

## Annexe 3:

# MODELISATION DE LA PRISE EN EAU PAR LA LOI DE FICK

➤ Cas des éprouvettes parallélépipédiques

### • Position du problème

Les éprouvettes utilisées dans notre étude sont décrites de la façon suivante (figure A3-1):

- L est la longueur,  $L=40\text{mm}$
- b est la dimension du côté:  $b=5\text{mm}$ .

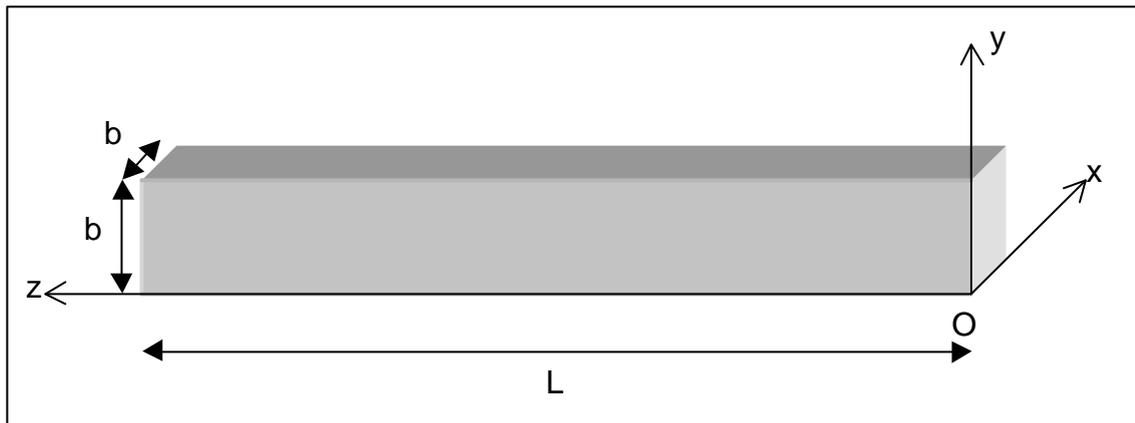


Figure A3-1: Schéma d'une éprouvette parallélépipédique utilisée pour les mesures de prise en eau

Comme  $L \gg b$ , on considérera que le gradient de diffusion est dans la section  $(x,y)$ , les effets de bord en  $z=0$  et  $z=L$  étant négligeables. Le profil de concentration est donc fonction uniquement du temps et de la position dans la section:  $C_F(x,y,t)$ . Cette section étant carrée, il faudra de plus respecter les conditions de symétrie suivantes: symétrie par rapport aux diagonales et par rapport aux médianes.

L'éprouvette est initialement sèche:

$$\forall (x,y), C_F(x,y,0)=0 \quad (\text{A3-1})$$

et la condition aux limites en  $x$  et  $y$  est telle que les surfaces extérieures sont plongées dans l'eau à l'instant  $t=0^+$ :

$$\forall t, C_F(0,y,t)=C_F(b,y,t)=C_F(x,0,t)=C_F(x,b,t)=C_F^\infty \quad (\text{A3-2})$$

Enfin, le profil de concentration au sein de l'éprouvette tend à atteindre la saturation en eau:

$$\forall(x, y), C_F(x, y, t \rightarrow \infty) = C_F^\infty \quad (\text{A3-3})$$

En supposant que la diffusion soit uniforme et que l'adhésif soit isotrope, le profil de concentration suivra la deuxième loi de Fick:

$$\frac{\partial C_F}{\partial t} = D \cdot \Delta C_F \quad (\text{IB-27})$$

c'est-à-dire, en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{\partial C_F}{\partial t} = D \cdot \left[ \frac{\partial^2 C_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_F}{\partial y^2} \right] \quad (\text{A3-4})$$

### • Résolution du problème

On résout le problème par la méthode de séparation des variables, en posant:

$$C_F(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) \quad (\text{A3-5})$$

expression valable à une constante près.

