Capitolo 6

Analisi dinamica di piastre strumentate con sensori ed attuatori piezoelettrici

In questo capitolo si presentano e discutono alcuni modelli discreti per l'analisi delle vibrazioni flessionali di una piastra strumentata con attuatori e sensori piezoelettrici. I sensori e gli attuatori sono perfettamente incollati alle superfici superiori ed inferiori della piastra, mostrata schematicamente in figura 6.1, e possiedono elettrodi che ricoprono parzialmente o totalmente le loro facce superiore ed inferiore; collegando tali elettrodi ad opportuni circuiti elettrici esterni possono essere realizzate diverse tipologie di controllo delle vibrazioni della struttura accoppiata, come discusso in dettaglio nel prossimo capitolo. Modelli discreti di siffatta struttura accoppiata sono ottenuti mediante le formulazioni agli elementi finiti proposte nel capitolo precedente. Da essi, applicando tecniche standard di riduzione modale [75], si ottengono modelli discreti con un numero limitato di gradi di libertà, che possono essere studiati numericamente con metodi di integrazione al passo per sistemi di equazioni differenziali ordinarie. In particolare viene ricavato un modello semplificato avente un solo grado di libertà meccanico, ottenuto considerando un singolo modo di vibrazione della struttura. Il significato fisico dei parametri che compaiono nel modello semplificato viene evidenziato e discusso nella parte finale di questo capitolo. Tale modello è ripreso nel prossimo capitolo per lo studio dello smorzamento passivo delle vibrazioni di piastre mediante piezoelettrici.

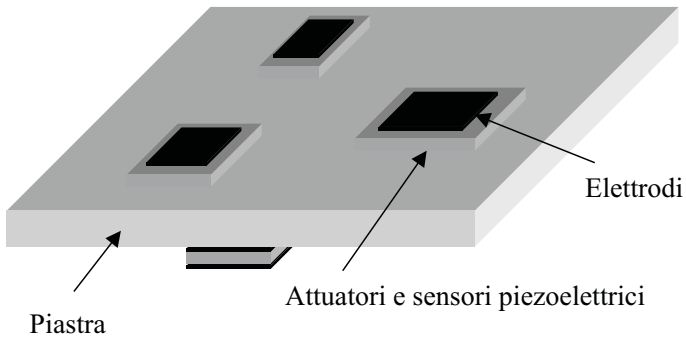

Figura 6.1: Piastra con sensori ed attuatori piezoelettrici equipaggiati con elettrodi

6.1 Modello dinamico discreto per le vibrazioni flessionali

6.1.1 Calcolo delle matrici delle masse e di rigidezza della struttura accoppiata

Il primo passo per la realizzazione di un modello dinamico discreto della struttura in figura 6.1 è quello di discretizzare il piano medio della piastra; la discretizzazione viene effettuata avendo cura che ogni elemento non contenga al suo interno tratti del contorno degli elementi piezoelettrici.

Mediante le formulazioni agli elementi finiti viste nel precedente capitolo, facilmente adattabili al caso di presenza della sola piastra o della piastra con un solo piezoelettrico su una delle due facce, sono ricavate la matrice delle masse **M** e la matrice di rigidezza **K** della struttura accoppiata; in questa fase non è considerata la presenza degli elettrodi sugli elementi piezoelettrici. Nel caso di piezoelettrici sottili rispetto alla piastra viene utilizzato l'elemento finito descritto nel paragrafo 5.1.3 mentre nel caso di piezoelettrici spessi viene utilizzato l'elemento finito descritto nel paragrafo 5.2. Non considerando per il momento lo smorzamento interno della struttura, si ottiene il seguente modello discreto:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\hat{x}}_m \\ \ddot{\hat{x}}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{mm} & K_{me} \\ K_{me}^T & K_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_m \\ \hat{x}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ -\hat{\omega} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

dove $\hat{x}_m$, $\hat{x}_e$, $\hat{f}$ e $\hat{\omega}$ denotano, rispettivamente, i gradi di libertà meccanici nodali (rotazioni ed abbassamenti), i gradi di libertà elettrici nodali nei piezoelettrici, le eventuali forze

esterne nodali e le cariche elettriche nodali. Inoltre nelle matrici a blocchi che compaiono nella (6.1), rispettivamente la matrice delle masse $\mathbf{M}$ e la matrice di rigidezza $\mathbf{K}$, i vari blocchi hanno il significato seguente: M è il minore non nullo della matrice delle masse, relativo alle sole variabili meccaniche $\hat{x}_m$, K_{mm} è la matrice di rigidezza meccanica della struttura, $-K_{ee}$ è la matrice di permettività elettrica dei piezoelettrici e K_{me} è la matrice di rigidezza di accoppiamento.

