Capitolo 5

Formulazioni agli elementi finiti per un laminato tristrato piezoelettrico

Come visto nel precedente capitolo, esistono in letteratura moltissimi modelli di laminato piezoelettrico; tutti questi modelli sono matematicamente descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali in due o tre dimensioni. Per risolvere il problema al contorno associato a tali equazioni per una geometria qualsiasi del laminato e per generiche condizioni di carico e di vincolo, è necessario ricorrere ad opportuni metodi numerici. Gli approcci numerici utilizzati nei vari lavori sui laminati piezoelettrici sono molteplici; ad esempio in [4] si applica il metodo delle differenze finite, che trasforma le equazioni differenziali alle derivate parziali in equazioni algebriche sostituendo alle derivate rapporti incrementali finiti. In [31, 105] si utilizza il metodo di Rayleigh-Ritz, nel quale le funzioni incognite sono approssimate mediante la sommatoria di opportune funzioni di forma moltiplicate per coefficienti da determinare; i coefficienti moltiplicativi sono quindi determinati sostituendo le rappresentazioni delle funzioni incognite in un funzionale dell'energia da minimizzare rispetto a tali coefficienti. Il ben noto metodo degli elementi finiti è comunque l'approccio più comunemente utilizzato per ottenere soluzioni numeriche delle equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono i differenti modelli di laminato piezoelettrico. In [95, 58] sono proposte formulazioni tridimensionali agli elementi finiti per il problema del laminato, che tendono a sovrastimare la rigidezza del laminato stesso; in [95] sono aggiunti gradi di libertà interni a ogni elemento finito solido atti a correggere questo difetto; i gradi di libertà interni sono poi condensati staticamente. In [93] si impiega un elemento finito quadrilatero a quattro nodi per flessione alla Kirchhoff-Love. In [13] si propone una formulazione agli elementi finiti basata su un elemento quadrangolare a otto nodi; il funzionale dell'energia potenziale per il laminato è ottenuto assumendo

una rappresentazione delle componenti del vettore spostamento lineare nello spessore del laminato e considerando termini non lineari di deformazione. In [30] si presenta una formulazione ad elementi finiti per la teoria con effetto "zig-zag" riportata nello stesso lavoro.

Nel presente capitolo sono dedotte formulazioni originali agli elementi finiti per le teorie di laminato esposte nei paragrafi 4.1 e 4.2. Più esattamente sono dedotte tre differenti formulazioni per il modello di laminato proposto nel paragrafo 4.1 ed una formulazione per il modello raffinato del paragrafo 4.2.

Le differenti formulazioni ottenute sono quindi applicate alla risoluzione numerica dei problemi campione elencati nel paragrafo 4.3.1, la cui soluzione analitica è stata calcolata. I risultati numerici sono opportunamente confrontati con quelli analitici in modo da valutare le prestazioni delle differenti formulazioni.

Per una descrizione generale del metodo degli elementi finiti si rimanda ai testi [55, 107, 11].

5.1 Formulazioni agli elementi finiti per il modello proposto nel paragrafo 4.1

Sono qui proposte tre differenti formulazioni agli elementi finiti per il modello di laminato tristrato piezoelettrico proposto nel paragrafo 4.1. Tali formulazioni utilizzano tutte l' elemento finito piano, quadrangolare, isoparametrico a quattro nodi, rappresentato in figura 5.1.

Le coordinate globali $\mathbf{x}$ relative a ciascun elemento fisico sono legate alle coordinate locali $\boldsymbol{\xi}$ relative all'elemento genitore attraverso la mappa isoparametrica bilineare Ψ, così definita:

$$\mathbf{x} = \Psi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{4}[1 + (\xi_1)_j \xi_1][1 + (\xi_2)_j \xi_2]\mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \mathbf{x}_j \tag{5.1}$$

essendo $\mathbf{x}_j$ le coordinate globali dei nodi dell'elemento fisico e $\boldsymbol{\xi}_j$ le coordinate dei nodi dell'elemento genitore; qui e nel seguito ci si riferisce ad un elemento genitore quadrato di semilato unitario e dunque $\xi_1 \in [-1, 1]$ e $\xi_2 \in [-1, 1]$. Essendo la mappa in (5.1) bilineare, i contorni dell'elemento genitore sono mappati in altrettanti segmenti che definiscono i contorni dell'elemento fisico. In figura 5.2 è riportato il diagramma della funzione di forma Ψ^1.

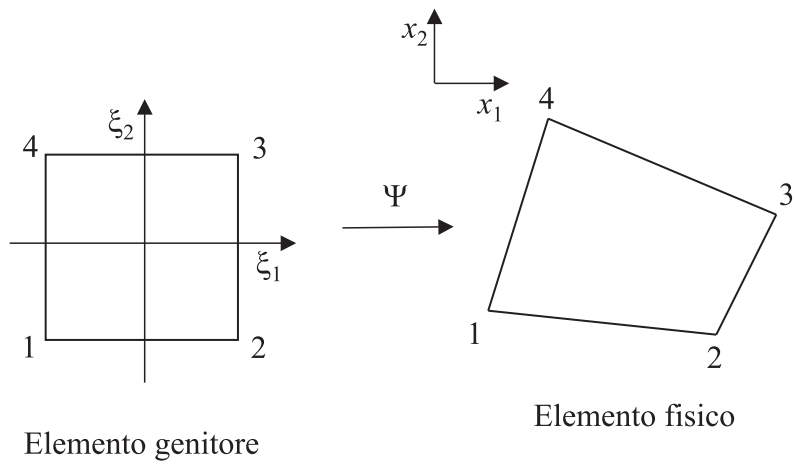

Figura 5.1: Elemento isoparametrico a quattro nodi

Elementi finiti isoparametrici aventi contorni curvilinei possono essere ottenuti aumentando il numero di nodi relativi a ciascun elemento; ad esempio impiegando un elemento quadrangolare ad otto nodi ed appropriate funzioni interpolanti cubiche [39].

Alla trasformazione (5.1) è associata la seguente matrice jacobiana, che lega le derivate eseguite rispetto alle coordinate locali alle derivate eseguite rispetto alle coordinate globali:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{J}(\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

In tal modo si ha:

$$da = \det[\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 \, d\xi_2 \tag{5.3}$$

Le tre formulazioni qui presentate si differenziano fra loro a seconda del funzionale sul quale sono basate e degli schemi di interpolazione adottati per le varie incognite da cui dipende tale funzionale.

5.1.1 I formulazione agli elementi finiti per il modello proposto nel paragrafo 4.1

Questa prima formulazione agli elementi finiti è basata sul funzionale dell'energia potenziale totale (4.17) per il laminato tristrato piezoelettrico, nel quale sono sostituite le relazioni di vincolo sugli spostamenti (4.4); ponendo inoltre

$$\chi^s h^s = v^s, \qquad \chi^i h^i = v^i \tag{5.4}$$

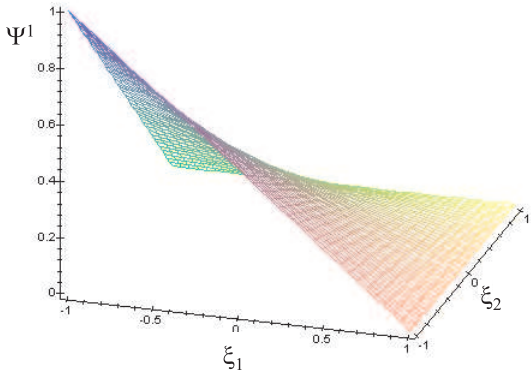

Figura 5.2: Diagramma della funzione di forma bilineare Ψ^1

in (4.17), il funzionale dell'energia potenziale viene a dipendere dalle seguenti cinque funzioni incognite scalari: lo spostamento trasversale w, le rotazioni φ_1 e φ_2 delle fibre trasversali della piastra, le differenza di potenziale v^s tra le facce $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{V}^+$ del piezoelettrico superiore e la differenza di potenziale v^i tra le facce $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{S}^-$ del piezoelettrico inferiore; tali incognite costituiscono le incognite nodali dell'elemento finito, come illustrato in figura 5.3.