Alors, l'équation différentielle sur  $C_F$  devient:

$$\frac{T'}{T} = D \cdot \left[ \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{T'}{T} = -\tau^2 \\ \frac{X''}{X} = -\alpha^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -\beta^2 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \frac{T'}{T} \leq 0 \text{ car } C_F \text{ est finie} \\ \tau^2 = D \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \end{cases} \quad (\text{A3-6})$$

Les différentes solutions s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{cases} T(t) = a_t \cdot e^{-\tau^2 \cdot t} \\ X(x) = a_{xc} \cdot \cos(\alpha x) + a_{xs} \cdot \sin(\alpha x) \\ Y(y) = a_{yc} \cdot \cos(\beta y) + a_{ys} \cdot \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{A3-7})$$

Or, la condition aux limites quand  $t$  tend vers l'infini impose pour  $C_F$  une expression de la forme:

$$(\text{A3-3}) \Rightarrow \forall(x, y), C_F(x, y, t) = C_F^\infty \cdot [1 - X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)] \quad (\text{A3-8})$$

De plus, les symétries de l'éprouvette imposent:

$$\forall(x, y, t), \begin{cases} C_F(x, y, t) = C_F(y, x, t) \\ C_F(x, y, t) = C_F(x, b - y, t) \\ C_F(x, y, t) = C_F(b - x, y, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{xc} = a_{yc} \text{ et } a_{xs} = a_{ys} \text{ et } \alpha \equiv \beta[\pi] \\ a_{xc} = 0 \text{ et } \alpha = \frac{2k+1}{b} \pi \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ a_{yc} = 0 \text{ et } \beta = \frac{2n+1}{b} \pi \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{A3-9})$$

Une solution pour un couple d'entiers (n,k) est donc de la forme:

$$C_{n,k} \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{b} \cdot \pi \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{b} \cdot \pi \cdot y\right) \cdot e^{-\frac{(2k+1)^2+(2n+1)^2}{b^2} \cdot \pi^2 \cdot D \cdot t} \quad (A3-10)$$

On pose:

$$l_k = \frac{b}{2k+1} \text{ et } l_n = \frac{b}{2n+1} \quad (A3-11)$$

L'expression de la solution globale obtenue par superposition de chaque solution s'écrit alors:

$$X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{y}{l_n}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{l_k^2} + \frac{1}{l_n^2}\right) \pi^2 \cdot D \cdot t} \quad (A3-12)$$

Ce qui nous donne:

$$C_F(x,y,t) = C_F^{\infty} \cdot \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{y}{l_n}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{l_k^2} + \frac{1}{l_n^2}\right) \pi^2 \cdot D \cdot t} \right] \quad (A3-13)$$

La valeur du coefficient  $C_{n,k}$  est déterminée à l'aide de la condition initiale:

$$(A3-1) \Rightarrow \forall(x,y), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{y}{l_n}\right) = 1 \quad (A3-14)$$

Il s'agit d'une décomposition en série de Fourier, d'où finalement:

$$C_{n,k} = \frac{4}{b^2} \cdot \int_0^b \int_0^b 1 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{y}{l_n}\right) \cdot dx \cdot dy \Rightarrow C_{n,k} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \quad (A3-15)$$

Le profil de concentration dans une section de l'éprouvette sera donc:

$$C_F(x,y,t) = C_F^{\infty} \cdot \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{y}{l_n}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{l_k^2} + \frac{1}{l_n^2}\right) \pi^2 \cdot D \cdot t} \right] \quad (A3-16)$$

avec  $C_{n,k} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ ,  $l_k = \frac{b}{2k+1}$  et  $l_n = \frac{b}{2n+1}$

• **Allure du profil de concentration au sein de l'éprouvette**

On a calculé le profil de concentration relative au sein de l'éprouvette à différents instants à partir de ce résultat et en utilisant la valeur du coefficient de diffusion déterminée pour l'Eponal 380. Les courbes sont regroupées sur la figure A3-2.