Utilizzando la formulazione dedotta nel paragrafo 5.1.3 i gradi di libertà elettrici nodali sono le differenze di potenziale nodali $\hat{v}$ tra le facce di ciascun piezoelettrico. Utilizzando la formulazione dedotta nel paragrafo 5.2 i gradi di libertà elettrici nodali sono i potenziali elettrici nodali $\hat{\eta}$ sul piano medio di ciascun piezoelettrico e i campi elettrici (cambiati di segno) nodali $\hat{\chi}$; in questo secondo caso, per uniformità di rappresentazione, con una banale trasformazione si utilizzano come gradi di libertà elettrici i potenziali nodali $\hat{\eta}$ e le differenze di potenziale nodali tra le facce dei piezoelettrici $\hat{v} = h^p\hat{\chi}$, essendo h^p lo spessore del generico piezoelettrico sulla piastra.

6.1.2 Modellazione degli elettrodi sui piezoelettrici

Per considerare la presenza di elettrodi sottili e di rigidezza meccanica trascurabile che ricoprono le facce di ciascun elemento piezoelettrico, si deve imporre nella (6.1) la condizione di equipotenzialità dei nodi ricoperti dagli elettrodi. Tale condizione implica che le differenze di potenziale nodali $\hat{v}$ siano uguali in tutti i nodi ricoperti da uno stesso elettrodo ed inoltre, nel caso si utilizzi la formulazione nel paragrafo 5.2, che i potenziali nodali $\hat{\eta}$ sul piano medio dei piezoelettrici siano anch'essi uguali fra loro in corrispondenza di tali nodi. Tali vincoli sono imposti sommando tra loro le righe e le colonne della matrice delle masse e di rigidezza corrispondenti alle diverse variabili elettriche dei nodi su ciascun elettrodo. I gradi di libertà elettrici relativi ai nodi non ricoperti da elettrodi sono invece condensati. Nel caso si utilizzi la formulazione del paragrafo 5.2, dopo aver imposto l'equipotenzialità dei nodi ricoperti dagli elettrodi, i potenziali elettrici sul piano medio degli elettrodi η sono anch'essi condensati. Di conseguenza l'equazione (6.1) diventa:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\hat{x}}_m \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{mm} & \overline{K}_{me} \\ \overline{K}_{me}^t & \overline{K}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_m \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ -q \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

dove v contiene le differenze di potenziale tra gli elettrodi di ciascun piezoelettrico mentre q contiene la carica elettrica presente sugli elettrodi superiori di ciascun piezoelettrico (sugli elettrodi inferiori è presente la carica $-q$). Il legame esistente tra q e v, per il momento

non considerato, dipende dal circuito elettrico al quale sono eventualmente connessi gli elettrodi dei piezoelettrici; in particolare quando gli elettrodi sono isolati la carica elettrica q è nulla, mentre quando gli elettrodi sono cortocircuitati la differenza di potenziale v tra gli elettrodi stessi è nulla [56].

La matrice K_{me} è trasformata nella matrice $\overline{K}_{me}$ mentre $-\overline{K}_{ee}$ è una matrice diagonale i cui elementi, strettamente positivi per le scelte adottate nella scrittura dei funzionali per il laminato tristrato piezoelettrico, sono le capacità elettriche a deformazione nel piano impedita delle porzioni di piezoelettrici ricoperte dagli elettrodi. L'equazione (6.2) è un sistema di n equazioni differenziali ordinarie in n incognite, essendo $n = n_m N_n + n_m^p N_n^p + A$, con N_n, N_n^p ed A, rispettivamente, numero di nodi costituenti la discretizzazione del piano medio del laminato, numero totale di nodi su tutti i piezoelettrici e numero di elementi piezoelettrici incollati sulla piastra; n_m e n_m^p sono, rispettivamente, il numero di gradi di libertà nodali meccanici della piastra e il numero di gradi di libertà nodali meccanici dei piezoelettrici e dipendono dalla formulazione agli elementi finiti adottata. Più specificamente, utilizzando la formulazione del paragrafo 5.1.3 $n_m = 3$ e $n_m^p = 0$; utilizzando invece la formulazione del paragrafo 5.2, $n_m = 5$ e $n_m^p = 2$. I modi di vibrazione propria della struttura accoppiata con elettrodi cortocircuitati ($v = 0$ nella (6.2)), e le relative frequenze si ottengono risolvendo la seguente equazione:

$$(\lambda^2 M - K_{mm})V_x = 0 \tag{6.3}$$

dove i valori di λ che annullano il determinante della matrice nella (6.3) sono le frequenze proprie di vibrazione, mentre i relativi autovettori nelle colonne di V_x sono i modi propri di vibrazione.

