 MPa	8 ‰	450 MPa	1.158	8 %	2 Φ

Influenza del legame d'aderenza sulla capacità rotazionale

Il legame d'aderenza non modifica né il comportamento locale delle sezioni fessurate né la distribuzione delle sollecitazioni lungo l'asse dell'elemento. L'aderenza tra barra e calcestruzzo modifica la distribuzione delle deformazioni plastiche nelle sezioni non fessurate, soprattutto in regime post-snervamento, cioè quando l'effetto del confinamento modifica il legame costitutivo che lega tensioni tangenziali a scorrimenti. Nel terzo capitolo, i coefficienti che compaiono nella formulazione proposta della curvatura media ultima sono stati tarati con i risultati della risoluzione numerica

del sistema di equazioni differenziali legato al fenomeno della perdita di aderenza. Il legame non lineare d'aderenza utilizzato nelle simulazioni numeriche è quello proposto dal Model Code 90, per gli elementi cosiddetti "non confinati" o per gli elementi "confinati". Il coefficiente di confinamento δ_{con} è stato fatto variare da 1 a 5, considerando che se δ_{con}=1 i coefficienti che compaiono nella formulazione della curvatura media ultima sono quelli riportati nella Tabella 12 per un calcestruzzo non confinato, mentre quando δ_{con}=5 si è considerato un calcestruzzo confinato. Per gli altri valori del coefficiente di confinamento è stata effettuata una interpolazione lineare.
Nella Figura 4.31 sono riportate le curve che descrivono la rotazione plastica, adimensionalizzata rispetto al valore calcolato considerando δ_{con}=1, in funzione del coefficiente di confinamento, per tre diverse percentuali di armatura tesa (pari a 0.5%, 0.85% e 1.2%) e per tre diversi diametri (Φ16, Φ20 e Φ24). Le curve sono indipendenti sia dalla percentuale di armatura tesa che dal diametro delle barre, presentano un andamento decrescente all'aumentare del coefficiente di confinamento, che significa una riduzione della capacità rotazionale al migliorare delle caratteristiche d'aderenza. La trave analizzata ha una luce da taglio pari a 3 metri e in tutti i casi è risultata una snellezza maggiore della snellezza limite, quindi con un quadro fessurativo caratterizzato da lesioni verticali.

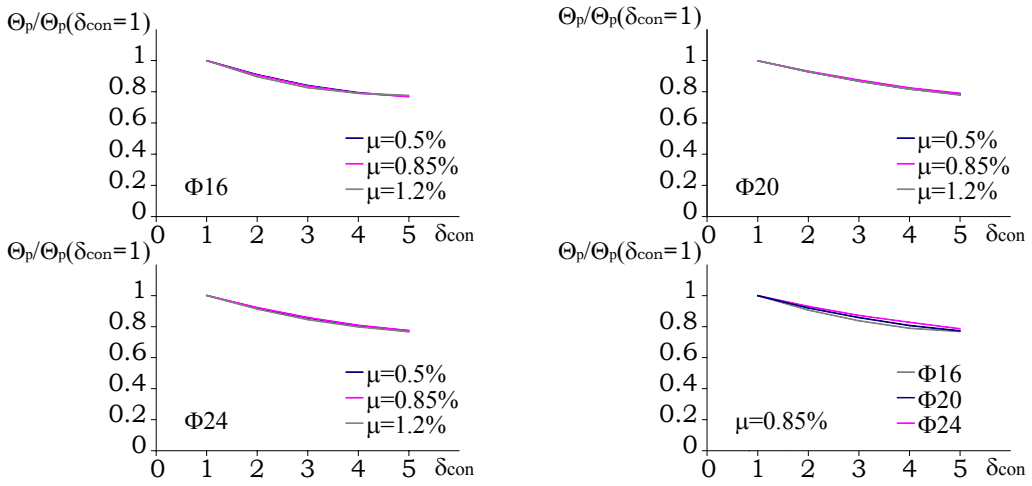


Figura 4.31: Confronto tra le rotazioni plastiche in travi snelle al variare del confinamento

Analogo è il caso in cui l'azione tagliante non è trascurabile, nella Figura 4.32 è riportata la capacità rotazionale di una trave in cui la snellezza è minore della snellezza da taglio. La riduzione della capacità rotazionale all'aumentare delle caratteristiche d'aderenza è leggermente più marcata se diminuisce il diametro delle barre, ed è praticamente indipendente dalla percentuale di armatura tesa.

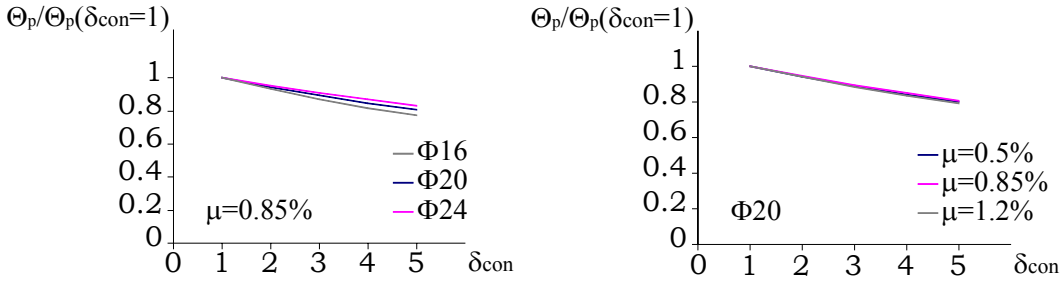


Figura 4.32: Confronto tra le rotazioni plastiche in travi tozze al variare del confinamento

Per elementi pilastro, armati simmetricamente e sottoposti a stati di sollecitazione di presso flessione con sforzi normali a rottura pari rispettivamente a 0.05-0.1 e 0.2 f_cA_g, all'aumentare dell'intensità dello sforzo normale diminuisce l'effetto del legame d'aderenza sulla capacità rotazionale, sia nel caso in cui la snellezza è maggiore della snellezza limite (Figura 4.33(a)) che nel caso contrario (Figura 4.33(b)).

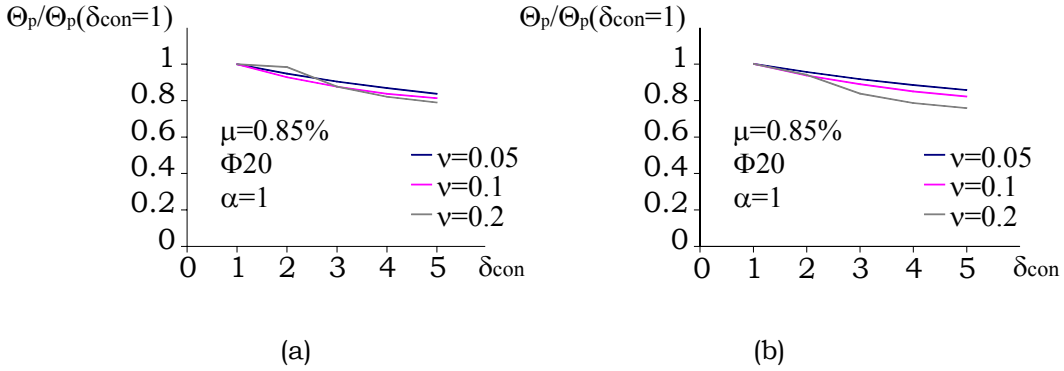


Figura 4.33: Confronto tra le rotazioni plastiche in pilastri snelli (a) e tozzi (b) al variare del confinamento

Influenza delle caratteristiche meccaniche dell'acciaio sulla capacità rotazionale

Il problema dell'influenza delle proprietà meccaniche dell'acciaio sulla duttilità degli elementi in cemento armato fu sollevato da (Eligehausen e Langer, 1987); gli autori criticano la formulazione proposta da (Siviero, 1976) e recepita in seguito dal Model Code 78, perché nelle prove sperimentali effettuate tra il 1960 e il 1970, le barre d'armatura con cui erano costruite le travi, avevano un rapporto di incrudimento Y_{sr} (Figura 4.34) troppo alto ($Y_{sr} \approx 1.4$-1.8), e quindi, la capacità rotazionale valutata analiticamente non poteva essere raggiunta dagli elementi costruiti negli anni 80' in cui l'acciaio presentavano dei rapporti di incrudimento più bassi.

