Capitolo 3

Teorie di piastra piezoelettrica

Strutture strumentate con attuatori e sensori piezoelettrici trovano vasto impiego in diversi campi della tecnica; esse sono dette intelligenti in quanto hanno la capacità di registrare le modificazioni ambientali ed adattarsi ad esse cambiando il proprio stato e sono largamente studiate sia da un punto di vista teorico che sperimentale [96]. Un'analisi accurata di tali strutture richiede una modellazione preliminare del comportamento degli elementi piezoelettrici ad esse appartenenti. I modelli tridimensionali basati sulla teoria di Voigt sono sicuramente accurati ma la soluzione numerica delle equazioni che li descrivono è spesso molto difficoltosa ed onerosa per il tempo di calcolo richiesto; per questo motivo è utile disporre di modelli più semplici ma sufficientemente accurati come i modelli di piastra piezoelettrica.

Le piastre, come puntualizzato nel seguito, sono descritte come corpi tridimensionali aventi una dimensione molto più piccola rispetto alle altre due; questo fatto consente di introdurre opportune semplificazioni nel modello tridimensionale che le descrive, allo scopo di ottenere modelli più semplici le cui incognite sono definite su un dominio bidimensionale.

3.1 Stato dell'arte

Numerosissimi sono in letteratura i lavori che trattano di teorie di piastra; è dunque opportuno presentare una rassegna, seppur necessariamente incompleta, delle principali teorie di piastra piezoelettrica presenti in letteratura, insieme con le teorie di piastra elastica che esse generalizzano. La maggior parte delle teorie di piastra che sono appresso citate fanno capo a due principali metodologie di deduzione [34]. La prima metodologia, di cui fanno parte i così detti metodi asintotici, deduce modelli di piastra ricavando i

successivi termini di un'espansione formale in serie di potenze della soluzione tridimensionale; risulta adatta alla deduzione dei modelli di piastra alla Kirchhoff-Love. Seguono tale approccio, ad esempio, i lavori in [15, 34, 50, 74]. La seconda metodologia consiste nella formulazione di ipotesi a priori sulla forma di alcune grandezze incognite, quali ad esempio gli spostamenti o le tensioni, che tengano conto della piccolezza dello spessore rispetto alle dimensioni laterali della piastra; essa è adatta alla deduzione di tutte le principali teorie di piastra esistenti in letteratura. Seguono tale approccio, ad esempio, i lavori in [17, 19, 68, 77, 84, 103].

Le varie teorie sono qui catalogate in teorie alla Kirchhoff-Love, alla Reissner-Mindlin e teorie di ordine superiore, a seconda della ricchezza con cui è descritto il campo di spostamenti nella piastra; nell'ambito di ognuna di tali categorie si distinguono poi teorie per il comportamento flessionale e teorie per il comportamento membranale di piastra. Per ogni categoria si riportano dapprima le teorie di piastra puramente elastica e quindi le loro estensioni al caso di piastra piezoelettrica.

Tra le teorie di piastra puramente elastica la cosiddetta teoria di Kirchhoff-Love è la prima e forse quella più nota; essa è basata sull'assunzione che le fibre trasversali rimangano ortogonali al piano medio della piastra a deformazione avvenuta e che sia nulla la tensione normale in direzione trasversale. Tale teoria classica è stata dedotta in diversi modi, ad esempio in [50] con il metodo dell'integrazione asintotica, dove una gerarchia di modelli è ottenuta attraverso un'espansione asintotica nello spessore della piastra delle grandezze incognite. In [34] tale metodo è stato adottato in una veste più rigorosa, grazie ad una formulazione variazionale del problema ed all'introduzione della cosiddetta tecnica "zoom" o metodo del riscalamento, che consente di lavorare su un dominio fissato mentre si effettua l'espansione asintotica. In [86] si utilizza il metodo della funzione iniziale di Vlasov; le grandezze incognite nella piastra sono descritte in termini dei loro valori sul piano medio (funzioni iniziali) per mezzo di una matrice, i cui termini sono operatori differenziali di ordine infinito rispetto alle variabili nel piano medio. Espandendo in serie tale matrice, riscalando opportunamente i carichi esterni e considerando solo l'ordine inferiore di tale espansione si ottiene l'equazione di equilibrio meccanico per la piastra. Un'altra derivazione del modello di piastra di Kirchhoff-Love è contenuta in [83, 66], dove le restrizioni a priori sul tensore delle deformazioni sono riguardate come vincoli interni e la piastra è considerata costituita di materiale omogeneo, trasversalmente isotropo, vincolato; di conseguenza viene individuato uno sforzo di taglio all'interno della piastra,

identificato come parte reattiva dello sforzo totale.

Teorie di piastra piezoelettrica alla Kirchhoff-Love sono ricavate in [10, 15, 74]. In [74] si studia il comportamento a flessione utilizzando il metodo dell'espansione asintotica della soluzione tridimensionale e la tecnica "zoom" [34]; sono ricavati i primi due ordini dell'espansione in serie di potenze nello spessore dei campi incogniti; in particolare all'ordine zero si ottiene un'equazione di equilibrio meccanico coincidente con la classica equazione di Kirchhoff per piastre puramente elastiche mentre l'equilibrio elettrico è descritto dall'equazione di Poisson. Non si evidenzia dunque alcun accoppiamento tra le variabili elettriche e meccaniche; tale accoppiamento compare quando si considera il primo ordine dell'espansione suddetta. In [15] si impiega il metodo della funzione iniziale di Vlasov, utilizzato nel caso elastico in [86]; si ottiene un'equazione di equilibrio meccanico che considera l'accoppiamento tra le variabili meccaniche ed elettriche; l'equazione di equilibrio elettrico è ancora l'equazione di Poisson; si ottiene inoltre un modello per il comportamento di lastra piezoelettrica.

In [10] equazioni per il comportamento membranale e flessionale di piastra piezoelettrica sono ottenute utilizzando il metodo del riscalamento applicato ad un opportuno funzionale di energia. Un modello di lastra piezoelettrica con elongazione nulla delle fibre trasversali e campo elettrico costante nello spessore è proposto in [91, 101, 18], ricavato imponendo opportune ipotesi a priori sui campi incogniti; in [90] si considera l'effetto di campi elettrici elevati che richiedono l'adozione di termini non lineari nel legame costitutivo. Il modello per il comportamento a flessione utilizzato in [91, 101] non prevede accoppiamento tra le variabili meccaniche ed elettriche e conduce dunque al modello di Kirchhoff-Love per piastre elastiche. Il modello per la flessione di piastra piezoelettrica utilizzato in [103] è basato su un campo di spostamenti alla Kirchhoff-Love e assume una variazione quadratica nello spessore del potenziale elettrico.

Il modello di Kirchhoff-Love si adatta bene allo studio di piastre sottili, nelle quali gli effetti dovuti allo scorrimento sono trascurabili. Nel caso di piastre solo moderatamente sottili è necessario utilizzare modelli più accurati, nei quali si tenga conto almeno della deformabilità a taglio della piastra. La teoria di piastra elastica di Reissner-Mindlin [85, 76] è la più semplice teoria in grado di portare in conto questo effetto. In [85] questa teoria è ricavata assumendo una particolare dipendenza nello spessore degli sforzi e degli spostamenti ed utilizzando un principio variazionale misto; in [76] si fa uso del funzionale dell'energia potenziale totale e di ipotesi particolari sul campo di spostamenti, assumendo

inoltre nullo lo sforzo normale in direzione trasversale con conseguente modifica delle equazioni costitutive. Il modello di Reissner-Mindlin per piastre elastiche è poi ricavato in [79] utilizzando la teoria dell'elasticità vincolata insieme con il principio dei lavori virtuali ed assumendo un legame costitutivo proprio di un materiale trasversalmente isotropo, vincolato. In [17] la teoria di Reissner-Mindlin per piastre elastiche è dedotta dalla teoria tridimensionale utilizzando il funzionale di Hu-Washizu; opportuni vincoli sulle tensioni e sulle deformazioni sono imposti nel funzionale utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, aventi il significato di tensioni e deformazioni di carattere reattivo.

Una teoria di piastra piezoelettrica con deformazione di scorrimento è sviluppata in [77] ed è ricavata nelle ipotesi di tensione normale trasversale nulla e tensioni tangenziali costanti nello spessore. Nel modello di piastra piezoelettrica in [96] si trascura la componente del campo elettrico parallela al piano medio della piastra nell'equazione di equilibrio elettrostatico. Entrambe le teorie suddette producono valori di rigidezza inconsistenti con quelli della teoria tridimensionale di Voigt, calcolati in maniera esatta in [16] per un caso particolare. In [84, 80], utilizzando il metodo dei lavori virtuali, si ricava sia un modello di lastra piezoelettrica con elongazione delle fibre trasversali, che estende al caso piezoelettrico il modello di lastra elastica in [40], che un modello per la flessione di piastra piezoelettrica con deformabilità tagliante; quest'ultimo presenta però valori di rigidezza differenti da quelli calcolati mediante la soluzione esatta in [16]. Il modello flessionale di piastra piezoelettrica alla Reissner-Mindlin proposto in [18, 7], dedotto con un metodo analogo a quello utilizzato in [17] nel caso puramente elastico, è basato sulle ipotesi di tensione normale trasversale nulla e tensioni tangenziali costanti nello spessore, adottate anche in [77], insieme con l'ulteriore ipotesi di spostamento elettrico trasversale nullo; tale modello fornisce valori di rigidezza in accordo con quelli previsti in [16].

Una teoria di ordine superiore per il comportamento membranale e flessionale di piastra elastica è riportata in [68] dove, nella rappresentazione del campo di spostamenti, lo spostamento parallelo a Ω ha andamento cubico nello spessore mentre lo spostamento lungo $\boldsymbol{\nu}_3$ è quadratico nello spessore.

Un esempio di teoria di piastra piezoelettrica di ordine superiore è contenuto in [104]. In tale lavoro il campo di spostamenti è rappresentato con una serie di funzioni trigonometriche nella variabile x_3, i cui coefficienti dipendono dalle variabili x_1 e x_2; le equazioni di equilibrio sono dedotte dalla stazionarietà del funzionale dell'energia potenziale totale.

In questo capitolo sono ricavate differenti teorie per il comportamento estensionale e flessionale di piastre piezoelettriche, utilizzando un metodo variazionale basato su di un funzionale misto. Più specificamente le equazioni di governo sono dedotte dalla stazionarietà del funzionale di Hellinger-Prange-Reissner (2.35), utilizzato nel caso puramente elastico in [88]; tale approccio consente di imporre vincoli a priori sulle variabili coniugate tensore delle tensioni $\mathbf{T}$ e tensore delle deformazioni $\mathbf{S}$, così come sul vettore campo elettrico $\mathbf{e}$ e sul vettore spostamento elettrico $\mathbf{d}$. In particolare nel dedurre ciascuna teoria sono formulate ipotesi a priori sulle componenti della deformazione sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ e sul campo elettrico lungo $\boldsymbol{\nu}_3$, ricavando per integrazione la forma più generale del campo di spostamenti e del potenziale elettrico compatibile con tali ipotesi; analoghe ipotesi sono poi formulate sulle componenti della tensione sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ e sullo spostamento elettrico lungo $\boldsymbol{\nu}_3$, aventi lo scopo di mitigare l'errore di approssimazione introdotto dalle prime ipotesi. In questo quadro unitario sono dedotte alcune delle teorie esistenti in letteratura prima citate, insieme con teorie più raffinate di piastra piezoelettrica presentate qui per la prima volta. In particolare si deduce una teoria alla Reissner-Mindlin per la flessione di piastra piezoelettrica con variazione quadratica nello spessore del potenziale elettrico ed una teoria per il comportamento estensionale di piastra piezoelettrica, nella quale il campo di spostamenti è analogo a quello adottato in [68] nel caso di piastra elastica; le ipotesi adottate nel dedurre queste due nuove teorie hanno un chiaro significato fisico, evidenziato nel seguito.

