

3

DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA MEDIA: PROPOSTA DI UNA NUOVA FORMULAZIONE

L'analisi non lineare delle strutture in cemento armato può essere condotta attraverso dei legami semplificati, generalmente di forma empirica, tra sollecitazione e conseguente deformazione, ovvero risolvendo numericamente il sistema di equazioni differenziali, descritto nel capitolo precedente, alla base del fenomeno fisico del tension stiffening. Mentre i primi metodi risultano facilmente applicabili, l'integrazione numerica del legame d'aderenza, anche se riesce a descrivere meglio il fenomeno, richiede un elevato lavoro computazionale e non permette di trovare una soluzione in forma chiusa. Scopo di questo capitolo è la definizione di un legame momento-curvatura media per un elemento in cemento armato, sottoposto ad uno stato di sollecitazione di flessione e pressoflessione, che dallo snervamento arriva fino alla condizione di rottura locale per deformazione ultima dell'acciaio o del calcestruzzo compresso. La formulazione proposta per la curvatura media è tarata con i risultati di una indagine parametrica effettuata su un concio delimitato da due fessure contigue. Il metodo utilizzato per l'indagine parametrica è l'integrazione numerica del legame d'aderenza, in particolare si è ipotizzato che l'interazione tra acciaio e calcestruzzo potesse essere descritta dal legame d'aderenza riportato nel Model Code 90 (1993). Per risolvere

il sistema di equazioni differenziali è necessario definire i legami costitutivi dei materiali, la distanza tra le fessure, valutando anche l'influenza della sollecitazione flettente su questa grandezza, e l'andamento delle deformazioni nel calcestruzzo teso in una generica sezione non fessurata del concio. Il comportamento a compressione del calcestruzzo è stato modellato con il legame proposto da (Park et al., 1982) e riportato nel primo capitolo, per l'acciaio si è utilizzato un legame costitutivo elastico-incrudente, mentre per la distanza tra le fessure la formulazione riportata nell'Eurocodice 2. Le ipotesi sulla distribuzione delle deformazioni nel calcestruzzo teso, nonché l'influenza dell'intensità della sollecitazione flettente sulla geometria del quadro fessurativo, saranno discussi nei prossimi paragrafi.

Indagine parametrica

Seguendo le indicazioni del bollettino CEB “Ductility of reinforced structures” (1998) le analisi parametriche svolte hanno lo scopo di analizzare l'influenza delle seguenti caratteristiche geometriche:

- percentuale geometrica di armatura tesa μ ;
- percentuale geometrica di armatura compressa ($\alpha = A_{s_teso}/A_{s_compresso}=0-0.5-1$);
- dimensioni geometriche;

e delle seguenti caratteristiche meccaniche:

- rapporto di incrudimento Y_{sr} e deformazione ultima dell'acciaio ϵ_{su} (Tabella 10);
- resistenza del calcestruzzo (Tabella 11).

Tabella 10: Caratteristiche meccaniche dell'acciaio

Tipo	f_{sy} (MPa)	Y_{sr}	E_s (MPa)	ϵ_{su}
A	450	1.08	206000	6%
B		1.15		8%
C		1.25		8%

Tabella 11: Caratteristiche meccaniche del calcestruzzo

R_{ck} (MPa)	E_c (MPa)	f_t (MPa)	f_c (MPa)	ε_{cu}
20	25491.2	2.38725	24.6	8‰
25	28500	2.77016	28.75	
30	31220.2	3.12819	32.9	
35	33721.7	3.46676	37.05	

Distanza tra le fessure e area efficace

La prima serie di analisi parametriche riguarda la valutazione della lunghezza di trasmissione l_t , al fine di determinare l'influenza dell'intensità della sollecitazione flettente sulla geometria del quadro fessurativo.

Le analisi sono condotte integrando, con la tecnica dello shooting (capitolo 2), il legame d'aderenza riportato nel Model Code 90 (1993), per un calcestruzzo con buona qualità d'aderenza sia confinato che non confinato. Come in (Langer, 1987, Cosenza et al., 1991, Avalle et al., 1994, Bigaj, 1999), ipotizziamo la perfetta aderenza tra calcestruzzo compresso e acciaio e l'andamento delle deformazioni di trazione nel calcestruzzo lineare con valore nullo sull'asse neutro (Avalle et al., 1994). La sollecitazione flettente varia dalla fessurazione alla rottura locale della sezione. Quando $M=M_f$, come suggerito da (Bigaj, 1999), si considera il legame d'aderenza indipendente dalla distanza dalla fessura, mentre per $M=M_u$ si considera il legame d'aderenza dipendente dalla distanza dalla fessura, infine, nel caso in cui $M=M_y$, le analisi sono condotte considerando entrambi i casi.

Nella Figura 3.1 sono riportati i risultati dell'analisi per una sezione rettangolare di dimensioni 300x500, un acciaio di tipo B (Tabella 10) e un calcestruzzo di classe $R_{ck}30$ (Tabella 11), sottoposta ad uno stato di sollecitazione di flessione, per $M=M_f$ e $M=M_y$.

Dai grafici si può dedurre che la lunghezza l_t :

- non dipende né dal confinamento né dalla percentuale geometrica di armatura compressa;
- diminuisce all'aumentare della percentuale geometrica di armatura tesa;

- se si trascura la dipendenza dalla distanza della sezione, diminuisce all'aumentare della sollecitazione flettente;
- aumenta se, a parità di momento flettente, si considera la dipendenza dalla distanza dalla fessura.

Per deformazioni minori della deformazione di snervamento, lo scorrimento che nasce tra la barra e il calcestruzzo teso, assume un valore massimo, nella sezione fessurata, minore di s_1 , valore limite per cui la tensione tangenziale può essere calcolata dalla funzione:

$$\tau(s) = \tau_1 \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad (3.1)$$

Il legame d'aderenza per calcestruzzo ben confinato è praticamente coincidente con quello per calcestruzzo non confinato per scorrimenti minori di s_1 , per questo motivo i risultati delle simulazioni numeriche riportati nella Figura 3.1, sono indipendenti dal "confinamento".

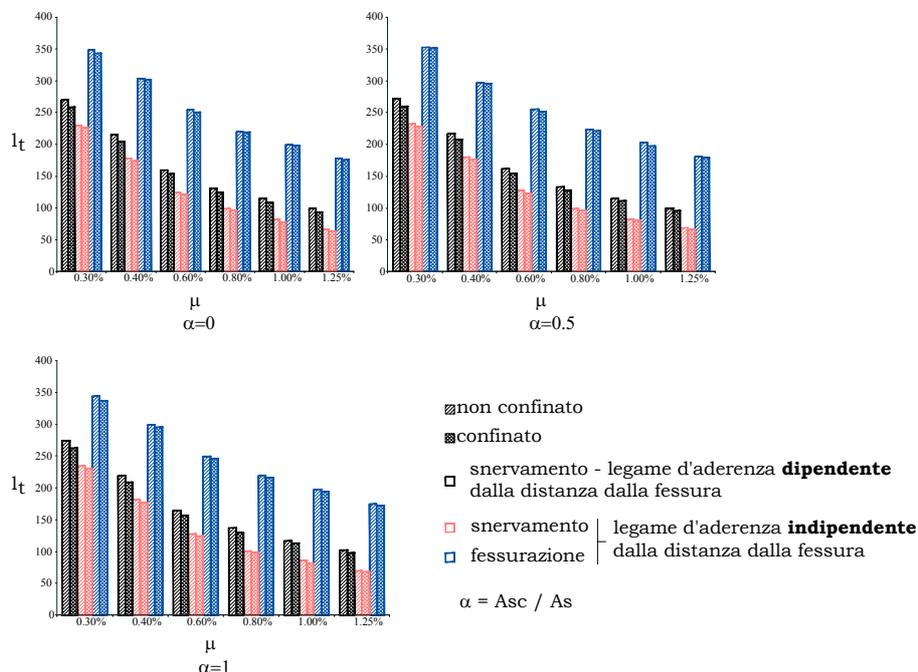


Figura 3.1: Lunghezza di trasmissione in funzione della percentuale geometrica di armatura per $M=M_f$ e $M=M_y$

Nelle Figure 3.2 e 3.3 sono riportate le lunghezze di trasmissione in funzione della percentuale geometrica di armatura quando $M=M_u$ per i tre tipi di acciaio (Tabella 10) e confrontati con il valore calcolato quando il momento flettente è pari a M_y . Nel caso in cui la sezione non è confinata (Figura 3.2), la lunghezza di trasmissione rimane praticamente invariata o addirittura aumenta all'aumentare dell'intensità della sollecitazione flettente, in termini di distanza minima tra le fessure questo non ha nessun significato fisico, quindi la distanza calcolata quando $M=M_y$, si mantiene costante all'aumentare della sollecitazione.

Nel caso invece di sezione confinata (Figura 3.3), dai risultati numerici si rileva una piccola diminuzione di l_t all'aumentare dell'intensità del momento flettente. In realtà, come vedremo in seguito, questa piccola differenza non comporta una notevole variazione della curvatura media ultima, regolata soprattutto dalla localizzazione intorno alle fessure della deformazione plastica dell'acciaio teso.

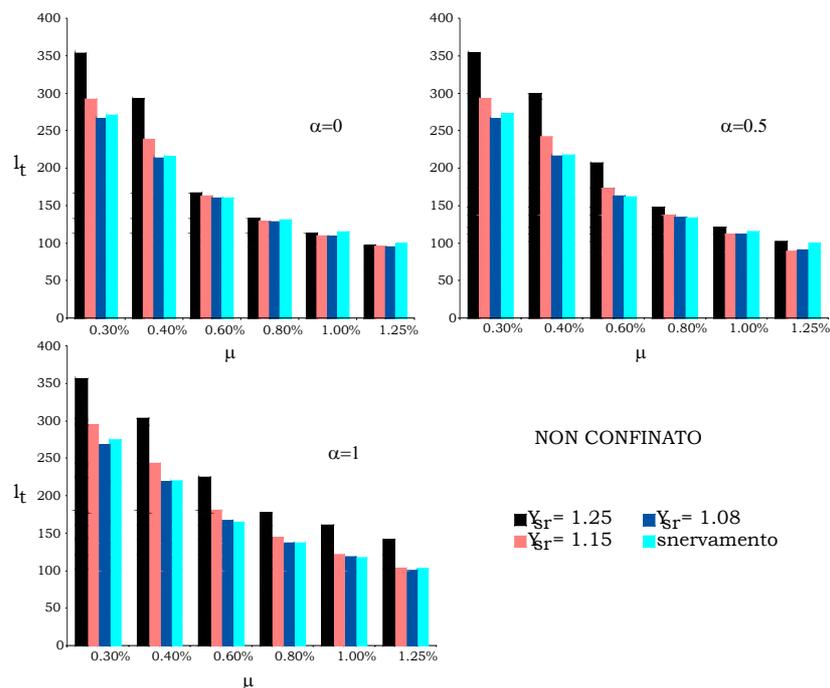


Figura 3.2: Lunghezza di trasmissione in funzione della percentuale geometrica di armatura per $M=M_y$ e $M=M_u$, per un elemento non confinato

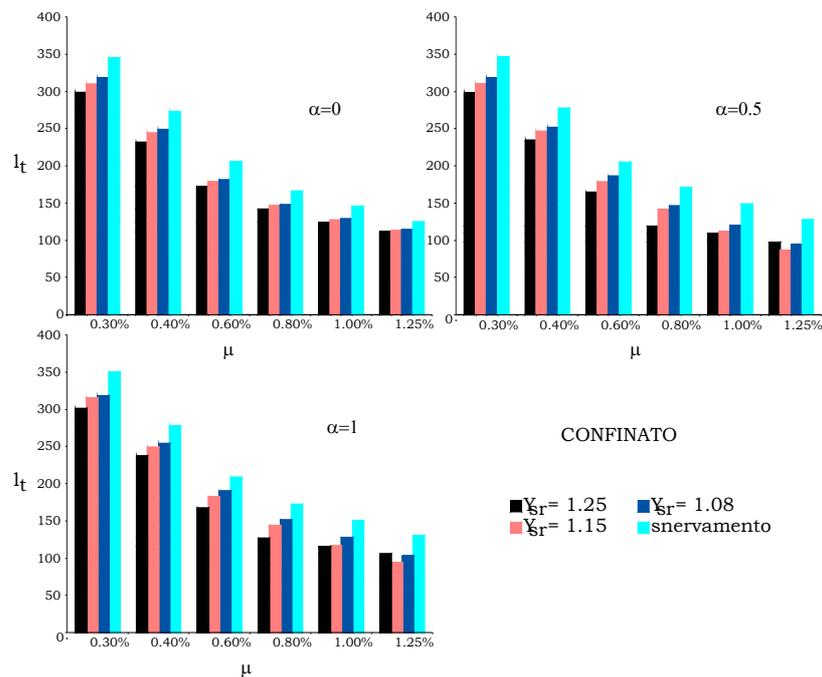


Figura 3.3: Lunghezza di trasmissione in funzione della percentuale geometrica di armatura per $M=M_y$ e $M=M_u$, per un elemento ben confinato

Per questo motivo, nel modello proposto, sia nel caso di sezione confinata che non confinata, la distanza media tra le fessure è stata calcolata con l'equazione (2.23) dove la lunghezza di trasmissione l_t è quella corrispondente al momento di snervamento con un legame d'aderenza dipendente dalla distanza dalla fessura. Si riporta in seguito un confronto tra i valori della distanza media tra le lesioni ottenuti dalla simulazione numerica, con le formulazione proposte da diverse normative.

Come si può vedere dal grafico riportato in Figura 3.4, i risultati dell'analisi numerica sovrastimano la distanza tra le fessure per tutte le percentuali geometriche di armatura tesa. Questo può essere spiegato considerando che l'ipotesi di deformazione lineare nel calcestruzzo teso comporti una sovrastima dell'area di calcestruzzo reagente a trazione, con una conseguente maggiore diffusione delle deformazioni di trazione nel calcestruzzo. Una corretta valutazione dell'area di calcestruzzo reagente è necessaria per valutare il contributo del tension stiffening.

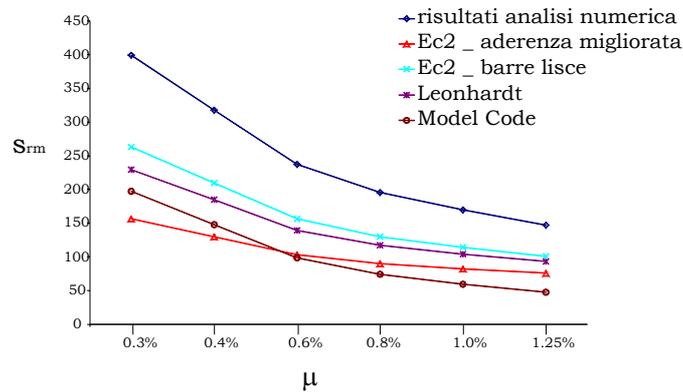


Figura 3.4: Distanza media tra le fessure, confronto tra i risultati dell'analisi numerica con alcune formulazioni presenti in letteratura

Come suggerito da (Verkateswarlu e Gesund, 1972), si ipotizza una distribuzione parabolica delle deformazioni nel calcestruzzo teso. Nella Figura 3.5 sono riportati gli andamenti delle deformazioni ad una generica ascissa z del concio.