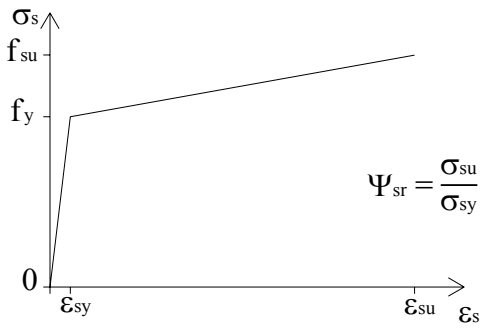


Figura 4.34: Legame costitutivo dell'acciaio utilizzato nelle analisi parametriche

Nella Figura 4.35 è riportata la capacità rotazionale in funzione del rapporto di incrudimento dell'acciaio per tre diversi valori della percentuale di armatura tesa.
La notevole influenza del rapporto di incrudimento sulla capacità rotazionale è legata a tre fenomeni: una maggiore diffusione delle deformazioni plastiche dell'acciaio nelle sezioni non fessurate, una maggiore curvatura locale nella sezione critica e una maggiore lunghezza L_{yu} in cui la sollecitazione flettente è maggiore del momento di snervamento.
Come illustrato nel grafico riportato in seguito, nel caso in cui la rottura sopraggiunga per schiacciamento del calcestruzzo compresso (μ>=0.8%) l'incremento della capacità rotazionale all'aumentare del rapporto di incrudimento è poco dipendente dal

tipo di fessurazione e dalla percentuale di armatura tesa. La capacità rotazionale triplica il valore nel passaggio da un rapporto di incrudimento pari a 1.05 ad un rapporto di incrudimento pari a 1.45.
L'aumento della capacità rotazionale è più marcato nel caso in cui la crisi avvenga per deformazione ultima dell'acciaio (che nel caso esaminato avviene per μ=0.2-0.35%).

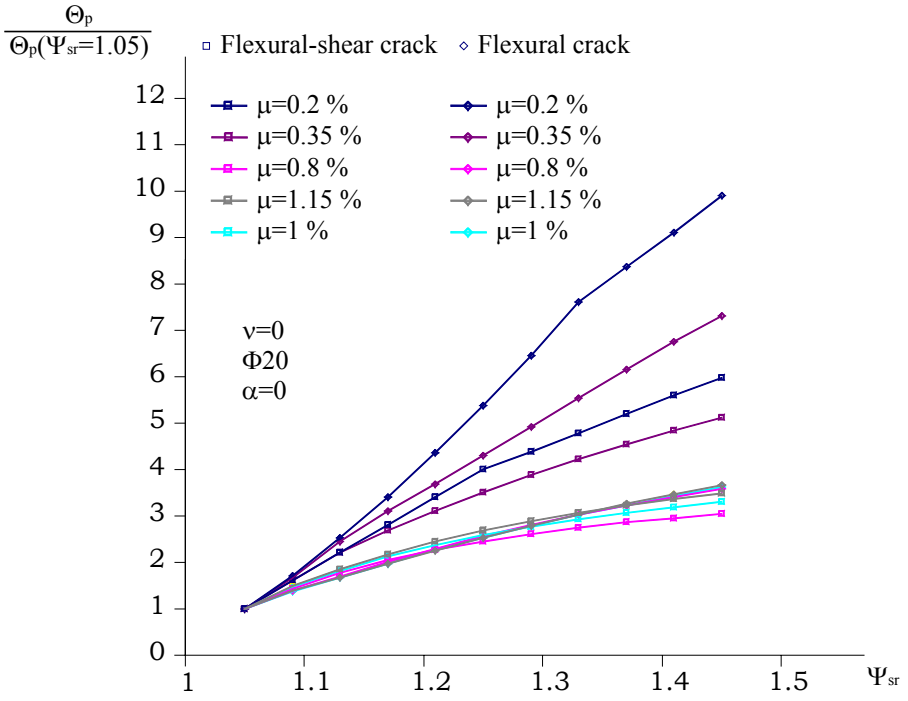


Figura 4.35: Rotazione plastica adimensionalizzata in funzione del rapporto di incrudimento dell'acciaio

Nella Figura 4.36 sono riportate le capacità rotazionali in funzione della deformazione ultima dell'acciaio, per diversi rapporti di incrudimento (Y_{sr}=1.08-1.15-1.25) e per diverse luci da taglio L_v. La trave analizzata è semplicemente armata con una percentuale di armatura tesa pari al 0.2%, la crisi si raggiunge sempre per deformazione ultima nell'acciaio. Le luci da taglio considerate sono tali che se L_v=500 mm, il quadro fessurativo è formato da lesioni inclinate, mentre negli altri due casi le lesioni sono verticali. Nel caso di flexural-shear hinge, l'incremento di rotazione plastica è indipendente dal rapporto di incrudimento dell'acciaio. Nel caso di

taglio debole, invece, l'incremento di capacità rotazionale è proporzionale al rapporto di incrudimento ed è indipendente dalla luce. In tutti i casi l'incremento di rotazione plastica cresce linearmente con la deformazione ultima dell'acciaio.

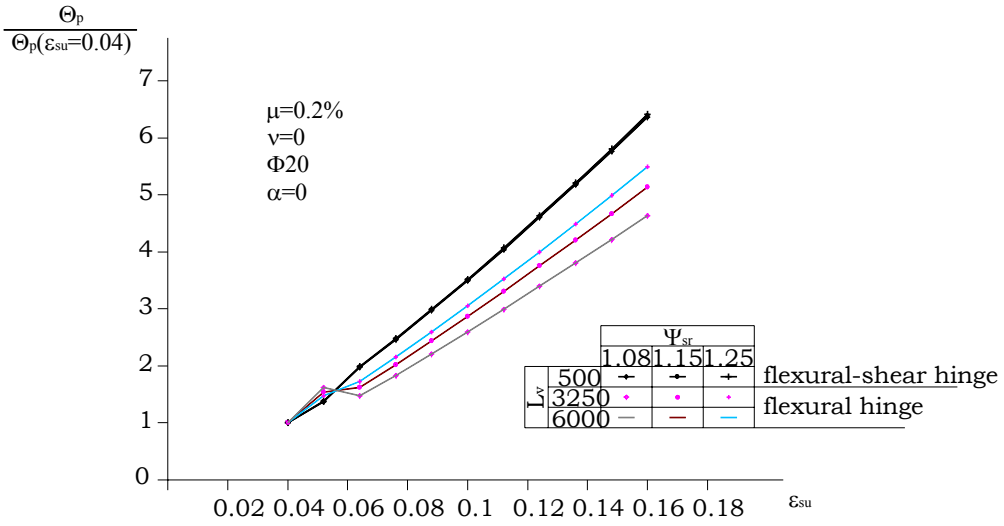


Figura 4.36: Rotazione plastica adimensionalizzata in funzione della deformazione ultima dell'acciaio