Le varie teorie sono infine confrontate tra loro considerando alcuni particolari problemi di piastra piezoelettrica in estensione ed in flessione, la cui soluzione tridimensionale esatta è nota [16]. Il criterio di imporre su grandezze duali vincoli omologhi risulta da questo confronto ottimale.

3.2 Generalità

Sia Ω una regione regolare limitata, contenuta nel piano (x_1, x_2) e di contorno regolare $\partial\Omega$; siano inoltre $\mathbf{n}$ e $\mathbf{t}$ la normale esterna e la tangente a $\partial\Omega$, rispettivamente. La regione occupata dalla piastra è il sottoinsieme limitato $\Omega \times (-h/2, h/2)$ dello spazio euclideo, essendo h lo spessore della piastra e Ω il suo piano medio. Il contorno della piastra è l'unione del mantello $\partial\Omega \times (-h/2, h/2)$, della faccia superiore $\mathcal{S}^+ = \Omega \times \{h/2\}$ e della faccia inferiore $\mathcal{S}^- = \Omega \times \{-h/2\}$.

Suggerite dalla geometria che caratterizza la piastra si operano le seguenti decomposizioni degli spazi $\mathcal{V}$ e Sym:

$$\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}} \oplus \mathcal{V}^{\perp} \qquad\qquad \mathrm{Sym} = \overline{\mathrm{Sym}} \oplus \overline{\mathcal{V}} \oplus \mathbf{R} \tag{3.1}$$

essendo $\overline{\mathcal{V}}$ lo spazio vettoriale dei vettori paralleli a Ω e $\overline{\mathrm{Sym}}$ lo spazio vettoriale dei tensori simmetrici su $\overline{\mathcal{V}}$. In tal modo un vettore generico $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ e un generico tensore $\mathbf{M} \in \mathrm{Sym}$ si identificano con la coppia $(\overline{\mathbf{v}}, v) \in \mathcal{V} \times \mathbf{R}$ e con la terna $(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{m}}, m) \in \overline{\mathrm{Sym}} \times \overline{\mathcal{V}} \times \mathbf{R}$, rispettivamente, univocamente determinate dalle seguenti equazioni:

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + v\boldsymbol{\nu}_3, \qquad\qquad \mathbf{M} = \overline{\mathbf{M}} + 2\mathrm{sym}(\overline{\mathbf{m}} \otimes \boldsymbol{\nu}_3) + m\boldsymbol{\nu}_3 \otimes \boldsymbol{\nu}_3 \tag{3.2}$$

Gli operatori ∇ e div, quando applicati a campi a valori in $\overline{\mathrm{Sym}}$, $\overline{\mathcal{V}}$ ed $\mathbf{R}$, si intendono rispetto alle variabili x_1, x_2 mentre un apice denota differenziazione rispetto a x_3. Con un'eccezione alla simbologia introdotta dovuta a questioni di tradizione, il tensore delle tensioni $\mathbf{T}$ si rappresenta con la terna $(\overline{\mathbf{T}}, \boldsymbol{\tau}, \sigma)$ mentre il tensore delle deformazioni $\mathbf{S}$ si rappresenta con la terna $(\overline{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\gamma}/2, \varepsilon)$.

3.2.1 Condizioni di carico e di vincolo

Ai fini dell'assegnazione delle condizioni al contorno si considerano i seguenti sottoinsiemi di $\partial\Omega$: $\partial\Omega_f$, $\partial\Omega_s$, $\partial\Omega_\omega$ e $\partial\Omega_\phi$, con $\partial\Omega = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_s = \partial\Omega_\omega \cup \partial\Omega_\phi$ e $\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s = \partial\Omega_\omega \cap \partial\Omega_\phi = \emptyset$. Su $\partial\Omega_f \times (-h/2, h/2)$ sono assegnate le forze superficiali $\mathbf{p}^l$, su $\partial\Omega_s \times (-h/2, h/2)$ sono assegnati gli spostamenti $\mathbf{s}^l$, su $\partial\Omega_\omega \times (-h/2, h/2)$ è assegnata la densità superficiale di carica elettrica ω^l mentre su $\partial\Omega_\phi \times (-h/2, h/2)$ è assegnato il potenziale elettrico ϕ^l. Infine, su $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ sono assegnate, rispettivamente, le forze superficiali $\mathbf{p}^+$ e $\mathbf{p}^-$ e le densità superficiali di carica ω^+ e ω^- mentre $\mathbf{b}$ e ξ denotano, rispettivamente, le forze di volume e la densità volumica di carica elettrica.

3.3 Il funzionale di Hellinger-Prange-Reissner per una piastra piezoelettrica

Di seguito è riportato il funzionale di Hellinger-Prange-Reissner (2.35) particolarizzato al caso di una piastra costituita di materiale omogeneo, piezoelettrico lineare e trasversalmente isotropo, con asse di trasversa isotropia parallelo a $\boldsymbol{\nu}_3$. Il legame costitutivo

utilizzato è quello riportato nelle (2.26) e (2.27). $\mathcal{H}$ si scrive [74]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [-(s_{11}-s_{22})||\overline{\mathbf{T}}||^2 - s_{12}(\mathrm{tr}\,\overline{\mathbf{T}})^2 - s_{33}\sigma^2 + \theta_{33}d^2 - 2s_{13}\sigma(\mathrm{tr}\,\overline{\mathbf{T}}) + \\
&- 2g_{31}d(\mathrm{tr}\,\overline{\mathbf{T}}) - 2g_{33}\sigma d - s_{44}||\boldsymbol{\tau}||^2 + \theta_{11}||\overline{\mathbf{d}}||^2 - 2g_{15}\boldsymbol{\tau}\cdot\overline{\mathbf{d}}]\, dx_3\, da + \\
&+ \int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{T}}\cdot \mathrm{sym}\nabla\overline{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\tau}\cdot(\overline{\mathbf{s}}' + \nabla s) + \sigma\, s' + \overline{\mathbf{d}}\cdot\nabla\phi + d\,(\phi)']\, dx_3\, da + \\
&- \int_\Omega [\overline{\mathbf{p}}^+\cdot\overline{\mathbf{s}}(\cdot,h/2) + \overline{\mathbf{p}}^-\cdot\overline{\mathbf{s}}(\cdot,-h/2) + p^+ s(\cdot,h/2) + p^- s(\cdot,-h/2) + \\
&- \omega^+\phi(\cdot,h/2) - \omega^-\phi(\cdot,-h/2)]\, da + \int_{\partial\Omega_\omega}\int_{-h/2}^{h/2} \omega^l\phi\, dx_3\, dl + \\
&- \int_{\partial\Omega_f}\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{p}}^l\cdot\overline{\mathbf{s}} + p^l s]\, dx_3\, dl - \int_{\partial\Omega_s}\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{T}}[\mathbf{n}]\cdot(\overline{\mathbf{s}} - \overline{\mathbf{s}}^l) + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}(s - s^l)]\, dx_3\, dl \\
&- \int_{\partial\Omega_\phi}\int_{-h/2}^{h/2} (\overline{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{n})(\phi - \phi^l)\, dx_3\, dl - \int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{b}}\cdot\overline{\mathbf{s}} + b\, s - \xi\,\phi]\, dx_3\, da
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Il funzionale $\mathcal{H}$ può essere ricondotto a due funzionali fra loro indipendenti distinguendo l'aspetto flessionale del problema di piastra dall'aspetto membranale. Una piastra ha un comportamento membranale quando:

$$
\overline{\mathbf{s}}, \quad \overline{\mathbf{S}}, \quad \varepsilon, \quad e, \quad \overline{\mathbf{T}}, \quad \sigma, \quad d \tag{3.4}
$$

sono funzioni pari rispetto a x_3 mentre:

$$
s, \quad \phi, \quad \boldsymbol{\gamma}, \quad \overline{\mathbf{e}}, \quad \boldsymbol{\tau}, \quad \overline{\mathbf{d}} \tag{3.5}
$$

sono funzioni dispari rispetto a x_3. Una piastra ha invece un comportamento flessionale quando le (3.4) sono funzioni dispari rispetto a x_3 mentre le (3.5) sono funzioni pari rispetto a x_3. Siano allora

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_p &= [\mathbf{s}(x_1,x_2,x_3) + \mathbf{s}(x_1,x_2,-x_3)]/2 \\
\mathbf{s}_d &= [\mathbf{s}(x_1,x_2,x_3) - \mathbf{s}(x_1,x_2,-x_3)]/2 \\
\phi_p &= [\phi(x_1,x_2,x_3) + \phi(x_1,x_2,-x_3)]/2 \\
\phi_d &= [\phi(x_1,x_2,x_3) - \phi(x_1,x_2,-x_3)]/2
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

la parte pari rispetto a x_3 di $\mathbf{s}$, la parte dispari rispetto a x_3 di $\mathbf{s}$, la parte pari rispetto ad x_3 di ϕ, la parte dispari rispetto a x_3 di ϕ, rispettivamente. In maniera analoga sono definite le parti pari e dispari, rispettivamente indicate con un pedice p e d, del tensore delle tensioni $\mathbf{T}$, del vettore spostamento elettrico $\mathbf{d}$, del tensore delle deformazioni $\mathbf{S}$ e del

vettore campo elettrico $\mathbf{e}$. Analoga suddivisione in aliquota pari e dispari viene applicata ai cedimenti vincolari ed ai carichi esterni di volume e sul mantello. Infine, per i carichi sulle facce superiore ed inferiore si pone:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_p &= \frac{\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-}{2} \qquad & \mathbf{p}_d &= \frac{\mathbf{p}^+ - \mathbf{p}^-}{2} \\ \omega_p &= \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} \qquad & \omega_d &= \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Traendo profitto da tali decomposizioni e dalla simmetria del legame costitutivo adottato, il funzionale $\mathcal{H}$ risulta la somma dei seguenti due funzionali fra loro indipendenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m &= \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [-(s_{11}-s_{22})||\overline{\mathbf{T}}_p||^2 - s_{12}(\mathrm{tr}\,\overline{\mathbf{T}}_p)^2 - s_{33}\sigma_p^2 + \theta_{33}{d_p}^2 - 2s_{13}\sigma_p(\mathrm{tr}\,\overline{\mathbf{T}}_p) + \\ &- 2g_{31}d_p(\mathrm{tr}\,\overline{\mathbf{T}}_p) - 2g_{33}\sigma_p d_p - s_{44}||\boldsymbol{\tau}_d||^2 + \theta_{11}||\overline{\mathbf{d}}_d||^2 - 2g_{15}\boldsymbol{\tau}_d\cdot\overline{\mathbf{d}}_d]\,dx_3\,da + \\ &+ \int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{T}}_p\cdot \mathrm{sym}\nabla\overline{\mathbf{s}}_p + \boldsymbol{\tau}_d\cdot(\overline{\mathbf{s}}_p{}' + \nabla s_d) + \sigma_p\, s_d' + \overline{\mathbf{d}}_d\cdot\nabla\phi_d + d_p\,(\phi_d)']\,dx_3\,da + \\ &- \int_\Omega [2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot\overline{\mathbf{s}}_p(\cdot,h/2) + 2p_d s_d(\cdot,h/2) - 2\omega_d\phi_d(\cdot,h/2)]\,da + \int_{\partial\Omega_\omega}\int_{-h/2}^{h/2} \omega_d^l\phi_d\,dx_3\,dl + \\ &- \int_{\partial\Omega_f}\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{p}}_p^l\cdot\overline{\mathbf{s}}_p + p_d^l s_d]\,dx_3\,dl - \int_{\partial\Omega_s}\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{T}}_p[\mathbf{n}]\cdot(\overline{\mathbf{s}}_p - \overline{\mathbf{s}}_p^l) + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}(s_d - s_d^l)]\,dx_3\,dl \\ &- \int_{\partial\Omega_\phi}\int_{-h/2}^{h/2} (\overline{\mathbf{d}}_p\cdot\mathbf{n})(\phi_d - \phi_d^l)\,dx_3\,dl - \int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{b}}_p\cdot\overline{\mathbf{s}}_p + b_d\,s_d - \xi_d\,\phi_d]\,dx_3\,da \end{aligned} \tag{3.8}$$

e $\mathcal{H}_f$, che si scrive in maniera analoga a $\mathcal{H}_m$ ma con gli indici p e d fra loro scambiati.