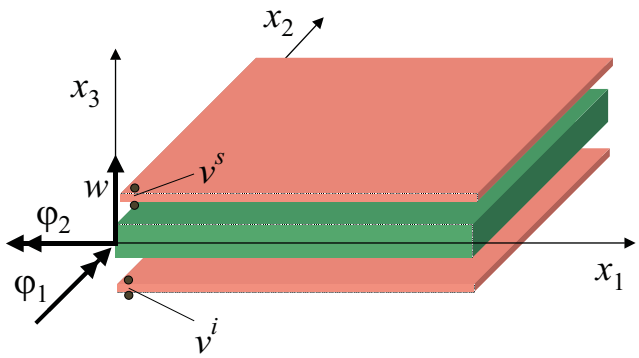

Figura 5.3: Rappresentazione schematica delle incognite nodali

In ciascun elemento i campi incogniti sono ricostruiti interpolando le incognite nodali secondo i seguenti schemi:

$$w = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{w}_j \qquad\qquad \boldsymbol{\varphi} = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$$

$$v^s = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{v}_j^s \qquad\qquad v^i = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{v}_j^i \tag{5.5}$$

essendo $\hat{w}_j$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$=[$(\hat{\varphi}_1)_j$,$(\hat{\varphi}_2)_j$], $\hat{v}_j^s$ e $\hat{v}_j^i$ le cinque incognite relative al nodo j del generico elemento. Definiti gli schemi di interpolazione per le variabili nodali, le (5.5) sono sostituite all'interno del funzionale dell'energia potenziale totale; l'integrale risultante viene eseguito per via numerica su ogni elemento, adottando il metodo di integrazione di Gauss. Si ottiene così il funzionale dell'energia potenziale discreto per ogni elemento, funzione delle incognite nodali, la cui variazione prima fornisce il sistema algebrico lineare:

$$\begin{pmatrix} K_{ww} & K_{w\varphi} & 0 & 0 \\ K_{w\varphi}^T & K_{\varphi\varphi} & K_{\varphi v^s} & K_{\varphi v^i} \\ 0 & K_{\varphi v^s}^T & K_{v^s v^s} & 0 \\ 0 & K_{\varphi v^i}^T & 0 & K_{v^i v^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{v}^s \\ \hat{v}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{\mathbf{m}} \\ -\hat{\omega}^s \\ -\hat{\omega}^i \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

con:

$$(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

In (5.6) $\hat{w}$, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$, $\hat{v}^s$ e $\hat{v}^i$ sono vettori colonna contenenti le incognite relative ai quattro nodi del generico elemento; $\hat{q}$, $\hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\omega}^s$ e $\hat{\omega}^i$ contengono, rispettivamente, i carichi trasversali, le coppie e le cariche elettriche superficiali sui quattro nodi del generico elemento; in (5.6) la matrice di rigidezza dell'elemento è espressa in termini di vari blocchi, dove i blocchi fuori diagonale principale sono dovuti all'accoppiamento esistente tra le corrispondenti variabili. Le matrici di rigidezza relative ad ogni elemento e il vettore dei carichi esterni sono quindi assemblati secondo procedure standard, in modo da ottenere la matrice di rigidezza e il vettore dei carichi relativi all'intera struttura. Le procedure di assemblaggio, l'imposizione dei vincoli esterni e l'inversione della matrice di rigidezza assemblata sono svolte dal programma FEAP6, nelle cui librerie è stato inserito il codice di implementazione dell'elemento finito qui descritto, indicato con la sigla Q4DF, e di quelli descritti nei due paragrafi seguenti.

Nella presente formulazione ed in quelle contenute nei successivi due paragrafi la matrice delle masse relativa a ciascun elemento è calcolata utilizzando il funzionale dell'energia cinetica (4.80), nel quale sono sostituite le condizioni di vincolo (4.4); le tre funzioni incognite scalari da cui dipende il funzionale dell'energia cinetica sono discretizzate secondo il seguente schema:

$$\dot{w} = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \dot{\hat{w}}_j \qquad\qquad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}_j \tag{5.8}$$

La matrice delle masse globale si ottiene assemblando le matrici delle masse di ogni elemento, calcolate integrando numericamente il funzionale dell'energia cinetica e facendo la variazione prima rispetto alle incognite nodali.

È ben noto che la formulazione agli elementi finiti del problema flessionale di piastra di Reissner-Mindlin, ottenuta discretizzando il funzionale dell'energia potenziale totale con funzioni interpolanti bilineari conduce al problema del "locking" [39, 55, 11]. Tale problema, presente anche nella formulazione agli elementi finiti del modello di Timoshenko per travi in flessione, è dovuto alla particolare natura matematica del funzionale dell'energia potenziale relativo alla piastra in flessione nel modello di Reissner-Mindlin; in particolare l'energia flessionale della piastra in (4.17) è proporzionale al cubo dello spessore h della piastra mentre l'energia associata allo scorrimento è proporzionale ad h. Questo fatto conduce a problemi numerici quando lo spessore della piastra tende a zero. In tale limite il termine legato all'energia di scorrimento impone il vincolo di Kirchhoff $\boldsymbol{\varphi} = -\nabla w$; utilizzando per w e $\boldsymbol{\varphi}$ schemi di interpolazioni identici ed indipendenti fra loro, tale vincolo non può essere evidentemente soddisfatto in quanto lo schema di interpolazione per ∇w è meno ricco di quello per $\boldsymbol{\varphi}$. In conseguenza, nel limite $h \to 0$, il contributo associato all'energia di taglio diventa predominante su quello associato all'energia flessionale e la soluzione numerica si discosta molto da quella analitica. Metodi per ovviare al problema del "locking" sono impiegati nelle formulazioni presentate nei successivi due paragrafi.

5.1.2 II formulazione agli elementi finiti per il modello proposto nel paragrafo 4.1

Un metodo semplice per ovviare al problema del "locking" 'e quello di utilizzare un'integrazione numerica ridotta per il termine energetico legato allo scorrimento [39]; in tal modo si riduce l'influenza di tale termine rispetto a quello legato alla flessione nel modello discreto. La formulazione agli elementi finiti dedotta in questo paragrafo è basata sullo stesso funzionale e sullo stesso schema di interpolazione di quello impiegato nel paragrafo precedente per l'elemento Q4DF. Il termine di energia flessionale è integrato utilizzando 2×2 punti di Gauss mentre il termine di energia legata allo scorrimento è integrato utilizzando un solo punto di Gauss. L'elemento finito così ottenuto è indicato con la sigla Q4DR.

5.1.3 III formulazione agli elementi finiti per il modello proposto nel paragrafo 4.1

In questo paragrafo viene riportata la terza formulazione agli elementi finiti per il modello di laminato tristrato proposto nel paragrafo 4.1. In questo caso il problema del "locking" viene superato utilizzando delle tecniche più sofisticate rispetto alla semplice integrazione ridotta. In particolare la presente formulazione fa utilizzo del funzionale misto (4.37), nel quale sono sostituite le relazioni di vincolo (4.4) e le (5.4); in tale funzionale il taglio risultante nello spessore $\boldsymbol{\tau}$, corrispondente a due incognite scalari, compare come variabile indipendente accanto alle variabili w, $\boldsymbol{\varphi}$, v^s e v^i. L'utilizzo di un funzionale misto consente di adottare schemi di interpolazione differenti per le variabili cinematiche e per il taglio; utilizzando per il taglio uno schema di interpolazione meno ricco rispetto a quello usato per le altre variabili si riduce l'influenza dell'energia associata allo scorrimento, responsabile del "locking". Inoltre la variabile w viene espressa in termini delle rotazioni nodali $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$ oltre che degli abbassamenti nodali w_j ("linking"). Infine lo schema di interpolazione per le rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$ è arricchito legando $\boldsymbol{\varphi}$ a quattro gradi di libertà interni di rotazione $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j^b$ oltre che alle rotazioni nodali $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$. Tali accorgimenti sono adottati in [6, 9] nella realizzazione di un elemento finito per piastra elastica modellata alla Reissner-Mindlin, in [7] nella realizzazione di un elemento finito per piastra piezoelettrica modellata alla Reissner-Mindlin e in [8] nella realizzazione di un elemento finito per l'analisi di un laminato elastico.