La distribuzione della deformazione del calcestruzzo teso può essere espressa analiticamente dalla seguente relazione:

$$\varepsilon_{ct}(z, x) = \begin{cases} \varepsilon_{ct \max}(z) \left(\frac{x}{d - x_c(z)} \right)^2 & \text{se } x \leq d - x_c(z) \\ \varepsilon_{ct \max}(z) \left(2 - \frac{x}{d - x_c(z)} \right)^2 & \text{se } x > d - x_c(z) \end{cases} \quad (3.2)$$

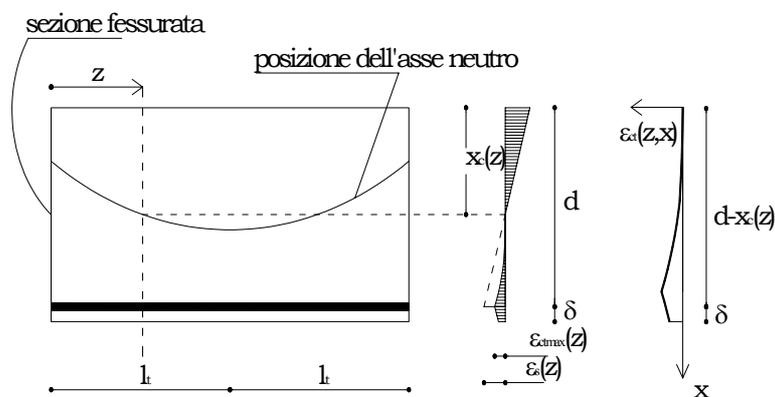


Figura 3.5: Distribuzione delle deformazioni nel calcestruzzo teso

Analoga ipotesi si è fatta sulla distribuzione delle deformazioni nel calcestruzzo teso lungo l'asse perpendicolare al concio riportato nella Figura 3.5. Si è inoltre semplificato l'integrale esteso sulla base b della sezione trasversale considerando una base efficace pari a $b/3$.

Con queste ipotesi sull'area efficace di calcestruzzo reagente a trazione, i risultati ottenuti dall'analisi numerica si ritrovano con le formulazioni proposte dalle varie normative, per diverse caratteristiche geometriche (Figura 3.6), diverse classi di calcestruzzo (Figura 3.7) e per diverse intensità dello sforzo normale (Figura 3.8).

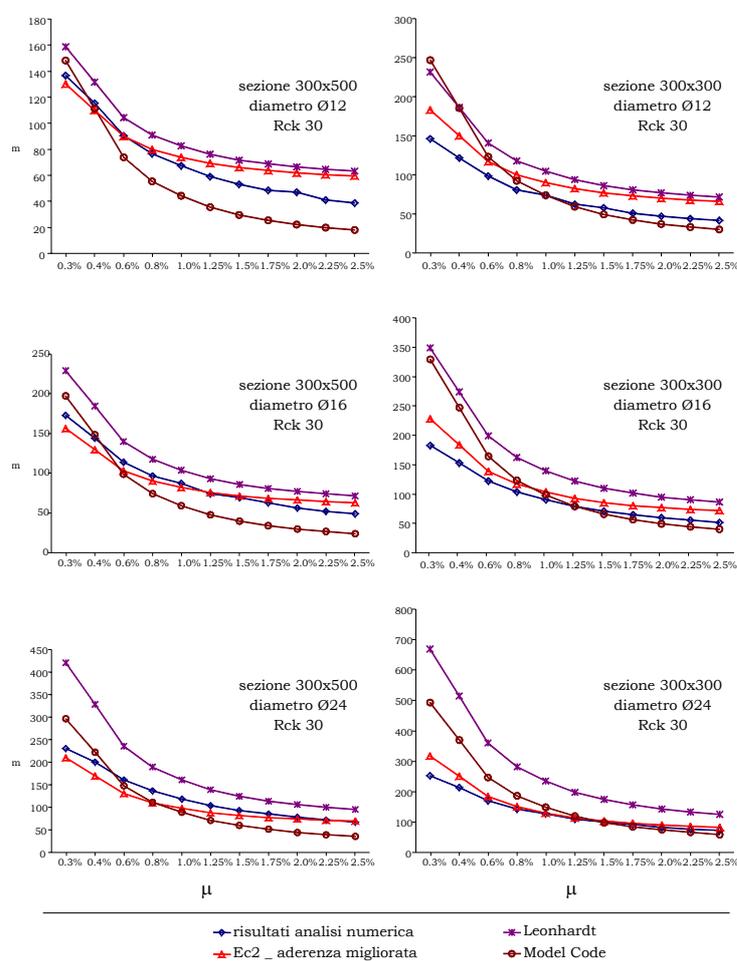


Figura 3.6: Distanza media tra le fessure in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa, per diverse caratteristiche geometriche

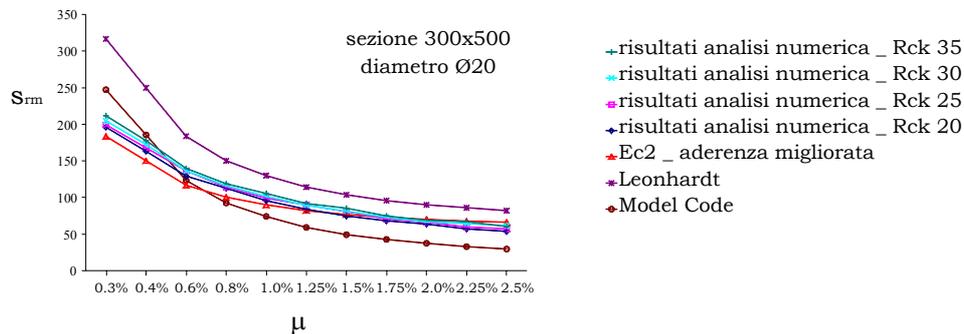


Figura 3.7: Distanza media tra le fessure in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa, per diverse classi di calcestruzzo

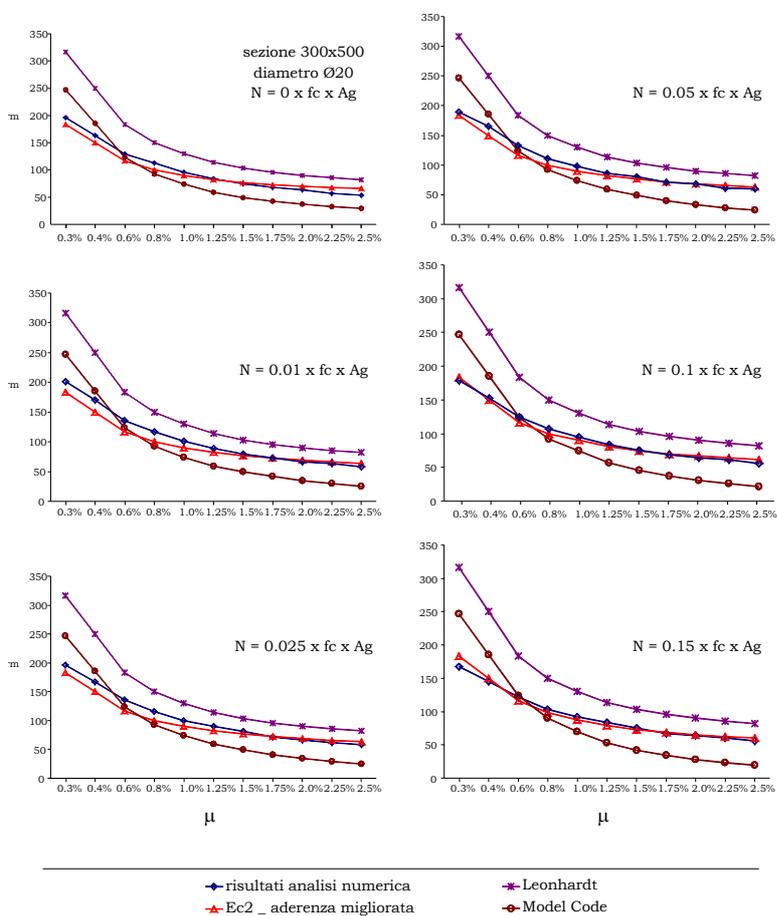


Figura 3.8: Distanza media tra le fessure in funzione della percentuale geometrica di armatura tesa, per diversi valori dello sforzo normale

Curvatura media

La deformabilità di un elemento in cemento armato può essere analizzata suddividendo l'elemento stesso in una successione di blocchi, delimitati da due successive fessure. Il comportamento di ogni blocco dipende sia dalle condizioni al contorno (curvatura e deformazioni nelle sezioni fessurate), che dalla distribuzione delle deformazioni all'interno dell'elemento stesso. Questa distribuzione, a seconda del livello dello stato di sollecitazione, è regolata dal fenomeno del tension stiffening, per stati di sollecitazione prossimi alla fessurazione, e dalla localizzazione delle deformazioni plastiche, per stati di sollecitazione maggiori di quelli che generano la deformazione di snervamento nell'acciaio.

I fenomeni di localizzazione possono provocare un dannoso infragilimento dell'elemento e per questo motivo, rivestono una fondamentale importanza nelle analisi a rottura.

Uno degli obiettivi di questa tesi è una formulazione analitica del legame momento-curvatura media per elementi monodimensionali in cemento armato sottoposti a sollecitazioni flettenti maggiori o uguali al momento di snervamento.

Le ipotesi alla base delle analisi parametriche sono:

- legame costitutivo proposto da (Park et al., 1982) per simulare il comportamento del calcestruzzo compresso e lineare fino al valore della resistenza f_t per simulare il comportamento a trazione;
- legame costitutivo elastico-plastico incrudente per l'acciaio;
- legame d'aderenza proposto dal (Model Code 90, 1993), sia per calcestruzzo confinato che non confinato;
- ipotesi di planeità delle deformazioni tra acciaio e calcestruzzo compresso;
- andamento parabolico delle deformazioni nel calcestruzzo teso;
- lunghezza dell'elemento pari alla distanza media s_{rm} tra le fessure, secondo la formulazione proposta dall'Eurocodice2 e riportata nel capitolo precedente.

La curvatura locale in una generica ascissa z , è stata calcolata secondo la relazione:

$$\rho_1(z) = \frac{\varepsilon_s(z)}{d - x_c(z)} \quad (3.3)$$

La curvatura media del concio, integrando la curvatura locale:

$$\rho_m(z) = \frac{1}{s_{rm}} \int_0^{s_{rm}} \rho_1(z) dz \quad (3.4)$$

Quando sull'elemento agisce un momento flettente $M=M_y$, i risultati delle analisi parametriche mostrano che l'andamento della deformazione dell'acciaio si presenta praticamente costante lungo tutto il concio, stesso risultato per quanto riguarda la posizione dell'asse neutro. Per questo stato di sollecitazione l'effetto del tension stiffening è trascurabile e la curvatura media del concio è praticamente uguale alla curvatura locale calcolata nella sezione fessurata. Nella Figura 3.9 sono riportate in ascissa la curvatura media del concio e in ordinata la curvatura locale calcolata nella sezione fessurata, al variare delle caratteristiche geometriche, meccaniche del parametro v , pari al rapporto tra lo sforzo normale e il prodotto dell'area di solo calcestruzzo per la resistenza a compressione del calcestruzzo.

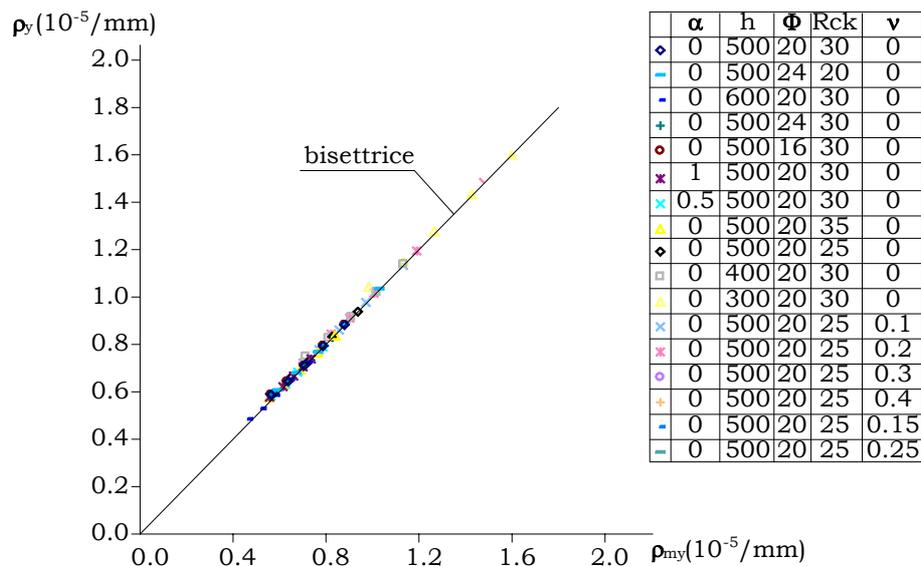


Figura 3.9: Curvatura media e locale quando $M=M_y$

Quando sull'elemento agisce un momento flettente $M=M_u$, dai risultati di tutte le analisi parametriche effettuate si è riscontrato che (Figura 3.10):

- la posizione dell'asse neutro può considerarsi costante e pari al valore calcolato nella sezione fessurata nelle sezioni del concio dove la deformazione dell'acciaio è maggiore di ε_{sy} , e al valore calcolato quando $M=M_y$, nelle sezioni dove la deformazione dell'acciaio è minore di ε_{sy} ;
- la deformazione nelle barre tese può essere descritta da una funzione parabolica, nelle sezioni in cui la deformazione è maggiore della deformazione di snervamento.

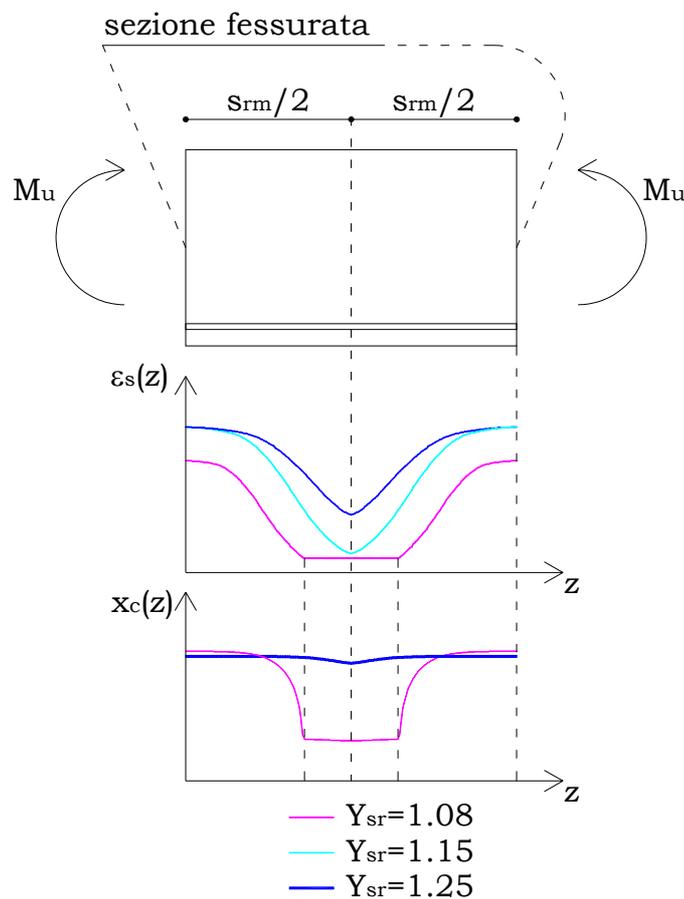


Figura 3.10: Andamento della posizione neutro e della deformazione nell'acciaio teso all'interno del concio (Sezione con $\alpha=0$, $N=0$, $\mu=0.3\%$, 30×50 , $R_{ck}30$) quando $M=M_u$

Diagramma momento-curvatura media

Quando nella sezione fessurata si raggiungono le condizioni di crisi, ipotizzando che la tensione dell'acciaio, in una generica sezione distante z dalla lesione, possa essere valuta con una funzione parabolica del tipo:

$$\sigma_s(z) = \sigma_{so} - Az^2 \quad (3.5)$$

la deformazione corrispondente a questa tensione, se maggiore di ε_{sy} , è pari a:

$$\varepsilon_s(z) = \varepsilon_{so} - \frac{A}{E_y} z^2 \quad (3.6)$$

dove σ_{so} e ε_{so} rappresentano rispettivamente la tensione e la deformazione dell'acciaio nella sezione fessurata e E_y il modulo di incrudimento.