Il funzionale $\mathcal{H}_m$ descrive l'aspetto membranale della piastra piezoelettrica mentre il funzionale $\mathcal{H}_f$ ne descrive l'aspetto flessionale. È facile verificare che, assumendo una condizione di carico e di vincolo per cui:

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{p}}_d = 0, \quad p_p = 0, \quad \omega_p = 0, \\ &\overline{\mathbf{b}}_d = 0, \quad b_p = 0, \quad \xi_p = 0, \\ &\overline{\mathbf{p}}_d^l = 0, \quad p_p^l = 0, \quad \omega_p^l = 0, \\ &\overline{\mathbf{s}}_d^l = 0, \quad s_p^l = 0, \quad \phi_p^l = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

la piastra ha un comportamento esclusivamente membranale; viceversa se le (3.9) valgono con gli indici p e d fra loro scambiati, la piastra ha un comportamento esclusivamente flessionale. La separazione tra comportamento membranale e flessionale è ancora possibile assumendo un legame costitutivo proprio di materiali aventi simmetria almeno monoclina.

Le differenti teorie nel seguito illustrate sono ottenute formulando ipotesi a priori sulle componenti ε e $\boldsymbol{\gamma}$ del tensore delle deformazioni e sulla componente e del campo elettrico; ipotesi omologhe sono poi formulate sulle componenti σ e $\boldsymbol{\tau}$ del tensore delle tensioni e sulla componente d dello spostamento elettrico, allo scopo di compensare l'errore di approssimazione che le prime ipotesi introducono. Dalle ipotesi sulle deformazioni e sul campo elettrico si ricava quindi, per integrazione, la forma più generale del campo di spostamenti $\mathbf{s}$ e del potenziale elettrico ϕ con esse compatibili.

Poichè non si fanno in nessun caso ipotesi a priori sulle componenti di $\overline{\mathbf{T}}$ e $\overline{\mathbf{d}}$, si impongono immediatamente le condizioni di stazionarietà di $\mathcal{H}_m$ rispetto a $\overline{\mathbf{T}}_p$ e $\overline{\mathbf{d}}_d$ che implicano:

$$\begin{aligned}
(\overline{T}_p)_{11} &= \frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}(\hat{\varepsilon}_{33}\sigma_p - \overline{e}_{31}d_p) + \hat{c}_{11}(\overline{s}_p)_{1,x_1} - \hat{c}_{12}(\overline{s}_p)_{2,x_2} \\
(\overline{T}_p)_{22} &= \frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}(\hat{\varepsilon}_{33}\sigma_p - \overline{e}_{31}d_p) + \hat{c}_{11}(\overline{s}_p)_{2,x_2} - \hat{c}_{12}(\overline{s}_p)_{1,x_1} \\
(\overline{T}_p)_{12} &= c_{66}\frac{(\overline{s}_p)_{1,x_2} + (\overline{s}_p)_{2,x_1}}{2}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

e

$$\overline{\mathbf{d}}_d = \frac{e_{15}}{c_{44}}\boldsymbol{\tau}_d - \overline{\varepsilon}_{11}\nabla\phi_d \tag{3.11}$$

essendo

$$\begin{aligned}
&\overline{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} + (e_{33})^2/c_{33} && \hat{\varepsilon}_{33} = (c_{13}\varepsilon_{33} + e_{31}e_{33})/c_{33} \\
&\overline{e}_{31} = e_{31} - (e_{33}c_{13})/c_{33} && \overline{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} + e_{15}^2/c_{44} \\
&\overline{c}_{11} = c_{11} - (c_{13})^2/c_{33} && \overline{c}_{12} = c_{12} - (c_{13})^2/c_{33} \\
&\hat{c}_{11} = \overline{c}_{11} + (\overline{e}_{31})^2/\overline{\varepsilon}_{33} && \hat{c}_{12} = \overline{c}_{12} + (\overline{e}_{31})^2/\overline{\varepsilon}_{33} \\
&c_{66} = c_{11} - c_{12} = \overline{c}_{11} - \overline{c}_{12} = \hat{c}_{11} - \hat{c}_{12}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sostituendo le (3.10) e la (3.11) in $\mathcal{H}_m$ si ottiene il funzionale $\mathcal{H}_m^r$ delle sole variabili σ_p, $\boldsymbol{\tau}_d$, d_p, $\overline{\mathbf{s}}_p$, s_d e ϕ_d:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m^r \;=\; & \frac{1}{2}\int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2}[2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\overline{\mathbf{s}}_p||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{s}}_p)^2 - \frac{\varepsilon_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma_p^2 + \frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}d_p^2 + 2\frac{\hat{\varepsilon}_{33}}{\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma_p\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{s}}_p + \\
- \; & 2\frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}}d_p(\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{s}}_p) - 2\frac{e_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma_p d_p - \frac{1}{c_{44}}||\boldsymbol{\tau}_d||^2 - \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\phi_d||^2 + 2\frac{e_{15}}{c_{44}}\boldsymbol{\tau}_d\cdot\nabla\phi_d]\,dx_3\,da + \\
+ \; & \int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2}[\boldsymbol{\tau}_d\cdot(\mathbf{s}_p' + \nabla s_d) + \sigma_p s_d' + d_p\phi_d']\,dx_3\,da - \int_\Omega[2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot\overline{\mathbf{s}}_p(\cdot,h/2) + 2p_d s_d(\cdot,h/2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 2\omega_d\phi_d(\cdot, h/2)]\, da + \int_{\partial\Omega_\omega}\int_{-h/2}^{h/2} \omega_d^l \phi_d \, dx_3\, dl - \int_{\partial\Omega_f}\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{p}}_p^l \cdot \overline{\mathbf{s}}_p + p_d^l s_d]\, dx_3\, dl + \\
&- \quad \int_{\partial\Omega_s}\int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau}_d \cdot \mathbf{n}(s_d - s_d^l)\, dx_3\, dl - \int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{b}}_p \cdot \overline{\mathbf{s}}_p + b_d\, s_d - \xi_d\, \phi_d]\, dx_3\, da
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

definito sulla varietà:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_p &= \overline{\mathbf{s}}_p^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
\phi_d &= \phi_d^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_f$ rispetto a $\overline{\mathbf{T}}_d$ e $\overline{\mathbf{d}}_p$ si ottengono relazioni analoghe alle (3.10) e (3.11) nelle quali gli indici d e p sono scambiati fra loro; sostituendo le espressioni ottenute per $\overline{\mathbf{T}}_d$ e $\overline{\mathbf{d}}_p$ in $\mathcal{H}_f$ si ottiene l'espressione di $\mathcal{H}_f^r$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_f^r \;=\; & \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\overline{\mathbf{s}}_d||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{s}}_d)^2 - \frac{\varepsilon_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma_d^2 + \frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}} d_d^2 + 2\frac{\hat{\varepsilon}_{33}}{\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma_d \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{s}}_d + \\
- \; & 2\frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}} d_d(\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{s}}_d) - 2\frac{e_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma_d d_d - \frac{1}{c_{44}}||\boldsymbol{\tau}_p||^2 - \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\phi_p||^2 + 2\frac{e_{15}}{c_{44}}\boldsymbol{\tau}_p \cdot \nabla\phi_p]\, dx_3\, da + \\
+ \; & \int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [\boldsymbol{\tau}_p \cdot (\mathbf{s}_d' + \nabla s_p) + \sigma_d s_p' + d_d \phi_p']\, dx_3\, da - \int_\Omega [2\overline{\mathbf{p}}_d \cdot \overline{\mathbf{s}}_d(\cdot, h/2) + 2p_p s_p(\cdot, h/2) + \\
- \; & 2\omega_p\phi_p(\cdot, h/2)]\, da + \int_{\partial\Omega_\omega}\int_{-h/2}^{h/2} \omega_p^l \phi_p \, dx_3\, dl - \int_{\partial\Omega_f}\int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{p}}_d^l \cdot \overline{\mathbf{s}}_d + p_p^l s_p]\, dx_3\, dl + \\
- \; & \int_{\partial\Omega_s}\int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau}_p \cdot \mathbf{n}(s_p - s_p^l)\, dx_3\, da - \int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} [\overline{\mathbf{b}}_d \cdot \overline{\mathbf{s}}_d + b_p\, s_p - \xi_p\, \phi_p]\, dx_3\, da
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

definito sulla varietà:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_d &= \overline{\mathbf{s}}_d^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
\phi_p &= \phi_p^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Ai partire dai funzionali $\mathcal{H}_m^r$ e $\mathcal{H}_f^r$, che sono soltanto conseguenza della teoria di Voigt applicata a corpi piezoelettrici a forma di piastra, si possono ora formulare ipotesi sulle variabili da cui dipendono per ottenere differenti teorie di piastra piezoelettrica.

3.4 Teorie alla Kirchhoff-Love

In questo paragrafo sono dedotte due teorie per il comportamento flessionale di piastra piezoelettrica alla Kirchhoff-Love e due teorie per il comportamento membranale. Per teoria di piastra piezoelettrica alla Kirchhoff-Love si intende qui un modello di piastra nel quale è nullo lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$.

3.4.1 Teoria per il comportamento membranale

La teoria di membrana piezoelettrica alla Kirchhoff-Love qui dedotta è esposta ed utilizzata in diversi lavori come [91, 101, 102, 103, 18, 7], nei quali le stesse equazioni di equilibrio sono dedotte con differenti approcci. Nel ricavare tale teoria mediante l'approccio variazionale prima descritto si formulano le seguenti ipotesi sul tensore delle deformazioni e sul vettore campo elettrico:

i') L'elongazione ε_p delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ è nullo.

iii') La componente trasversale e_p del campo elettrico non dipende da x_3.

In conseguenza di tali ipotesi il campo di spostamenti $(\overline{\mathbf{s}}_p, s_d)$ ed il potenziale elettrico ϕ_d hanno la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{s}}_p(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{u}(x_1, x_2) \\ s_d(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ \phi_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3\chi(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

dove $\mathbf{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ è lo spostamento parallelo al piano medio Ω della piastra e $(-\chi) \in \mathbf{R}$ è la componente del campo elettrico lungo $\boldsymbol{\nu}_3$. Le funzioni $\mathbf{u}$ e χ sono le incognite del problema.

Si formulano poi le seguenti ipotesi di carattere statico, duali delle ipotesi di carattere cinematico *i'*, *ii'* e *iii'* [18]:

i'') La tensione normale σ_p sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_d$ sono nulle.

iii'') La componente trasversale d_p dello spostamento elettrico non dipende da x_3 ($d_p = d(x_1, x_2)$).

L'ipotesi *iii''*, qui riportata per uniformità di trattazione, non è essenziale in quanto è implicata dalla condizione di stazionarietà di $\mathcal{H}^r_m$ rispetto a d_p, insieme con le (3.17) e la *i''*.