Gli schemi di interpolazione per le sette funzioni incognite relative a ciascun elemento sono così scelti:

$$
\begin{aligned}
w &= \textstyle\sum_{j=1}^4 N_{ww}^j \hat{w}_j + \sum_{j=1}^4 N_{w\varphi}^j (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{j+1} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j) \cdot \mathbf{t}_j \\
\boldsymbol{\varphi} &= \textstyle\sum_{j=1}^4 N_{\varphi\varphi}^j \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j + \sum_{j=1}^4 N_{\varphi\varphi^b}^j \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j^b \\
v^s &= \textstyle\sum_{j=1}^4 N_{v^s v^s}^j \hat{v}_j^s \\
v^i &= \textstyle\sum_{j=1}^4 N_{v^i v^i}^j \hat{v}_j^i \\
\boldsymbol{\tau} &= \textstyle\sum_{j=1}^4 N_{\tau\tau}^j \hat{\boldsymbol{\tau}}_j
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Nelle (5.9) N_w^j, $N_{\varphi\varphi}^j$, $N_{v^s v^s}^j$ e $N_{v^i v^i}^j$ sono le funzioni bilineari standard Ψ^j. $N_{w\varphi}^j$ sono le funzioni di "linking" che legano gli abbassamenti w alle rotazioni nodali $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$; in tale maniera il campo di interpolazione di w viene arricchito per poter soddisfare il vincolo di

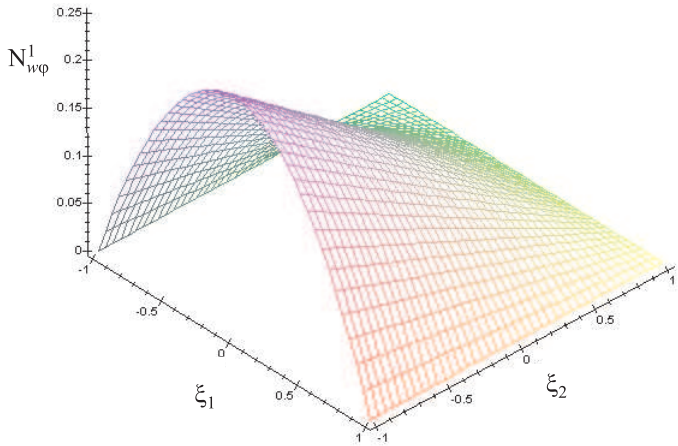

Figura 5.4: Diagramma della funzione di "linking" $N^1_{w\varphi}$

Kirchhoff $\boldsymbol{\varphi} + \nabla w = 0$ quando h tende a zero. $N^j_{w\varphi}$ sono scelte in modo che si abbia [6]:

$$(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) \cdot \mathbf{t}_j = \text{costante} \qquad \text{su} \quad e_j \quad (j = 1..4) \tag{5.10}$$

essendo $(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) \cdot \mathbf{t}_j$ lo scorrimento lungo la tangente $\mathbf{t}_j$ al lato e_j di ciascun elemento. Si assume che e_j sia il lato compreso tra i nodi j e $j+1$, essendo i nodi di ciascun elemento numerati in senso antiorario come mostrato in figura 5.1; si assume inoltre che $\mathbf{t}_j$ è orientato dal nodo j verso il nodo $j+1$. Con queste convenzioni le funzioni di "linking" $N^j_{w\varphi}$ hanno la seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} N^1_{w\varphi} \\ N^2_{w\varphi} \\ N^3_{w\varphi} \\ N^4_{w\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-\xi_1^2)(1-\xi_2) \\ (1+\xi_1)(1-\xi_2^2) \\ (1-\xi_1^2)(1+\xi_2) \\ (1-\xi_1)(1-\xi_2^2) \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

In figura 5.4 è riportato il diagramma di $N^1_{w\varphi}$.

$N^j_{\varphi\varphi^b}$ sono le funzioni che legano le rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$ in ogni elemento ai quattro gradi interni di rotazione $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^b_j$, ed hanno la seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} N^1_{\varphi\varphi^b} \\ N^2_{\varphi\varphi^b} \\ N^3_{\varphi\varphi^b} \\ N^4_{\varphi\varphi^b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \Gamma \tag{5.12}$$

essendo $\Gamma = (1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)$ la funzione a bolla, il cui grafico è riportato in figura 5.5.

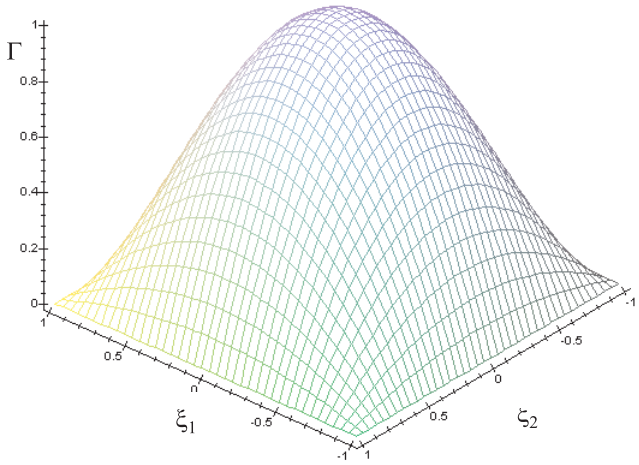

Figura 5.5: Diagramma della funzione a "bolla" Γ

Infine $N_{\tau\tau}$ sono le funzioni di interpolazione del taglio e sono scelte nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} N^1_{\varphi\varphi^b} \\ N^2_{\varphi\varphi^b} \\ N^3_{\varphi\varphi^b} \\ N^4_{\varphi\varphi^b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

L'elemento così costruito è indicato nel seguito con la sigla Q4M. Il problema discretizzato dell'equilibrio statico ottenuto con questa formulazione, per ciascun elemento, ha la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{w\tau} \\ 0 & K_{\varphi\varphi} & K_{\varphi v^s} & K_{\varphi v^i} & K_{\varphi\varphi^b} & K_{\varphi\tau} \\ 0 & K^T_{\varphi v^s} & K_{v^s v^s} & 0 & K_{v^s\varphi^b} & 0 \\ 0 & K^T_{\varphi v^i} & 0 & K_{v^i v^i} & K_{v^i\varphi^b} & 0 \\ 0 & K^T_{\varphi\varphi^b} & K^T_{v^s\varphi^b} & K^T_{v^i\varphi^b} & K_{\varphi^b\varphi^b} & K_{\varphi^b\tau} \\ K^T_{w\tau} & K^T_{\varphi\tau} & 0 & 0 & K^T_{\varphi^b\tau} & K_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{v}^s \\ \hat{v}^i \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^b \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{\mathbf{m}} \\ -\hat{\omega}^s \\ -\hat{\omega}^i \\ \hat{\mathbf{m}}^b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

essendo:

$$(\hat{\boldsymbol{\varphi}}^b) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}^b_1 \\ \hat{\varphi}^b_2 \end{pmatrix} \qquad (\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{m}}^b = \begin{pmatrix} \hat{m}^b_1 \\ \hat{m}^b_2 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

con $\hat{m}^b_1$ e $\hat{m}^b_2$ i vettori colonna contenenti le coppie associate ai gradi di libertà interni di rotazione $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^b$ nel generico elemento.

Le incognite nodali $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^b$ sono gradi di libertà interni e vengono quindi condensate al livello del singolo elemento; i gradi di libertà nodali $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ sono anch'essi condensati al livello del singolo elemento in quanto non è richiesta la continuità globale di $\boldsymbol{\tau}$ (in (4.37) non compaiono derivate di $\boldsymbol{\tau}$).

$c^s_{11} = c^i_{11}$ [GPa]	126.
$c^s_{12} = c^i_{12}$ [GPa]	79.5
$c^s_{13} = c^i_{13}$ [GPa]	84.1
$c^s_{33} = c^i_{33}$ [GPa]	117.
$c^s_{44} = c^i_{44}$ [GPa]	23.0
$\varepsilon^s_{11} = \varepsilon^i_{11}$ [nF/m]	15.0
$\varepsilon^s_{33} = \varepsilon^i_{33}$ [nF/m]	13.0
$e^s_{31} = e^i_{31}$ [C/m^2]	-6.5
$e^s_{33} = e^i_{33}$ [C/m^2]	23.3
$e^s_{15} = e^i_{15}$ [C/m^2]	17.0

Tabella 5.1: Costanti materiali PZT5-H. costanti di rigidezza, costanti dielettriche e piezoelettriche

5.1.4 Curve di convergenza

In questo paragrafo si tracciano le curve di convergenza relative alle tre differenti formulazioni agli elementi finiti sopra riportate. A questo scopo si considerano i problemi campione a_1 e b_1 per la flessione del laminato riportati nel paragrafo 4.3.1; in ciò che segue, con l'espressione "carico meccanico" si fa riferimento alla condizione di carico a_1 nella (4.75) mentre con l'espressione "carico elettrico" si fa riferimento alla condizione di carico b_1 nella (4.76). Le soluzioni analitiche bidimensionali di tali problemi, ottenute risolvendo le equazioni di equilibrio che descrivono il modello di laminato nel paragrafo 4.1, sono confrontate con le soluzioni numeriche, calcolate utilizzando gli elementi Q4DF, Q4DR e Q4M, in funzione del numero di elementi utilizzati nella discretizzazione del piano medio del laminato e in funzione del suo spessore, come specificato in dettaglio nel seguito.