6.1.3 Riduzione modale

La risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali ordinarie (6.2) richiede un elevato onere di calcolo quando il numero di nodi con il quale si è discretizzato il piano medio della piastra è elevato. È dunque conveniente disporre di un modello con un numero di gradi di libertà limitato. Per ottenere tale modello si conduce ora un'analisi modale del sistema (6.2). A tale proposito i minori relativi alle variabili meccaniche della matrice delle masse e di rigidezza, rispettivamente M e K_{mm}, sono diagonalizzati simultaneamente in modo che si abbia:

$$V^T M V = \mathbf{I}, \qquad V^T K_{mm} V = \Lambda \tag{6.4}$$

dove V è la matrice quadrata di ordine $n - A$ contenente i modi propri di vibrazione V_x, normalizzati secondo la metrica introdotta dalla matrice delle masse $\mathbf{M}$, mentre Λ è la matrice diagonale contenente i quadrati delle pulsazioni corrispondenti a tali modi. Introducendo quindi il vettore y delle coordinate modali definito come $y = V^{-1}x_m$, la (6.2) si trasforma nell'equazione:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda & K_p \\ K_p^T & K_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

dove la riga i-esima della matrice K_p contiene i coefficienti di accoppiamento per l'i-esimo modo della struttura e relativi ad ogni piezoelettrico incollato sulla piastra mentre p contiene le forze esterne modali.

Volendo considerare uno smorzamento interno della struttura di tipo proporzionale, la (6.5) diventa:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda & K_p \\ K_p^T & K_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

dove D è la matrice diagonale di dissipazione, avente in diagonale i coefficienti di smorzamento meccanico relativi ad ogni modo della struttura accoppiata; tali coefficienti sono in genere identificati sperimentalmente.

In [29] modelli ridotti sono ottenuti supponendo che i modi ad alta frequenza abbiano un comportamento statico, cioè che siano trascurabili le forze di inerzia modali ad essi associate.

Modelli ad un numero ridotto di gradi di libertà sono invece qui ottenuti dalla (6.6) considerando soltanto alcuni modi di vibrazione della struttura e trascurando gli altri. In conseguenza solo alcune colonne della matrice V sono prese in considerazione ponendo nella (6.2) $x_m = Py$, essendo P la matrice avente per colonne le colonne di V corrispondenti ai modi propri di vibrazione che si intendono considerare; premoltiplicando infine l'equazione ottenuta per P^T si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie analogo a quello in (6.5) o (6.6) ma di dimensione ridotta, nel quale y contiene ora le coordinate dei soli modi considerati e p sono le relative forze esterne modali.

6.1.4 Modello semplificato ad un grado di libertà meccanico

Il modello più semplice ottenibile dalla (6.6) è quello che considera un solo grado di libertà meccanico, rappresentativo di un singolo modo di vibrazione di una piastra sulla quale è

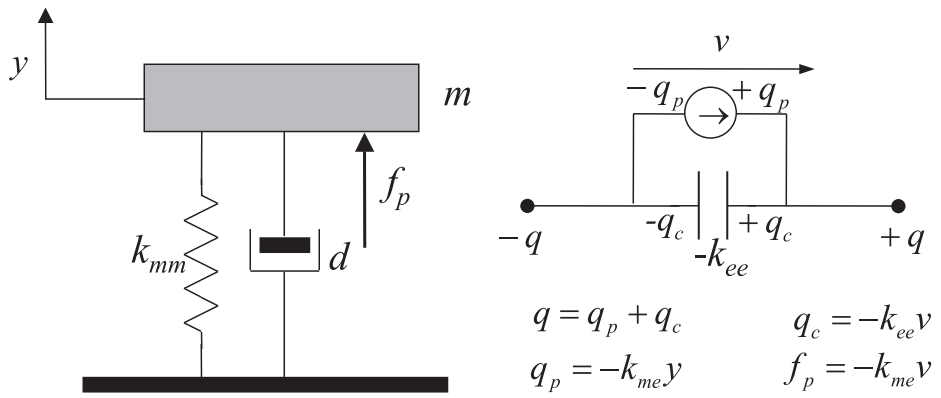

Figura 6.2: Rappresentazione schematica di un sistema meccanico ad un grado di libertà accoppiato ad un sistema elettrico

incollato un solo piezoelettrico. Per descrivere le vibrazioni libere di tale sistema le forze esterne sono considerate assenti.

Il modello semplificato si ottiene dunque inserendo in P una sola colonna della matrice V, corrispondente al modo di vibrazione della struttura accoppiata che si vuole considerare; la (6.6) si riduce allora a:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + d\dot{y} + k_{mm}y + k_{me}v &= 0 \\ k_{me}y + k_{ee}v &= -q \end{aligned} \tag{6.7}$$

dove y contiene ora la coordinata del solo modo considerato, $m = 1$ è la massa modale normalizzata, d è il coefficiente di smorzamento meccanico del modo considerato, $k_{mm} > 0$ è la rigidezza modale ad elettrodi cortocircuitati ($v = 0$), k_{me} è la rigidezza modale di accoppiamento e $-k_{ee} > 0$ è la capacità elettrica del piezoelettrico a struttura bloccata ($y = 0$); utilizzando le formulazioni agli elementi finiti riportate nel precedente capitolo il valore di $-k_{ee}$ è esattamente pari a $\overline{\varepsilon}_{33}S^p/h^p$, essendo S^p la superficie degli elettrodi ed h^p lo spessore del piezoelettrico.

Per meglio comprendere il significato fisico dei parametri che compaiono nelle (6.7) si fa riferimento alla figura 6.2, dove è riportato un sistema meccanico ad un grado di libertà accoppiato ad un sistema elettrico, il cui comportamento dinamico è descritto dalle (6.7).