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}_m^r$ diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m^r &= \frac{1}{2}h\int_\Omega [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2]\,da - \overline{\varepsilon}_{11}\frac{h^3}{24}\int_\Omega ||\nabla\chi||^2\,da + \\
&+ \frac{1}{2}h\int_\Omega [\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}d^2 + 2d\chi - 2\frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}}d\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}]\,da - \int_\Omega [2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot\mathbf{u} - h\omega_d\chi]\,da + \\
&+ \int_{\partial\Omega_\omega}\mu^l\chi\,dl - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{f}^l\cdot\mathbf{u})\,dl - \int_\Omega [\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \mu\chi]\,da
\end{aligned} \tag{3.18}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \int_{-h/2}^{h/2}\overline{\mathbf{b}}_p\,dx_3 \\
\mathbf{f}^l &= \int_{-h/2}^{h/2}\overline{\mathbf{p}}_p^l\,dx_3 \\
\mu &= \int_{-h/2}^{h/2}x_3\xi_d\,dx_3 \\
\mu^l &= \int_{-h/2}^{h/2}x_3\omega_d^l\,dx_3
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Il funzionale $\mathcal{H}_m^r$ è definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{u}^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
\chi &= \chi^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dove $\mathbf{u}^l$ e χ^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_p^l$, s_d^l e ϕ_d^l secondo le equazioni:

$$\overline{\mathbf{s}}_p^l = \mathbf{u}^l(x_1,x_2), \qquad s_d^l = 0, \qquad \phi_d^l = x_3\chi^l(x_1,x_2) \tag{3.21}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_m^r$ rispetto a d si ottiene:

$$d = \overline{e}_{31}\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \overline{\varepsilon}_{33}\chi \tag{3.22}$$

Sostituendo la (3.22) nella (3.18) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m &= \frac{h}{2}\overline{c}_{11}\int_\Omega [(1-\overline{\nu})||\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}||^2 + \overline{\nu}(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2]\,da - \frac{h}{2}\overline{\varepsilon}_{33}\int_\Omega \chi^2\,da + \\
&- \frac{h^3}{24}\overline{\varepsilon}_{11}\int_\Omega \nabla\chi^2\,da + h\,\overline{e}_{31}\int_\Omega \chi\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,da - \int_\Omega [2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot\mathbf{u} - h\omega_d\chi]\,da + \\
&+ \int_{\partial\Omega_\omega}\mu^l\chi\,dl - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{f}^l\cdot\mathbf{u})\,dl - \int_\Omega [\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \mu\chi]\,da
\end{aligned} \tag{3.23}$$

essendo $\overline{\nu} = \overline{c}_{12}/\overline{c}_{11}$. Il funzionale $\mathcal{E}_m$ è definito sulla varietà (3.20).

Il primo integrale nella (3.23) è l'energia di deformazione estensionale, il secondo integrale è l'energia elettrostatica dovuta al campo elettrico lungo $\boldsymbol{\nu}_3$, il terzo integrale è l'energia elettrostatica dovuta al campo elettrico parallelo a Ω mentre il quarto integrale è l'energia dovuta all'accoppiamento elettromeccanico presente nel materiale piezoelettrico.

Equazioni di equilibrio

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a $\mathbf{u}$ si ottiene:

$$-h\overline{c}_{11}\mathrm{div}\,[(1-\overline{\nu})\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}+\overline{\nu}\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}]-h\overline{e}_{31}\nabla\chi=\mathbf{f}+\overline{\mathbf{p}}^{+}+\overline{\mathbf{p}}^{-}\qquad\text{in}\quad\Omega \tag{3.24}$$

Nel caso di materiale elastico isotropo la (3.24) diventa l'equazione classica della lastra elastica, risultando in tale caso nullo il coefficiente e_{31} che determina l'accoppiamento tra $\mathbf{u}$ e χ, mentre $h\overline{c}_{11}$=$hE/(1-\nu^2)$, essendo E e ν, rispettivamente, il modulo di Young e di Poisson del materiale elastico. Alla (3.24) è associata la seguente condizione al contorno:

$$h\,\overline{c}_{11}[(1-\overline{\nu})\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}+\overline{\nu}\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}][\mathbf{n}]+h\,\overline{e}_{31}\chi\,\mathbf{n}=\mathbf{f}^{l}\qquad\text{su}\quad\partial\Omega_f \tag{3.25}$$

Infine, dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a χ si ottiene:

$$\frac{h^3\overline{\varepsilon}_{11}}{12}\Delta\chi+h(\overline{e}_{31}\mathrm{div}\,\mathbf{u}-\overline{\varepsilon}_{33}\chi)=-\mu-\frac{h}{2}(\omega^{+}-\omega^{-})\qquad\text{in}\quad\Omega \tag{3.26}$$

Alla (3.26) è associata la seguente condizione al contorno:

$$-\frac{h^3\overline{\varepsilon}_{11}}{12}\nabla\chi\cdot\mathbf{n}=-\mu^{l}\qquad\text{su}\quad\partial\Omega_\omega \tag{3.27}$$

3.4.2 Teoria per il comportamento membranale senza vincoli sulle tensioni

In questo paragrafo, a titolo di esempio, si vuole ricavare una teoria analoga a quella esposta nel paragrafo 3.4.1, questa volta senza imporre vincoli sulle tensioni e sullo spostamento elettrico. In tal modo si ottiene un funzionale dell'energia potenziale totale formalmente analogo a quello ricavato in 3.4.1, ma con differenti coefficienti e dunque differenti valori delle rigidezze meccaniche. Per brevità, vista l'analogia formale con quanto detto in 3.4.1, le equazioni di equilibrio non sono riportate.

Assumendo nel funzionale di Hellinger-Prange-Reissner $\mathcal{H}_m^r$ soltanto le ipotesi sul campo di spostamenti e sul potenziale elettrico formulate nel paragrafo precedente, ed imponendo quindi le sue condizioni di stazionarietà rispetto alle variabili σ_p, $\boldsymbol{\tau}_d$ e d_p, si ottiene

la seguente espressione del funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}_m$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m &= \frac{h}{2}c_{11}\int_\Omega[(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}||^2+\nu(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2]\,da-\frac{h}{2}\varepsilon_{33}\int_\Omega\chi^2\,da+\\
&- \frac{h^3}{24}\varepsilon_{11}\int_\Omega\nabla\chi^2\,da+h\,e_{31}\int_\Omega\chi\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,da-\int_\Omega[2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot\mathbf{u}-h\omega_d\chi]\,da+\\
&+ \int_{\partial\Omega_\omega}\mu^l\chi\,dl-\int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{f}^l\cdot\mathbf{u})\,dl-\int_\Omega[\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}-\mu\chi]\,da
\end{aligned}\tag{3.28}$$

dove $\nu = c_{12}/c_{11}$. Il funzionale $\mathcal{E}_m$ è definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}=\mathbf{u}^l \quad &\text{su} \quad \partial\Omega_s\\
\chi=\chi^l \quad &\text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned}\tag{3.29}$$

A differenza del funzionale dell'energia potenziale totale (3.23), nella (3.28) non compaiono le costanti (3.12). Ciò porta a rigidezze meccaniche differenti da quelle relative al modello descritto nel paragrafo 3.4.1. Le rigidezza relative al presente modello risultano errate, come mostra il confronto con la soluzione tridimensionale analitica presentato nel paragrafo 3.6.

3.4.3 Teoria arricchita per il comportamento membranale

La teoria per il comportamento membranale esposta nel paragrafo 3.4.1 considera nulla l'elongazione ε_p delle fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ (ipotesi i' in 3.4.1). Rimuovendo tale ipotesi si può ottenere una teoria di membrana piezoelettrica più ricca, che considera l'elongazione ε_p delle fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ mantenendo l'ipotesi di scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d$ nullo (ipotesi di Kirchhoff-Love). Tale teoria, per quanto concerne la conoscenza dell'autore, non esiste in letteratura.

Riassumendo, si formulano le seguenti ipotesi sul tensore delle deformazioni e sul campo elettrico:

i') L'elongazione ε_p delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ è costante.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ è nullo.

iii') La componente trasversale e_p del campo elettrico non dipende da x_3.

In conseguenza di tali ipotesi il campo di spostamenti $(\overline{\mathbf{s}}_p, s_d)$ ed il potenziale elettrico ϕ_d hanno la seguente rappresentazione:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_p(x_1,x_2,x_3) &= \tilde{\mathbf{u}}(x_1,x_2) - \frac{h^2}{12}[6(x_3/h)^2 - 1/2]\nabla\alpha(x_1,x_2) \\
s_d(x_1,x_2,x_3) &= x_3\alpha(x_1,x_2) \\
\phi_d(x_1,x_2,x_3) &= x_3\chi(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

dove $\tilde{\mathbf{u}}$ e la media nello spessore dello spostamento $\overline{\mathbf{s}}_p$ nel piano mentre α è l'elongazione delle fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$. Le funzioni $\tilde{\mathbf{u}}$, χ e α sono le incognite del problema.

Si formulano poi le seguenti ipotesi di carattere statico, duali delle ipotesi di carattere cinematico i', ii' e iii':

i'') La tensione normale σ_p sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ non dipende da x_3 ($\sigma_p = \sigma(x_1,x_2)$).

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_d$ sono nulle.

iii'') La componente trasversale d_p dello spostamento elettrico non dipende da x_3 ($d_p = d(x_1,x_2)$).

Anche nel presente caso, come per la teoria di membrana esposta nel paragrafo 3.4.1, l'ipotesi iii'' non è essenziale.

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}^r_m$ diventa:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^r_m \;=\;& \frac{h}{2}\int_\Omega [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}}||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}})^2]\,da + \frac{h^5}{1440}\int_\Omega [2c_{66}||\nabla\nabla\alpha||^2 + \hat{c}_{12}(\Delta\alpha)^2]\,da + \\
+\;& \frac{h}{2}\int_\Omega \left(2\frac{\hat{\varepsilon}_{33}}{\overline{\varepsilon}_{33}}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}\,\sigma - \frac{\varepsilon_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma^2 + 2\sigma\,\alpha\right)\,da - \frac{h^3}{24}\int_\Omega \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\chi||^2\,da + \\
+\;& \frac{h}{2}\int_\Omega \left(\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}d^2 + 2d\,\chi\right)\,da - h\int_\Omega \left(\frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}}d\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + \frac{e_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma\,d\right)\,da + \\
-\;& \int_\Omega (2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot(\tilde{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{12}\nabla\alpha) + p_d h\,\alpha - \omega_d h\,\chi)\,da - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{f}^l\cdot\tilde{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{12}\mathbf{l}^l\cdot\nabla\alpha + m^l\alpha)\,dl + \\
+\;& \int_{\partial\Omega_\omega}\mu^l\chi\,dl - \int_\Omega(\mathbf{f}\cdot\tilde{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{12}\mathbf{l}\cdot\nabla\alpha) + m\,\alpha - \mu\,\chi)\,da
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

essendo:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3\, b_d\, dx_3 \\
m^l &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3\, b_d^l\, dx_3 \\
\mathbf{l} &= \int_{-h/2}^{h/2} [6(x_3/h)^2 - 1/2]\overline{\mathbf{b}}_p\, dx_3 \\
\mathbf{l}^l &= \int_{-h/2}^{h/2} [6(x_3/h)^2 - 1/2]\overline{\mathbf{b}}_p^l\, dx_3
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Il funzionale $\mathcal{H}_m^r$ è definito sulla varietà:

$$
\begin{array}{llll}
\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^l & \alpha = \alpha^l & \dfrac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}} = \delta^l & \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
\chi = \chi^l & & & \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{array}
\tag{3.33}
$$

dove $\tilde{\mathbf{u}}^l$, α^l, δ^l e χ^l particolarizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_p^l$, s_d^l e ϕ_d^l secondo le equazioni:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{s}}_p^l = \tilde{\mathbf{u}}^l(x_1, x_2) - \frac{h^2}{12}[6(x_3/h)^2 - 1/2](\delta^l(x_1, x_2)\mathbf{n} + \partial\alpha^l/\partial\mathbf{t}(x_1, x_2)\mathbf{t}), \\
&s_d^l = x_3\alpha^l(x_1, x_2), \qquad \phi_d^l = x_3\chi^l(x_1, x_2)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Dalle condizioni di stazionarietà di $\mathcal{H}_m^r$ rispetto a σ e d si ricavano l'espressione di σ:

$$
\sigma = c_{13}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + c_{33}\alpha + e_{33}\chi \tag{3.35}
$$

e l'espressione di d:

$$
d = -\varepsilon_{33}\chi + e_{31}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\alpha \tag{3.36}
$$