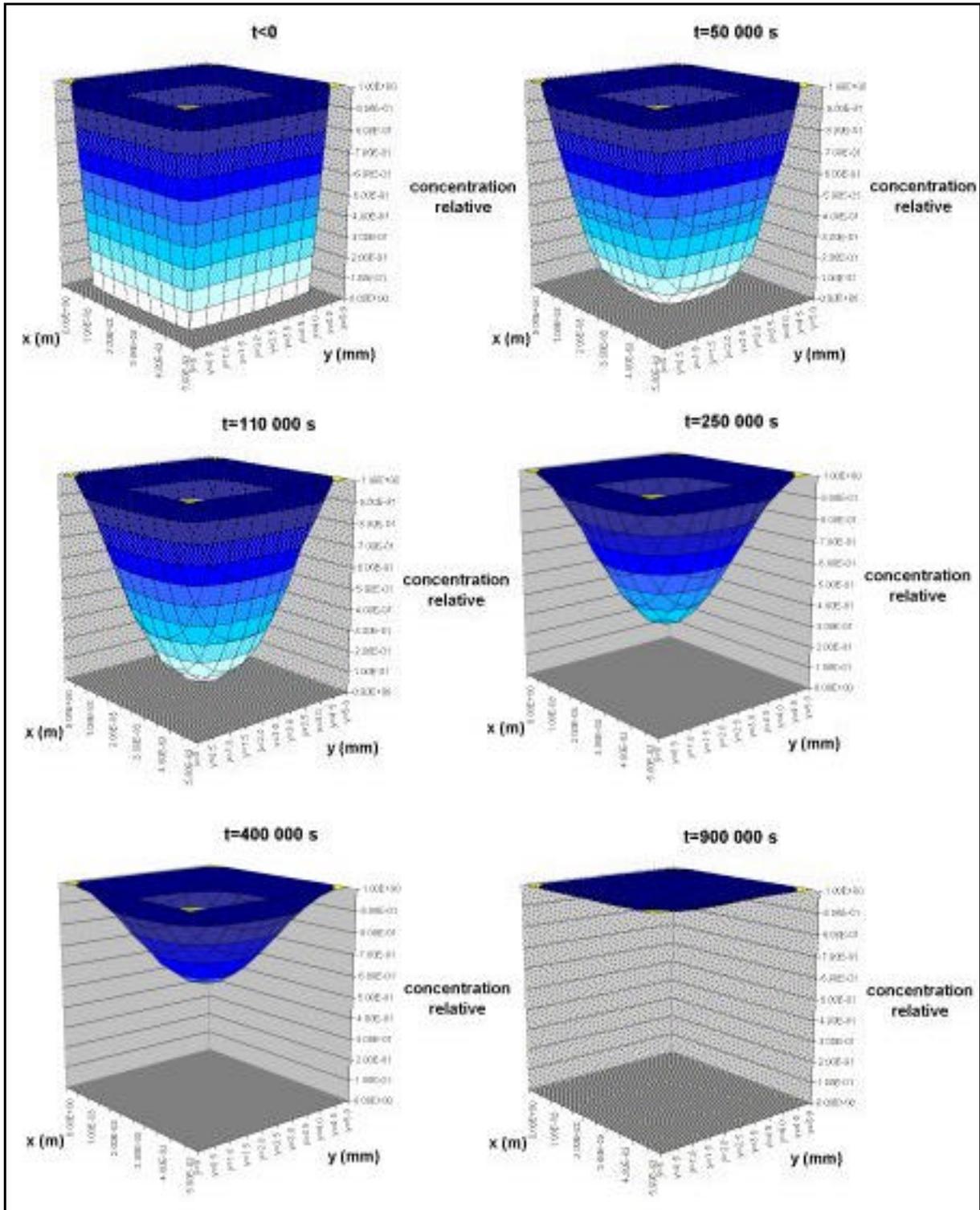


Figure A3-2: Allure du profil de concentration dans les éprouvettes d'Eponal 380 au cours du temps pour une diffusion de type loi de Fick uniquement (bonne approximation du cas de l'eau distillée) avec  $D=3,75 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$ .