La $(6.7)_1$ è dunque l'equazione di equilibrio dinamico sulla massa m mentre la $(6.7)_2$ è l'equazione di bilancio della carica elettrica sulle facce del piezoelettrico; in particolare

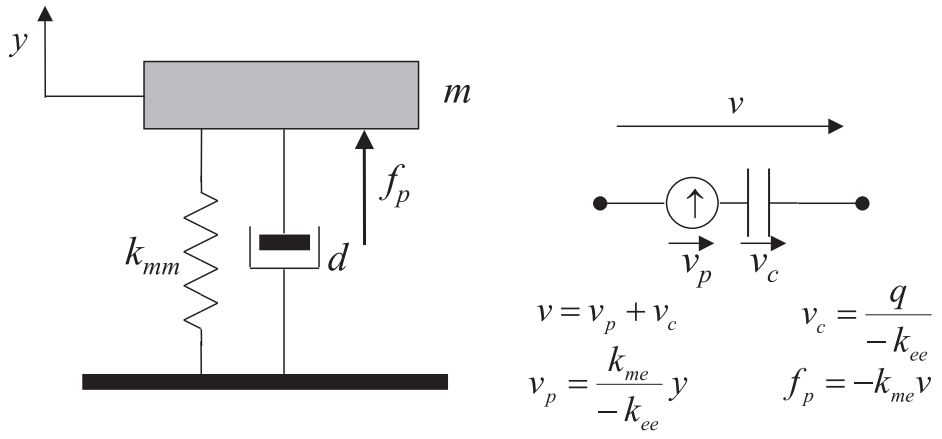

Figura 6.3: Un'altra rappresentazione di un sistema meccanico ad un grado di libertà accoppiato ad un sistema elettrico

$-k_{me}y$ è la carica di polarizzazione q_p dovuta alla deformazione meccanica nel piezoelettrico mentre $-k_{ee}v$ è la carica q_c di polarizzazione dielettrica dovuta ad una differenza di potenziale v tra i suoi elettrodi. Inoltre $f_p = -k_{me}v$ è la forza sulla massa m dovuta all'accoppiamento piezoelettrico. In particolare il piezoelettrico risulta schematizzato come un condensatore di capacità $-k_{ee}$ in parallelo con un generatore di carica $-k_{me}y$ comandato dallo spostamento modale y. La $(6.7)_2$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$v = \frac{q}{-k_{ee}} + \frac{k_{me}}{-k_{ee}} y \tag{6.8}$$

dalla quale consegue che un'altra schematizzazione possibile per il piezoelettrico è quella di un condensatore di capacità $-k_{ee}$ in serie con un generatore di tensione $(k_{me}/-k_{ee})y$ comandato dallo spostamento modale y (figura 6.3).

Tale modello ad un grado di libertà, con coefficiente di smorzamento d nullo, è stato utilizzato in [54] per lo studio dello smorzamento passivo di vibrazioni mediante piezoelettrici connessi a circuiti elettrici passivi.

Sostituendo la (6.8) nella $(6.7)_1$, si ottiene:

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + \overline{k}_{mm} y + \frac{k_{me}}{-k_{ee}} q = 0 \tag{6.9}$$

essendo $\overline{k}_{mm} = k_{mm} + k_{me}^2/(-k_{ee})$; $\nu_m^a = \overline{k}_{mm}/m$ è la pulsazione naturale ad elettrodi isolati ($q = 0$) mentre $\nu_m^c = k_{mm}/m$ è la pulsazione naturale ad elettrodi cortocircuitati ($v = 0$) relativa al modo di vibrazione considerato. Dato che k_{ee} è negativo, risulta che

$\overline{k}_{mm} > k_{mm}$ e quindi la frequenza propria della struttura accoppiata è maggiore quando gli elettrodi del piezoelettrico sono isolati rispetto a quando tali elettrodi sono cortocircuitati. Una simile considerazione puó essere fatta sull'espressione della capacità del piezoelettrico; è stato detto che a struttura bloccata ($y = 0$) tale capacità è pari a $-k_{ee}$. Mantenendo invece la struttura libera ed in condizioni statiche dalla $(6.7)_1$ si ricava:

$$y = \frac{-k_{me}}{k_{mm}} v \tag{6.10}$$

che sostituita nella $(6.7)_2$ fornisce la relazione:

$$-\overline{k}_{ee} v = -k_{ee} + \frac{k_{me}^2}{k_{mm}} v = q \tag{6.11}$$

essendo $-\overline{k}_{ee} = -k_{ee} + (k_{me}^2/k_{mm})$ il valore della capacità del piezoelettrico quando la struttura sulla quale è incollato è libera; risulta $-\overline{k}_{ee} > -k_{ee}$.