Sostituendo la (3.35) e la (3.36) nella (3.31) si ottiene l'espressione dell'energia potenziale $\mathcal{E}_m$, che si scrive come:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_m \;=\;& \frac{h}{2}c_{11}\int_\Omega [(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}})^2]\, da + \\
+\;& \frac{h^5}{1440}\hat{c}_{11}\int_\Omega [(1-\hat{\nu})||\nabla\nabla\alpha||^2 + \hat{\nu}(\Delta\alpha)^2]\, da + \frac{h}{2}\int_\Omega (c_{33}\alpha^2 + 2c_{13}\alpha\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}})\, da + \\
-\;& \frac{h}{2}\int_\Omega \varepsilon_{33}\chi^2\, da - \frac{h^3}{24}\int_\Omega \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\chi||^2\, da + h\int_\Omega (e_{31}\chi\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\chi\,\alpha)\, da + \\
-\;& \int_\Omega (2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot(\tilde{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{12}\nabla\alpha) + p_d h\,\alpha - \omega_d h\,\chi)\, da - \int_{\partial\Omega_f} (\mathbf{f}^l\cdot\tilde{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{12}\mathbf{l}^l\cdot\nabla\alpha + m^l\alpha)\, dl + \\
+\;& \int_{\partial\Omega_\omega} \mu^l\chi\, dl - \int_\Omega (\mathbf{f}\cdot\tilde{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{12}\mathbf{l}\cdot\nabla\alpha) + m\,\alpha - \mu\,\chi)\, da
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

essendo $\hat{\nu} = \hat{c}_{12}/\hat{c}_{12}$. Il funzionale $\mathcal{E}_m$ è definito sulla varietà (3.33). I primi tre integrali nella (3.37) sono l'energia di deformazione, il quarto ed il quinto sono l'energia elettrostatica ed infine, il sesto è l'energia dovuta all'accoppiamento piezoelettrico.

Rispetto alla teoria di membrana descritta nel paragrafo 3.4.1 si ha qui un nuovo termine di accoppiamento elettromeccanico che esprime il legame, tramite il coefficiente e_{33}, tra il campo elettrico trasversale $(-\chi)$ e l'elongazione α delle fibre trasversali.

Equazioni di equilibrio

La stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a $\tilde{\mathbf{u}}$ fornisce la seguente equazione:

$$-hc_{11}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}] - h(c_{13}\nabla\alpha + e_{31}\nabla\chi) = \mathbf{f} + \overline{\mathbf{p}}^{+} + \overline{\mathbf{p}}^{-} \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.38}$$

Alla (3.38) è associata la seguente condizione al contorno:

$$hc_{11}[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}][\mathbf{n}] + h(c_{13}\alpha + e_{31}\chi)\mathbf{n} = \mathbf{f}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.39}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a α si ottiene:

$$\begin{aligned} &\frac{h^5}{720}\hat{c}_{11}(\Delta\Delta\alpha) + h(c_{33}\alpha + c_{13}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\chi) = m + \frac{h}{2}(p^+ - p^-) + \\ + \quad &\frac{h^2}{12}\mathrm{div}\,(\overline{\mathbf{p}}^{+} + \overline{\mathbf{p}}^{-}) + \frac{h^2}{12}\mathrm{div}\,\mathbf{l} \qquad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{3.40}$$

con la condizione al contorno associata:

$$\begin{aligned} &-\frac{h^5}{720}\hat{c}_{11}[(1-\hat{\nu})\nabla\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{t}}[\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t} + \nabla\Delta\alpha\cdot\mathbf{n}] = \\ &m^l + \frac{h^2}{12}\frac{\partial\mathbf{l}^l}{\partial\mathbf{t}}\cdot\mathbf{t} - \frac{h^2}{12}(\overline{\mathbf{p}}^{+} + \overline{\mathbf{p}}^{-})\cdot\mathbf{n} - \frac{h^2}{12}\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}, \\ &\frac{h^5}{720}\hat{c}_{11}[(1-\hat{\nu})\nabla\nabla\alpha[\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n} + \hat{\nu}\Delta\alpha] = -\frac{h^2}{12}\mathbf{l}^l\cdot\mathbf{n} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \end{aligned} \tag{3.41}$$

Infine dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a χ si ottiene:

$$\frac{h^3}{12}\overline{\varepsilon}_{11}\Delta\chi + h(-\varepsilon_{33}\chi + e_{31}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\alpha) = -\mu - \frac{h}{2}(\omega^+ - \omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.42}$$

Alla (3.42) è associata la condizione al contorno:

$$-\frac{h^3}{12}\overline{\varepsilon}_{11}\nabla\chi\cdot\mathbf{n} = -\mu^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.43}$$

3.4.4 Teoria per il comportamento flessionale

La teoria qui illustrata adotta tutte le ipotesi cinematiche della classica teoria di Kirchhoff-Love insieme con l'ipotesi che sia nulla la tensione lungo $\boldsymbol{\nu}_3$ [90, 101]. Si assume poi un potenziale elettrico costante nello spessore della piastra. Si deduce così l'equazione di equilibrio a flessione (3.49), ricavata già in [90, 101] e in [74] e coincidente con quella che si ottiene nel caso di piastre puramente elastiche. L'equazione ottenuta per l'equilibrio elettrico (3.51) è analoga a quella ottenuta in [74]; tale equazione non compare in [90, 101], dove, nella rappresentazione del potenziale elettrico, la componente costante nello spessore è trascurata.

Riassumendo, si formulano le seguenti ipotesi sul tensore delle deformazioni e sul campo elettrico:

i') L'elongazione ε_d delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_p$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ è nullo.

iii') La componente trasversale e_d del campo elettrico è nulla.

In conseguenza delle ipotesi i', ii' e iii', il campo di spostamenti $(\overline{\mathbf{s}}_d, s_p)$ ed il potenziale elettrico ϕ_p hanno la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{s}}_p(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \nabla w(x_1, x_2) \\ s_d(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \\ \phi_d(x_1, x_2, x_3) &= \eta(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.44}$$

dove $w \in \mathbf{R}$ è lo spostamento trasversale del piano medio Ω della piastra e $(-\nabla w)$ sono le rotazioni delle fibre parallele a x_3; in particolare $(-w_{,x_1})$ è la rotazione di tali fibre intorno a x_2 mentre $(w_{,x_2})$ è la rotazione intorno a x_1. Inoltre $\eta \in \mathbf{R}$ è il potenziale elettrico costante nello spessore. Le funzioni w e η sono le incognite del problema.

Si fanno poi le seguenti ipotesi di carattere statico, duali delle i', ii' e iii':

i'') La tensione normale σ_d sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_p$ sono nulle.

iii'') La componente trasversale d_d dello spostamento elettrico è nulla.

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ diventa:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_f^r &= \frac{h^3}{24}\int_\Omega [2c_{66}||\nabla\nabla w||^2 + \hat{c}_{12}(\Delta w)^2]\,da - \frac{h}{2}\int_\Omega \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\eta||^2\,da + \\ &- \int_\Omega [-h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\nabla w + 2p_p w - 2\omega_p\eta]\,da - \int_{\partial\Omega_f}(-\mathbf{m}^l\cdot\nabla w + q^l\,w)\,dl + \\ &+ \int_{\partial\Omega_\omega}\psi^l\eta\,dl - \int_\Omega[-\mathbf{m}\cdot\nabla w + q\,w - \psi\eta]\,da \end{aligned} \tag{3.45}$$

essendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3\overline{\mathbf{b}}_d\,dx_3 \\ q &= \int_{-h/2}^{h/2} b_p\,dx_3 \\ \mathbf{m}^l &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3\overline{\mathbf{p}}_d^l\,dx_3 \\ q^l &= \int_{-h/2}^{h/2} b_p^l\,dx_3 \\ \psi &= \int_{-h/2}^{h/2} \xi_p\,dx_3 \\ \psi^l &= \int_{-h/2}^{h/2} \omega_p^l\,dx_3\end{aligned} \tag{3.46}$$

Il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ è definito sulla varietà

$$\begin{aligned} w = w_l,\quad \frac{\partial w}{\partial\mathbf{n}} = \lambda^l \qquad &\text{su} \quad \partial\Omega_s \\ \eta = \eta^l \qquad &\text{su} \quad \partial\Omega_\phi \end{aligned} \tag{3.47}$$

dove w^l, λ^l e η^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_d^l$, s_p^l e ϕ_p^l secondo le seguenti equazioni:

$$\overline{\mathbf{s}}_d^l = -x_3(\lambda^l(x_1,x_2)\mathbf{n} + \partial w^l/\partial\mathbf{t}(x_1,x_2)\mathbf{t}), \qquad s_p^l = w^l(x_1,x_2), \qquad \phi_p^l = \eta^l(x_1,x_2) \tag{3.48}$$

Il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ coincide in questo caso con il funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}_f$. Il primo integrale nella (3.45) è l'energia di deformazione flessionale mentre il secondo integrale è l'energia elettrostatica associata al campo elettrico nel piano ω.

Equazioni di equilibrio

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a w si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$\frac{h^3}{12}\hat{c}_{11}(\Delta\Delta w) = \operatorname{div}\mathbf{m} + \frac{h}{2}\operatorname{div}(\overline{\mathbf{p}}^+ - \overline{\mathbf{p}}^-) + q + p^+ + p^- \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.49}$$

Alla (3.49) sono associate le seguenti condizioni al contorno:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h^3}{12}\hat{c}_{11}[(1-\hat{\nu})\nabla\nabla\frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}}[\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}+\nabla\Delta w\cdot\mathbf{n}] = \\
&q^l+\frac{\partial \mathbf{m}^l}{\partial \mathbf{t}}\cdot\mathbf{t}-\frac{h}{2}(\overline{\mathbf{p}}^+-\overline{\mathbf{p}}^-)\cdot\mathbf{n}-\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}, \\
&\frac{h^3}{12}\hat{c}_{11}[(1-\hat{\nu})\nabla\nabla w[\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n}+\hat{\nu}\Delta w] = -\mathbf{m}^l\cdot\mathbf{n} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a η si ottiene:

$$
h\overline{\varepsilon}_{11}\Delta\eta = -\psi-(\omega^+ + \omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.51}
$$

Alla (3.51) è associata la condizione al contorno:

$$
-h\overline{\varepsilon}_{11}\nabla\eta\cdot\mathbf{n} = -\psi^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.52}
$$

Come risulta evidente, la presente teoria non riesce a modellare l'accoppiamento tra le variabili elettriche e meccaniche presente in un materiale piezoelettrico; le equazioni di equilibrio meccanico ed elettrico (3.49) e (3.51), rispettivamente, sono infatti tra loro disaccoppiate.

3.4.5 Teoria arricchita per il comportamento flessionale

Per tenere conto dell'accoppiamento elettromeccanico presente in un materiale piezoelettrico ed ottenere quindi una teoria di piastra piezoelettrica alla Kirchhoff-Love più accurata, si arricchisce ora la rappresentazione del potenziale elettrico; in particolare si sceglie un potenziale elettrico quadratico nello spessore per ottenere una teoria analoga a quella in [103].