All'interno del concio possono verificarsi due diverse situazioni:

- caso 1: l'acciaio lavora in campo plastico in tutte le sezioni dell'elemento (completa diffusione della plasticizzazione);
- caso 2: l'acciaio lavora in campo plastico in un tratto in prossimità delle fessure (localizzazione delle deformazioni plastiche).

Nel primo caso, dalle equazioni (3.3), (3.4) e (3.6) si ottiene che la curvatura media, corrispondente al momento ultimo, è pari a

$$\rho_{mu} = \frac{2}{s_{rm}} \frac{1}{d - x_c(0)} \int_0^{s_{rm}/2} \left(\varepsilon_{so} - \frac{A}{E_y} z^2 \right) dz = \rho_{lu} - \frac{1}{d - x_c(0)} \frac{A}{3E_y} \left(\frac{s_{rm}}{2} \right)^2 \quad (3.7)$$

$$\rho_{mu} = \rho_{lu} - \frac{1}{d - x_c(0)} \frac{A}{3E_y} \left(\frac{s_{rm}}{2} \right)^2 \quad (3.8)$$

Nel secondo caso, ipotizzando la posizione dell'asse neutro costante e considerando che l'integrale delle deformazioni può essere

suddiviso nella parte elastica e nella parte plastica, secondo la relazione:

$$\rho_{\text{mu}} = \frac{2}{s_{\text{rm}}} \left(\frac{1}{d - x_c(0)} \int_0^Z \left(\varepsilon_{\text{so}} - \varepsilon_{\text{sy}} - \frac{A}{E_y} z^2 \right) dz \right) + \frac{2}{s_{\text{rm}}} \left(\int_0^Z \frac{\varepsilon_{\text{sy}}}{d - x_c(0)} dz + \int_Z^{s_{\text{rm}}/2} \frac{\varepsilon_{\text{sy}}}{d - x_{\text{cy}}} dz \right) \quad (3.9)$$

ipotizzando inoltre che:

$$\int_0^Z \frac{\varepsilon_{\text{sy}}}{d - x_c(0)} dz + \int_Z^{s_{\text{rm}}/2} \frac{\varepsilon_{\text{sy}}}{d - x_{\text{cy}}} dz \cong \rho_y \frac{s_{\text{rm}}}{2} \quad (3.10)$$

si ottiene:

$$\rho_{\text{mu}} = \frac{2}{s_{\text{rm}}} \frac{1}{d - x_c(0)} \int_0^Z \left(\varepsilon_{\text{so}} - \frac{A}{E_y} z^2 - \varepsilon_{\text{sy}} \right) dz + \rho_y \quad (3.11)$$

dove Z è la lunghezza del tratto dove la deformazione nell'acciaio è maggiore della deformazione di snervamento, pari a:

$$Z = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{so}} - f_{\text{sy}}}{A}} \quad (3.12)$$

quindi:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{mu}} &= \frac{2Z}{s_{\text{rm}}} \frac{1}{d - x_c(0)} \left(\varepsilon_{\text{so}} - \varepsilon_{\text{sy}} - \frac{A}{3E_y} Z^2 \right) + \rho_y = \\ &= \frac{2}{s_{\text{rm}}} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{so}} - f_y}{A}} \frac{1}{d - x_c(0)} \left(\varepsilon_{\text{so}} - \varepsilon_{\text{sy}} - \frac{\sigma_{\text{so}} - f_y}{3E_y} \right) + \rho_y = \\ &= \frac{4}{3s_{\text{rm}}} \frac{\varepsilon_{\text{so}} - \varepsilon_{\text{sy}}}{d - x_c(0)} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{so}} - f_y}{A}} + \rho_y \end{aligned} \quad (3.13)$$

La formulazione analitica (eq.ni (3.8) o (3.13)) fornisce delle curvature prossime a quelle trovate con le analisi parametriche se il parametro A è valutato con la seguente relazione:

$$A = C_1 \frac{\varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} (1 + \nu)^{C_3}}{Y_{sr}^{C_2} \Phi^2 (1 + \alpha)^{C_4}} \quad (3.14)$$

dove i valori dei parametri C_1 , C_2 , C_3 e C_4 sono riportati nella Tabella 12.

Sostituendo l'equazione (3.14) all'equazione (3.8) o (3.13) si ottiene che la curvatura media ultima è pari a:

$$\rho_{mu} = \rho_{lu} \left(1 - C_1 \frac{\varepsilon_{sy}}{3 Y_{sr}^{C_2} \varepsilon_{so}} \sqrt{\frac{f_c}{E_y}} \frac{(1 + \nu)^{C_3}}{(1 + \alpha)^{C_4}} \left(\frac{s_{rm}}{2\Phi} \right)^2 \right)$$

se $\sqrt{\frac{\sigma_{so} - f_{sy}}{C_1 \frac{\varepsilon_{sy}}{Y_{sr}^{C_2}} \frac{\sqrt{E_y f_c} (1 + \nu)^{C_3}}{\Phi^2 (1 + \alpha)^{C_4}}}} > \frac{s_{rm}}{2}$ (3.15)

altrimenti:

$$\rho_{mu} = \frac{4}{3 s_{rm}} \frac{\varepsilon_{so} - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0)} \Phi \sqrt{\frac{(\sigma_{so} - f_y) Y_{sr}^{C_2} (1 + \alpha)^{C_4}}{C_1 \varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} (1 + \nu)^{C_3}}} + \rho_y \quad (3.16)$$

Tabella 12: Parametri che definiscono il coefficiente A

	Calcestruzzo confinato	Calcestruzzo non confinato
C_1	14.9	3.6
C_2	3	3
C_3	1.72	4.7
C_4	0.1	0.1

Nelle Figure 3.11, 3.12 e 3.13 sono riportate le curvature medie ultime in funzione della percentuale geometrica di armatura, valutate con la risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali legato alla perdita d'aderenza tra acciaio e calcestruzzo e confrontate con i valori ottenuti dalla formulazione proposta in

questa tesi, con riferimento alle caratteristiche geometriche e meccaniche riportate nella Tabella 13. Negli stessi grafici è riportata anche la curvatura calcolata ipotizzando nullo l'effetto del tension stiffening, quindi coincidente con la curvatura locale della sezione fessurata.

Tabella 13: Caratteristiche geometriche e meccaniche dei conchi analizzati nelle simulazioni numeriche

simulazione	α^1	Y_{sr}	h	Φ	R_{ck}	v^2
1	0.25	1.15	500	20	30	0
2	0.5	1.15	500	20	30	0
3	1	1.15	500	20	30	0
4	0.25	1.15	500	12	20	0
5	0.25	1.15	500	16	20	0
6	0.25	1.15	500	24	20	0
7	0.25	1.15	400	20	30	0
8	0.25	1.15	300	20	30	0
9	0.25	1.15	600	20	30	0
10	0.25	1.15	500	20	20	0
11	0.25	1.15	500	20	25	0
12	0.25	1.15	500	20	35	0
13	0	1.15	500	20	30	0
14	0	1.25	500	20	30	0
15	0	1.08	500	20	30	0
16	0	1.15	300	20	30	0.1
17	0	1.15	300	20	30	0.2
18	0	1.15	300	20	30	0.3
19	0	1.15	300	20	30	0.15
20	0	1.15	300	20	30	0.25
21	0	1.15	300	20	30	0.4

¹ α = Area di ferro compresso/Area di ferro teso

² v = $N/(f_c b h)$

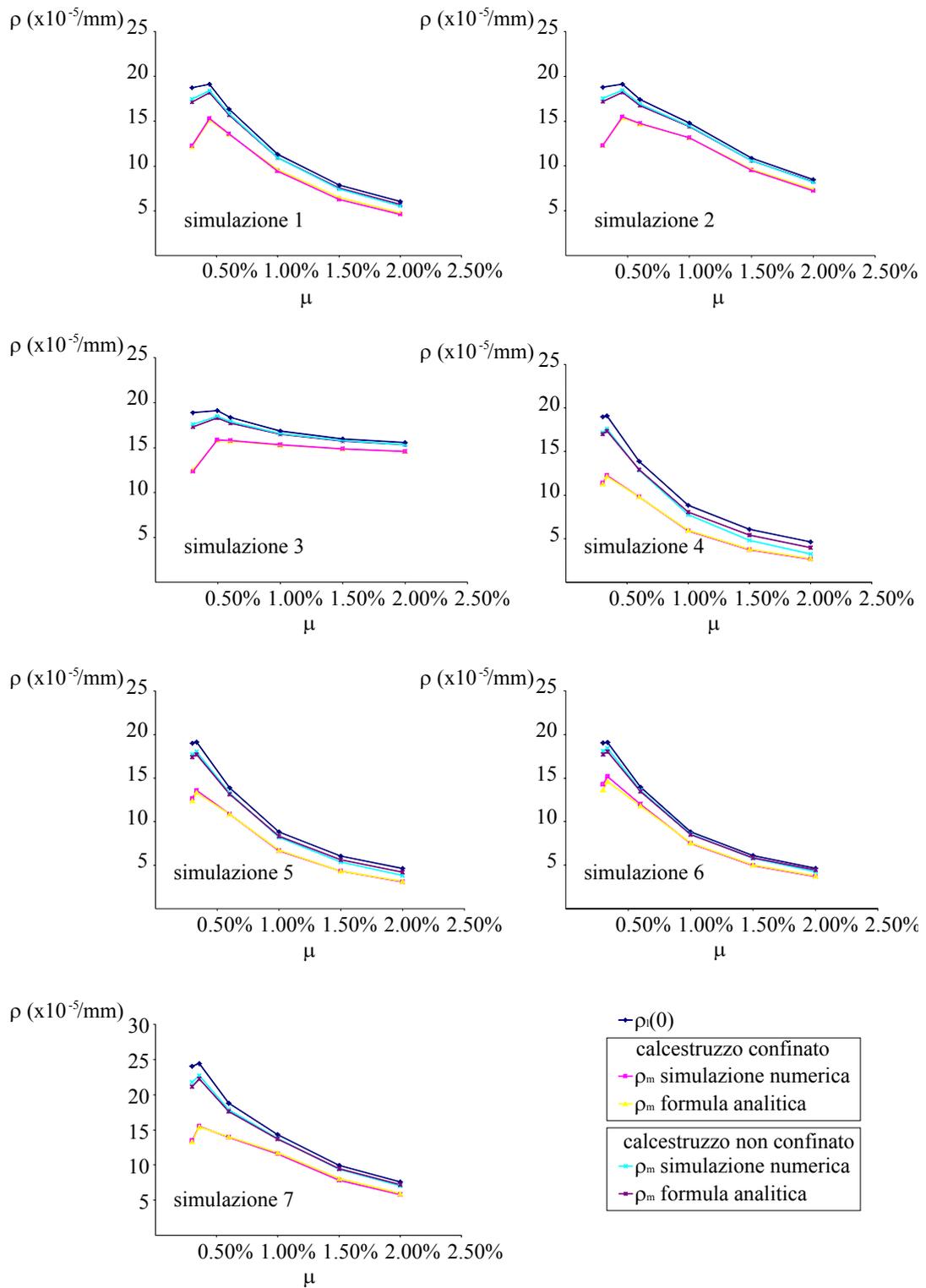


Figura 3.11: Confronto tra le curvature medie valutate attraverso la formulazione proposta nella tesi e le simulazioni numeriche

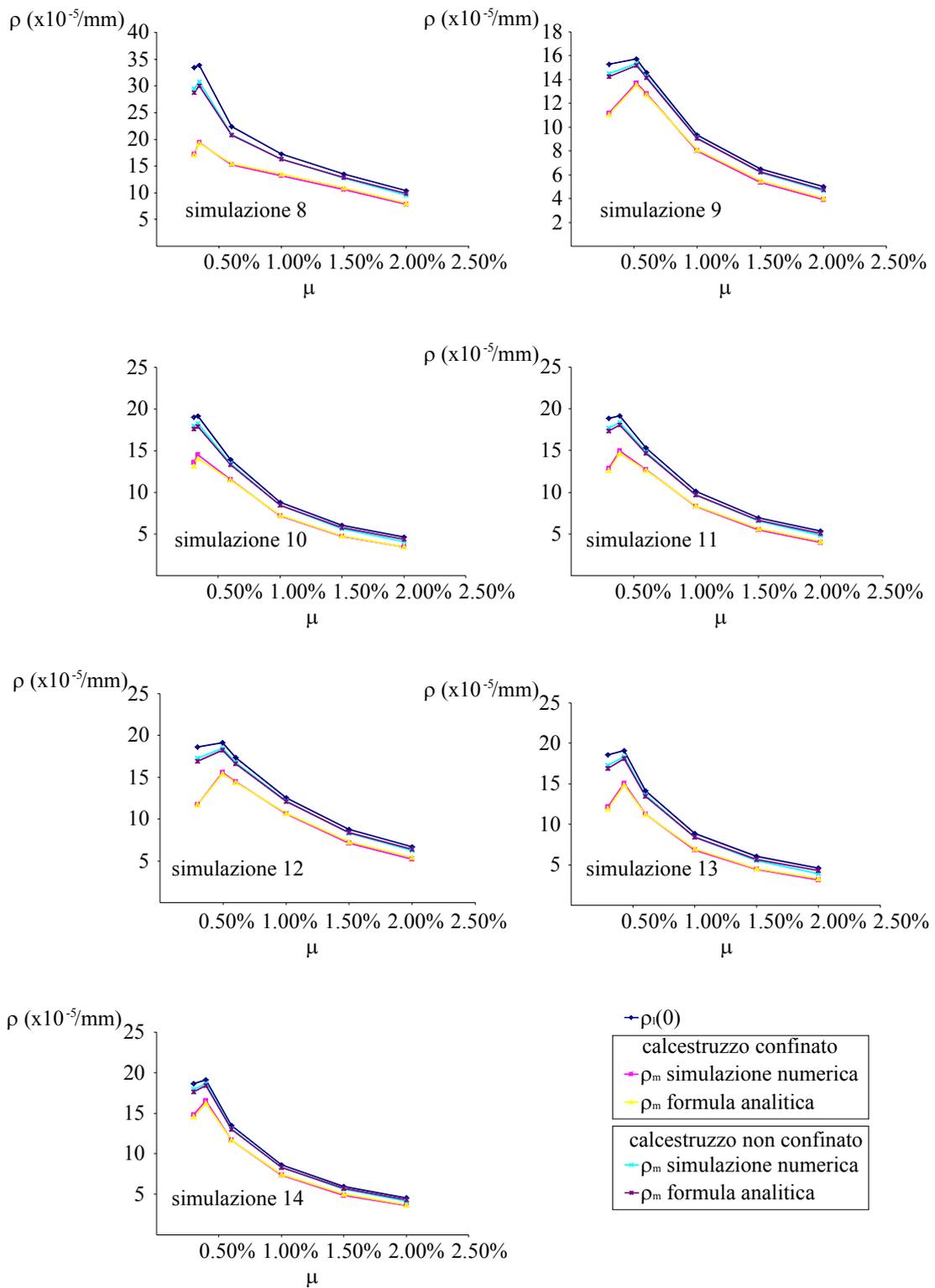


Figura 3.12: Confronto tra le curvature medie valutate attraverso la formulazione proposta nella tesi e le simulazioni numeriche