Si può ora introdurre il coefficiente di accoppiamento piezoelettrico modale $\boldsymbol{\kappa}$, che gioca un ruolo determinante nella descrizione dello smorzamento di vibrazioni mediante piezoelettrici connessi a reti elettriche passive (smorzamento passivo), trattato diffusamente nel prossimo capitolo. A tale proposito occorre definire un legame tra v e q, imposto dalla presenza di un circuito elettrico generico collegato ai capi degli elettrodi del piezoelettrico. Si ipotizza che tale legame sia espresso dalla seguente relazione:

$$\mathcal{D}q + v = 0 \tag{6.12}$$

dove $\mathcal{D}$ è un operatore lineare differenziale rispetto alla variabile tempo t; la (6.12) è l'equazione di Kirchhoff del circuito elettrico esterno nel quale entra una corrente $-dq/dt$ e ai cui capi esiste una differenza di potenziale v. Nel caso di circuito RCL si ha $\mathcal{D}q = L\ddot{q} + R\dot{q} + 1/Cq$ mentre nel caso di circuito contenente solo una resistenza R si ha $\mathcal{D}q = R\dot{q}$; le risposte dinamiche della struttura accoppiata ottenibili con questi due circuiti sono analizzate in dettaglio nel prossimo capitolo.

Sostituendo nella (6.12) la (6.8) si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + d\dot{y} + \overline{k}_{mm} y + \frac{k_{me}}{-k_{ee}} q = 0 \\ \mathcal{D}q + \frac{1}{-k_{ee}} q + \frac{k_{me}}{-k_{ee}} y = 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

che descrive la dinamica del sistema elettromeccanico accoppiato.

6.1.5 Modello semplificato adimensionale

Per ottenere una versione adimensionale delle (6.13) si fanno le seguenti posizioni:

$$t = \tilde{t}T \qquad y = \tilde{y}Y \qquad q = \tilde{q}Q \tag{6.14}$$

dove le grandezze maiuscole sono adimensionali mentre quelle con la tilde sono le relative scale. Sostituendo le (6.14) nelle (6.13) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\ddot{Y} + \frac{d\tilde{t}}{m}\dot{Y} + \frac{\overline{k}_{mm}\tilde{t}^2}{m}Y + \frac{k_{me}}{-k_{ee}}\frac{\tilde{t}^2}{m}\frac{\tilde{q}}{\tilde{y}}Q = 0 \\ &\tilde{\mathcal{D}}Q + \frac{C}{-k_{ee}}Q + \frac{k_{me}}{-k_{ee}}C\frac{\tilde{y}}{\tilde{q}}Y = 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

dove le derivate sono ora intese rispetto al tempo adimensionale T, C ha le dimensioni di una capacità e dipende dalla particolare forma di $\mathcal{D}$ ed infine $\tilde{\mathcal{D}}$ è adimensionale. La scala dei tempi $\tilde{t}$ è scelta in modo che il coefficiente di Y nella $(6.15)_1$ sia unitario; di conseguenza si ha:

$$\tilde{t} = \frac{1}{\nu_m^a} = \sqrt{\frac{m}{\overline{k}_{mm}}} \tag{6.16}$$

Resta ora da fissare il rapporto $\tilde{y}/\tilde{q}$; per far questo si impone che il coefficiente di Q nella $(6.15)_1$ sia uguale al coefficiente della Y nella $(6.15)_2$. Ne consegue che:

$$\left(\frac{\tilde{q}}{\tilde{y}}\right)^2 = \frac{mC}{\tilde{t}^2} \tag{6.17}$$

Sostituendo infine la (6.16) e la (6.17) nelle (6.15) si ottiene il modello adimensionale:

$$\begin{aligned} &\ddot{Y} + 2\boldsymbol{\zeta}_m\dot{Y} + Y + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}Q = 0 \\ &\tilde{\mathcal{D}}Q + \boldsymbol{\gamma}^2 Q + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}Y = 0 \end{aligned} \tag{6.18}$$

essendo:

$$\boldsymbol{\zeta}_m = \frac{d}{2\sqrt{m\,\overline{k}_{mm}}} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\frac{C}{-k_{ee}}} \qquad \boldsymbol{\kappa} = \frac{k_{me}}{\sqrt{-k_{ee}\overline{k}_{mm}}} \tag{6.19}$$

Con tali scelte il modello (6.18) ammette una formulazione variazionale ed in particolare risulta definita l'energia di accoppiamento $1/2\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}YQ$. Il coefficiente $\boldsymbol{\zeta}_m$ è il coefficiente di dissipazione meccanica, $\boldsymbol{\gamma}$ dipende dal particolare circuito elettrico considerato mentre la $(6.19)_3$ è la definizione del coefficiente di accoppiamento modale $\boldsymbol{\kappa}$. Tale coefficiente dipende esclusivamente dalla struttura accoppiata piastra-piezoelettrico e non dal circuito elettrico scelto; dalla sua definizione risulta $-1 < \boldsymbol{\kappa} < 1$.