Le soluzioni numeriche sono ottenute discretizzando il piano medio Ω di una piastra di sezione trasversale quadrata, avente lato $L = 1$m, spessore $h = 0.01$m, modulo di Young $E = 210$GPa e modulo di Poisson $\nu = 0.3$. Le facce superiore ed inferiore della piastra sono interamente ricoperte da due attuatori piezoelettrici di spessore $h^s = h^i = 0.001$m, le cui costanti materiali sono riportate in tabella 5.1.

In tutte le analisi numeriche, in virtù della simmetria del problema, è stato discretizzato soltanto un quarto del piano medio Ω della piastra con elementi quadrati identici fra loro.

L'errore relativo E_g della soluzione numerica per la generica funzione incognita g è definito come:

$$E_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}[g_\delta(n_i) - g(n_i)]^2}{\sum_{i=1}^{N} g(n_i)^2} \tag{5.16}$$

dove la sommatoria è estesa agli N nodi appartenenti alla discretizzazione del piano medio del laminato, $g(n_i)$ denota il valore della soluzione analitica per l'incognita g in corrispondenza del nodo n_i mentre $g_\delta(n_i)$ è il corrispondente valore della soluzione numerica, ottenuto con una discretizzazione regolare caratterizzata dal parametro δ (ad esempio δ è la lunghezza del lato dell'elemento). Per ciascuna delle due tipologie di carico considerate sono condotte due differenti analisi; nella prima analisi vengono mantenuti fissi i parametri geometrici del laminato, così come sono stati sopra definiti, mentre si fa variare il numero di elementi della discretizzazione, partendo da una discretizzazione di un quarto del piano medio della piastra costituita da 2×2 elementi fino ad una costituita da 64×64 elementi. Si costruiscono così, per le funzioni incognite del problema, curve di convergenza in scala doppiamente logaritmica dell'errore relativo della soluzione numerica in funzione del numero di elementi costituenti la discretizzazione. Nel secondo tipo di analisi il numero di elementi costituenti la discretizzazione è tenuto fisso (16×16 elementi per quarto di laminato) mentre viene fatto variare lo spessore della piastra, partendo da $h = L/25$ fino a $h = L/800$; gli spessori dei piezoelettrici variano anch'essi in modo da mantenere costante il rapporto $h^s/h = h^i/h$=0.1. Si costruiscono così, per le funzioni incognite del problema, curve in scala doppiamente logaritmica dell'errore relativo della soluzione numerica in funzione del rapporto tra il lato e lo spessore della piastra L/h. Per le due tipologie di carico considerate si ha φ_1=φ_2=r e $v^s = v$, $v^i = -v$; nei grafici seguenti si riportano dunque gli errori relativi di w, r e v.

Dalle figure 5.6-5.11 risulta che, sia per carico meccanico che per carico elettrico, le soluzioni numeriche calcolate mediante gli elementi Q4DR e Q4M convergono quadraticamente alle corrispondenti soluzioni analitiche. Le soluzioni numeriche calcolate con l'elemento Q4DF convergono anch'esse alle corrispondenti soluzioni analitiche ma con un tasso di convergenza più lento in corrispondenza di discretizzazioni poco raffinate; inoltre, a parità di numero di elementi costituenti la discretizzazione, presentano un errore relativo di diversi ordini di grandezza maggiore rispetto a quello presentato dalle soluzioni ottenute con gli elementi Q4DR e Q4M. Dalle figure 5.12-5.17 appare evidente che, per entrambe le condizioni di carico, l'elemento Q4DF è soggetto a "locking" e dunque, per rapporti lato/spessore elevati, i risultati numerici ottenuti utilizzando tale elemento sono inconsistenti. Nel caso degli elementi Q4DR e Q4M il problema del "locking" è evitato e l'errore relativo della soluzione numerica ottenuta con entrambi tali elementi non dipende dal rapporto lato/spessore.

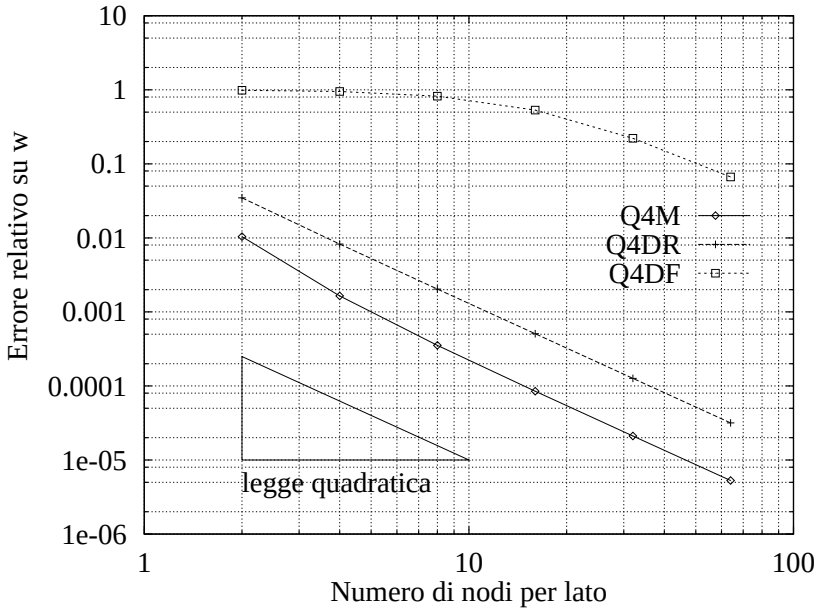

Figura 5.6: Errore relativo della soluzione numerica per w in funzione del numero di nodi: carico meccanico

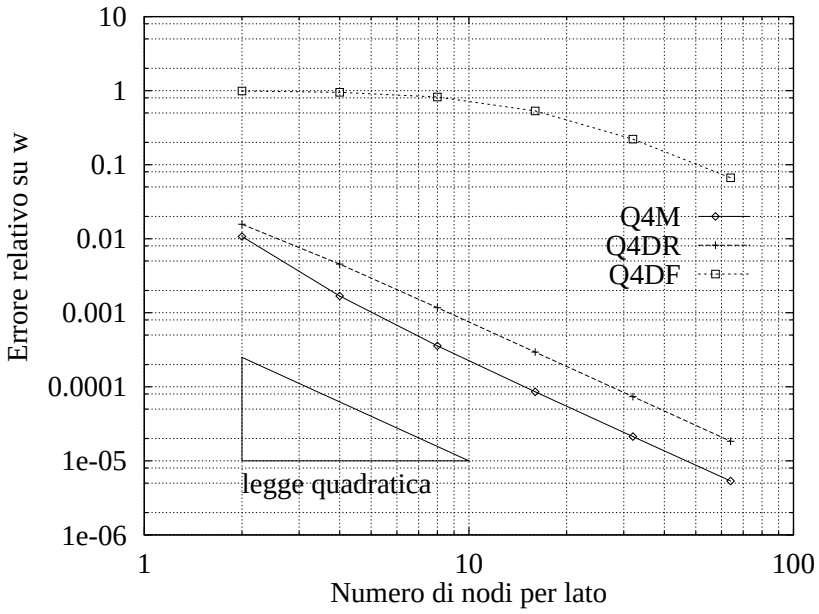

Figura 5.7: Errore relativo della soluzione numerica per w in funzione del numero di nodi: carico elettrico