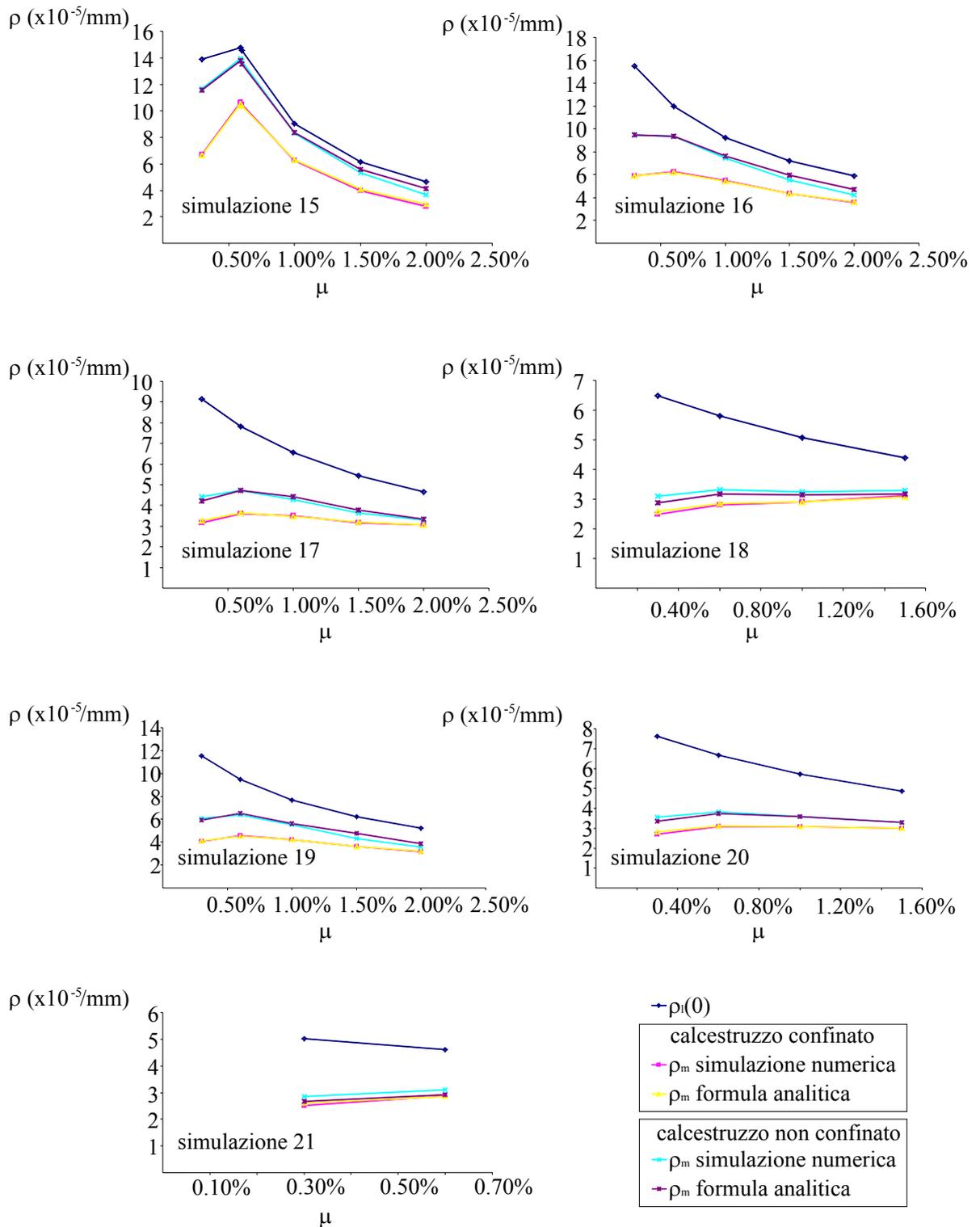


Figura 3.13: Confronto tra le curvature medie valutate attraverso la formulazione proposta nella tesi e le simulazioni numeriche

La formulazione proposta per la curvatura media ultima può essere utilizzata per calcolare la curvatura media per ogni valore del momento flettente compreso tra M_y e M_u . In questo caso, se M è il momento flettente che agisce sull'elemento, nota la tensione $\sigma_s(0,M)$ e la deformazione $\varepsilon_s(0,M)$ nell'acciaio, la posizione dell'asse neutro $x_c(0,M)$ e la curvatura locale $\rho_1(0,M)$ nella sezione fessurata, la curvatura media può essere calcolata come:

$$\rho_m(M) = \rho_1(0, M) \left(1 - C_1 \frac{\varepsilon_{sy}}{3Y_{sr}^{C_2} \varepsilon_s(0, M)} \sqrt{\frac{f_c}{E_y}} \frac{(1+\nu)^{C_3}}{(1+\alpha)^{C_4}} \left(\frac{s_{rm}}{2\Phi} \right)^2 \right)$$

$$\text{se } \sqrt{\frac{\sigma_s(0, M) - f_{sy}}{C_1 \frac{\varepsilon_{sy}}{Y_{sr}^{C_2}} \frac{\sqrt{E_y f_c}}{\Phi^2} \frac{(1+\nu)^{C_3}}{(1+\alpha)^{C_4}}}} > \frac{s_{rm}}{2} \quad (3.17)$$

altrimenti:

$$\rho_m(M) = \frac{4}{3s_{rm}} \frac{\varepsilon_s(0, M) - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0, M)} \Phi \sqrt{\frac{(\sigma_s(0, M) - f_y) Y_{sr}^{C_2} (1+\alpha)^{C_4}}{C_1 \varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} (1+\nu)^{C_3}}} + \rho_y \quad (3.18)$$

Per validare la formulazione della curvatura media, analiticamente rappresentata dall'equazione (3.16) o (3.17), è stata valutata la rotazione di un elemento sottoposto ad uno stato di flessione e pressoflessione e i valori ottenuti confrontati con quelli di analisi numeriche.

La rotazione del concio (Figura 3.14) può essere calcolata o integrando la curvatura locale:

$$\Theta(M) = \int_0^{s_{rm}} \rho_1(z, M) dz \quad (3.19)$$

oppure moltiplicando la curvatura media per la lunghezza dell'elemento:

$$\Theta(M) = \rho_m(M) s_{rm} \quad (3.20)$$

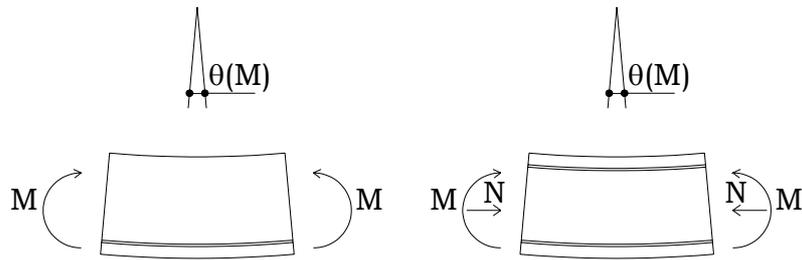


Figura 3.14: Rotazione di un concio sottoposto a flessione o pressoflessione

Nel primo caso la curvatura locale è stata calcolata numericamente integrando le equazioni differenziali legate al fenomeno dell'aderenza, nel secondo caso, la curvatura media è stata valutata attraverso l'equazione (3.17) o l'equazione (3.18).

Il concio analizzato ha una sezione trasversale rettangolare, semplicemente armata ($\mu=1\%$), le cui dimensioni geometriche sono 300x500, le barre di diametro $\Phi 20$ e le caratteristiche meccaniche sono: acciaio tipo B (Tabella 10) e calcestruzzo $R_{ck}30$ (Tabella 11).

Per verificare l'attendibilità della formulazione proposta al caso di elementi pilastro è stato considerato il caso in cui il concio è sottoposto ad un percorso di sollecitazione con $v=\text{cost}$ e pari a 0.15, armato simmetricamente, con le stesse caratteristiche geometriche e meccaniche della precedente simulazione. Sia nel caso di flessione (Figura 3.15) che di pressoflessione (Figura 3.16), la formulazione proposta in questa tesi riesce a cogliere molto bene i risultati delle simulazioni numeriche.

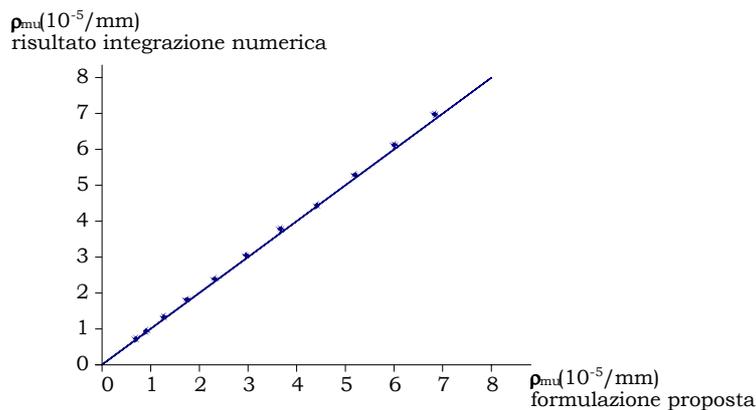


Figura 3.15: Curvature medie: confronto tra la formulazione proposta e i risultati dell'analisi numerica nel caso di elemento inflesso

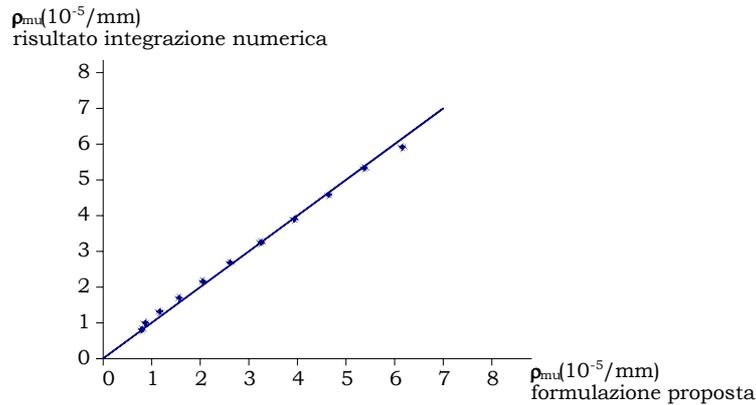


Figura 3.16: Curvature medie: confronto tra la formulazione proposta e i risultati dell'analisi numerica nel caso di elemento pressoinflesso

Caso di acciaio elastico perfettamente plastico: problema della localizzazione delle deformazioni medie

Si consideri un elemento la cui lunghezza è pari alla distanza tra le fessure, sottoposto ad un momento flettente costante.

Supponiamo di imporre una rotazione Θ all'elemento maggiore della rotazione corrispondente al momento di snervamento. Analiticamente questa rotazione può essere calcolata moltiplicando la curvatura media ultima per la lunghezza del concio:

$$\Theta = \rho_m(M) s_{rm} > \Theta_y \quad (3.21)$$

dove la rotazione Θ_y , generata da un momento pari a M_y , è:

$$\Theta_y = \rho_y s_{rm} \quad (3.22)$$

e la curvatura media pari a:

$$\rho_m(M) = \frac{4}{3s_{rm}} \frac{\varepsilon_s(0, M) - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0, M)} \Phi \sqrt{\frac{(\sigma_s(0, M) - f_y) Y_{sr}^{C_2} (1 + \alpha)^{C_4}}{C_1 \varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} (1 + \nu)^{C_3}}} + \rho_y \quad (3.23)$$

Sostituendo le equazioni (3.22) e (3.23) nell'equazione (3.21) si ottiene:

$$\frac{4 \varepsilon_s(0, M) - \varepsilon_{sy}}{3 d - x_c(0, M)} \Phi \sqrt{\frac{(\sigma_s(0, M) - f_y) Y_{sr}^{C_2} (1 + \alpha)^{C_4}}{C_1 \varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} (1 + \nu)^{C_3}}} + \rho_y s_{rm} > \rho_y s_{rm} \quad (3.24)$$

che semplificando diventa:

$$\frac{4 \varepsilon_s(0, M) - \varepsilon_{sy}}{3 d - x_c(0, M)} \Phi \sqrt{\frac{(\sigma_s(0, M) - f_y) Y_{sr}^{C_2} (1 + \alpha)^{C_4}}{C_1 \varepsilon_{sy} \sqrt{E_y f_c} (1 + \nu)^{C_3}}} > 0 \quad (3.25)$$

Se il legame costitutivo dell'acciaio è elastico perfettamente plastico, per ogni valore della sollecitazione flettente maggiore del momento di snervamento la tensione nelle barre si mantiene costante e pari a f_{sy} . La quantità sotto radice nell'equazione (3.25) è quindi pari a zero e di conseguenza, per essere valida la disuguaglianza, la deformazione nell'acciaio nella sezione fessurata deve essere infinita. Fisicamente questo risultato è equivalente ad localizzazione delle deformazioni nell'acciaio solo nelle fessure e quindi una rotazione concentrata solo in queste sezioni.

Applicazione del modello proposto al caso di elemento monodimensionale semplicemente inflesso: differenze tra l'integrale delle curvature medie e l'integrale delle curvature locali

Nel seguito si analizza il comportamento di un elemento trave sottoposto ad un momento flettente variabile linearmente lungo l'asse. Lo schema statico di riferimento è quello di una trave semplicemente appoggiata e caricata da una forza concentrata in mezzzeria, crescente fino al valore per cui si raggiunge lo schiacciamento del calcestruzzo o la crisi per deformazione ultima nell'acciaio. La valutazione degli spostamenti è condotta integrando o la curvatura media o la curvatura locale.

La curvatura sia locale che media delle sezioni in cui il momento flettente è minore del momento di snervamento M_y è stata valutata considerando un legame momento-curvatura bilineare, come quello schematizzato in Figura 3.17, dove la curvatura allo snervamento è quella della sezione fessurata. Come suggerito da (Beeby, 1968), per sollecitazioni flettenti minori del momento di snervamento, l'effetto del tension stiffening è valutato come differenza tra la curvatura della sezione nello stadio II e la curvatura valutata dal diagramma riportato in Figura 3.17.

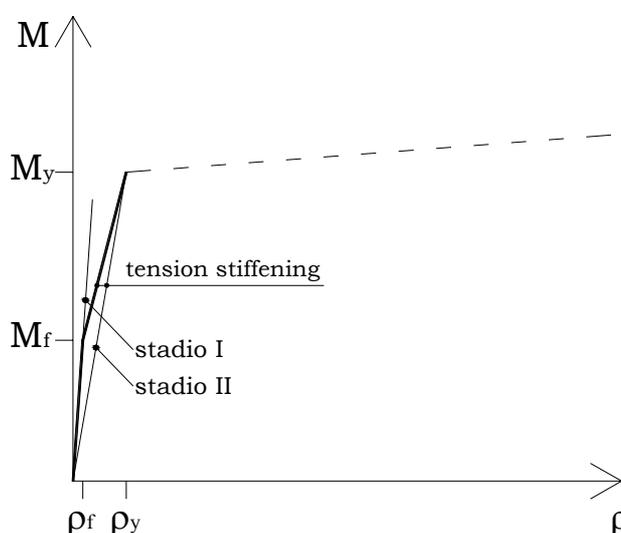


Figura 3.17: Diagramma momento-curvatura medio per momenti minori del momento di snervamento

La curvatura media allo stato limite ultimo è calcolata attraverso l'equazione (3.17) o (3.18). La curvatura locale coincide con la curvatura della sezione valutata nello stadio III (sezione fessurata e acciaio in campo plastico) in tutte le sezioni fessurate. La distanza tra le fessure, costante su tutto il tratto in cui il momento flettente è maggiore del momento di prima fessurazione M_f e assunto pari al valore fornito dalla formulazione proposta dall'Eurocodice2.