➤ Cas du joint de colle

• Position du problème

Les éprouvettes utilisées dans notre étude sont décrites de la façon suivante (figure A3-3):

- L est la longueur,  $L=23\text{mm}$
- l est la largeur:  $l=10\text{mm}$
- b est l'épaisseur de la colle:  $b=4\text{mm}$

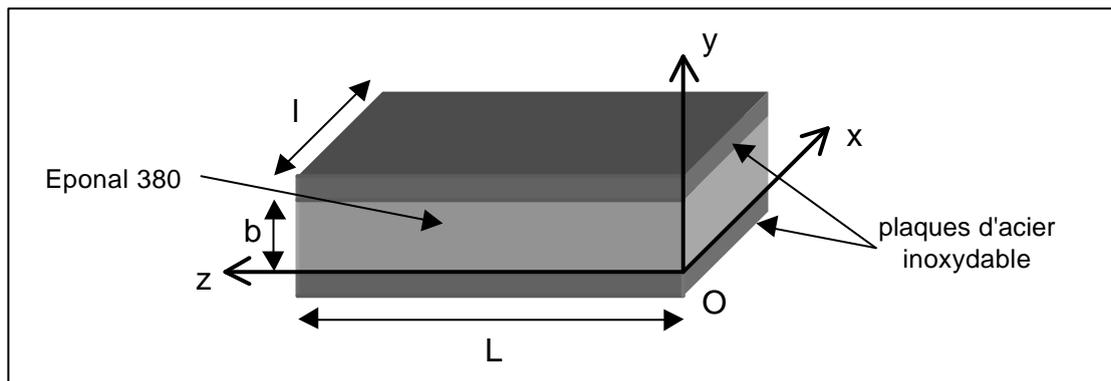


Figure A3-3: Assemblage collé de plaquettes d'acier inoxydable, utilisé pour les mesures d'absorption d'eau

Etant donné que les plaques d'acier bloquent la diffusion par les surfaces  $y=0$  et  $y=b$ , on considérera que le gradient de diffusion est dans la section  $(x,z)$ , les effets de bord étant négligeables. Le profil de concentration est donc fonction uniquement du temps et de la position dans la section:  $C_F(x,z,t)$ . Enfin, la symétrie du problème impose de respecter les conditions de symétrie suivantes: symétrie par rapport aux plans médians  $y=b/2$ ,  $x=l/2$  et  $z=L/2$ .

L'éprouvette est initialement sèche:

$$\forall(x,z), C_F(x,z,0) = 0 \quad (\text{A3-17})$$

et la condition aux limites en  $x$  et  $z$  est telle que les surfaces extérieures sont plongées dans l'eau à l'instant  $t=0^+$ :

$$\forall t, C_F(0,z,t) = C_F(l,z,t) = C_F(x,0,t) = C_F(x,L,t) = C_F^\infty \quad (\text{A3-18})$$

Enfin, le profil de concentration au sein de l'éprouvette tend à atteindre la saturation en eau:

$$\forall(x,z), C_F(x,z,t \rightarrow \infty) = C_F^\infty \quad (\text{A3-19})$$

En supposant que la diffusion soit uniforme et que l'adhésif soit isotrope, le profil de concentration suivra la deuxième loi de Fick:

$$\frac{\partial C_F}{\partial t} = D \cdot \Delta C_F \quad (\text{IB-27})$$

c'est-à-dire, en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{\partial C_F}{\partial t} = D \cdot \left[ \frac{\partial^2 C_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_F}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A3-20})$$

### • Résolution du problème

On résout le problème par la méthode de séparation des variables, en posant:

$$C_F(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (\text{A3-21})$$

expression valable à une constante près.