In (Cosenza et al., 1993), viene proposto un parametro per definire quali sono le caratteristiche meccaniche dell'acciaio affinché venga raggiunto un determinato valore della capacità rotazionale. Il parametro, indicato in letteratura con il nome di "equivalent steel", è:

$$p = \varepsilon_u^{0.73}\left(\frac{f_u}{f_y}-1\right)^{0.92} \approx \varepsilon_u^{0.75}\left(\frac{f_u}{f_y}-1\right)^{0.9} \tag{4.71}$$

Altre formulazioni sono state presentate in letteratura, ad esempio (Beeby, 1997) suggerisce che il "ductility factor" è pari all'area campita nella Figura 4.37 e può essere calcolato con:

$$p = f_{su}\varepsilon_u - \int_0^{\varepsilon_{sy}} \sigma_s(\varepsilon_s) - \frac{f_{su}^{\ 2}}{2E_s} \tag{4.72}$$

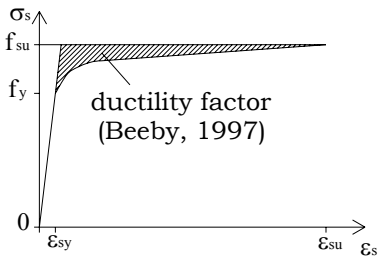


Figura 4.37: Ductility factor: definizione proposta da (Beeby, 1997)

Nelle figure che seguono sono riportate le capacità rotazionali in funzione della deformazione ultima dell'acciaio considerando che il parametro p, secondo la definizione proposta da (Cosenza et al., 1993) è costante e pari rispettivamente a 0.02, 0.03 e 0.04. La formulazione proposta dagli autori è stata tarata con i risultati di alcune simulazioni numeriche effettuate su delle travi la cui dimensioni sono 300mm x 600mm e lunghezza pari a 6metri, armate con 2 Φ 12. Nella Figura 4.38 sono riportati i risultate delle analisi svolte su queste travi utilizzando l'equazione proposta nella tesi per tre valori del coefficiente di confinamento e rispettivamente pari a 1, 3 e 5.

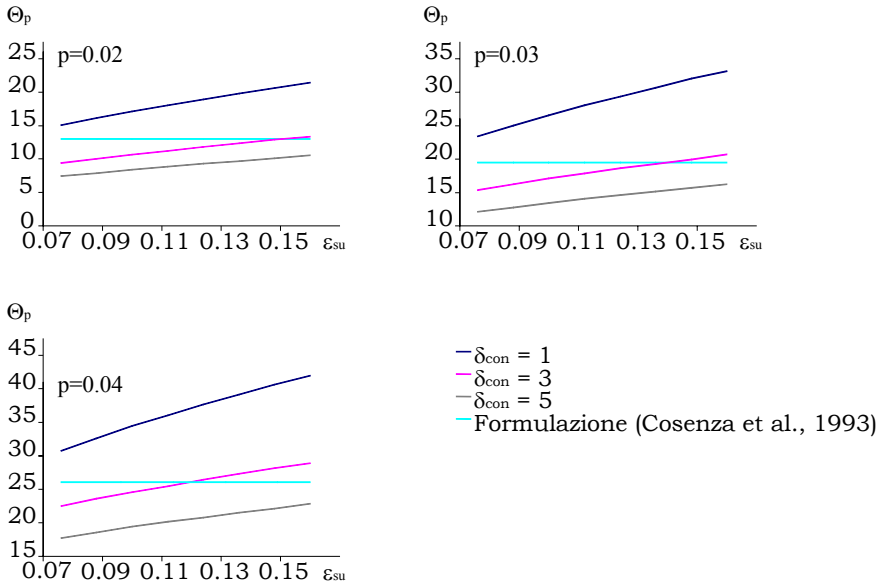


Figura 4.38: Rotazione plastica in funzione della deformazione ultima dell'acciaio mantenendo costante il parametro p definito da (Cosenza et al., 1993), per una trave armata di dimensioni 300 x 600 e armata con 2 Φ12

Il confronto mostra che i risultati dell'applicazione delle due formulazioni analitiche, in media, sono in buon accordo. Se però si cambiano le caratteristiche geometriche della trave, i risultati sono diversi.
Nella Figura 4.39 sono riportate le capacità rotazionali nel caso in cui le dimensioni della sezione trasversale sono 300x500 e la trave è armata con una percentuale geometrica di armatura pari a 0.2%.

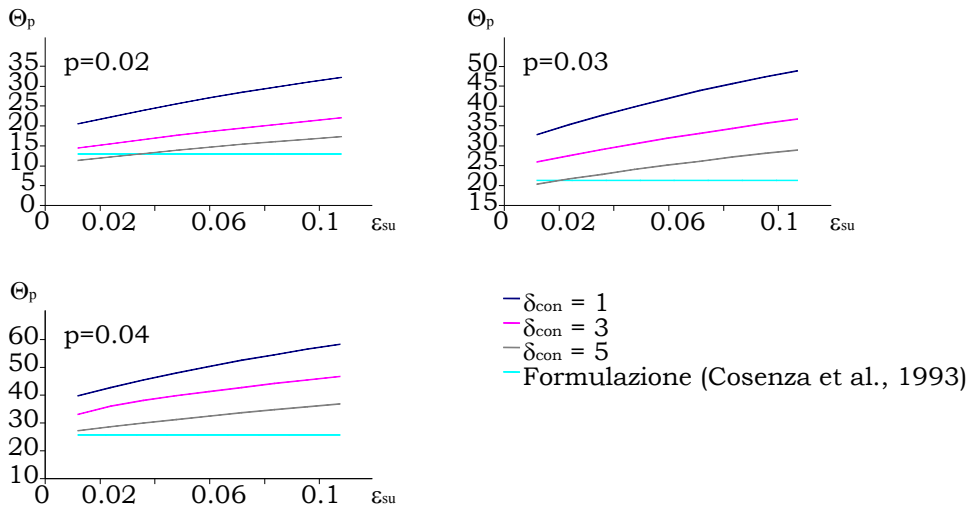


Figura 4.39: Rotazione plastica in funzione della deformazione ultima dell'acciaio mantenendo costante il parametro p definito da (Cosenza et al., 1993), per una trave di dimensioni 300 x 500 e armata μ=0.2%

In questo caso, la formulazione proposta da (Cosenza et al., 1993) fornisce dei valori della capacità rotazionale sempre più bassi rispetto a quelli valutati con la formulazione proposta. L'applicazione dell'equazione (4.72) per valutare la capacità rotazionale di elementi debolmente armati, è rappresentata, nel piano rotazione plastica-percentuale di armatura tesa, da un ramo orizzontale. In realtà, all'aumentare della percentuale di armatura tesa diminuisce la distanza tra le fessure, con una conseguente maggiore diffusione delle deformazioni plastiche e quindi, anche se la curvatura ultima della sezione fessurata, nel caso in cui la crisi sopraggiunga per deformazione ultima dell'acciaio, è praticamente indipendente dalla percentuale di armatura tesa, la maggior diffusione implica una maggiore capacità rotazionale dell'elemento. In definitiva, la curva che riporta la capacità rotazionale in

funzione della percentuale di armatura tesa non può essere orizzontale ma deve avere un andamento crescente fino al valore della percentuale di armatura per cui si giunge contemporaneamente alla deformazione ultima in entrambi i materiali.