Sia il diagramma momento-curvatura locale che momento-tensione nell'acciaio, entrambi validi nelle sezioni fessurate, sono costituiti da una trilatera che unisce i punti di prima fessurazione, snervamento e rottura; gli ultimi due punti del legame sono calcolati ipotizzando il calcestruzzo non resistente a trazione, la

perfetta aderenza tra calcestruzzo e acciaio e l'ipotesi di Bernoulli di planeità delle deformazioni.

Noto lo stato di sollecitazione lungo l'asse dell'elemento è possibile valutare la curvatura locale e la tensione dell'acciaio in tutte le sezioni fessurate (Figura 3.18), con cui calcolare sia la deformazione nell'acciaio che la posizione dell'asse neutro.

Nei conci compresi tra due fessure, il procedimento per trovare la funzione che descrive la curvatura locale è analogo a quello proposto nel paragrafo precedente con la differenza che le condizioni al contorno, deformazione nell'acciaio e posizione dell'asse neutro, variano tra le due sezioni di estremità.

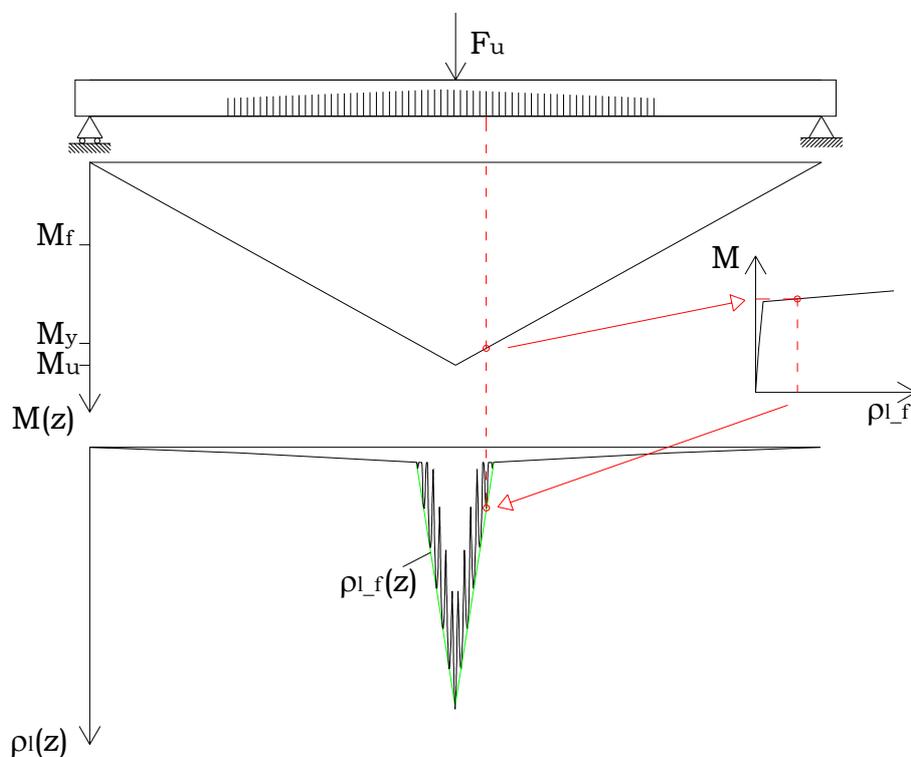


Figura 3.18: Andamento del momento flettente e della curvatura locale

L'elemento di riferimento ha le caratteristiche geometriche riportate nella Figura 3.19 e meccaniche: acciaio tipo B (Tabella 10) e calcestruzzo $R_{ck}30$ (Tabella 11).

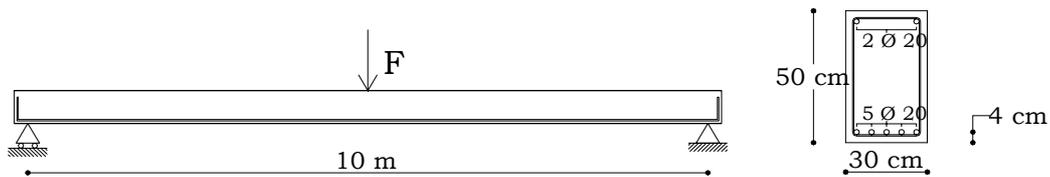


Figura 3.19: Schema statico e geometria della trave analizzata

Per tale geometria la distanza tra le fessure è pari, secondo la formulazione dell'Eurocodice 2, a 88.197 mm. Nelle Figure 3.18 e 3.20 sono riportati rispettivamente l'andamento delle curvature locali e delle curvature medie, quando nella sezione maggiormente sollecitata agisce un momento pari a M_u .

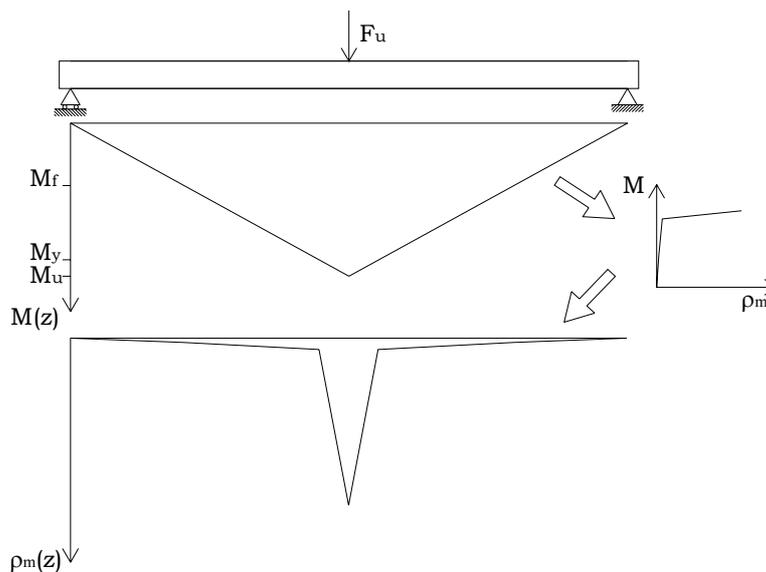


Figura 3.20: Andamento del momento flettente e della curvatura medie

Nella Figura 3.21 è rappresentata la porzione di trave in cui il momento è maggiore del momento di snervamento. Nella stessa figura è riportata la curvatura locale. L'andamento presenta dei picchi in corrispondenza delle fessure, per poi decrescere all'allontanandosi da queste. Nella figura sono evidenziati con un tratteggio i conci in cui la curvatura locale è sempre maggiore di quella di snervamento, in questi elementi l'acciaio lavora sempre in

campo plastico. Negli elementi non campiti, l'acciaio lavora in campo plastico in prossimità delle fessure e in campo elastico nella zona centrale del concio compreso tra due fessure, al diminuire del momento flettente il tratto in cui l'acciaio lavora in campo elastico aumenta.

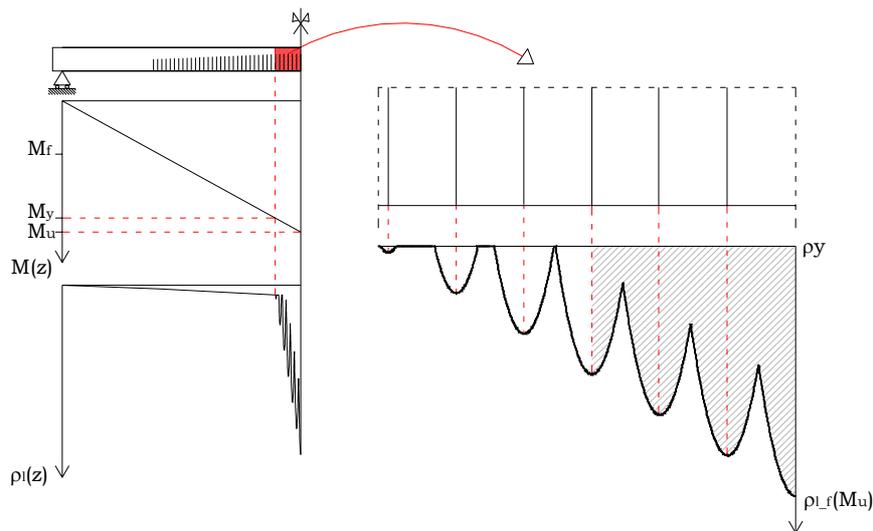


Figura 3.21: Andamento delle curvature locali nel tratto in cui le deformazioni nell'acciaio sono maggiori di ϵ_{sy}

Il numero di conchi in cui l'acciaio lavora in campo plastico si ricava risolvendo l'equazione:

$$\sqrt{\frac{\sigma_{sp} - f_{sy}}{A}} = \frac{s_{rm}}{2} \quad (3.26)$$

dove σ_{sp} è la tensione nell'acciaio nella sezione distante $n_p s_{rm}$ dalla sezione critica, che, supponendo segua l'andamento del momento flettente, vale:

$$\sigma_{sp} = \sigma_{so} - (\sigma_{so} - f_{sy}) \frac{n_p s_{rm}}{L_p} \quad (3.27)$$

quindi:

$$n_p = \max \left(0; \frac{L_{yu}}{s_{rm}} \left(1 - \frac{As_{rm}^2}{4(\sigma_{so} - f_{sy})} \right) \right) \quad (3.28)$$

Nella sezione distante $n_p s_{rm}$ dalla fessura la curvatura media vale:

$$\rho_p = \rho_{lp} \left(1 - \frac{A}{3E_y \varepsilon_s (\sigma_{sp})} \left(\frac{s_{rm}}{2} \right)^2 \right) \quad (3.29)$$

Ed il momento:

$$M_p = M_u \left(1 - \frac{n_p s_{rm}}{0.5L} \right) \quad (3.30)$$

dove:

$$\rho_{lp} = \rho_{lu} - (\rho_{lu} - \rho_y) \frac{n_p s_{rm}}{L_{yu}} \quad (3.31)$$

$$L_{yu} = \frac{L}{2} \left(\frac{M_u - M_y}{M_u} \right) \quad (3.32)$$

Nel caso in cui n_p è maggiore di zero, sostituendo l'equazione (3.28) nelle equazioni (3.29) e (3.30), si ottiene che la curvatura media ρ_p ed il momento M_p sono indipendenti dallo schema di carico, e dipendono solo dalle caratteristiche meccaniche e geometriche della sezione trasversale dell'elemento:

$$\rho_p = \frac{2}{3} \left(\rho_{lu} - (\rho_{lu} - \rho_y) \left(1 - \frac{As_{rm}^2}{4(\sigma_{so} - f_{sy})} \right) \right) \left(\frac{s_{rm}^2 A + 6E_y \varepsilon_y}{s_{rm}^2 A + 4E_y \varepsilon_y} \right) \quad (3.33)$$

$$M_p = M_u - (M_u - M_y) \left(1 - \frac{As_{rm}^2}{4(\sigma_{so} - f_{sy})} \right) \quad (3.34)$$

Aggiungendo questo punto al legame momento-curvatura media, si ottiene un legame quadrilineare del tipo riportato in Figura 3.22. Nel caso in cui n_p è uguale a zero, il legame momento-curvatura media ritorna ad essere trilineare.

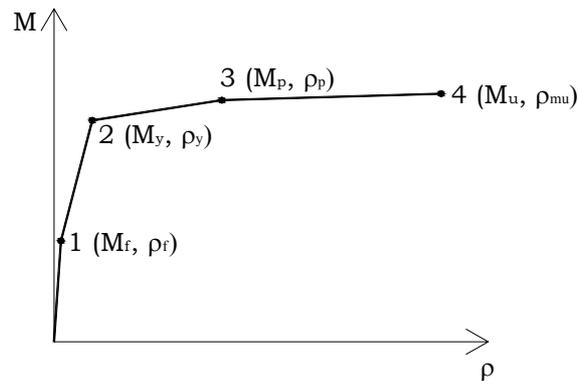


Figura 3.22: Legame momento-curvatura media quadrilineare

Il legame appena proposto è stato utilizzato per costruire la curva di pushover (Figura 3.23) della trave riportata nella Figura 3.19. Nella stessa figura sono riportati i risultati anche dell'integrazione della curvatura locale e dell'applicazione del legame momento-curvatura media trilineare e di un legame momento-curvatura media in cui la deformabilità dell'elemento è valutata trascurando il fenomeno del tension stiffening.

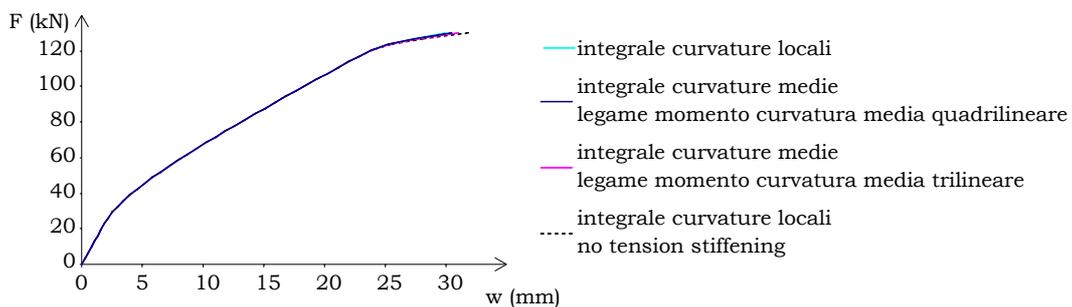


Figura 3.23: Curve di pushover della trave riportata nella Figura 3.19

In seguito sono riportati gli spostamenti finali, calcolati secondo le quattro procedure adottate precedentemente per la costruzione

delle curve carico-spostamento, al variare di alcuni parametri, come la luce, le caratteristiche meccaniche e geometriche, nel caso di carico concentrato (Tabella 14 e Figura 3.24) e distribuito (Tabella 15 e Figura 3.25).

I risultati mostrano come l'analisi effettuata integrando il diagramma momento-curvatura media quadrilatero risulta in perfetto accordo con l'analisi della deformabilità attraverso l'analisi locale delle curvature, con il vantaggio di un minor onere computazionale del primo metodo.