Alors, l'équation différentielle sur  $C_F$  devient:

$$\frac{T'}{T} = D \cdot \left[ \frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} \right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{T'}{T} = -\tau^2 \\ \frac{X''}{X} = -\alpha^2 \\ \frac{Z''}{Z} = -\beta^2 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \frac{T'}{T} \leq 0 \text{ car } C_F \text{ est finie} \\ \tau^2 = D \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \end{cases} \quad (\text{A3-22})$$

Les différentes solutions s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{cases} T(t) = a_t \cdot e^{-\tau^2 \cdot t} \\ X(x) = a_{xc} \cdot \cos(\alpha x) + a_{xs} \cdot \sin(\alpha x) \\ Z(z) = a_{zc} \cdot \cos(\beta z) + a_{zs} \cdot \sin(\beta z) \end{cases} \quad (\text{A3-23})$$

Or, la condition aux limites quand  $t$  tend vers l'infini impose pour  $C_F$  une expression de la forme:

$$(\text{A3-19}) \Rightarrow \forall (x, z), \quad C_F(x, z, t) = C_F^\infty \cdot [1 - X(x) \cdot Y(z) \cdot T(t)] \quad (\text{A3-24})$$

De plus, les symétries de l'éprouvette imposent:

$$\forall (x, z, t), \begin{cases} C_F(x, z, t) = C_F(x, b - z, t) \\ C_F(x, z, t) = C_F(b - x, z, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{xc} = a_{zc} \text{ et } a_{xs} = a_{zs} \text{ et } \alpha \equiv \beta[\pi] \\ a_{xc} = 0 \text{ et } \alpha = \frac{2k+1}{1} \pi \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ a_{zc} = 0 \text{ et } \beta = \frac{2n+1}{L} \pi \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{A3-25})$$

Une solution pour un couple d'entiers  $(n, k)$  est donc de la forme:

$$C_{n,k} \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{1} \cdot \pi \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{L} \cdot \pi \cdot z\right) \cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)^2}{1^2} + \frac{(2n+1)^2}{L^2}\right) \cdot \pi^2 \cdot D \cdot t} \quad (\text{A3-26})$$

On pose:

$$l_k = \frac{1}{2k+1} \text{ et } l_n = \frac{L}{2n+1} \quad (\text{A3-27})$$

L'expression de la solution globale obtenue par superposition de chaque solution s'écrit alors:

$$X(x) \cdot Z(z) \cdot T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{z}{l_n}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{l_k^2} + \frac{1}{l_n^2}\right) \cdot \pi^2 \cdot D \cdot t} \quad (\text{A3-28})$$

Ce qui nous donne:

$$C_F(x,z,t) = C_F^\infty \cdot \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{z}{l_n}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{l_k^2} + \frac{1}{l_n^2}\right) \pi^2 \cdot D \cdot t} \right] \quad (\text{A3-29})$$

La valeur du coefficient  $C_{n,k}$  est déterminée à l'aide de la condition initiale:

$$(\text{A3-17}) \Rightarrow \forall(x,z), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{z}{l_n}\right) = 1 \quad (\text{A3-30})$$

Il s'agit d'une décomposition en série de Fourier, d'où finalement:

$$C_{n,k} = \frac{4}{L \cdot l} \cdot \int_0^l \int_0^L 1 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{z}{l_n}\right) \cdot dx \cdot dz \Rightarrow C_{n,k} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \quad (\text{A3-31})$$

Le profil de concentration dans une section de l'éprouvette sera donc:

$$C_F(x,z,t) = C_F^\infty \cdot \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_k}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{z}{l_n}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{l_k^2} + \frac{1}{l_n^2}\right) \pi^2 \cdot D \cdot t} \right] \quad (\text{A3-32})$$

$$\text{avec } C_{n,k} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad l_k = \frac{l}{2k+1} \text{ et } l_n = \frac{L}{2n+1}$$

- **Allure du profil de concentration au sein de l'épaisseur du collage**

On a calculé le profil de concentration relative au sein du collage à différents instants à partir de ce résultat et en utilisant la valeur du coefficient de diffusion déterminée pour l'Eponal 380. Les courbes sont regroupées sur la figure A3-4.