Si formulano dunque le seguenti ipotesi sul tensore di deformazione e sul campo elettrico:

i') L'elongazione ε_d delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_p$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ è nullo.

iii') La componente trasversale e_d del campo elettrico dipende linearmente da x_3.

In conseguenza delle ipotesi i', ii' e iii' il campo di spostamenti $(\overline{\mathbf{s}}_d, s_p)$ e il potenziale elettrico ϕ_p hanno la seguente rappresentazione:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_p(x_1,x_2,x_3) &= -x_3\nabla w(x_1,x_2)\\
s_d(x_1,x_2,x_3) &= w(x_1,x_2)\\
\phi_d(x_1,x_2,x_3) &= \tilde{\eta}(x_1,x_2) + [6(x_3/h)^2 - 1/2]\upsilon(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

dove $\tilde{\eta} \in \mathbf{R}$ è la media del potenziale elettrico nello spessore mentre $\upsilon \in \mathbf{R}$ è lo scarto dal valore medio del potenziale elettrico in corrispondenza delle facce della piastra. Le funzioni w, $\tilde{\eta}$ e υ sono le incognite del problema.

Si fanno poi le seguenti ipotesi di carattere statico, duali delle i', ii' e iii':

i'') La tensione normale σ_d sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_p$ sono nulle.

iii'') La componente trasversale d_d dello spostamento elettrico è lineare rispetto a x_3 ($d_p = x_3\, d(x_1,x_2)$).

L'ipotesi iii'', qui riportata per uniformità di trattazione, non è essenziale in quanto è implicata dalla condizione di stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a d_d, insieme con le (3.53) e la i''.

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ diventa:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_f^r \;=\;& \frac{h^3}{24}\int_\Omega [2c_{66}||\nabla\nabla w||^2 + \hat{c}_{12}(\Delta w)^2]\,da - \frac{h}{2}\int_\Omega [\overline{\varepsilon}_{11}(||\nabla\tilde{\eta}||^2 + \frac{1}{5}||\nabla\upsilon||^2) - 2d\,\upsilon]\,da +\\
+\;& \frac{h^3}{24}\int_\Omega \frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}d^2\,da + \frac{h^3}{12}\int_\Omega \frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}}d\,\Delta w\,da - \int_\Omega [-h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\nabla w + 2p_p w - 2\omega_p(\tilde{\eta}+\upsilon)]\,da +\\
-\;& \int_{\partial\Omega_f}(-\mathbf{m}^l\cdot\nabla w + q^l\,w)\,dl + \int_{\partial\Omega_\omega}(\psi^l\tilde{\eta} + \iota^l\upsilon)\,dl +\\
-\;& \int_\Omega [-\mathbf{m}\cdot\nabla w + q\,w - (\psi\tilde{\eta} + \iota\upsilon)]\,da
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

essendo:

$$
\begin{aligned}
\iota &= \int_{-h/2}^{h/2} \xi_p(6(x_3/h)^2 - 1/2)\,dx_3\\
\iota^l &= \int_{-h/2}^{h/2} \omega_p^l(6(x_3/h)^2 - 1/2)\,dx_3
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ è definito sulla varietà:

$$
\begin{aligned}
&w = w_l, \qquad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \lambda^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
&\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^l, \qquad \upsilon = \upsilon^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

dove w^l, λ^l, $\tilde{\eta}^l$ e υ^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_d^l$, s_p^l e ϕ_p^l secondo le seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{s}}_d^l = -x_3(\lambda^l(x_1,x_2)\mathbf{n} + \partial w^l/\partial\mathbf{t}(x_1,x_2)\mathbf{t}), \qquad s_p^l = w^l(x_1,x_2), \\
&\phi_p^l = \tilde{\eta}^l(x_1,x_2) + [6(x_3/h)^2 - 1/2]\upsilon^l(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a d si ha:

$$
d = -\overline{e}_{31}\Delta w - \frac{12}{h^2}\overline{\varepsilon}_{33}\upsilon \tag{3.58}
$$

Sostituendo la (3.58) nella (3.54) si ottiene la seguente espressione del funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_f \;=\; & \frac{h^3}{24}\overline{c}_{11}\int_\Omega [(1-\overline{\nu})||\nabla\nabla w||^2 + \overline{\nu}(\Delta w)^2]\, da - \frac{h}{2}\int_\Omega \overline{\varepsilon}_{11}\left(||\nabla\tilde{\eta}||^2 + \frac{1}{5}||\nabla\upsilon||^2\right) da + \\
- & \int_\Omega \frac{6}{h}\overline{\varepsilon}_{33}\upsilon^2\, da - h\int_\Omega \overline{e}_{31}\Delta w\upsilon\, da - \int_\Omega [-h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\nabla w + 2p_p w - 2\omega_p(\tilde{\eta}+\upsilon)]\, da \\
- & \int_{\partial\Omega_f}(-\mathbf{m}^l\cdot\nabla w + q^l\, w)\, dl + \int_{\partial\Omega_\omega}(\psi^l\tilde{\eta} + \iota^l\upsilon)\, dl + \\
- & \int_\Omega [-\mathbf{m}\cdot\nabla w + q\, w - (\psi\tilde{\eta} + \iota\upsilon)]\, da
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

definito sulla varietà (3.56). Il primo integrale nella (3.59) è l'energia di deformazione flessionale, il secondo integrale è l'energia elettrostatica associata al campo elettrico nel piano Ω, il terzo integrale è l'energia elettrostatica associata al campo elettrico trasversale mentre il quarto integrale, non presente nella teoria esposta nel paragrafo 3.4.4, è l'energia dovuta all'accoppiamento elettromeccanico.

L'accoppiamento elettromeccanico si stabilisce così, tramite il coefficiente piezoelettrico $\overline{e}_{31}$, tra la parte quadratica υ del potenziale elettrico, legata al campo elettrico trasversale lineare nello spessore, e la divergenza delle rotazioni $(-\Delta w)$, legata alla deformazione nel piano lineare nello spessore.

Equazioni di equilibrio

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a w si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$
\frac{h^3}{12}\overline{c}_{11}(\Delta\Delta w) - h\overline{e}_{31}\Delta\upsilon = \operatorname{div}\mathbf{m} + \frac{h}{2}\operatorname{div}(\overline{\mathbf{p}}^+ - \overline{\mathbf{p}}^-) + q + p^+ + p^- \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.60}
$$

Alla (3.60) sono associate le seguenti condizioni al contorno:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h^3}{12}\overline{c}_{11}[(1-\overline{\nu})\nabla\nabla\frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}}[\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}+\nabla\Delta w\cdot\mathbf{n}]+h\overline{e}_{31}\nabla\upsilon\cdot\mathbf{n}= \\
&q^l+\frac{\partial \mathbf{m}^l}{\partial \mathbf{t}}\cdot\mathbf{t}-\frac{h}{2}(\overline{\mathbf{p}}^+-\overline{\mathbf{p}}^-)\cdot\mathbf{n}-\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}, \\
&\frac{h^3}{12}\overline{c}_{11}[(1-\overline{\nu})\nabla\nabla w[\mathbf{n}]\cdot\mathbf{n}+\overline{\nu}\Delta w]-h\overline{e}_{31}\upsilon=-\mathbf{m}^l\cdot\mathbf{n} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a $\tilde{\eta}$ si ottiene:

$$
h\overline{\varepsilon}_{11}\Delta\tilde{\eta}=-\psi-(\omega^++\omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.62}
$$

insieme con la condizione al contorno:

$$
-h\overline{\varepsilon}_{11}\nabla\tilde{\eta}\cdot\mathbf{n}=-\psi^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.63}
$$

Infine dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a υ si ottiene infine:

$$
\frac{h}{5}\overline{\varepsilon}_{11}\Delta\upsilon-h\overline{e}_{31}\Delta w-\frac{12}{h}\overline{\varepsilon}_{33}\upsilon=-\iota-(\omega^++\omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.64}
$$

insieme con la condizione al contorno:

$$
-\frac{h}{5}\overline{\varepsilon}_{11}\nabla\upsilon\cdot\mathbf{n}=-\iota^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.65}
$$

Si possono ora confrontare le equazioni di equilibrio ottenute con le analoghe in [103], tenendo conto che la rappresentazione del potenziale elettrico adottata in [103] è $\phi = \tilde{\eta}+(4(x_3/h)^2-1)\upsilon^2$. Risulta che le equazioni di equilibrio (3.60) e (3.62) sono identiche a quelle ricavate in [103]; la (3.64) differisce dalla corrispondente in [103] per il fatto che il coefficiente che moltiplica $\Delta\upsilon$ contiene qui $\overline{\varepsilon}_{11}$ mentre contiene ε_{11} in [103].

L'arricchimento della rappresentazione del potenziale elettrico porta ad una teoria più accurata rispetto a quella presentata nel paragrafo 3.4.4, in quanto l'equazione di equilibrio a flessione (3.60) e l'equazione di equilibrio elettrostatico (3.64) sono ora tra loro accoppiate.

3.5 Teorie alla Reissner-Mindlin

In questo paragrafo sono riportate alcune teorie di piastra piezoelettrica alla Reissner-Mindlin; a differenza delle teorie di piastra piezoelettrica alla Kirchhoff-Love illustrate

nel paragrafo precedente, nelle teorie alla Reissner-Mindlin si considera uno scorrimento diverso da zero (costante nel comportamento flessionale e lineare in quello membranale) tra le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ e quelle parallele al piano Ω. A tale scopo la descrizione del campo di spostamenti nella piastra, sia per il comportamento flessionale che per quello membranale, è ora scelta in maniera più ricca.

3.5.1 Teoria per il comportamento membranale

Nelle teorie per il comportamento membranale esposte nel paragrafo 3.4 lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d$ tra le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ e le fibre parallele al piano Ω era considerato nullo (ipotesi ii' nei paragrafi 3.4.1 e 3.4.3); tale ipotesi è ora rimossa per ottenere una teoria di membrana piezoelettrica più ricca che, per quanto concerne la conoscenza dell'autore, non esiste in letteratura.

Riassumendo, si formulano le seguenti ipotesi sul tensore delle deformazioni e sul campo elettrico:

i') L'elongazione ε_p delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ è costante.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ è proporzionale ad x_3.

iii') La componente trasversale e_p del campo elettrico non dipende da x_3.

In conseguenza di tali ipotesi il campo di spostamenti $(\overline{\mathbf{s}}_p, s_d)$ ed il potenziale elettrico ϕ_d hanno la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_p(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{\mathbf{u}}(x_1, x_2) + \frac{h^2}{12}[6(x_3/h)^2 - 1/2]\boldsymbol{\beta}(x_1, x_2) \\
s_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3\alpha(x_1, x_2) \\
\phi_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3\chi(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

dove lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d$ è pari a $x_3(\nabla\alpha + \boldsymbol{\beta})$; il campo di spostamenti (3.66) è quello adottato in [68] nel caso di piastra elastica. Le funzioni $\tilde{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\beta}$, α e χ sono le incognite del problema.

Si formulano poi le seguenti ipotesi di carattere statico, duali delle ipotesi di carattere cinematico i', ii' e iii':

i'') La tensione normale σ_p sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ non dipende da x_3 ($\sigma_p = \sigma(x_1, x_2)$).

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_d$ sono proporzionali a x_3 ($\boldsymbol{\tau}_d = x_3\boldsymbol{\tau}$).

iii'') La componente trasversale d_p dello spostamento elettrico non dipende da x_3 ($d_p = d(x_1, x_2)$).

L'ipotesi ii'', qui riportata per uniformità di trattazione, non è essenziale in quanto è implicata dalla condizione di stazionarietà di $\mathcal{H}_m^r$ rispetto a $\boldsymbol{\tau}_d$ insieme con le (3.66).