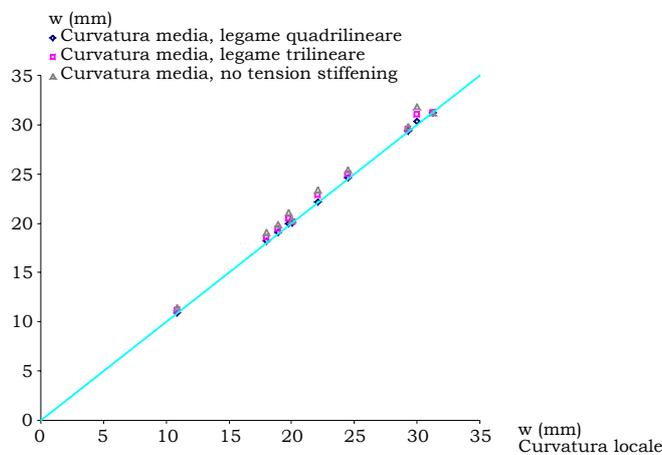


Figura 3.24: Confronto degli spostamenti delle travi caricate con una forza concentrata

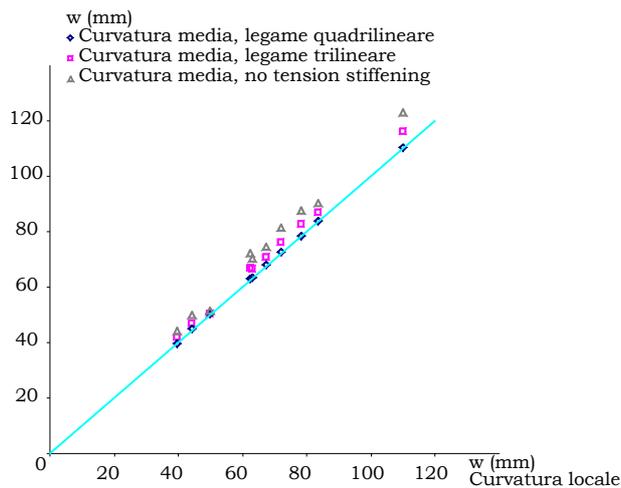


Figura 3.25: Confronto degli spostamenti delle travi caricate con un carico uniformemente distribuito

Tabella 14: Spostamenti delle travi sottoposte ad una forza concentrata

sim.	A	B	C	D
1	29.99	30.30	31.03	31.85
2	29.26	29.39	29.54	29.80
3	31.24	31.25	31.25	31.26
4	10.84	10.91	11.17	11.47
5	20.02	20.07	20.16	20.31
6	24.48	24.65	24.97	25.40
7	22.07	22.14	22.83	23.38
8	17.96	18.21	18.51	19.04
9	18.91	19.05	19.41	19.84
10	19.73	19.93	20.52	21.15
A. Curvatura locale B. Curvatura media, legame quadrilineare C. Curvatura media, legame trilineare D. Curvatura media, no tension stiffening				

Tabella 15: Spostamenti delle travi sottoposte ad un carico uniformemente distribuito

sim	A	B	C	D
1	109.95	110.55	116.02	123.16
2	67.51	68.11	70.69	74.78
3	50.00	50.23	50.55	51.51
4	39.64	39.80	41.77	44.34
5	44.32	44.87	46.73	50.00
6	72.10	72.68	76.25	81.35
7	83.70	83.74	86.88	90.47
8	62.36	63.08	66.74	72.26
9	63.13	63.49	66.54	70.58
10	78.25	78.59	82.56	87.65
A. Curvatura locale B. Curvatura media, legame quadrilineare C. Curvatura media, legame trilineare D. Curvatura media, no tension stiffening				

Nelle Tabelle 16a e b e 17a e b sono riportati rispettivamente i parametri geometrici e meccanici corrispondenti alle simulazioni svolte e i risultati in termini di azione di collasso e delle sollecitazioni e curvatures medie con cui è stato costruito sia il legame trilineare che quadrilineare.

Tabella 16a: Caratteristiche geometriche delle travi analizzate (dimensioni in mm)

sim	b	H	δ	Φ	A_{sc}	A_s	L (m)
1	300	500	40	20	628.32	1571	10
2	300	500	40	20	628.32	2199	10
3	300	500	40	20	628.32	3142	10
4	300	500	40	20	628.32	1571	6
5	300	300	40	20	628.32	1571	6
6	300	400	40	20	628.32	1571	8
7	300	500	40	20	628.32	1571	8
8	300	500	40	20	628.32	1571	8
9	300	500	40	20	628.32	1571	8
10	300	500	40	20	628.32	1571	8

Tabella 16b: Caratteristiche meccaniche delle travi analizzate (dimensioni in N e mm)

sim	R_{ck}	ε_{cu} (%)	E_c (10^4)	f_{sy}	f_{su}	ε_{su} (%)	E_s (10^5)
1	30	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
2	30	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
3	30	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
4	30	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
5	30	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
6	30	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
7	30	0.8	3.122	450	562.5	8	2.06
8	30	0.8	3.122	450	486	8	2.06
9	25	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06
10	35	0.8	3.122	450	517.5	8	2.06

Tabella 17a: Distanza tra le fessure, carico massimo e momenti relativi alle travi analizzate (misure in N e mm)

sim	s_{rm}	F_{max} (10^5)	q_{max} (10^4)	M_u (10^5)	M_y (10^5)	M_p (10^5)
1	88.19	1.30	2.77	3.25	2.90	3.05
2	77.29	1.70	3.62	4.26	3.97	4.14
3	68.89	2.24	4.74	5.59	5.51	5.59
4	88.19	2.17	7.71	3.25	2.90	3.05
5	74.73	1.12	4.18	1.68	1.57	1.63
6	84.72	1.23	3.33	2.45	2.23	2.34
7	88.19	1.69	4.51	3.38	2.90	3.04
8	88.19	1.60	4.25	3.19	2.90	3.08
9	88.19	1.60	4.27	3.21	2.88	3.03
10	88.19	1.65	4.39	3.30	2.92	3.07

Tabella 17b: Curvature relative alle travi analizzate (misure in mm)

sim	$\rho_{fes} (10^{-7})$	$\rho_v (10^{-6})$	$\rho_{mu} (10^{-5})$	$\rho_{lu} (10^{-5})$	$\rho_{mp} (10^{-5})$
1	4.18	6.96	10.29	11.95	3.93
2	4.32	7.57	6.27	7.69	3.50
3	4.53	8.51	3.62	4.98	3.44
4	4.18	6.96	10.29	11.95	3.93
5	7.10	14.16	11.02	13.37	5.88
6	5.27	9.39	10.50	12.54	4.87
7	4.18	6.96	10.19	11.20	2.66
8	4.18	6.96	9.98	12.34	5.30
9	3.94	7.15	9.19	10.78	3.79
10	4.40	6.81	11.37	13.10	4.08

Modellazione analitica della Fixed end rotation

Negli elementi in cui le barre sono ancorate è necessario tener conto degli scorrimenti che avvengono nel tratto della lunghezza di ancoraggio della barra interessato da deformazioni diverse da zero. Prendiamo ad esempio un elemento pilastro, gli scorrimenti che avvengono nelle barre immerse nella fondazione possono essere modellati trasformando l'incastro al piede dell'elemento da analizzare in una cerniera collegata a terra con una molla rotazionale. La rotazione intorno alla cerniera è nota in letteratura con il nome di "fixed end rotation". Per trovare il legame costitutivo della molla rotazionale si è separato il comportamento elastico da quello plastico.

Se nella sezione critica l'acciaio lavora in campo elastico, si è considerata una distribuzione costante delle tensioni tangenziali all'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo. L'intensità della tensione tangenziale è, secondo la formulazione proposta dal DM96, pari a:

$$\tau_b = 2.25 \cdot 0.7 \cdot 0.27 \cdot \sqrt[3]{R_{ck}^2} \quad (3.35)$$

Dall'equazione di equilibrio alla traslazione verticale della barra, si trova che la tensione di trazione nella barra varia linearmente allontanandosi dalla fessura, secondo la relazione:

$$\sigma_s(x, M) = \sigma_s(0, M) - 4\tau_b \frac{x}{\Phi} \quad (3.36)$$

da cui:

$$\varepsilon_s(x, M) = \frac{\sigma_s(x, M)}{E_s} = \varepsilon_s(0, M) - 4 \frac{\tau_b}{E_s} \frac{x}{\Phi} \quad (3.37)$$

La distanza l_{anc} in cui la tensione è nulla (Figura 3.26), è pari a:

$$l_{anc}(M) = \frac{\sigma_s(0, M)}{4\tau_b} \Phi \quad (3.38)$$

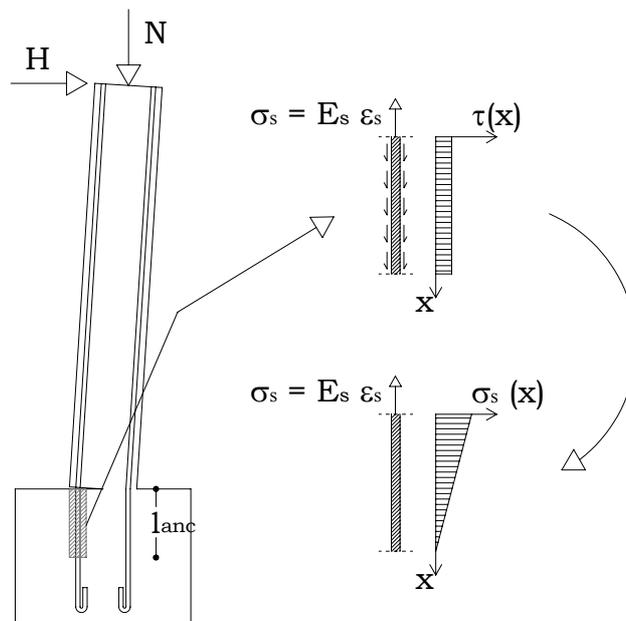


Figura 3.26: Modellazione della fixed end rotation per stati di sollecitazione minori di M_y

La “fixed end rotation” può essere calcolata integrando la curvatura locale sul tratto l_{anc} :

$$\Theta_f(M) = \int_0^{l_{anc}(M)} \frac{\varepsilon_s(x, M)}{d - x_c(x, M)} dx \quad (3.39)$$

ipotizzando l'asse neutro costante, questa l'equazione diventa:

$$\Theta_f(M) = \frac{\varepsilon_s(0, M)}{d - x_c(0, M)} \frac{I_{anc}(M)}{2} \quad (3.40)$$

Se il momento flettente al piede del pilastro è maggiore del momento di snervamento M_y , la funzione che descrive la variazione della tensione di trazione nella barra all'interno della fondazione, riprendendo la formulazione proposta nei paragrafi precedenti, è pari, nel tratto di barra interessato da deformazioni plastiche, a:

$$\sigma_s(x, M) = \sigma_s(0, M) - Ax^2 \quad (3.41)$$

Integrando la curvatura locale plastica, si ottiene:

$$\Theta_{f_plastica}(M) = \int_0^{Z(M)} \left(\frac{\varepsilon_s(0, M) - \frac{A}{E_y} x^2 - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(x, M)} \right) dx \quad (3.42)$$

dove Z è il tratto interessato da deformazioni plastiche, pari a:

$$Z(M) = \sqrt{\frac{\sigma_s(0, M) - f_{sy}}{A}} \quad (3.43)$$

Supponendo la posizione dell'asse neutro costante e pari al valore calcolato nella sezione critica, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Theta_{f_plastica}(M) &= \frac{1}{d - x_c(0, M)} \int_0^{Z(M)} \left(\varepsilon_s(0, M) - \frac{A}{E_y} x^2 - \varepsilon_{sy} \right) dx \\ &= \frac{1}{d - x_c(0, M)} \left[\varepsilon_s(0, M)Z(M) - \frac{A}{E_y} \frac{Z(M)^3}{3} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sostituendo l'equazione (3.43) nell'equazione (3.44), si ottiene:

$$\Theta_{f_plastica}(M) = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_s(0, M) - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0, M)} \sqrt{\frac{\sigma_s(0, M) - f_y}{A}} \quad (3.45)$$

La fixed end rotation è pari alla somma della rotazione plastica Θ_f e della rotazione corrispondente al momento di snervamento:

$$\Theta_f(M) = \Theta_{f_plastica}(M) + \frac{\varepsilon_s(0, M_y)}{d - x_c(0, M_y)} \frac{l_{anc}(M_y)}{2} \quad (3.46)$$

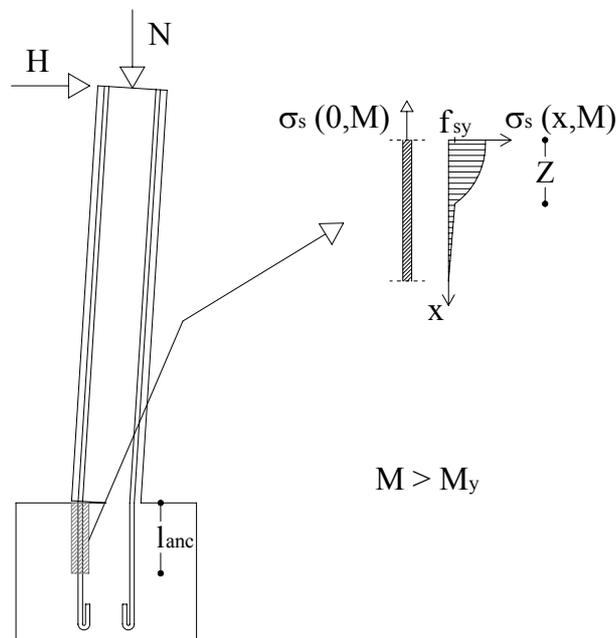


Figura 3.27: Modellazione della fixed end rotation per stati di sollecitazione maggiori di M_y

Riassumendo, la formulazione analitica della “fixed end rotation”, quindi il legame costitutivo della molla rotazionale, è:

$$\Theta_f(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } M \leq M_f \\ \frac{\varepsilon_s(0, M) l_{anc}(M)}{d - x_c(0, M) \cdot 2} & \text{se } M_f < M \leq M_y \\ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_s(0, M) - \varepsilon_{sy}}{d - x_c(0, M)} \sqrt{\frac{\sigma_s(0, M) - f_y}{A}} + \frac{\varepsilon_s(0, M_y) l_{anc}(M_y)}{d - x_c(0, M_y) \cdot 2} & \text{se } M > M_y \end{cases} \quad (3.47)$$

Applicazione del modello alle strutture iperstatiche

Il calcolo convenzionale elastico delle strutture in cemento armato si basa sull'assunzione delle seguenti ipotesi:

- il legame costitutivo dei materiali è elastico lineare;
- vale il principio di pianeità delle sezioni;
- le rigidezze degli elementi della struttura sono indipendenti dalle sollecitazioni.

Nota la rigidezza degli elementi è possibile procedere al calcolo della struttura, cioè alla determinazione degli spostamenti e quindi delle sollecitazioni.

All'aumentare delle azioni, la variazione della rigidezza negli elementi fessurati e soprattutto la formazione di cerniere plastiche, cioè di concetti in cui l'acciaio lavora in campo plastico, porta ad una redistribuzione delle sollecitazioni rispetto ai risultati di una analisi elastica lineare. Inoltre se è necessario valutare la duttilità, in termini di spostamento, delle strutture è necessario eseguire un'analisi non lineare. In questo caso, la determinazione della rigidezza della struttura ed il calcolo delle sollecitazioni si rivelano un problema accoppiato, che può essere risolto solo iterativamente. Applicando i diagrammi momento-curvatura medi descritti precedentemente, si è sviluppato un codice di calcolo, con il programma Matlab, che analizza il comportamento non lineare di strutture piane in cemento armato sottoposte a carichi monotoni. Nella Figura 3.28 è riportato un diagramma di flusso che descrive la procedura sviluppata: assegnate le caratteristiche geometriche e meccaniche della struttura da analizzare, per un assegnato valore dell'azione, si valuta la distribuzione elastica delle sollecitazioni in ogni elemento della struttura. Noto il valore dello sforzo normale si

valuta il diagramma momento-curvatura medio dell'elemento e dalla distribuzione della sollecitazione flettente, la rigidezza locale di ogni elemento.