Influenza della snellezza sulla capacità rotazionale

La snellezza limite, secondo la definizione proposta (eq.ne (4.60)) dipende dalla resistenza a compressione del calcestruzzo, dalla tensione di snervamento dell'acciaio e dalla percentuale di armatura tesa. Nelle Figure 4.40 e 4.41 sono riportate le curve che definiscono la snellezza limite in funzione della percentuale di armatura tesa per diversi valori della resistenza cubica a compressione del calcestruzzo, sia per l'elemento trave che per l'elemento pilastro. Nella Figura 4.42, per l'elemento pilastro, è riportata la snellezza limite in funzione del coefficiente ν (pari al rapporto tra lo sforzo normale e il prodotto A_g x f_c).
Come illustrato nei grafici, le curve ζ_{lim}-μ e ζ_{lim}-ν presentano un andamento crescente per tutti i valori della resistenza cilindrica a compressione del calcestruzzo.

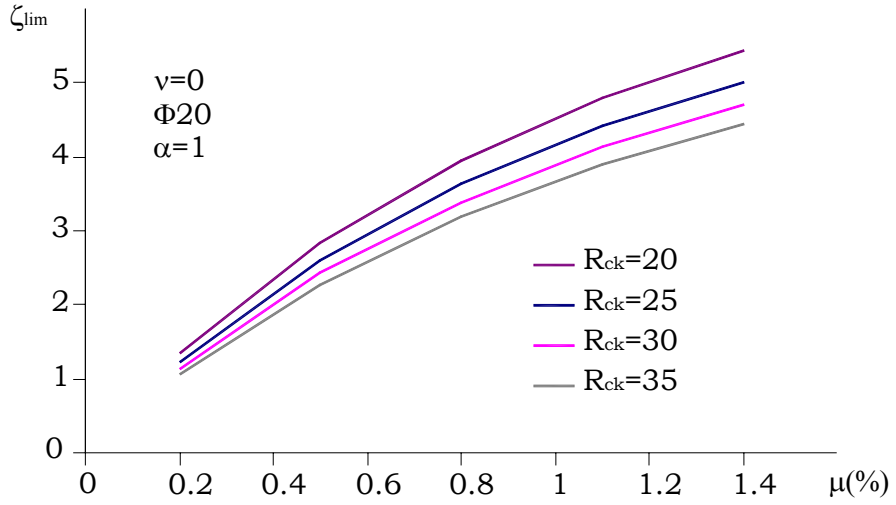


Figura 4.40: Snellezza limite per elementi trave in funzione della percentuale di armatura tesa, per diverse classi di calcestruzzo

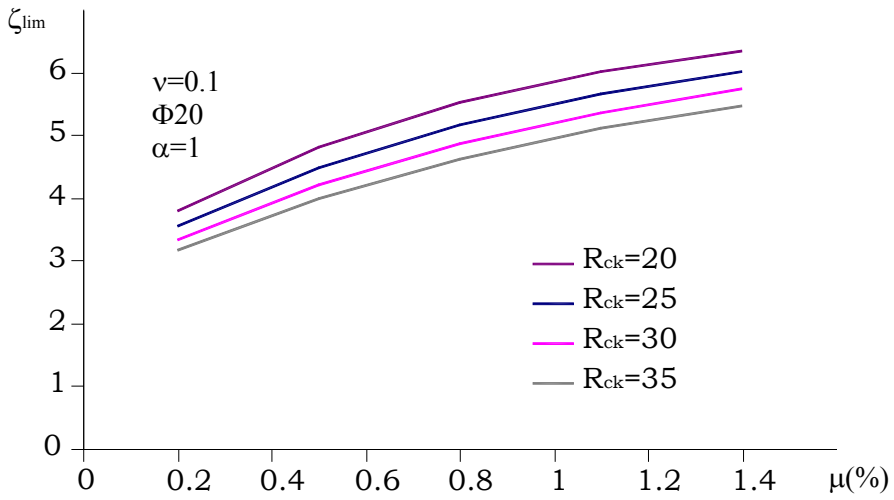


Figura 4.41: Snellezza limite per elementi pilastro in funzione della percentuale di armatura tesa, per diverse classi di calcestruzzo

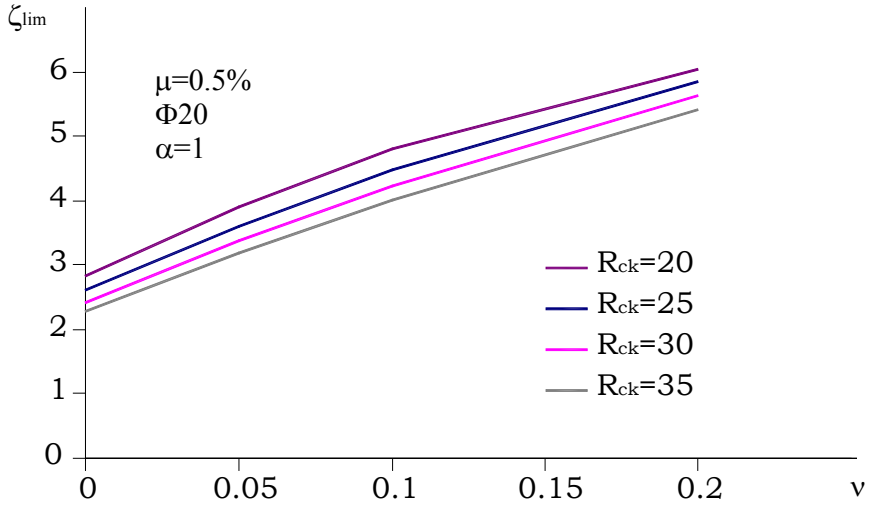


Figura 4.42: Snellezza limite in funzione dell'intensità dello sforzo normale, per diverse classi di calcestruzzo

Nella Figura 4.43 sono riportate le curve Θ_p-μ per travi con diverse luci da taglio. Nel caso analizzato, se L_v è maggiore di 2 metri, l'elemento può essere definito snello per tutte le percentuali di armatura, mentre negli altri casi, per bassi valori di μ l'elemento è snello, per poi diventare tozzo in corrispondenza della percentuale di armatura per cui la snellezza limite uguaglia la snellezza dell'elemento.

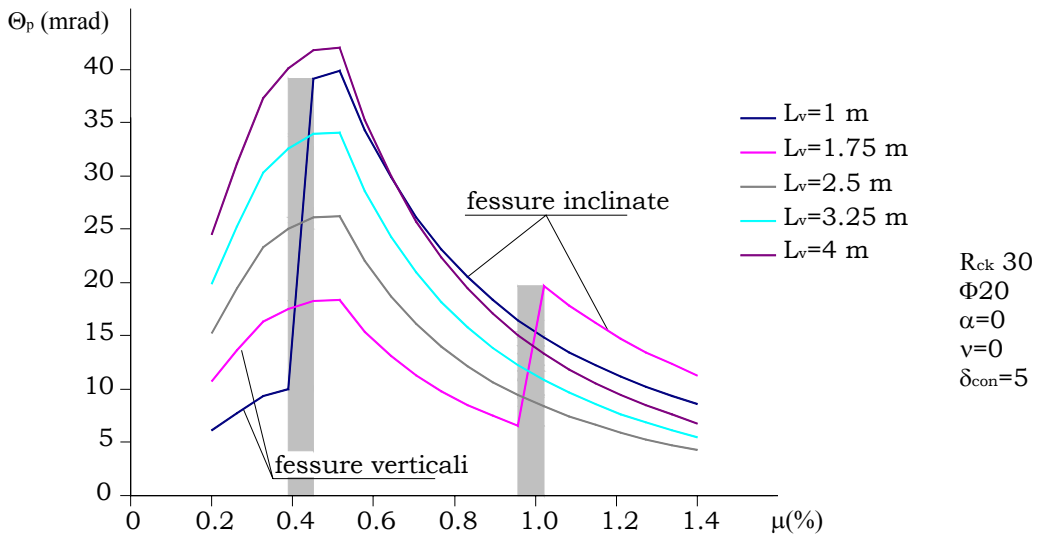


Figura 4.43: Rotazione plastica in funzione della percentuale di armatura tesa, per diversi valore della luce da taglio