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}_m^r$ diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m^r &= \frac{h}{2}\int_\Omega [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}}||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}})^2]\,da + \frac{h^5}{1440}\int_\Omega [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\beta}||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\beta})^2]\,da + \\
&+ \frac{h}{2}\int_\Omega \left(2\frac{\hat{\varepsilon}_{33}}{\overline{\varepsilon}_{33}}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}\,\sigma - \frac{\varepsilon_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma^2 + 2\sigma\,\alpha\right)\,da + \frac{h^3}{24}\int_\Omega \left[2\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\beta} + \nabla\alpha) - \frac{||\boldsymbol{\tau}||^2}{c_{44}}\right]\,da + \\
&- \frac{h^3}{24}\int_\Omega \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\chi||^2\,da + \frac{h}{2}\int_\Omega \left(\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}d^2 + 2d\,\chi\right)\,da - h\int_\Omega \left(\frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}}d\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + \frac{e_{33}}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}}\sigma\,d\right)\,da + \\
&+ \frac{h^3}{12}\int_\Omega \frac{e_{15}}{c_{44}}\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\chi\,da - \int_\Omega (2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot(\tilde{\mathbf{u}} + \frac{h^2}{12}\boldsymbol{\beta}) + p_d h\,\alpha - \omega_d h\,\chi)\,da + \int_{\partial\Omega_\omega} \mu^l\chi\,dl + \\
&- \int_{\partial\Omega_f} (\mathbf{f}^l\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{h^2}{12}\mathbf{l}^l\cdot\boldsymbol{\beta} + m^l\alpha)\,dl - \int_\Omega (\mathbf{f}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{h^2}{12}\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\beta}) + m\,\alpha - \mu\,\chi)\,da
\end{aligned} \tag{3.67}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^l \qquad \alpha = \alpha^l \qquad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
&\chi = \chi^l \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.68}$$

dove $\tilde{\mathbf{u}}^l$, $\boldsymbol{\beta}^l$, α^l e χ^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_p^l$, s_d^l e ϕ_d^l secondo le equazioni:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{s}}_p^l = \tilde{\mathbf{u}}^l(x_1, x_2) - \frac{h^2}{12}[6(x_3/h)^2 - 1/2]\boldsymbol{\beta}^l(x_1, x_2), \\
&s_d^l = x_3\alpha^l(x_1, x_2), \qquad \phi_d^l = x_3\chi^l(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Dalle condizioni di stazionarietà di $\mathcal{H}_m^r$ rispetto a σ, $\boldsymbol{\tau}$ e d si ricavano l'espressione di σ:

$$\sigma = c_{13}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + c_{33}\alpha + e_{33}\chi \tag{3.70}$$

l'espressione di $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = c_{44}(\boldsymbol{\beta} + \nabla\alpha) + e_{15}\nabla\chi \tag{3.71}$$

e l'espressione di d:

$$d = -\varepsilon_{33}\chi + e_{31}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\alpha \tag{3.72}$$

Sostituendo anche le (3.70),(3.71) e (3.72) nella (3.67) si ottiene infine l'espressione dell'energia potenziale $\mathcal{E}_m$, che si scrive come:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m &= \frac{h}{2}c_{11}\int_\Omega[(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}})^2]\,da + \frac{h}{2}\int_\Omega(c_{33}\alpha^2 + 2c_{13}\alpha\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}})\,da + \\
&+ \frac{h^5}{1440}\hat{c}_{11}\int_\Omega[(1-\hat{\nu})||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\beta}||^2 + \hat{\nu}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\beta})^2]\,da + \frac{h^3}{24}\int_\Omega c_{44}||\boldsymbol{\beta} + \nabla\alpha||^2\,da + \\
&- \frac{h}{2}\int_\Omega \varepsilon_{33}\chi^2\,da - \frac{h^3}{24}\int_\Omega \varepsilon_{11}||\nabla\chi||^2\,da + h\int_\Omega(e_{31}\chi\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\chi\,\alpha)\,da + \\
&+ \frac{h^3}{12}\int_\Omega e_{15}(\boldsymbol{\beta} + \nabla\alpha)\cdot\nabla\chi\,da - \int_\Omega(2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot(\tilde{\mathbf{u}} + \frac{h^2}{12}\boldsymbol{\beta}) + p_d h\,\alpha - \omega_d h\,\chi)\,da + \\
&+ \int_{\partial\Omega_\omega}\mu^l\chi\,dl - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{f}^l\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{h^2}{12}\mathbf{l}^l\cdot\boldsymbol{\beta} + m^l\alpha)\,dl + \\
&- \int_\Omega(\mathbf{f}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{h^2}{12}\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\beta}) + m\,\alpha - \mu\,\chi)\,da
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Il funzionale (3.73) è definito sulla varietà (3.68). I primi quattro integrali nella (3.73) sono l'energia di deformazione, il quinto ed il sesto sono l'energia elettrostatica ed infine, il settimo e l'ottavo sono l'energia dovuta all'accoppiamento piezoelettrico.

Rispetto alla teoria di membrana alla Kirchhoff-Love dedotta nel paragrafo 3.4.3, si ha qui un nuovo termine di accoppiamento elettromeccanico che esprime il legame, tramite il coefficiente e_{15}, tra lo scorrimento $x_3(\boldsymbol{\beta} + \nabla\alpha)$ e la componente del campo elettrico $(-x_3\nabla\chi)$ lungo Ω.

Equazioni di equilibrio

La stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a $\tilde{\mathbf{u}}$ fornisce la seguente equazione:

$$-hc_{11}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}] - h(c_{13}\nabla\alpha + e_{31}\nabla\chi) = \mathbf{f} + \overline{\mathbf{p}}^+ + \overline{\mathbf{p}}^- \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.74}$$

Alla (3.74) è associata la seguente condizione al contorno:

$$hc_{11}[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}][\mathbf{n}] + h(c_{13}\alpha + e_{31}\chi)\mathbf{n} = \mathbf{f}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.75}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} - \quad & \frac{h^3}{720}\hat{c}_{11}\mathrm{div}\,[(1-\hat{\nu})\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\beta} + \hat{\nu}\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\beta}] + \frac{h^3}{12}[c_{44}(\boldsymbol{\beta}+\nabla\alpha) + e_{15}\nabla\chi] = \\ = \quad & \frac{h^2}{12}(\mathbf{l} + \overline{\mathbf{p}}^+ + \overline{\mathbf{p}}^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{3.76}$$

Alla (3.76) è associata la seguente condizione al contorno:

$$\frac{h^5}{720}\hat{c}_{11}[(1-\hat{\nu})\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\beta} + \hat{\nu}\mathbf{I}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}][\mathbf{n}] = \frac{h^2}{12}\mathbf{l}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.77}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a α si ottiene la seguente l'equazione di equilibrio:

$$h(c_{33}\alpha + c_{13}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\chi) - \frac{h^3}{12}\mathrm{div}\,[c_{44}(\boldsymbol{\beta}+\nabla\alpha) + e_{15}\nabla\chi] = m + \frac{h}{2}(p^+ - p^-) \tag{3.78}$$

con la condizione al contorno associata:

$$\frac{h^3}{12}[c_{44}(\boldsymbol{\beta}+\nabla\alpha) + e_{15}\nabla\chi]\cdot\mathbf{n} = m + \frac{h}{2}(p^+ - p^-) \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.79}$$

Infine dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a χ si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{h^3}{12}\mathrm{div}\,[\varepsilon_{11}\nabla\chi - e_{15}(\boldsymbol{\beta}+\nabla\alpha)] + h(-\varepsilon_{33}\chi + e_{31}\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + e_{33}\alpha) = -\mu + \\ - \quad & \frac{h}{2}(\omega^+ - \omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{3.80}$$

Alla (3.80) è associata la seguente condizione al contorno:

$$-\frac{h^3}{12}[\varepsilon_{11}\nabla\chi - e_{15}(\boldsymbol{\beta}+\nabla\alpha)]\cdot\mathbf{n} = -\mu^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.81}$$

3.5.2 Una seconda teoria per il comportamento membranale

Si deduce ora la teoria di membrana piezoelettrica presentata in [80] e [84]; in tale teoria, come detto all'inizio del presente capitolo, sono considerati gli effetti di strizione scegliendo uno spostamento trasversale $s_d = x_3\alpha(x_1, x_2)$. Lo spostamento nel piano è invece scelto in maniera identica a quanto fatto nel paragrafo 3.4.1; in tale maniera si ottiene uno scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_d = -x_3\nabla\alpha$, ovvero le fibre inizialmente parallele ad x_3 sono costrette a rimanere parallele ad x_3 a deformazione avvenuta. Il campo di spostamenti scelto in a tale teoria non può essere univocamente dedotto, in analogia a quanto fatto nella deduzione delle altre teorie riportate in questo capitolo, a partire da ipotesi sulle componenti del tensore delle deformazioni ε_p, $\boldsymbol{\gamma}_d$ e sulla componente dello spostamento elettrico d_p. Si

assegna allora direttamente la seguente rappresentazione del campo di spostamenti e del potenziale elettrico:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_p(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{u}(x_1, x_2) \\
s_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3\alpha(x_1, x_2) \\
\phi_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3\chi(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Le funzioni $\mathbf{u}$, α e χ sono le incognite del problema.

Formulazione variazionale

Sostituendo le (3.82) nella (3.13), imponendo poi le condizioni di stazionarietà rispetto a σ_p, $\boldsymbol{\tau}_d$ e d_p ed eseguendo infine l'integrazione nello spessore si ottiene la seguente espressione del funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}_m$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m \;=\; & \frac{h}{2}c_{11}\int_\Omega [(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}||^2 + \nu(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2]\,da + \frac{h}{2}\int_\Omega (c_{33}\alpha^2 + 2c_{13}\alpha\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,da + \\
+ \; & \frac{h^3}{24}\int_\Omega c_{44}||\nabla\alpha||^2\,da - \frac{h}{2}\int_\Omega \varepsilon_{33}\chi^2\,da - \frac{h^3}{24}\int_\Omega \varepsilon_{11}||\nabla\chi||^2\,da + \\
+ \; & h\int_\Omega (e_{31}\chi\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + e_{33}\chi\,\alpha)\,da + \frac{h^3}{24}\int_\Omega 2e_{15}\nabla\chi\cdot\nabla\alpha\,da + \\
- \; & \int_\Omega [2\overline{\mathbf{p}}_p\cdot\mathbf{u} + h\,p_d\alpha - h\,\omega_d\chi]\,da - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{f}^l\cdot\mathbf{u} + m^l\alpha)\,dl + \\
+ \; & \int_{\partial\Omega_\omega}\mu^l\chi\,dl - \int_\Omega [\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + m\,\alpha - \mu\chi]\,da
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Il funzionale (3.83) è definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} = \mathbf{u}^l, \quad \alpha = \alpha^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
&\chi = \chi^l \qquad\qquad\quad\;\; \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.84}$$

dove $\mathbf{u}^l$, α^l e χ^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_p^l$, s_d^l e ϕ_d^l secondo le equazioni:

$$\overline{\mathbf{s}}_p^l = \mathbf{u}^l(x_1, x_2), \qquad s_d^l = x_3\alpha(x_1, x_2), \qquad \phi_d^l = x_3\chi^l(x_1, x_2) \tag{3.85}$$

I primi tre integrali nella (3.83) sono l'energia di deformazione, il quarto ed il quinto sono l'energia elettrostatica e, infine, il sesto ed il settimo sono l'energia dovuta all'accoppiamento piezoelettrico.