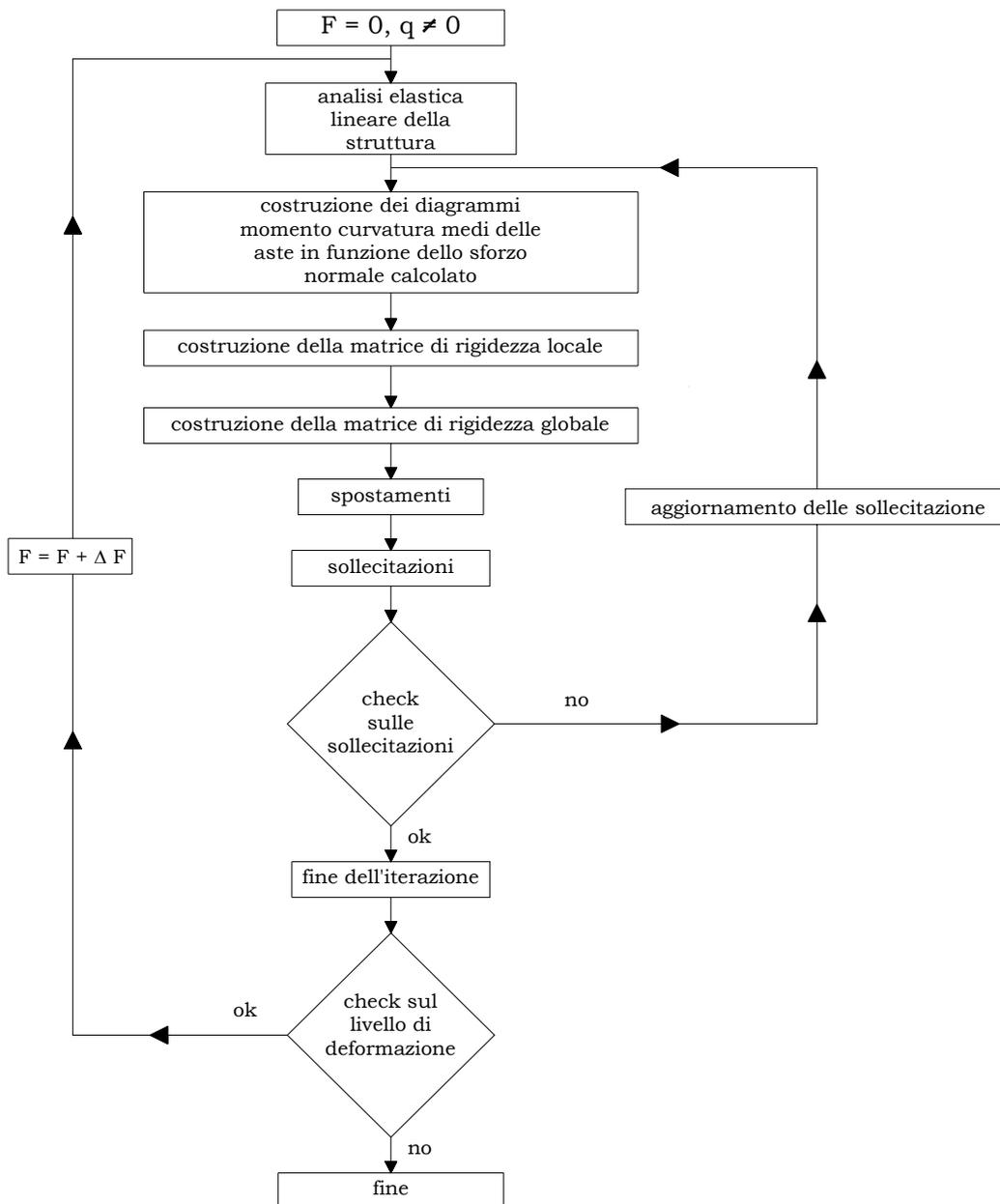


Figura 3.28: Diagramma di flusso che descrive il programma per l'analisi non lineare di strutture iperstatiche in cemento armato

La costruzione della matrice di rigidezza locale dell'elemento fessurato parte dalla conoscenza dei coefficienti di deformabilità α_{hk} valutati applicando il principio dei lavori virtuali sulla trave ausiliaria semplicemente appoggiata riportata nella Figura 3.29:

$$1 \cdot \alpha_{hk} = \int_L \frac{M_h \cdot M_k}{EI(z)} dz \quad (3.48)$$

dove con L si indica la lunghezza dell'elemento, M_h e M_k sono i diagrammi dei momenti valutati sulla trave ausiliaria rispettivamente con azione h -esima e k -esima unitaria, EI è la rigidezza flessionale effettiva, pari a:

$$\frac{1}{EI(z)} = \frac{\rho_m(M(z))}{M(z)} \quad (3.49)$$

dove $M(z)$ è la funzione che descrive la distribuzione della sollecitazione flettente lungo l'asse dell'elemento e la curvatura ρ_m è la curvatura media valutata dal diagramma momento-curvatura media proposto in questa tesi.

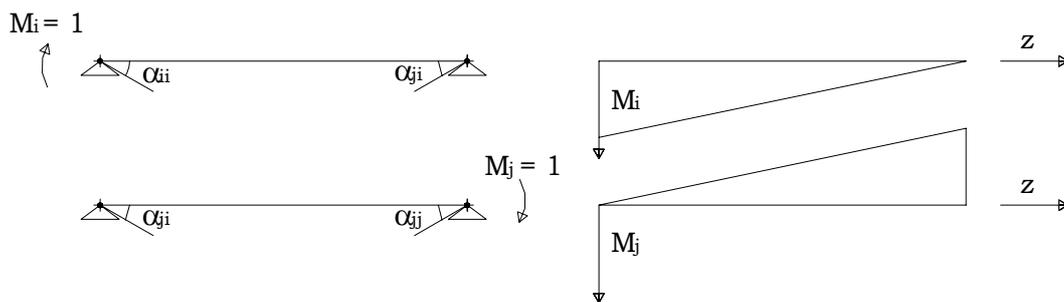


Figura 3.29: Schema isostatico equivalente

Assemblando le rigidezze locali, si ottiene la rigidezza globale, con cui calcolare gli spostamenti e le nuove sollecitazioni. Con questo nuovo stato di sollecitazioni si ricomincia il calcolo partendo dalla costruzione dei diagrammi momento-curvatura medi. Il procedimento finisce quando le sollecitazioni ottenute a due

iterazioni successive risultano minore della tolleranza assegnata nei dati di input.

Confronto della formulazione proposta con i risultati di prove sperimentali

L'affidabilità della formulazione analitica del legame momento-curvatura media proposto è stata verificata mediante il confronto con alcuni risultati sperimentali presenti in letteratura. In tutti i confronti effettuati, i coefficienti che compaiono nel parametro A (equazione (3.13)) sono valutati interpolando linearmente quelli proposti per il caso di sezione confinata e non confinata, secondo la definizione del Model Code 90, e riportati nella Tabella 12.

In (Eibl et al., 1991) sono riportati i risultati di una serie di prove sperimentali per valutare l'influenza delle proprietà degli acciai sulla capacità rotazionale degli elementi in cemento armato, per questo motivo tutte le travi hanno la stessa geometria (Figura 3.30) e la resistenza cilindrica del calcestruzzo è compresa tra i 25 e i 28 MPa (Tabella 18).

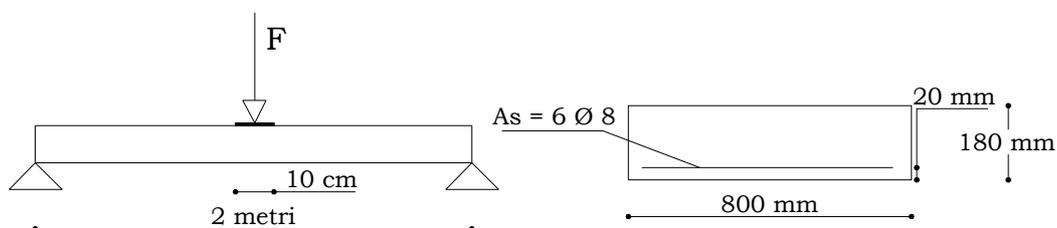


Figura 3.30: Schema statico e caratteristiche geometriche delle travi testate da (Eibl et al., 1991)

Le curve carico spostamento sono state costruite per step di carico crescente. La struttura è isostatica, quindi, per ogni valore dell'azione F , è nota, in ogni sezione della trave, l'intensità della sollecitazione flettente. Nel legame momento-curvatura media del concio tipo, è possibile conoscere la funzione che rappresenta la variazione della curvatura media lungo l'asse; lo spostamento in mezzeria è stato calcolato integrando questa curvatura media.

Nella simulazione analitica, la distanza tra le fessure è costante e pari a 15 cm, come suggerito da (Eibl et al., 1991), il comportamento monoassiale di compressione del calcestruzzo è stato modellato con il legame proposto da (Park et al., 1982), mentre il legame costitutivo dell'acciaio è rappresentato, nel piano σ - ε , da una polilinea, i cui punti di discontinuità sono suggeriti da (Bigaj, 1999) e riportati nella Tabella 19.

I valori della deformazione ultima suggeriti dall'autrice, non rappresentano la deformazione ultima, ma la deformazione nell'acciaio in corrispondenza del raggiungimento del momento massimo (punto di massimo della funzione momento-curvatura). Le curve di pushover sono state costruite utilizzando anche un legame costitutivo dell'acciaio semplificato di tipo elastico-plastico incoerente, in cui i valori di deformazione ultima sono riportati nella Tabella 18 (Eibl et al., 1991).

Tabella 18: Parametri meccanici delle travi sperimentali di (Eibl et al., 1991)

	RPL1	RPL2	RPL5
f_c (MPa)	28.1	25.5	26.4
f_{sy} (MPa)	703	502	590
ε_{sy} (%)	0.33	0.25	0.3
f_{su} (MPa)	730	580	625
ε_{su} (%)	7.4	18.6	11.3

Tabella 19: Parametri meccanici del legame costitutivo dell'acciaio delle travi sperimentali di (Eibl et al., 1991) secondo (Bigaj, 1999)

	RPL1		RPL2		RPL5	
	σ_s (MPa)	ε_s (%)	σ_s (MPa)	ε_s (%)	σ_s (MPa)	ε_s (%)
1	703	0.33	502	0.25	590	0.3
2	715	0.5	530	1	605	0.4
3	725	1	560	4	615	1
4	730	1.5	580	7.5	625	2.5
5	732	2	594	10.4	636	5.2

Come si deduce dalle curve carico-spostamento, riportate nelle Figure 3.31, 3.32 e 3.33, si riscontra un buon accordo tra i risultati sperimentali e analitici.

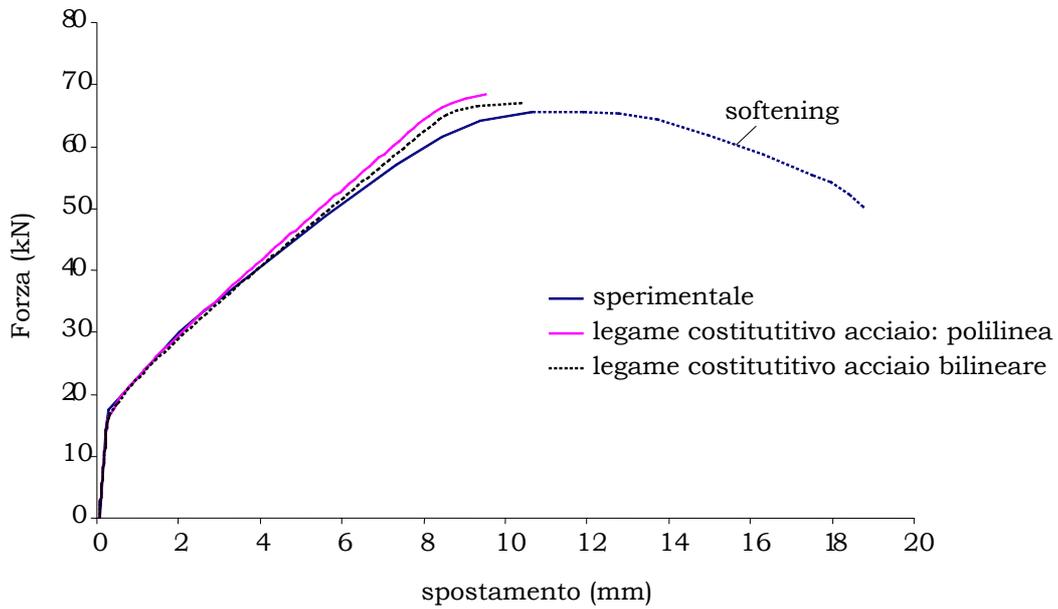


Figura 3.31: Curva carico-spostamento per la trave RPL1 (Eibl et al., 1991): confronto tra i risultati sperimentali e numerici

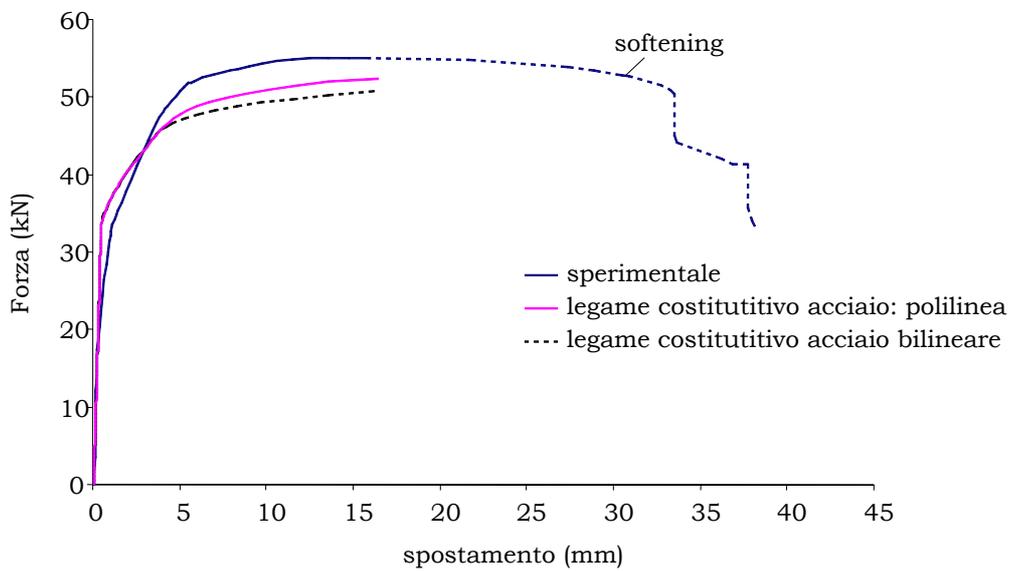


Figura 3.32: Curva carico-spostamento per la trave RPL2 (Eibl et al., 1991): confronto tra i risultati sperimentali e numerici

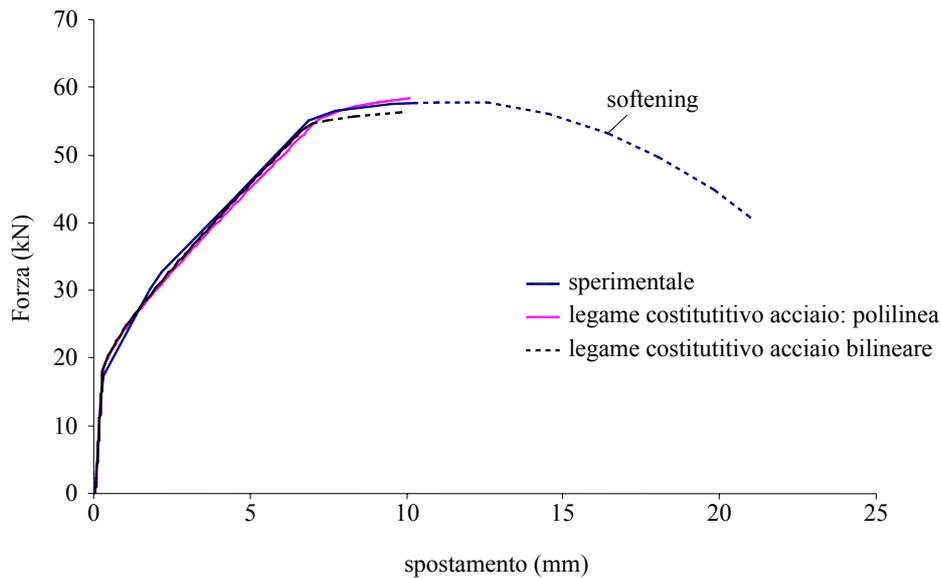


Figura 3.33: Curva carico-spostamento per la trave RPL4 (Eibl et al., 1991): confronto tra i risultati sperimentali e numerici

(Bousias et al., 1995) eseguì una serie di prove su dei pilastri sottoposti a carichi ciclici e monotoni crescenti. In particolare faremo riferimento alla prova indicata con la sigla S0 e al percorso di sollecitazione monotono. Lo schema e la geometria della colonna sono riportati nella Figura 3.34.