Nella Figura 4.44 è riportata le curva Θ_p-μ di una trave con L_v = 1 metro e la curva ζ_{lim}-μ. La percentuale di armatura corrispondente al punto di intersezione tra la curva che descrive la snellezza limite e la retta orizzontale di ordinata costante e pari a ζ, definisce la transizione tra la fessurazione verticale e inclinata. Per percentuali di armatura minori, la snellezza ζ della trave è maggiore della snellezza limite, mentre per percentuali di armatura maggiori la snellezza è minore.
Come illustrato nel grafico, il passaggio dal comportamento di elemento snello al comportamento di elemento tozzo si traduce in un brusco incremento della capacità rotazionale.
In realtà, il passaggio da una fessurazione verticale ad una fessurazione inclinata è graduale e il modello proposto non può predire con sufficiente cura il reale comportamento della cerniera plastica per snellezze prossime a ζ_{lim}, per questo motivo, nelle curve che descrivono la capacità rotazionale è stata campita la zona che rappresenta i punti per cui il passaggio da un comportamento all'altro non è ben definito.
Per ogni valore della luce da taglio, le curve presentano la tipica cuspide in corrispondenza della percentuale geometrica di armatura per cui si raggiunge contemporaneamente la deformazione ultima sia nel calcestruzzo che nell'acciaio.

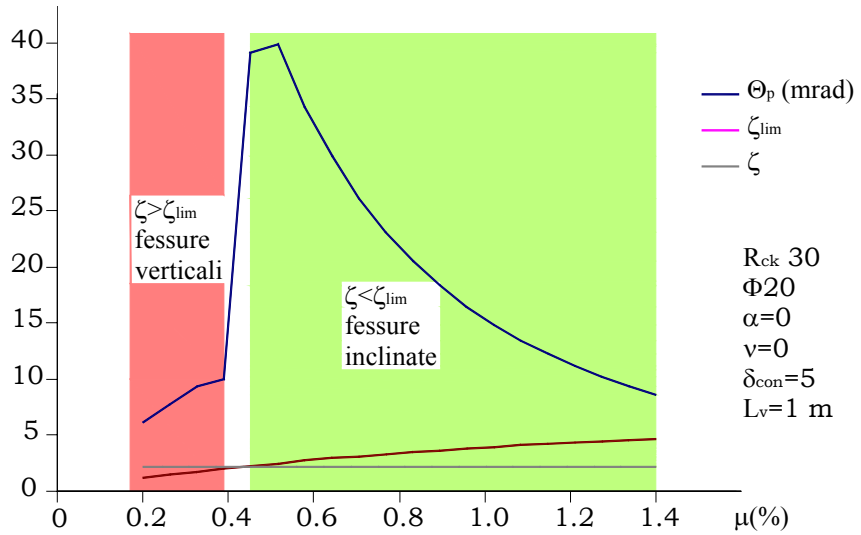


Figura 4.44: Rotazione plastica e snellezza limite in funzione della percentuale di armatura tesa

Nella Figura 4.45 è riportata la rotazione plastica in funzione della snellezza per due travi semplicemente armate rispettivamente con una percentuale geometrica pari a 06% e 1%.

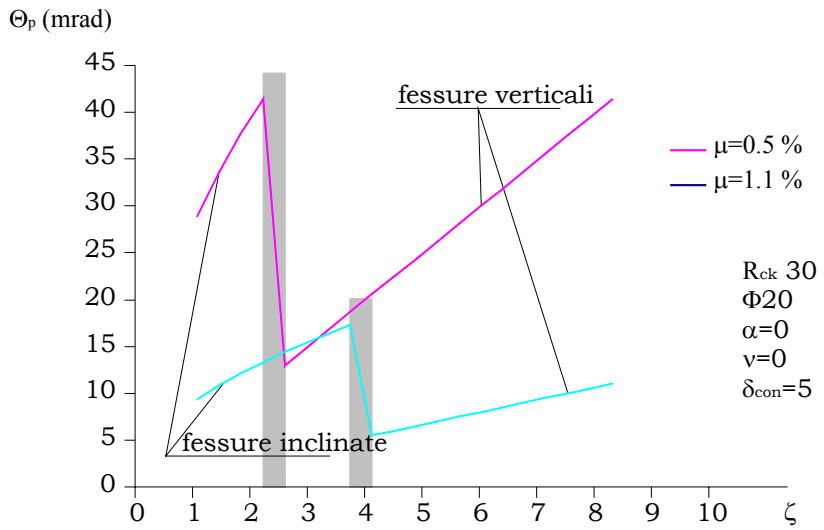


Figura 4.45: Snellezza limite in funzione della snellezza, per diversi valore della luce da taglio

Per bassi valori della snellezza il comportamento della cerniera plastica è governato da un quadro fessurativo inclinato fino al valori della snellezza prossimi a quella limite, per snellezze superiori il quadro fessurativo si presenta con lesioni verticali e la capacità rotazionale decresce bruscamente per poi aumentare al crescere della snellezza.
Le curve ottenute mostrano un accordo qualitativo con quella proposta da (Langer, 1987) e riportata anche nel bollettino (CEB Ductility of Reinforced Concrete Structures, 1998).

Influenza dello sforzo normale sulla capacità rotazionale

L'intensità dello sforzo normale ha una influenza rilevante sulla duttilità. Nella Figura 4.46 sono riportati i valori della capacità rotazionale, adimensionalizzati rispetto alla capacità rotazionale nel caso di flessione pura, in funzione di ν, per tre diverse percentuali di armatura tesa, sia nel caso taglio debole (Figura 4.46(a)) che di taglio forte (Figura 4.46(b)).
In tutti i casi esaminati, all'aumentare dell'intensità dello sforzo normale la capacità rotazionale si riduce notevolmente, fino a diventare praticamente nulla quando ν = 0.35. Questo risultato è causato da una diminuzione della curvatura locale nella sezione critica, da una diminuzione della lunghezza plastica L_{yu} ed infine da una maggiore localizzazione delle deformazioni plastiche all'aumentare dell'intensità dello sforzo normale.