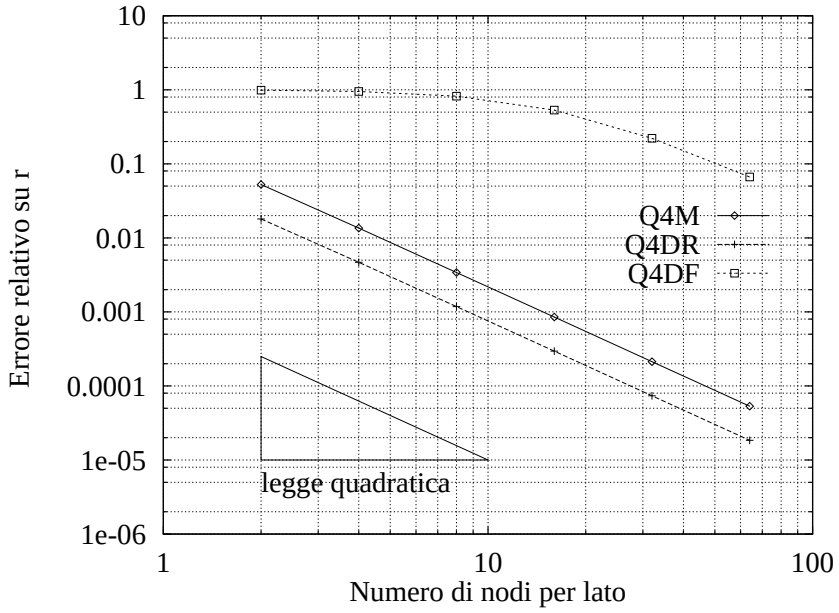

Figura 5.8: Errore relativo della soluzione numerica per r in funzione del numero di nodi: carico meccanico

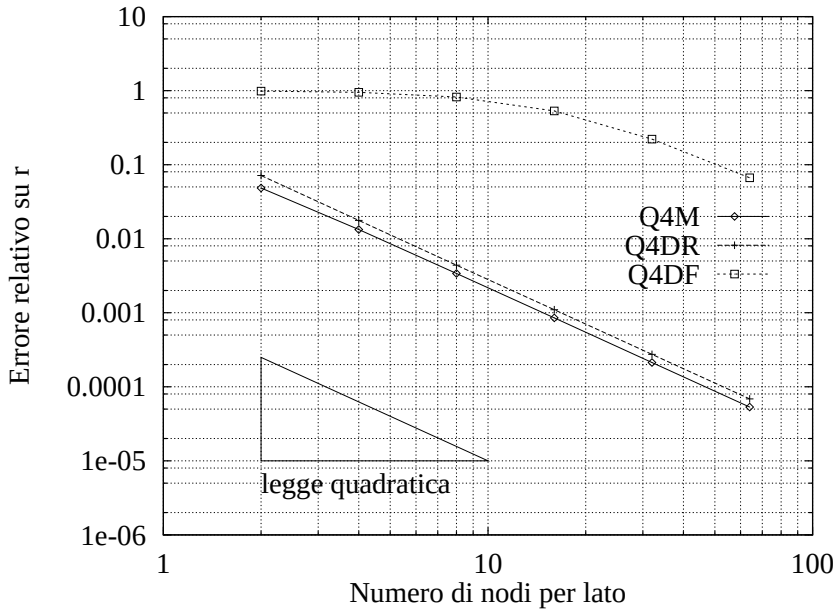

Figura 5.9: Errore relativo della soluzione numerica per r in funzione del numero di nodi: carico elettrico

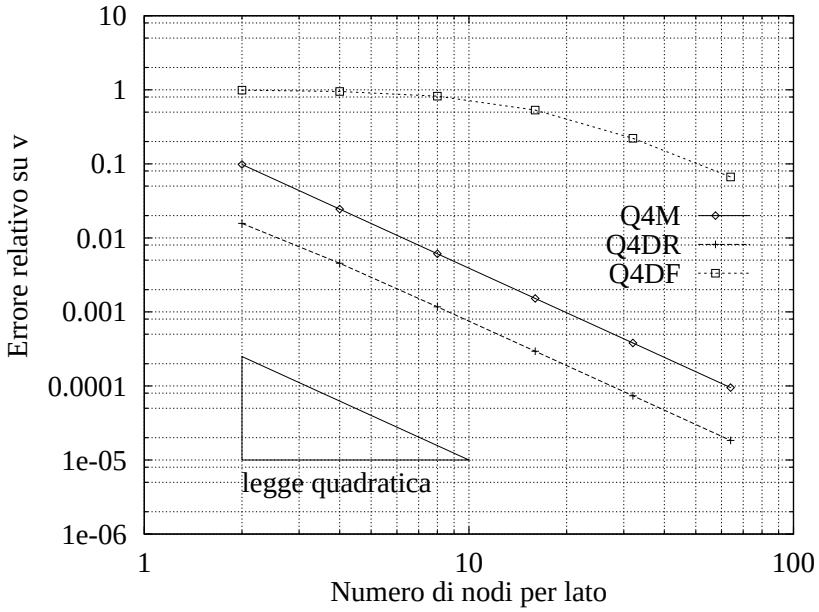

Figura 5.10: Errore relativo della soluzione numerica per v in funzione del numero di nodi: carico meccanico

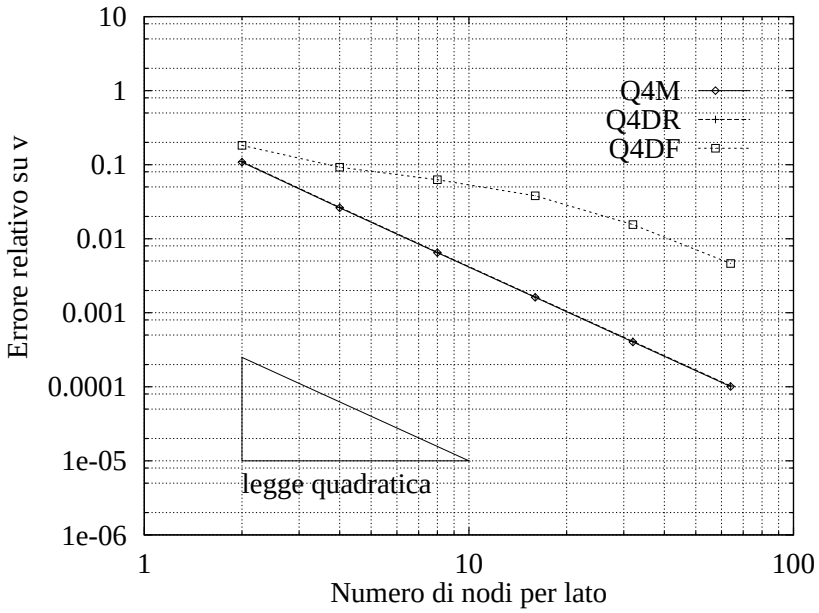

Figura 5.11: Errore relativo della soluzione numerica per v in funzione del numero di nodi: carico elettrico

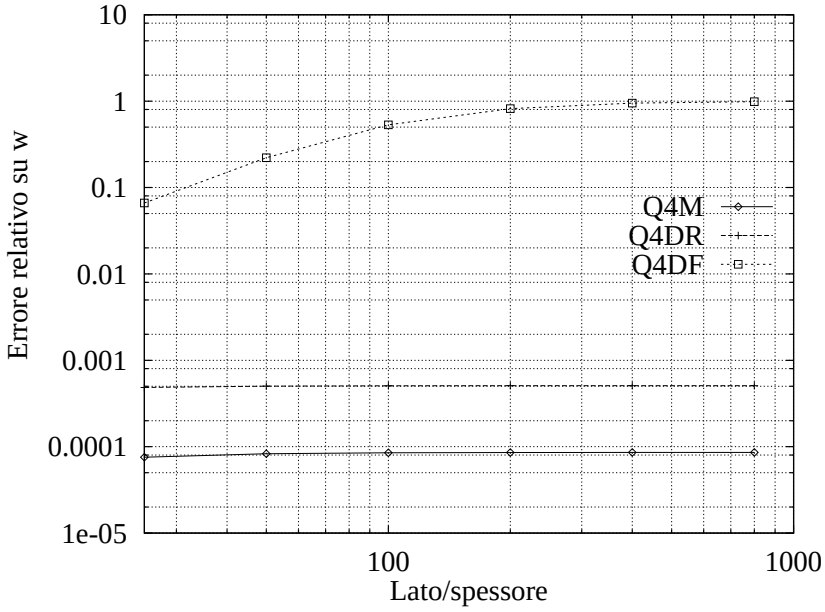

Figura 5.12: Errore relativo della soluzione numerica per w in funzione del rapporto lato/spessore della piastra: carico meccanico