Il calcestruzzo ha una resistenza cilindrica a compressione pari a 31.45 MPa, l'acciaio una tensione di snervamento pari a 460 MPa, una resistenza pari a 710 MPa e una deformazione ultima pari a 0.11. La colonna è sottoposta ad uno sforzo normale di 250 kN ed una azione orizzontale crescente monotonamente fino a rottura. La distanza tra le fessure è stata valutata con la formulazione proposta dall'Eurocodice 2 ed è pari a 89 mm, la resistenza a trazione è stata valutata in base a quella di compressione secondo la formulazione proposta dal DM96.

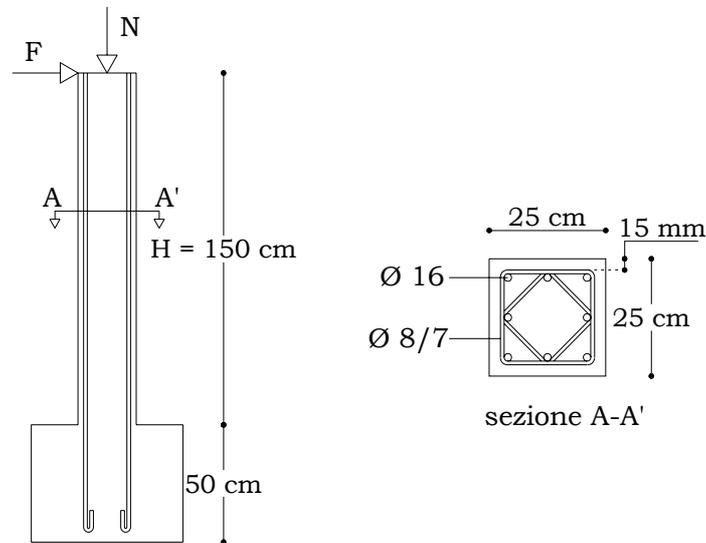


Figura 3.34: Schema statico e caratteristiche geometriche del pilastro testato da (Bousias et al., 1995)

Per evitare l'effetto $P-\Delta$, gli autori utilizzarono un dispositivo in grado di trasmettere lo sforzo normale sempre lungo l'asse della colonna. In questo modo lo spostamento in testa (Figura 3.35) è pari a:

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_f \quad (3.50)$$

dove:

- Δ_b è lo spostamento legato alla deformabilità flessionale dell'elemento, ed è pari all'integrale:

$$\Delta_b = \int_0^H (\rho_m(x) \cdot x) dx \quad (3.51)$$

- Δ_f è lo spostamento dovuto alla fixed end rotation, ed è pari a:

$$\Delta_f = \Theta_f H \quad (3.52)$$

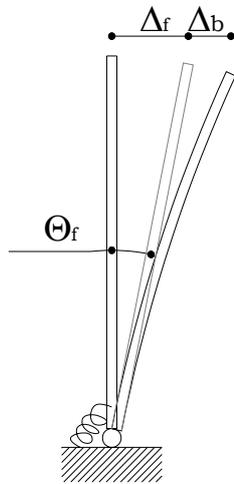


Figura 3.35: Componenti dello spostamento in testa della colonna testata da (Bousias et al., 1995)

Nella Figura 3.36 sono riportate le curve di pushover sperimentale e analitiche.

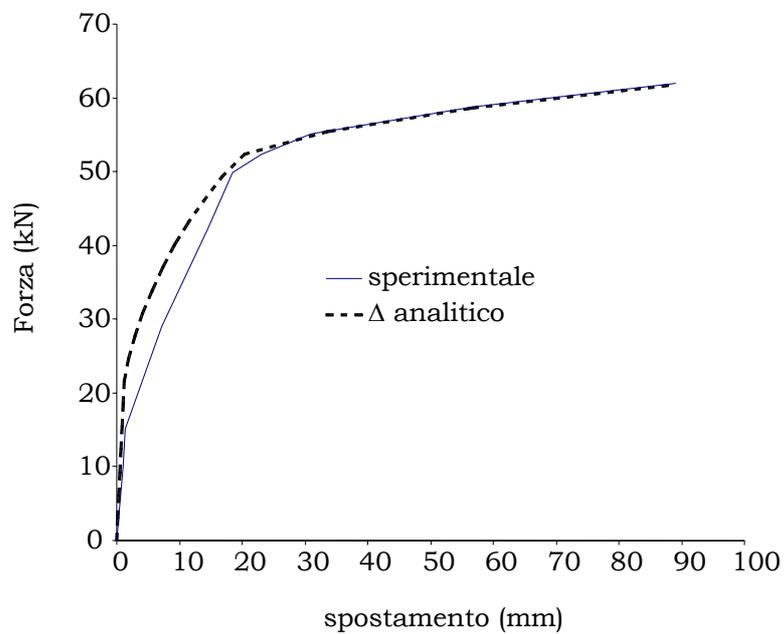


Figura 3.36: Curva carico-spostamento per il pilastro S0 (Bousias et al., 1995): confronto tra i risultati sperimentali e numerici

(Vecchio e Balopoulou, 1990) eseguirono una prova su un telaio in cemento armato. La geometria e lo schema statico della struttura sono riportati nelle Figure 3.37 e 3.38 rispettivamente.

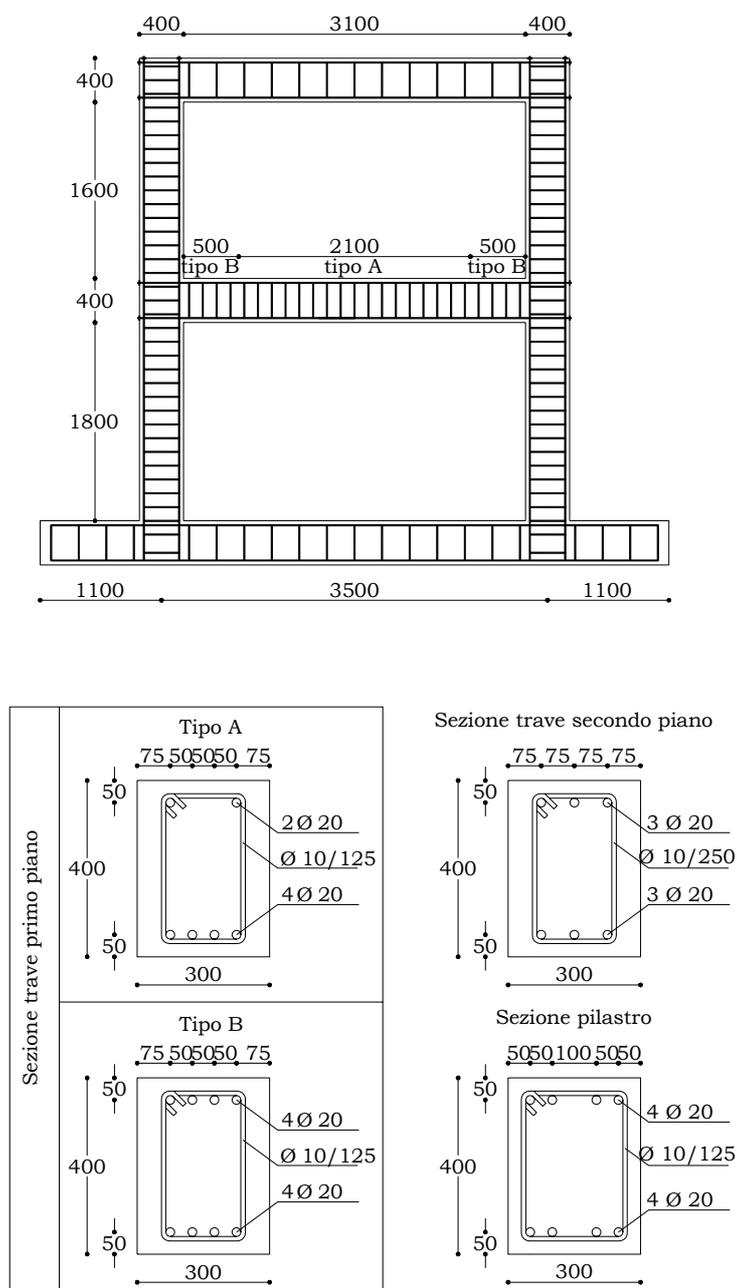


Figura 3.37: Caratteristiche del telaio testato da (Vecchio e Balopoulou, 1990)

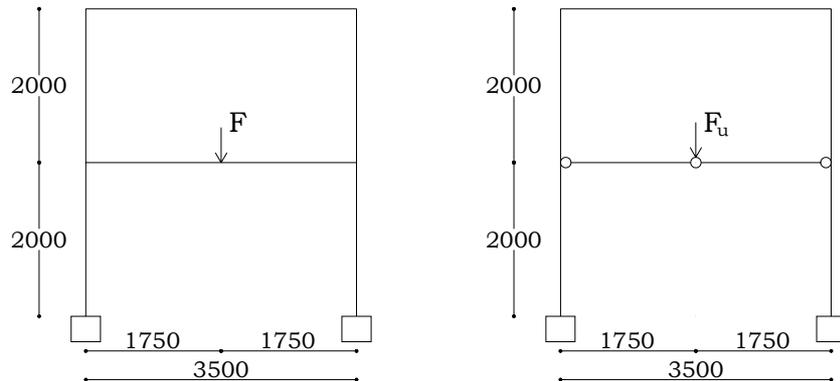


Figura 3.38: Schema statico e configurazione finale del telaio testato da (Vecchio e Balopoulou, 1990)

Il calcestruzzo, modellato con il legame proposto da (Park et al., 1982), ha una resistenza cilindrica di 29 MPa, il legame costitutivo dell'acciaio è riportato in Figura 3.39, la deformazione a cui inizia il ramo incrudente varia tra 7.5‰ e 11‰, nell'analisi è stato scelto un valore pari a 9‰.

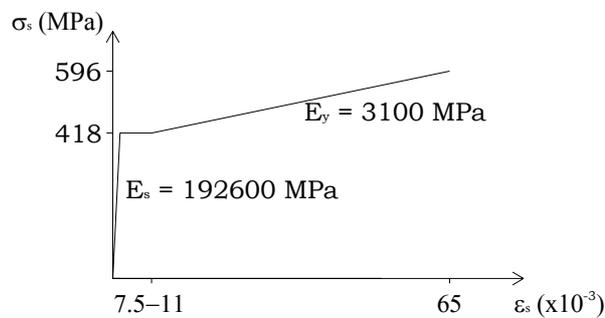


Figura 3.39: Legame costitutivo delle barre d'armatura utilizzate nel telaio testato da (Vecchio e Balopoulou, 1990)

Nella Figura 3.40 sono riportate le curve carico-spostamento sperimentale e analitica. Sia nella prova sperimentale che nel risultato dell'analisi, il telaio arriva al collasso con la formazione di tre cerniere plastiche sulla trave del primo piano (Figura 3.37). Il modello analitico riesce a descrivere molto bene il comportamento sperimentale nella fase di rottura, sia in termini di

spostamento che di resistenza, le differenze maggiori si riscontrano nella fase di esercizio. Questa maggior rigidità nel risultato analitico può essere spiegata considerando che, prima di iniziare la prova, avvenuta venticinque giorni dopo la preparazione del telaio, a causa delle deformazioni viscosi, ogni elemento presentava una fessurazione diffusa su tutta la lunghezza. Per questo motivo la curva carico-spostamento è stata costruita analiticamente considerando anche un legame momento-curvatura media trilineare in cui si è trascurando il ramo rappresentativo del comportamento non fessurato dell'elemento. I risultati dell'analisi svolta e il confronto con la curva sperimentale sono riportati sempre nella Figura 3.40, si può notare come in questo caso la rigidità iniziale della curva analitica si avvicini maggiormente a quella sperimentale.

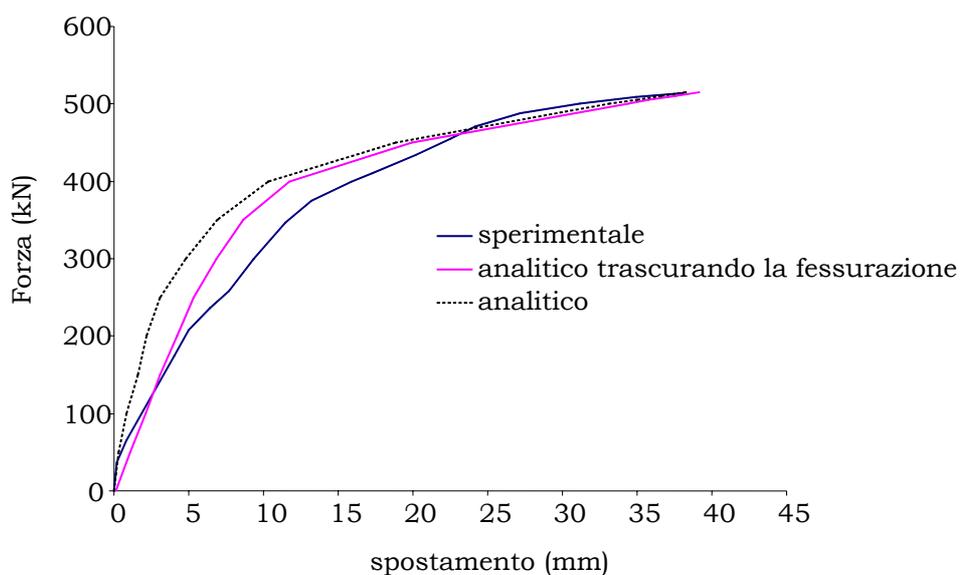


Figura 3.40: Curva carico-spostamento del telaio testato da (Vecchio e Balopoulou, 1990): confronto tra i risultati sperimentali e numerici

Concludendo, il modello proposto, tarato con i risultati delle simulazioni numeriche, riesce a descrivere il comportamento di prove sperimentali. Per questo motivo, e per la facile applicazione, si ritiene che possa essere un utile strumento per le analisi non lineari delle strutture piane in cemento armato soggette ad azioni monotone crescenti.