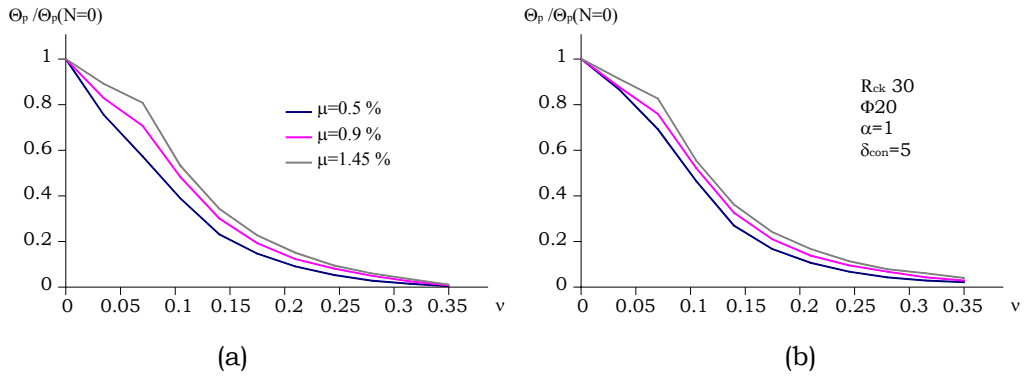


Figura 4.46: Confronto tra le rotazioni plastiche in pilastri snelli (a) e tozzi (b) al variare dell'intensità dello sforzo normale

Influenza della geometria del quadro fessurativo sulla capacità rotazionale

La geometria del quadro fessurativo investe una importanza rilevante sulla capacità rotazionale. Le simulazioni numeriche possono individuare, per ogni valore dello stato di sollecitazione esterno, la lunghezza di trasmissione e quindi definire la distanza massima e minima tra le lesioni. Nelle simulazioni svolte fino a questo punto, il quadro fessurativo assunto è formato da una schiera di fessure equidistanti. La distanza media tra le lesioni è stata valutata attraverso la formulazione proposta dall'Eurocodice 2. In seguito, le indagini riguarderanno la valutazione della capacità rotazionale negli elementi in cui la distanza tra le lesioni è sempre costante su tutto l'elemento ma con valori che variano dalla distanza minima (indicata con l_t) alla massima (indicata con 2 l_t).
Nelle figure che seguono il rapporto $\Theta_p/\Theta_p(s_r=l_t)$ è plottato in funzione della distanza tra le fessure, adimensionalizzata rispetto a l_t, sia nel caso di trave snella (Figura 4.47(a)) che nel caso di trave tozza (Figura 4.47(b)).

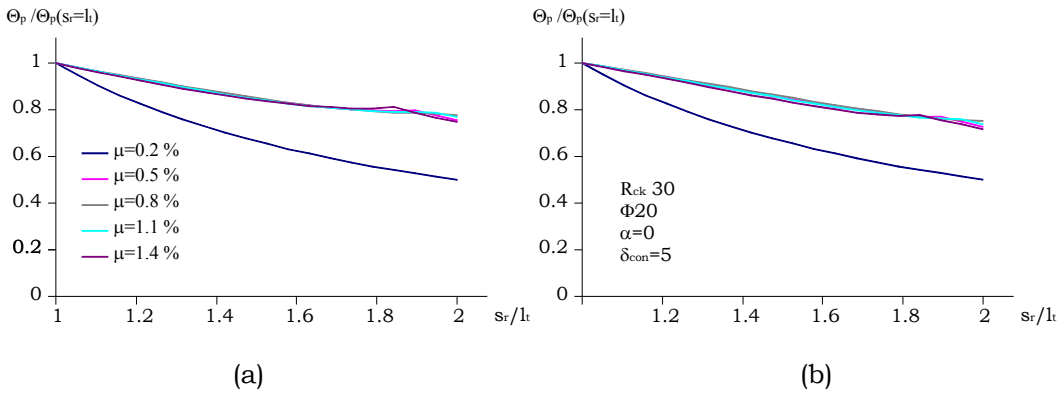


Figura 4.47: Confronto tra le rotazioni plastiche in travi snelle (a) e tozze (b) al variare della distanza tra le fessure

Il risultato più evidente di queste analisi è che la snellezza non influenza la riduzione della capacità rotazionale e che è possibile distinguere fondamentalmente due comportamenti. Nelle analisi effettuate, se la percentuale di armatura è pari a 0.2%, la rotazione plastica si dimezza quando la distanza tra le fessure passa dalla

distanza minima alla massima, mentre per tutte le altre percentuali di armatura la riduzione è di circa il 25%.
La distanza tra le lesioni non modifica né il comportamento della sezione critica né la distanza L_{yu}, ma influenza il comportamento medio dei conci compresi tra due fessure ed in particolare all'aumentare della distanza tra le lesioni, aumenta la probabilità che la deformazione plastica dell'acciaio si localizzi in prossimità delle fessure. Nella Figura 4.48 sono riportate le funzioni che descrivono l'andamento della curvatura media in funzione della distanza dalla sezione critica, nel caso in cui μ=0.2% e μ=1.4%.
Il rapporto tra le curvature medie ultime tra il caso di massima e minima distanza tra le fessure è pari a circa 0.4 nel caso in cui μ=0.2%, e circa 0.7 nel caso in cui μ=1.4%.

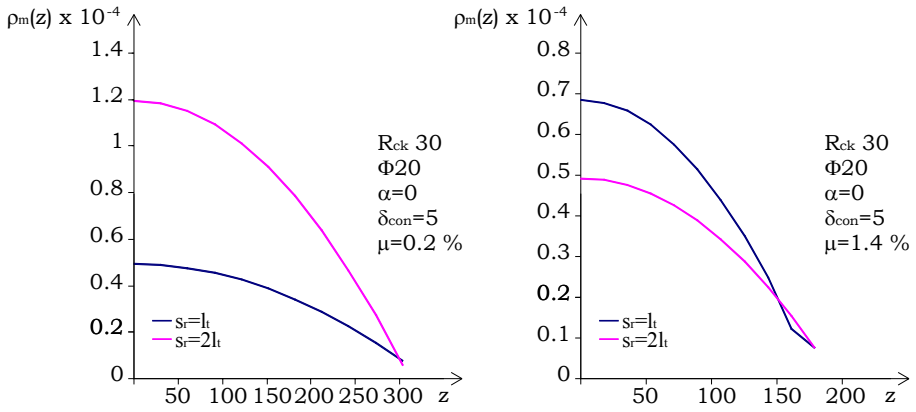


Figura 4.48: Andamento delle curvature medie lungo l'asse della trave

Questo risultato dipende dal fatto che al diminuire della percentuale di armatura tesa aumenta la distanza tra le fessure e, nel caso esaminato, quando μ=0.2% questa maggior distanza non permette alla deformazione dell'acciaio di diffondersi in tutte le sezioni, producendo un infragilimento dell'elemento a causa della localizzazione delle deformazioni plastiche, come si può vedere nella Figura 4.49, in cui è riportata la distribuzione della deformazione dell'acciaio nel caso in cui $s_r=l_t$ e nel caso in cui $s_r=2l_t$ (Figura 4.49(a)).
Nel caso in cui μ=1.4% (Figura 4.49(b)), una minore distanza tra le fessure causa una diffusione della deformazione plastica dell'acciaio in tutte le sezioni del concio, mentre all'aumentare della

distanza tra le fessure la deformazione si localizza in prossimità delle sezioni fessurate.

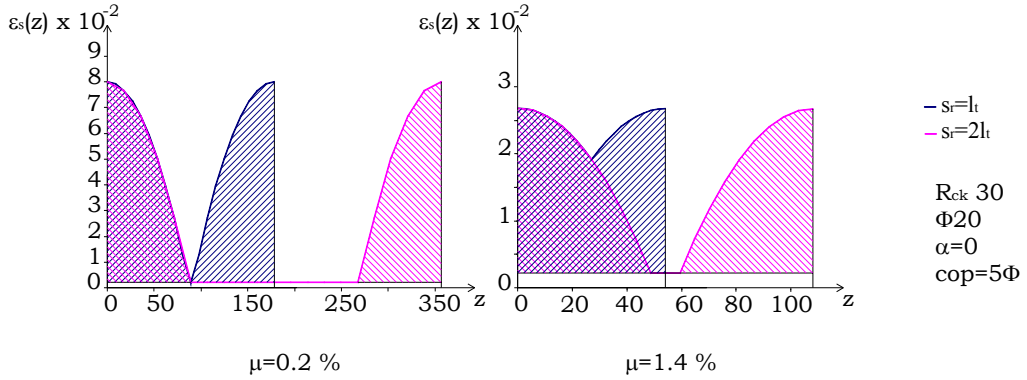


Figura 4.49: Andamento delle curvature locali all'interno di un concio

Nelle figure che seguono sono riportate rispettivamente le rotazioni plastiche adimensionalizzate di un pilastro snello (Figura 4.50(a)) o tozzo (Figura 4.50(b)), e di una trave snella (Figura 4.51(a)) o tozza (Figura 4.51(b)) che si diversifica dalla precedente per il rapporto di incrudimento pari a 1.08.