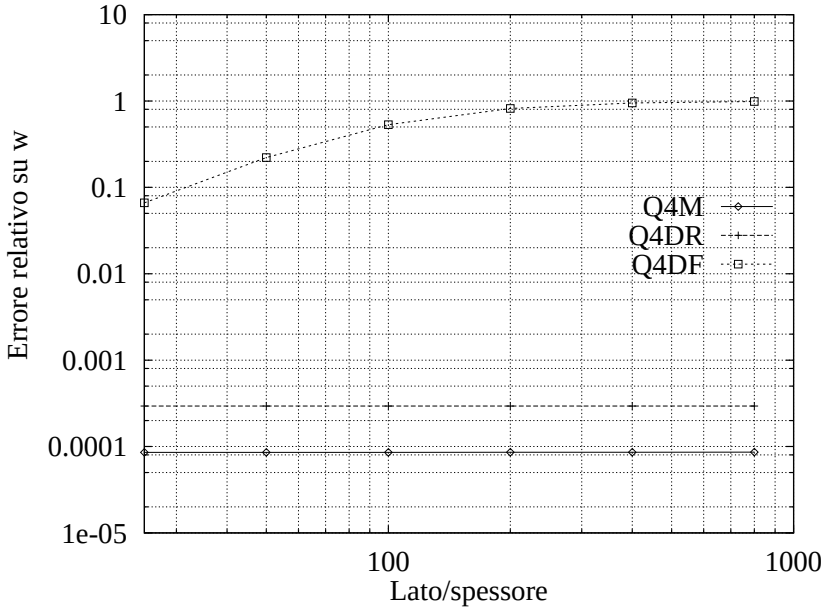

Figura 5.13: Errore relativo della soluzione numerica per w in funzione del rapporto lato/spessore della piastra: carico elettrico

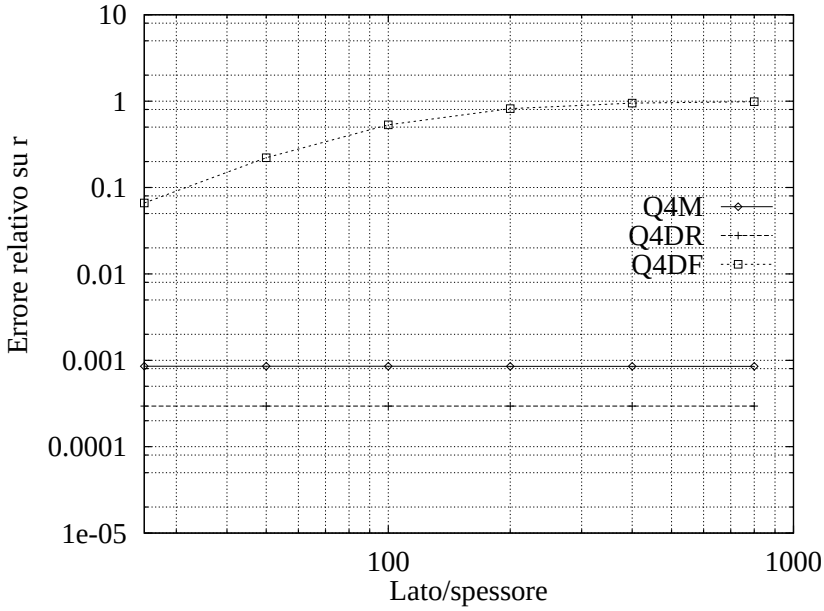

Figura 5.14: Errore relativo della soluzione numerica per r in funzione del rapporto lato/spessore della piastra: carico meccanico

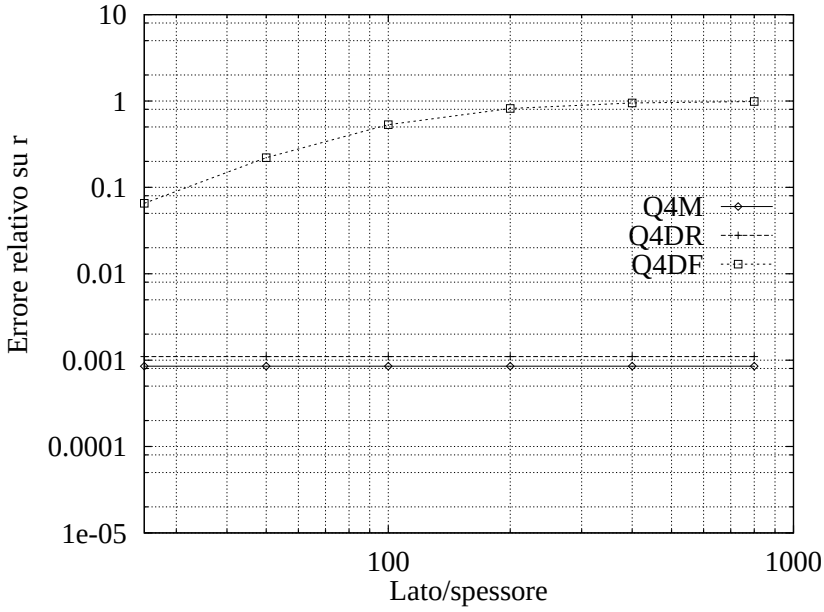

Figura 5.15: Errore relativo della soluzione numerica per r in funzione del rapporto lato/spessore della piastra: carico elettrico

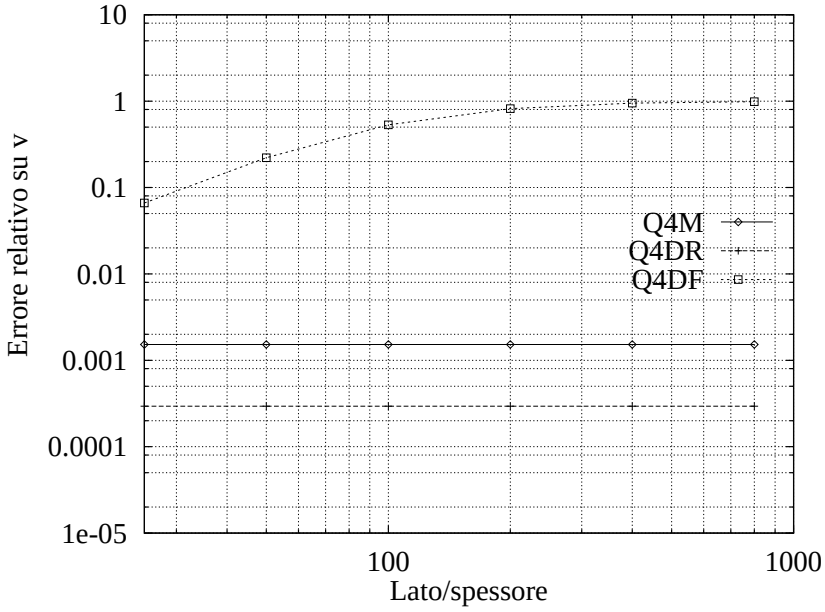

Figura 5.16: Errore relativo della soluzione numerica per v in funzione del rapporto lato/spessore della piastra: carico meccanico

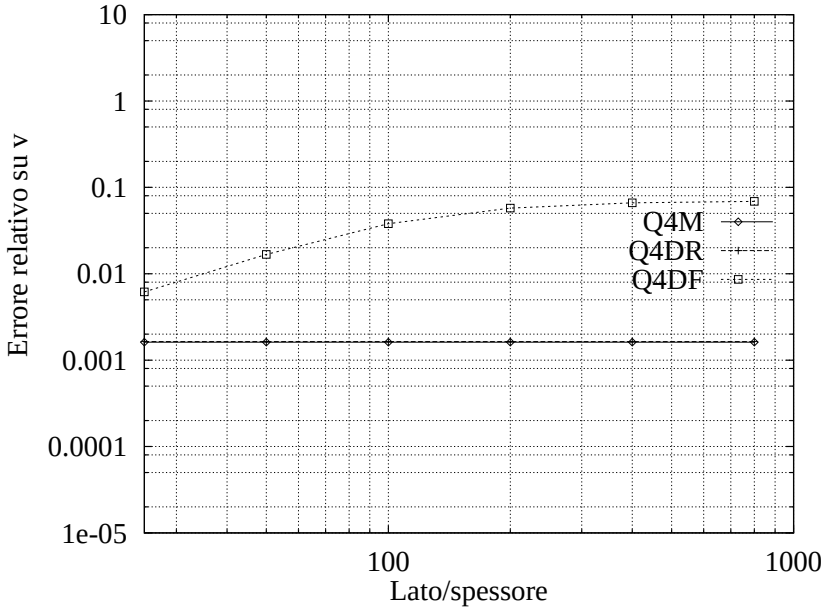

Figura 5.17: Errore relativo della soluzione numerica per v in funzione del rapporto lato/spessore della piastra: carico elettrico