Il coefficiente adimensionale $\boldsymbol{\kappa}$ misura l'efficienza di conversione di energia meccanica in energia elettrica e viceversa, relativa al modo di vibrazione della struttura accoppiata considerato; esso è strettamente legato alle pulsazioni modali ν_m^a e ν_c^c, infatti vale la seguente relazione:

$$\boldsymbol{\kappa} = \sqrt{\frac{\nu_m^{a\,2} - \nu_m^{c\,2}}{\nu_m^{a\,2}}} = \sqrt{\frac{\overline{k}_{mm} - k_{mm}}{\overline{k}_{mm}}} \tag{6.20}$$

Utilizzando la (6.20), il coefficiente di accoppiamento modale $\boldsymbol{\kappa}$ di una piastra attuata con un piezoelettrico può essere valutato sperimentalmente misurando la frequenza del modo di vibrazione considerato sia con gli elettrodi isolati che cortocircuitati. Il valore di $\boldsymbol{\kappa}$ può essere altresí misurato valutando la capacità del piezoelettrico quando la struttura è bloccata e quando è libera; risulta infatti:

$$\boldsymbol{\kappa} = \sqrt{\frac{-\overline{k}_{ee} + k_{ee}}{-\overline{k}_{ee}}} \tag{6.21}$$

Il modello semplificato appena discusso si estende in maniera ovvia al caso di piastra aventi più piezoelettrici incollati sulle sue facce; in particolare, una volta scelto il modo proprio che si intende considerare, si può definire un coefficiente di accoppiamento modale per ogni piezoelettrico.

Nella prossima sezione la teoria qui illustrata è applicata ad un caso specifico di struttura accoppiata.

6.1.6 Analisi dei parametri modali di una piastra a mensola attuata

In questo paragrafo il modello semplificato prima descritto viene applicato al caso della piastra a mensola illustrata in figura (6.4); in particolare si effettua un' analisi dei parametri modali ν_m^a, k_{mm}, k_{me}, $-k_{ee}$ e $\boldsymbol{\kappa}$ relativi al primo modo di vibrazione di tale struttura. La mensola considerata è costituita di acciaio ($E = 210$GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$Kg/m^3), è incastrata lungo il lato $x_1 = 0$ e ha dimensioni $300 \times 60 \times 3$mm. Una piastrina piezoelettrica di dimensioni nel piano 50×60mm e densità $\rho^s = 7000$Kg/m^3 è incollata in corrispondenza del lato incastrato della mensola; i parametri materiali del piezoelettrico considerato sono quelli riportati in tabella 5.1.

L'analisi è condotta considerando differenti valori per lo spessore del piezoelettrico, da 0.4mm fino a 3mm. Le analisi sono condotte utilizzando i modelli proposti nei paragrafi 4.1 (modello semplificato) e 4.2 (modello raffinato) e le corrispondenti formulazioni agli

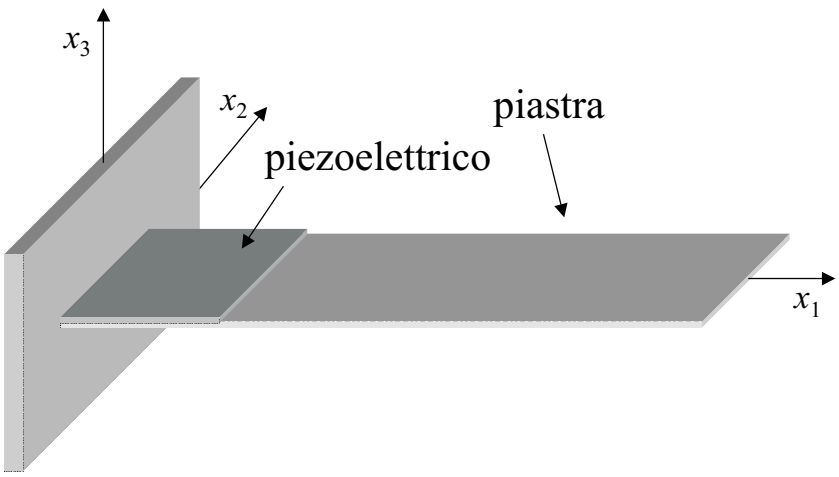

Figura 6.4: Rappresentazione schematica di una piastra a mensola attuata mediante una piastrina piezoelettrica

elementi finiti nei paragrafi 5.1.3 e 5.2; il confronto tra i risultati derivanti dai due differenti modelli fornisce valide indicazioni circa il campo di applicabilità del modello semplificato. I grafici appresso riportati si riferiscono ad una massa modale pari a 1Kg.