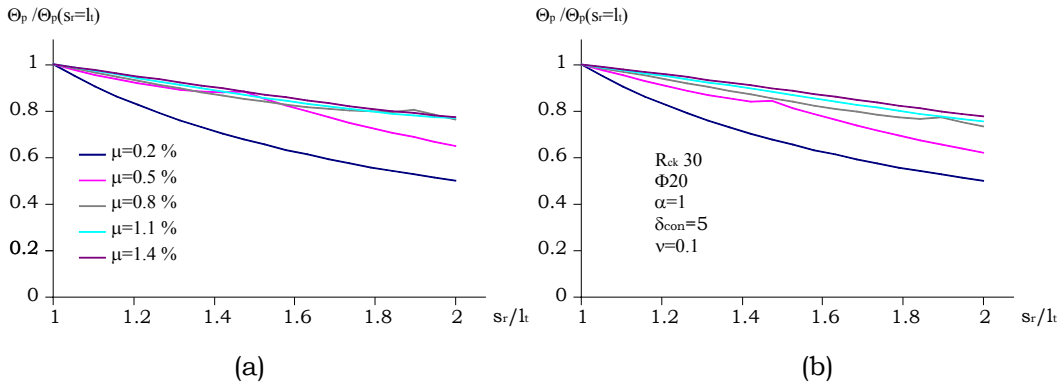


Figura 4.50: Confronto tra le rotazioni plastiche in pilastri snelli (a) e tozzi (b) al variare della distanza tra le fessure

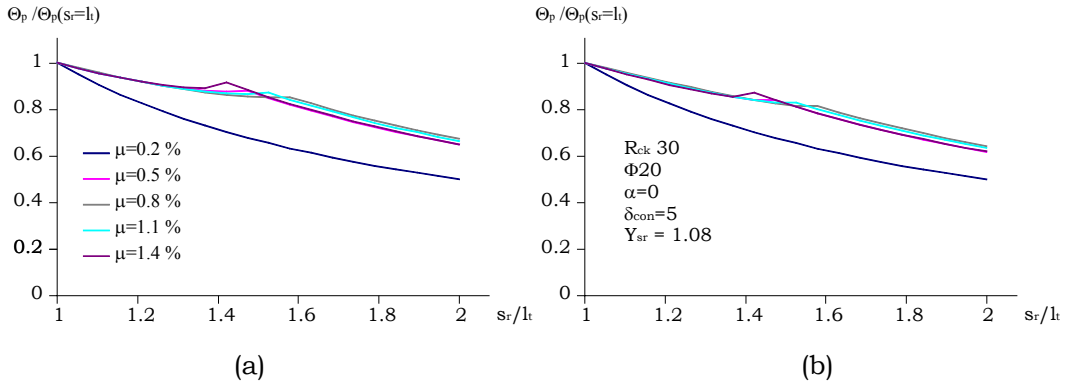


Figura 4.51: Confronto tra le rotazioni plastiche in travi snelle (a) e tozze (b) al variare della distanza tra le fessure

Dai risultati delle analisi svolte è possibile dedurre che in tutti i casi, all'aumentare della distanza tra le fessure diminuisce la capacità rotazionale e questa riduzione si accentua negli elementi in cui il fenomeno della localizzazione riguarda tutti i conci, per tutti i valori di s_r (analiticamente valutabile dal parametro n_p: quando n_p=0). In questi casi la capacità rotazionale risulta inversamente proporzionale alla distanza tra le lesioni. In tutti gli altri casi (n_p>0), la riduzione della capacità rotazionale nel passare da una distanza minima ad una distanza massima dalle lesioni è pari al 25%, quando Y_{sr} = 1.15, mentre è circa il 35% quando Y_{sr} = 1.08.

Influenza dell'armatura in compressione sulla capacità rotazionale

Come illustrato nelle Figure 4.52(a) e (b), in cui è riportata la capacità rotazionale adimensionalizzata rispetto alla capacità rotazionale dell'elemento semplicemente armato, in funzione di α pari al rapporto tra l'area di acciaio compresso rispetto all'area di acciaio teso, l'armatura compressa ha un influenza positiva sulla capacità rotazionale solo negli elementi in cui la rottura avviene per schiacciamento del calcestruzzo. Infatti, per basse percentuali di armatura (nel caso analizzato per μ=0.5%), la curva che riporta l'incremento della capacità rotazionale si presenta praticamente

orizzontale sia nel caso di elemento snello (Figura 52(a)) che di elemento tozzo (Figura 52(b)).

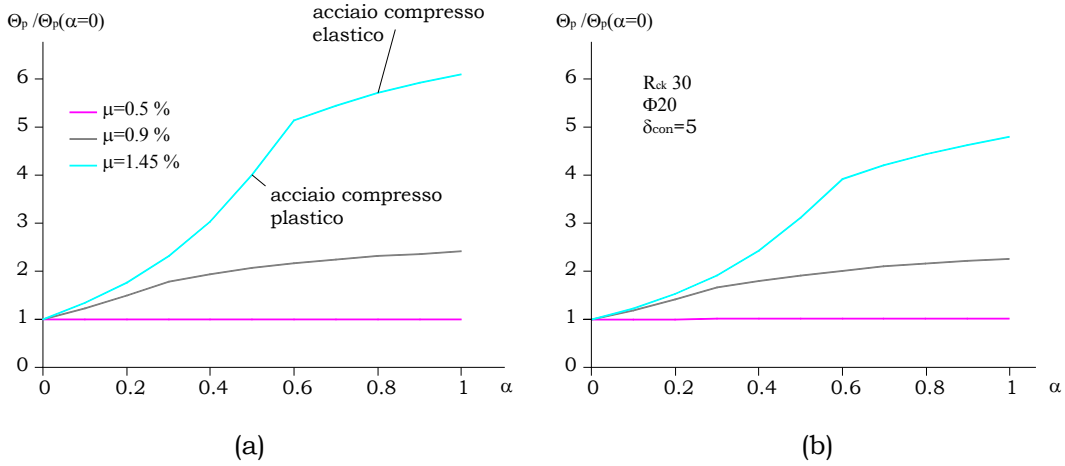


Figura 4.52: Confronto tra le rotazioni plastiche in travi snelle (a) e tozze (b) al variare del parametro α

La funzione riportata nei grafici presenta una maggiore pendenza se la deformazione nell'acciaio compresso, in condizioni di crisi dell'elemento, è maggiore della deformazione di snervamento e se l'elemento ha una snellezza maggiore della snellezza limite.