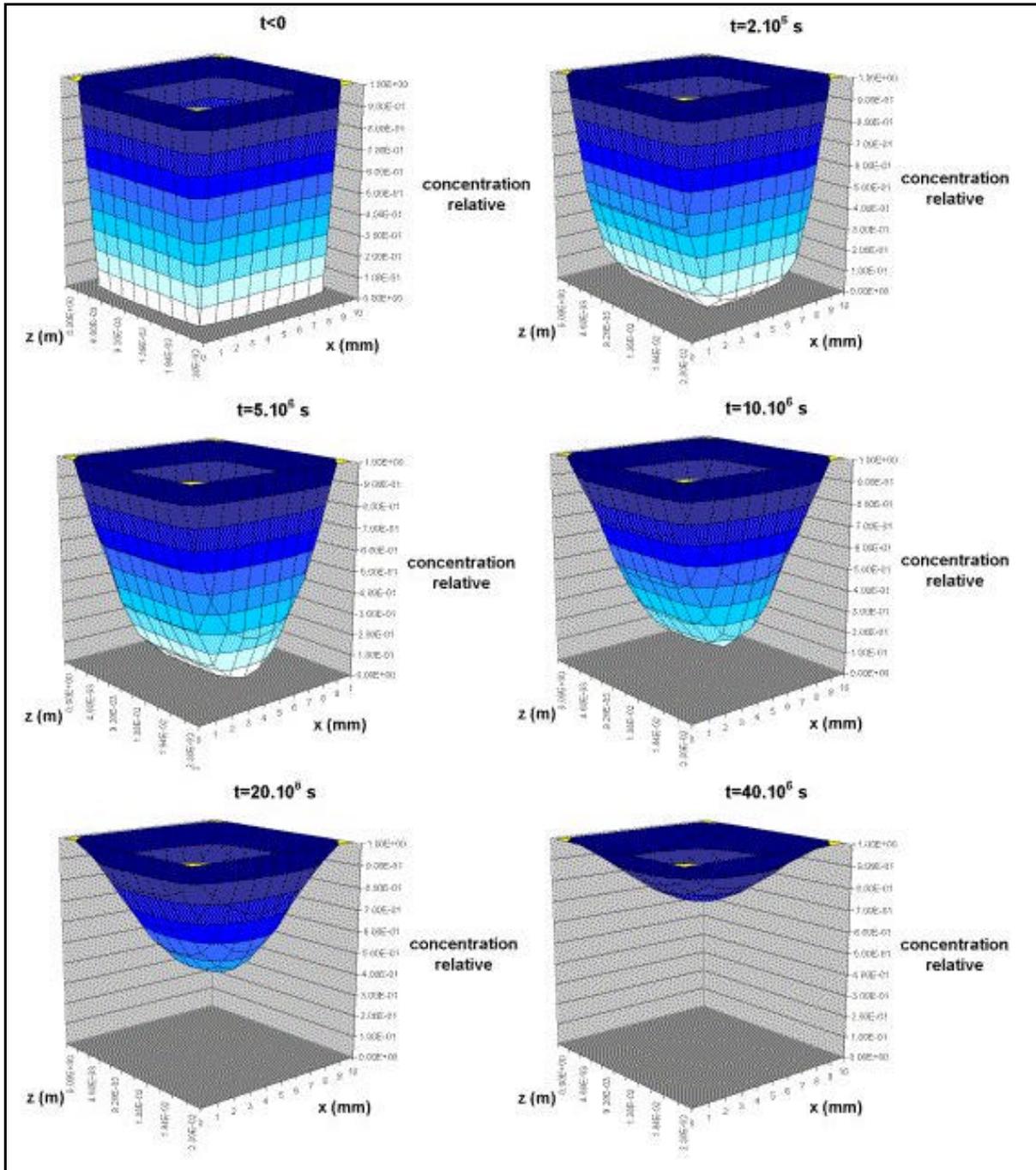


Figure A3-4: Allure du profil de concentration dans un joint de colle d'Eponal 380 au cours du temps pour une diffusion de type loi de Fick uniquement (bonne approximation du cas de l'eau distillée) avec  $D=3,75 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$ .