5.2 Formulazioni agli elementi finiti per il modello proposto nel paragrafo 4.2

La formulazione agli elementi finiti qui dedotta per il modello raffinato di tristrato piezoelettrico presentato nel paragrafo 4.2 è basata sul funzionale dell'energia potenziale totale (4.54). Sostituendo in (4.2) le condizioni di vincolo (4.44), tale funzionale dipende dalle tredici funzioni scalari indipendenti $\mathbf{u}$, w, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}^s$, $\boldsymbol{\varphi}^i$, η^s, χ^s, η^i e χ^i. Data la complicazione dovuta all'elevato numero di variabili indipendenti caratterizzanti il comportamento del laminato ed in virtù dell'ortogonalità in energia fra comportamento membranale e flessionale di una piastra, si è preferito impiegare sei formulazioni agli elementi finiti, rispettivamente per lo studio del comportamento membranale e flessionale della piastra, del piezoelettrico superiore e del piezoelettrico inferiore. Una volta fissata la discretizzazione del piano medio del laminato, le sei formulazioni sono applicate per risolvere il problema membranale e flessionale relativo ad ogni strato considerato indipendente dagli altri. Le matrici di rigidezza ottenute sono quindi assemblate per ottenere la matrice di rigidezza del tristrato, relativa a ciascun elemento appartenente alla discretizzazione. Sono quindi imposte le condizioni di vincolo (4.44), dovute all'ipotesi di perfetto incollaggio dei piezoelettrici alla piastra. Infine si procede all'assemblaggio delle matrici di rigidezza di ogni elemento per ottenere la matrice di rigidezza dell'intero laminato. Una procedura simile è seguita per ottenere la matrice delle masse del laminato, a partire dalla discretizzazione dei funzionali dell'energia cinetica relativi al comportamento membranale e flessionale di ogni strato.

Anche nel presente caso si fa utilizzo dell'elemento quadrangolare isoparametrico a quattro nodi mostrato in figura 5.1, impiegato nelle sei formulazioni di cui sopra. Si descrivono ora in maggior dettaglio i vari passi necessari per il calcolo della matrice di rigidezza del laminato secondo la presente formulazione.

5.2.1 Elementi finiti per il comportamento membranale e flessionale di ciascuno strato

Gli elementi finiti per il comportamento membranale e flessionale di ogni strato del laminato sono costruiti utilizzando le funzioni bilineari Ψ^j per l'interpolazione di tutti i campi incogniti. L'elemento finito per il comportamento membranale della piastra, basato sul funzionale (3.23) riferito al caso di piastra elastica, ha due gradi di libertà per nodo, che

sono $(\hat{u}_1)_j$ e $(\hat{u}_2)_j$; il campo $\mathbf{u}$ nell'elemento è così interpolato:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\mathbf{u}}_j \tag{5.17}$$

mentre quello per il comportamento flessionale, basato sul funzionale (3.97) riferito al caso di piastra elastica, ha tre gradi di libertà per nodo, che sono $\hat{w}_j$, $(\hat{\varphi}_1)_j$ e $(\hat{\varphi}_2)_j$; i campi w e $\boldsymbol{\varphi}$ nell'elemento sono così interpolati:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{w}_j \\ \boldsymbol{\varphi} &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j \end{aligned} \tag{5.18}$$

L'elemento finito per il comportamento membranale del piezoelettrico superiore, basato sul funzionale (3.23), ha tre gradi di libertà per nodo, che sono $\hat{u}^s_{1j}$, $\hat{u}^s_{2j}$ e $\hat{\chi}^s_j$; i campi $\mathbf{u}$ e χ nell'elemento sono così interpolati:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\mathbf{u}}^s_j \\ \chi^s &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\chi}^s_j \end{aligned} \tag{5.19}$$

mentre quello per il comportamento flessionale del piezoelettrico superiore, basato sul funzionale (3.97), ha quattro gradi di libertà per nodo, che sono $\hat{w}_j$, $(\hat{\varphi}^s_1)_j$, $(\hat{\varphi}^s_2)_j$ e $\hat{\eta}_j$; i campi w^s, $\boldsymbol{\varphi}^s$ e η^s nell'elemento sono così interpolati:

$$\begin{aligned} w^s &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{w}^s_j \\ \boldsymbol{\varphi}^s &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\boldsymbol{\varphi}}^s_j \\ \eta^s &= \sum_{j=1}^{4} \Psi^j \hat{\eta}^s_j \end{aligned} \tag{5.20}$$

Analoghi schemi di interpolazione sono adottati per gli elementi finiti relativi al comportamento membranale e flessionale del piezoelettrico inferiore.

Sostituendo le rappresentazioni (5.17)-(5.20) e quelle per il comportamento membranale e flessionale del piezoelettrico inferiore nei corrispondenti funzionali dell'energia potenziale, integrando numericamente e calcolando la variazione dei funzionali discreti ottenuti

rispetto alle incognite nodali, si ottengono le matrici di rigidezza membranale e flessionale relative ad ogni strato del laminato piezoelettrico.

Per ovviare al problema del "locking" nei tre elementi che descrivono il comportamento flessionale della piastra e dei due piezoelettrici, si impiega un'integrazione numerica ridotta (un punto di Gauss) per il termine legato all'energia di scorrimento presente nei relativi funzionali.

5.2.2 Elemento finito per il tristrato piezoelettrico

Assemblando, in corrispondenza di ogni maglia costituente la discretizzazione del piano medio del laminato, le matrici di rigidezza per il comportamento membranale e flessionale di ogni strato si ottiene:

$$\begin{pmatrix} K_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_m^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_f^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_m^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_f^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_m \\ \hat{\lambda}_f \\ \hat{\lambda}_m^s \\ \hat{\lambda}_f^s \\ \hat{\lambda}_m^i \\ \hat{\lambda}_f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_m \\ p_f \\ p_m^s \\ p_f^s \\ p_m^i \\ p_f^i \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

Il significato dei simboli in (5.21) è il seguente:

$$K_m = K_{uu} \qquad K_f = \begin{pmatrix} K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{w\varphi}^T & K_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

sono, rispettivamente, le matrici di rigidezza per il comportamento membranale e flessionale della piastra,

$$\hat{\lambda}_m = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{\lambda}_f = \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{pmatrix} \qquad p_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_f = \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

essendo stati considerati i carichi esterni assunti nel modello di tristrato proposto nel paragrafo 4.2.

$$K_m^s = \begin{pmatrix} K_{u^s u^s}^s & K_{u^s \chi^s}^s \\ K_{u^s \chi^s}^{sT} & K_{\chi^s \chi^s}^s \end{pmatrix} \qquad K_f^s = \begin{pmatrix} K_{w^s w^s}^s & K_{w^s \varphi^s}^s & K_{w^s \eta^s}^s \\ K_{w^s \varphi^s}^{sT} & K_{\varphi^s \varphi^s}^s & K_{\varphi^s \eta^s}^s \\ K_{w^s \eta^s}^{sT} & K_{\varphi^s \eta^s}^{sT} & K_{\eta^s \eta^s}^s \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

sono, rispettivamente, le matrici di rigidezza per il comportamento membranale e flessionale del piezoelettrico superiore e

$$\hat{\lambda}_m^s = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^s \\ \hat{u}_2^s \\ \hat{\chi}^s \end{pmatrix} \qquad \hat{\lambda}_f^s = \begin{pmatrix} \hat{w}^s \\ \hat{\varphi}_1^s \\ \hat{\varphi}_2^s \\ \hat{\eta}^s \end{pmatrix} \qquad p_m^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{\omega}^s \end{pmatrix} \qquad p_f^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Infine

$$K_m^i = \begin{pmatrix} K_{u^iu^i}^i & K_{u^i\chi^i}^i \\ K_{u^i\chi^i}^{iT} & K_{\chi^i\chi^i}^i \end{pmatrix} \qquad K_f^i = \begin{pmatrix} K_{w^iw^i}^i & K_{w^i\varphi^i}^i & K_{w^i\eta^i}^i \\ K_{w^i\varphi^i}^{iT} & K_{\varphi^i\varphi^i}^i & K_{\varphi^i\eta^i}^i \\ K_{w^i\eta^i}^{iT} & K_{\varphi^i\eta^i}^{iT} & K_{\eta^i\eta^i}^i \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

sono, rispettivamente, le matrici di rigidezza per il comportamento membranale e flessionale del piezoelettrico inferiore e

$$\hat{\lambda}_m^i = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^i \\ \hat{u}_2^i \\ \hat{\chi}^i \end{pmatrix} \qquad \hat{\lambda}_f^i = \begin{pmatrix} \hat{w}^i \\ \hat{\varphi}_1^i \\ \hat{\varphi}_2^i \\ \hat{\eta}^i \end{pmatrix} \qquad p_m^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{\omega}^i \end{pmatrix} \qquad p_f^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