In figura 6.5 è diagrammata la frequenza di vibrazione relativa primo modo della struttura rispetto al rapporto σ tra lo spessore del piezoelettrico e lo spessore della piastra, mentre in figura 6.6 è riportato il valore di k_{mm} in funzione di σ. Sia la figura 6.5 che la 6.6 mostrano che la rigidezza modale della struttura è sottostimata dalla teoria semplificata; essa infatti non considera la rigidezza flessionale del piezoelettrico che, proporzionale al cubo dello spessore di quest'ultimo, è importante quando σ si avvicina all'unità. Per $\sigma = 1$ la differenza relativa per la rigidezza k_{mm} stimata secondo le due differenti teorie è circa il 20%. In figura 6.7 è riportata la rigidezza modale di accoppiamento in funzione di σ. Sia la modellazione semplificata che quella raffinata mostrano che k_{me} decresce con l'aumentare di σ; Per valori di σ maggiori di 0.6 k_{me} risulta sovrastimato dalla teoria semplificata. In figura (6.8) si riporta la capacità elettrica $-k_{ee}$ del piezoelettrico in funzione di σ; tale grandezza è stimata in modo identico da entrambe le teorie e risulta pari a $\overline{\varepsilon}^s_{33} S^p / h^s$. Infine, in figura (6.9) è riportato il coefficiente modale di accoppiamento $\boldsymbol{\kappa}$ in funzione di σ; il valore di $\boldsymbol{\kappa}$ risulta sovrastimato dal modello semplificato quando $\sigma > 0.5$. È inoltre utile osservare che $\boldsymbol{\kappa}$, secondo il modello raffinato, presenta un massimo per $\sigma = 0.53$; un massimo per $\boldsymbol{\kappa}$ è previsto anche dal modello semplificato, in corrispondenza ad un valore di σ maggiore di quelli considerati nel grafico. Tali considerazioni sul coefficiente $\boldsymbol{\kappa}$ sono