Analisi di strutture iperstatiche

Le formulazioni proposte sono infine implementate (secondo la procedura descritta nel capitolo precedente) per l'analisi di strutture iperstatiche, in particolare di telai piani bidimensionali.
Il telaio analizzato è quello riportato in Figura 4.53: le campate hanno la stessa luce di 4 metri mentre l'altezza di ogni piano è di 3 metri. I pilastri hanno dimensioni pari a 300 mm x 300 mm e sono armati simmetricamente 2+2 Φ 20, mentre le travi hanno dimensioni di 300 mm di base e 500 mm di altezza e sono armati con 4 Φ 20 sia superiormente che inferiormente. Il calcestruzzo ha una resistenza cubica pari a 30 Mpa, la resistenza a trazione e il modulo elastico sono stimati con le formulazioni proposte dal DM96. L'acciaio ha una tensione di snervamento pari a 450 Mpa,

un modulo elastico pari a 200000 MPa e una deformazione ultima pari a ε_{su}=8%. Sono stati considerati due schemi caratterizzati da uguale geometria e carico ma diverso rapporto di incrudimento, rispettivamente pari a 1.08 e 1.25.

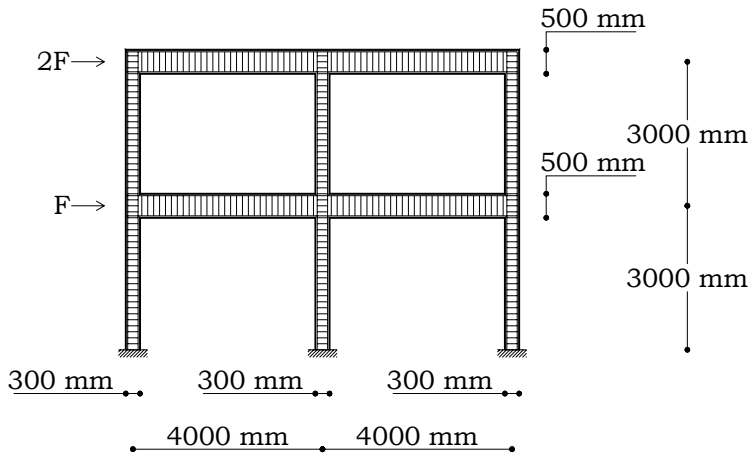


Figura 4.53: Geometria e schema statico del telaio analizzato

Il carico applicato dalla struttura è il peso proprio e una distribuzione lineare con l'altezza di forze orizzontali incrementate fino al collasso. Il telaio può essere definito a pilastri deboli e travi forti e quindi il meccanismo di rottura legato alla formazione di un piano debole cioè di un numero di cerniere plastiche nei pilastri tali da rendere la struttura labile prima del collasso, che si raggiungerà nell'elemento che per primo esaurirà la sua capacità rotazionale.
Come visto nel paragrafo precedente la capacità rotazionale decresce all'aumentare dell'intensità dello sforzo normale e per lo schema di carico considerato ci aspettiamo una rottura al piede del pilastro di destra, che sotto l'azione sismica, risulta essere il più compresso.
Nella Figura 4.54 sono riportate le curva di pushover dei due telai analizzati. Il comportamento è identico fino alla formazione della prima cerniera plastica che avviene al piede del pilastro centrale per un taglio totale pari a 132 kN. Subito dopo si ha la formazione delle cerniere al piede ed in testa di tutti i pilastri del primo piano. Il momento ultimo di tutte le sezioni è maggiore del momento di snervamento, per questo motivo, la forza che genera il collasso dei due telai è maggiore di quella che rende labile la struttura.

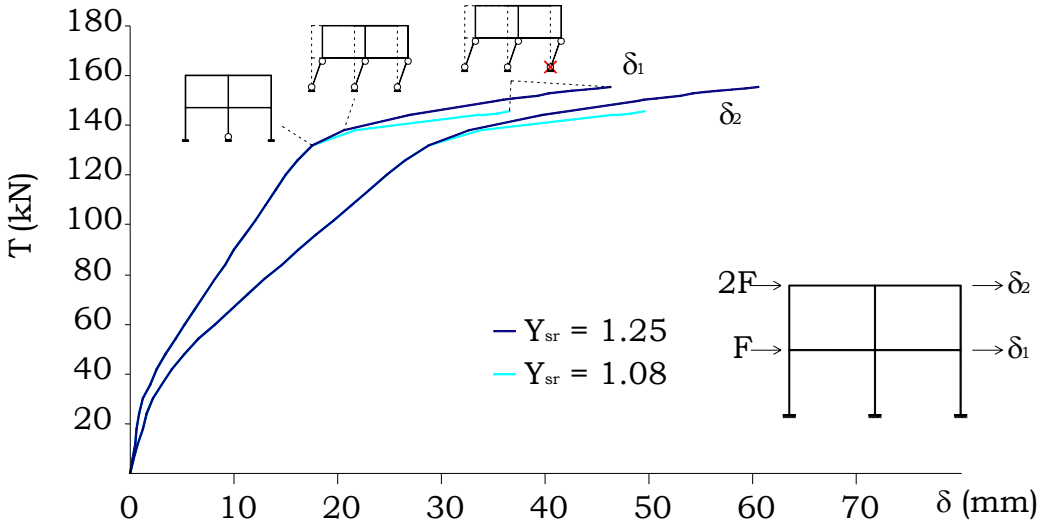


Figura 4.54: Curve di pushover dei telai con pilastri deboli

Nella Figura 4.55 sono riportate le curva carico-spostamento nel caso in cui i pilastri hanno dimensioni 300 mm x 500 mm.

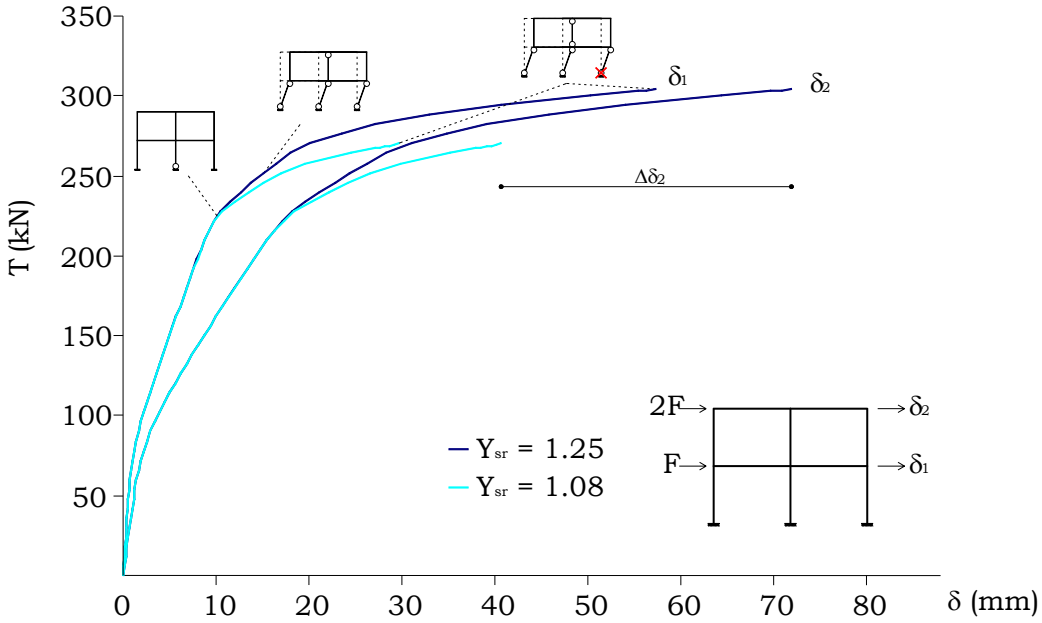


Figura 4.55: Curve di pushover dei telai con pilastri 300x500

Come illustrato nella figura, i telai raggiungono il collasso con formazione di un numero maggiore di cerniere plastiche rispetto ai precedenti. In ogni caso, il meccanismo di collasso è sempre di tipo locale (un solo livello interessato) e non globale.