Le condizioni di vincolo (4.44), esprimenti la condizione di spostamento relativo nullo in corrispondenza delle interfacce $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$, implicano la seguente relazione tra le variabili nodali presenti nella (5.21):

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{w} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{u}}^s \\ \hat{\chi}^s \\ \hat{w}^s \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^s \\ \hat{\eta}^s \\ \hat{\mathbf{u}}^i \\ \hat{\chi}^i \\ \hat{w}^i \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i \\ \hat{\eta}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h/2 & 0 & h^s/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -h/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h^i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{w} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\chi}^s \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^s \\ \hat{\eta}^s \\ \hat{\chi}^i \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i \\ \hat{\eta}^i \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

dove le componenti della matrice nella (5.28) sono da intendersi come matrici diagonali di dimensione opportuna.

L'equilibrio di un elemento del laminato tristrato piezoelettrico è descritto dalla seguente equazione:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P}[\hat{\lambda}'] = \mathbf{P}^T[\hat{p}] \tag{5.29}$$

essendo $\mathbf{P}$ la matrice nella (5.28), $\mathbf{K}$ la matrice di rigidezza diagonale a blocchi nella (5.21) ed infine $\hat{\lambda}'$ e $\hat{p}$ il vettore delle incognite nodali nella (5.28) ed il vettore dei carichi nodali nella (5.21).

Assemblando le equazioni (5.29) su tutti gli elementi si perviene alla matrice di rigidezza globale del tristrato piezoelettrico.

5.2.3 Curve di convergenza

In questo paragrafo si tracciano le curve di convergenza relative alla presente formulazione agli elementi finiti. A questo scopo si considerano i due problemi campione a_2 e b_2 riportati nel paragrafo 4.3.1; in ciò che segue, con l'espressione "carico meccanico" si fa riferimento alla condizione di carico a_2 nella (4.77) mentre con l'espressione "carico elettrico" si fa riferimento alla condizione di carico b_2 nella (4.78). Le soluzioni analitiche bidimensionali di tali problemi, ottenute risolvendo le equazioni di equilibrio che descrivono il modello di laminato tristrato riportato nel paragrafo 4.2, sono confrontate con le soluzioni numeriche calcolate mediante la formulazione agli elementi finiti dedotta nel paragrafo precedente, in funzione del numero di elementi impiegati nella discretizzazione del piano medio del laminato.

Le soluzioni numeriche sono ottenute discretizzando il piano medio Ω di una piastra di sezione trasversale quadrata, avente lato $L = 2$m, spessore $h = 0.01$m, modulo di Young $E = 210$GPa e modulo di Poisson $\nu = 0.3$. Le facce superiore ed inferiore della piastra sono interamente ricoperte da due attuatori piezoelettrici di spessore $h^s = h^i = 0.005$m, le cui costanti materiali sono riportate in tabella 5.1.

In tutte le analisi numeriche, in virtù della simmetria del problema, è discretizzato soltanto un quarto del piano medio Ω della piastra con discretizzazioni regolari costituite da elementi quadrati.

Per ciascuna delle due tipologie di carico considerate viene condotta un'analisi al variare del numero di elementi costituenti la discretizzazione, partendo da una discretizzazione di un quarto del piano medio della piastra con 2×2 elementi fino a una discretizzazione con 32×32 elementi. Si costruiscono così, per le funzioni incognite del problema, curve di convergenza in scala doppiamente logaritmica dell'errore relativo della soluzione numerica in funzione del numero di elementi costituenti la discretizzazione.

Per le due tipologie di carico considerate si ha $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\varphi_1^s = \varphi_2^s = \varphi^s$ e $\varphi_1^i = \varphi_2^i = \varphi^i$; nei grafici seguenti si riportano dunque gli errori relativi di w, φ, φ^s, φ^i, η^s, χ^s, η^i e χ^i. In ciascuno dei due grafici non sono riportate le curve relative alle grandezze identicamente nulle per la condizione di carico considerata.

Dalle figure 5.18 e 5.19 risulta evidente che le soluzioni numeriche relative a tutte le incognite del problema convergono quadraticamente alle corrispondenti soluzioni analitiche.

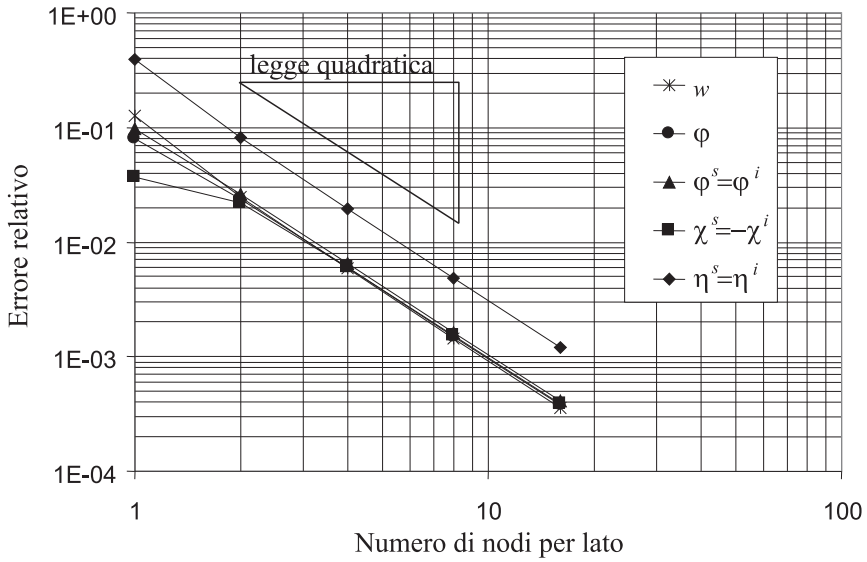

Figura 5.18: Errore relativo delle soluzioni numeriche in funzione del numero di nodi: carico meccanico

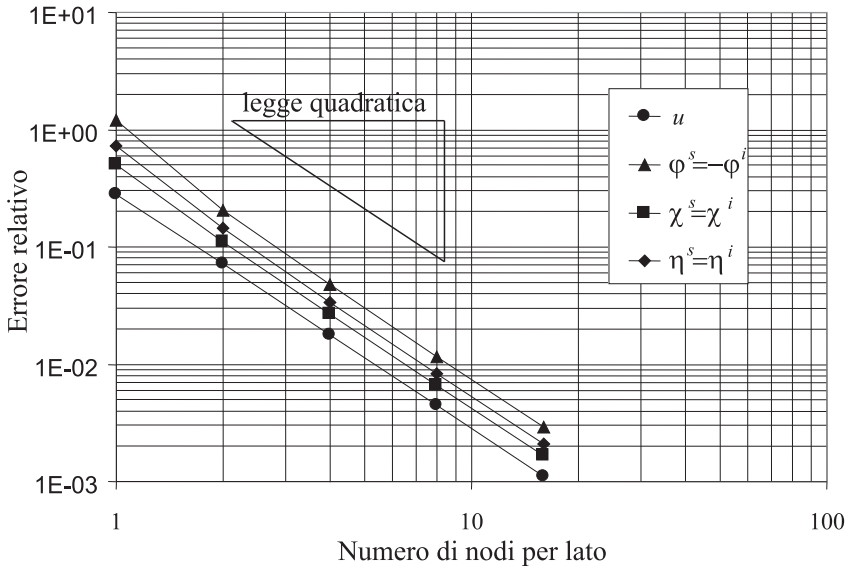

Figura 5.19: Errore relativo delle soluzioni numeriche in funzione del numero di nodi: carico elettrico