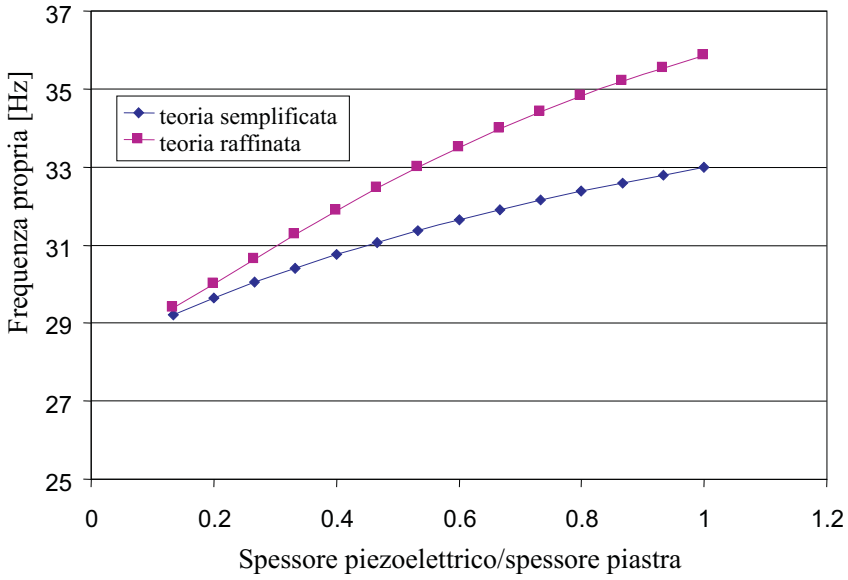

Figura 6.5: Frequenza del primo modo di vibrazione in funzione di σ

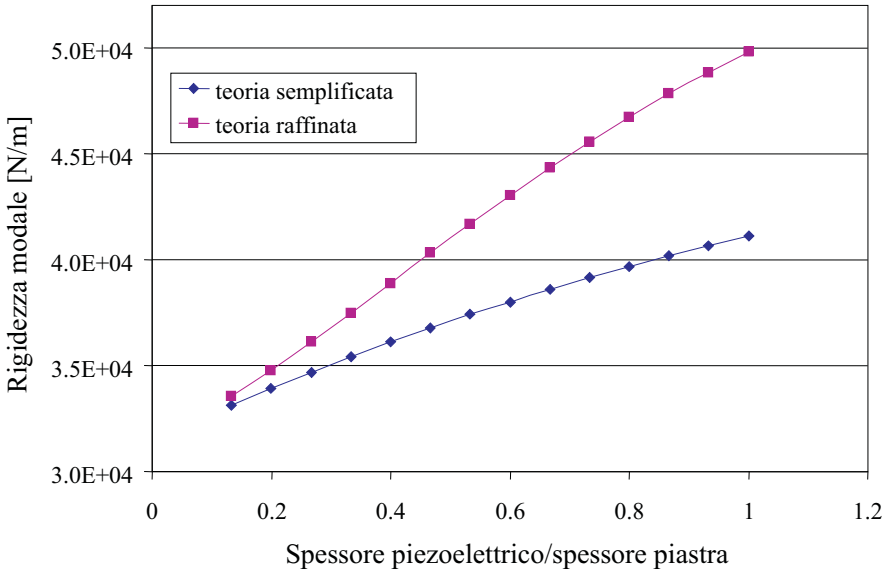

Figura 6.6: Rigidezza modale k_{mm} in funzione di σ

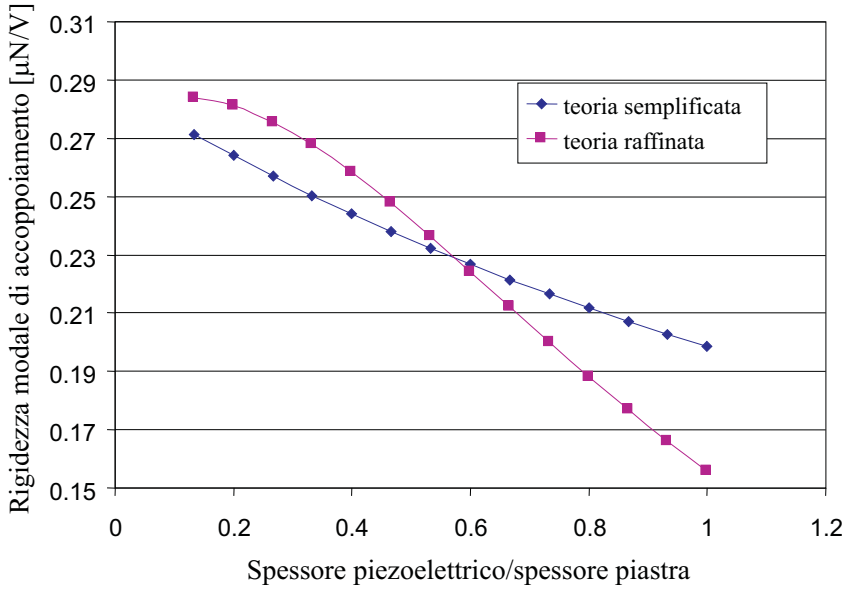

Figura 6.7: Rigidezza modale di accoppiamento k_{me} in funzione di σ

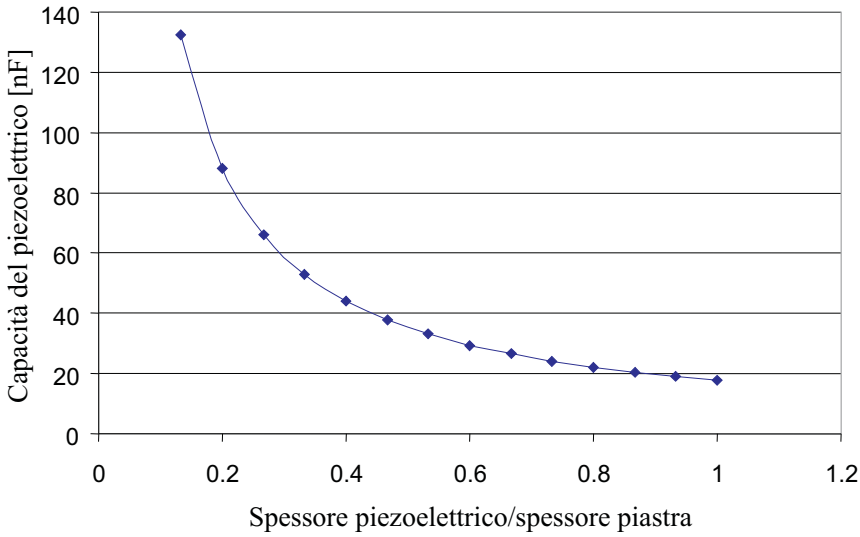

Figura 6.8: Capacità del piezoelettrico $-k_{ee}$ in funzione di σ

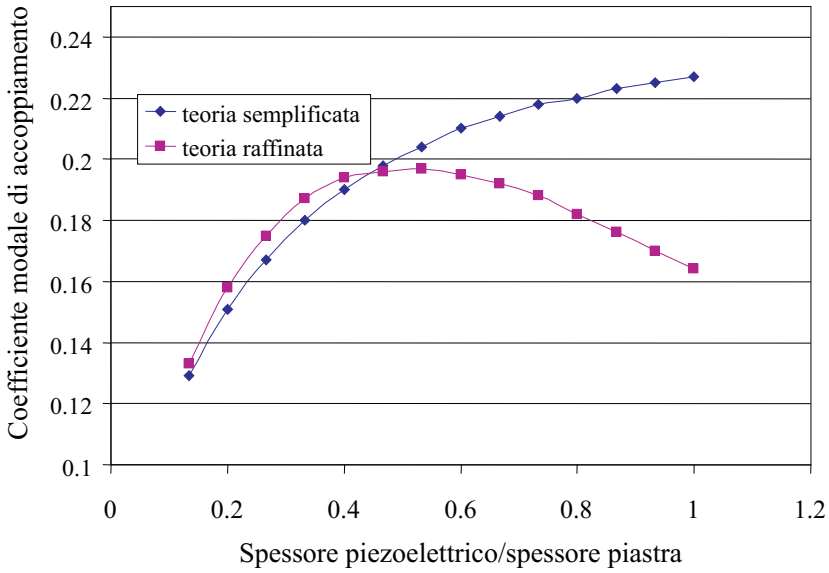

Figura 6.9: Coefficiente modale di accoppiamento in funzione di σ

utili nel capitolo successivo, nel quale si mostra come lo smorzamento passivo di vibrazioni ottenibile mediante l'utilizzo di un piezoelettrico connesso ad un circuito elettrico passivo sia strettamente legato a $\boldsymbol{\kappa}$.