Equazioni di equilibrio

La stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a $\mathbf{u}$ fornisce la seguente equazione di equilibrio:

$$-hc_{11}\mathrm{div}\,[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}]-h(c_{13}\nabla\alpha+e_{31}\nabla\chi)=\mathbf{f}+\overline{\mathbf{p}}^{+}+\overline{\mathbf{p}}^{-} \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.86}$$

Alla (3.86) è associata la seguente condizione al contorno:

$$hc_{11}[(1-\nu)\mathrm{sym}\nabla\mathbf{u}+\nu\mathbf{I}\mathrm{div}\,\mathbf{u}][\mathbf{n}]+h(c_{13}\alpha+e_{31}\chi)\mathbf{n}=\mathbf{f}^{l} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.87}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a α si ottiene la seguente l'equazione di equilibrio:

$$-\frac{h^3}{12}\mathrm{div}\,[c_{44}\nabla\alpha+e_{15}\nabla\chi]+h(c_{33}\alpha+c_{13}\mathrm{div}\,\mathbf{u}+e_{33}\chi)=m+\frac{h}{2}(p^{+}-p^{-}) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.88}$$

con la condizione al contorno associata:

$$\frac{h^3}{12}[c_{44}\nabla\alpha+e_{15}\nabla\chi]\cdot\mathbf{n}=m^{l} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.89}$$

Infine dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_m$ rispetto a χ si ottiene:

$$\frac{h^3}{12}\mathrm{div}\,(\varepsilon_{11}\nabla\chi-e_{15}\nabla\alpha)+h(-\varepsilon_{33}\chi+e_{31}\mathrm{div}\,\mathbf{u}+e_{33}\alpha)=-\mu-\frac{h}{2}(\omega^{+}-\omega^{-}) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.90}$$

Alla (3.90) è associata la seguente condizione al contorno:

$$-\frac{h^3}{12}(\varepsilon_{11}\nabla\chi-e_{15}\nabla\alpha)\cdot\mathbf{n}=-\mu^{l} \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.91}$$

3.5.3 Teoria per il comportamento flessionale

Nelle teorie per il comportamento flessionale presentate nel paragrafo 3.4 lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_p$ tra le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ e le fibre parallele al piano Ω era considerato nullo (ipotesi ii' nei paragrafi 3.4.4 e 3.4.5); tale ipotesi è ora rimossa per ottenere una teoria di piastra piezoelettrica in flessione più ricca, coincidente con quella contenuta in [18, 7]:

i') L'elongazione ε_d delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_p$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ non dipende da x_3.

iii') La componente trasversale e_d del campo elettrico è nulla.

In conseguenza di tali ipotesi il campo di spostamenti $(\overline{\mathbf{s}}_d, s_p)$ ed il potenziale elettrico ϕ_p hanno la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{s}}_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \\ s_p(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \\ \phi_p(x_1, x_2, x_3) &= \eta(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.92}$$

dove $w \in \mathbf{R}$ è lo spostamento trasversale del piano medio Ω della piastra, $\eta \in \mathbf{R}$ è il potenziale elettrico sul piano medio della piastra e $\boldsymbol{\varphi} \in \overline{\mathcal{V}}$ sono le rotazioni delle fibre parallele a x_3; in particolare φ_1 è la rotazione di tali fibre intorno a x_2 mentre φ_2 è l'opposto della rotazione intorno a x_1. Le funzioni w, $\boldsymbol{\varphi}$, e η sono le incognite del problema.

Si formulano poi le seguenti ipotesi di carattere statico [18], duali delle ipotesi di carattere cinematico i', ii' e iii'.

i'') La tensione normale σ_d sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_p$ sono costanti ($\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2)$).

iii'') La componente trasversale d_d dello spostamento elettrico è nulla.

L'ipotesi ii'', qui riportata per uniformità di trattazione, non è essenziale in quanto è implicata dalla condizione a priori di stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a $\boldsymbol{\tau}_p$, insieme con le (3.92).

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f^r &= \frac{1}{2}\frac{h^3}{12}\int_\Omega [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\,da + h\int_\Omega \boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)\,da + \\ &+ \frac{1}{2}h\int_\Omega [-\frac{1}{c_{44}}||\boldsymbol{\tau}||^2 - \overline{\varepsilon}_{11}||\nabla\eta||^2 + 2\frac{e_{15}}{c_{44}}\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\eta]\,da + \\ &- \int_\Omega [h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\boldsymbol{\varphi} + 2p_p w - 2\omega_p\eta]\,da + \int_{\partial\Omega_\omega}\psi^l\eta\,dl - \int_{\partial\Omega_f}[\mathbf{m}^l\cdot\boldsymbol{\varphi} + q^l w]\,dl \\ &- \frac{h^2}{4}\int_{\partial\Omega_s}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}(w-w^l)\,dl - \int_\Omega[\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\varphi} + qw - \psi\eta]\,da \end{aligned} \tag{3.93}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{\varphi}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\ \eta &= \eta^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi \end{aligned} \tag{3.94}$$

dove $\boldsymbol{\varphi}^l$ e η^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_d^l$ e ϕ_p^l secondo le equazioni:

$$\overline{\mathbf{s}}_d^l = x_3 \boldsymbol{\varphi}^l(x_1, x_2), \qquad \phi_p^l = \eta^l(x_1, x_2) \tag{3.95}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a $\boldsymbol{\tau}$ si ottiene:

$$\boldsymbol{\tau} = c_{44}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) + e_{15} \nabla \eta \tag{3.96}$$

Sostituendo la (3.96) in (3.93) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_f \;=\; & \frac{h^3}{24}\hat{c}_{11} \int_\Omega [(1-\hat{\nu})||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \hat{\nu}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\, da + \frac{h}{2} c_{44} \int_\Omega ||\boldsymbol{\varphi} + \nabla w||^2\, da + \\
- \; & \frac{h}{2}\varepsilon_{11} \int_\Omega ||\nabla\eta||^2\, da + h e_{15} \int_\Omega (\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) \cdot \nabla\eta\, da - \int_\Omega [h\overline{\mathbf{p}}_d \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2p_p w - 2\omega_p \eta]\, da + \\
+ \; & \int_{\partial\Omega_\omega} \psi^l \eta\, dl - \int_{\partial\Omega_f} [\mathbf{m}^l \cdot \boldsymbol{\varphi} + q^l w]\, dl - \int_\Omega [\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi} + qw - \psi\eta]\, da
\end{aligned} \tag{3.97}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}
& w = w^l, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
& \eta = \eta^l \qquad\qquad\qquad\quad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.98}$$

dove w^l parametrizza il vincolo laterale s_p^l secondo l'equazione:

$$s_p^l = w^l(x_1, x_2) \tag{3.99}$$

Il primo integrale nella (3.97) è l'energia di deformazione flessionale, il secondo integrale è l'energia di deformazione per scorrimento, il terzo integrale è l'energia elettrostatica mentre il quarto integrale è l'energia dovuta all'accoppiamento elettromeccanico presente nel materiale piezoelettrico.

L'accoppiamento elettromeccanico esiste qui tra lo scorrimento $(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)$ ed il gradiente nel piano $\nabla\eta$ del potenziale elettrico, tramite il coefficiente piezoelettrico e_{15}.

Equazioni di equilibrio

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a w si ottiene:

$$-h\mathrm{div}\,[c_{44}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) + e_{15}\nabla\eta] = q + p^+ + p^- \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.100}$$

Alla (3.100) è associata la seguente condizione al contorno:

$$h[c_{44}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) + e_{15}\nabla\eta] \cdot \mathbf{n} = q^l \qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.101}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a $\boldsymbol{\varphi}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} - & \frac{h^3\hat{c}_{11}}{12}\mathrm{div}\,[(1-\hat{\nu})\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\hat{\nu}\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}]+h[c_{44}(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)+e_{15}\nabla\eta]= \\ = & \mathbf{m}+\frac{h}{2}(\overline{\mathbf{p}}^+-\overline{\mathbf{p}}^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{3.102}$$

Alla (3.102) è associata la seguente condizione al contorno:

$$\frac{h^3\hat{c}_{11}}{12}[(1-\hat{\nu})\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}+\hat{\nu}\mathbf{I}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}][\mathbf{n}]=\mathbf{m}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.103}$$

Infine, dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a η si ottiene:

$$-h\mathrm{div}\,[-\varepsilon_{11}\nabla\eta+e_{15}(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)]=-\psi-(\omega^++\omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.104}$$

Alla (3.104) è associata la seguente condizione al contorno:

$$h[-\varepsilon_{11}\nabla\eta+e_{15}(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)]\cdot\mathbf{n}=-\psi^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.105}$$

3.5.4 Teoria per il comportamento flessionale senza vincoli sulle tensioni

Assumendo nel funzionale di Hellinger-Prange-Reissner $\mathcal{H}_f^r$ soltanto le ipotesi sul campo di spostamenti e sul potenziale elettrico formulate nel precedente paragrafo, ed imponendo quindi le condizioni di stazionarietà rispetto alle variabili σ_d, $\boldsymbol{\tau}_p$ e d_d, si ottiene la seguente espressione del funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}_f$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_f = & \frac{h^3}{24}c_{11}\int_\Omega[(1-\nu)||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2+\nu(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\,da+\frac{h}{2}c_{44}\int_\Omega||\boldsymbol{\varphi}+\nabla w||^2\,da+ \\ - & \frac{h}{2}\varepsilon_{11}\int_\Omega||\nabla\eta||^2\,da+he_{15}\int_\Omega(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)\cdot\nabla\eta\,da-\int_\Omega[h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\boldsymbol{\varphi}+2p_pw-2\omega_p\eta]\,da+ \\ + & \int_{\partial\Omega_\omega}\psi^l\eta\,dl-\int_{\partial\Omega_f}[\mathbf{m}^l\cdot\boldsymbol{\varphi}+q^lw]\,dl-\int_\Omega[\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\varphi}+qw-\psi\eta]\,da \end{aligned} \tag{3.106}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned} & w=w^l, \quad \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\ & \eta=\eta^l \qquad\qquad\qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi \end{aligned} \tag{3.107}$$

Le equazioni di equilibrio derivanti dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ sono quelle ricavate in [80, 84]. Anche in questo caso, come per la teoria di membrana riportata nel paragrafo 3.4.2, il funzionale ottenuto comporta valori di rigidezza meccanica differenti da quelli relativi alla corrispondente teoria descritta nel paragrafo 3.5.3; in particolare nel termine legato alla

deformazione flessionale nella (3.106) compare il coefficiente c_{11} anzichè $\hat{c}_{11}$. Il confronto con la soluzione esatta tridimensionale riportato nel paragrafo (3.6) rivela che i valori di rigidezza meccanica relativi a questa teoria non sono corretti.

3.5.5 Teoria arricchita per il comportamento flessionale

Si rimuove qui l'ipotesi di campo elettrico trasversale nullo (ipotesi iii' formulata nel paragrafo 3.5.3, assumendo una rappresentazione quadratica del potenziale elettrico lungo lo spessore della piastra. La teoria che si ottiene non è presente in letteratura ma è qui riportata per la prima volta.

Si fanno dunque le seguenti ipotesi di carattere cinematico:

i') L'elongazione ε_d delle fibre parallele ad $\boldsymbol{\nu}_3$ non dipende da x_3.

ii') Lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_p$ tra le fibre nel piano Ω e le fibre parallele a $\boldsymbol{\nu}_3$ non dipende da x_3.

iii') La componente trasversale e_d del campo elettrico è lineare rispetto a x_3.

In conseguenza il campo di spostamenti ed il potenziale elettrico hanno la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}}_d(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \\
s_p(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \\
\phi_p(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{\eta}(x_1, x_2) + (6(x_3/h)^2 - 1/2)\upsilon(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Si formulano poi le seguenti ipotesi di carattere statico, duali delle i', ii' e iii':

i'') La tensione normale σ_d sulla giacitura di normale $\boldsymbol{\nu}_3$ è nulla.

ii'') Le tensioni tangenziali trasversali $\boldsymbol{\tau}_p$ sono costanti ($\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2)$).

iii'') La componente trasversale d_d dello spostamento elettrico è lineare rispetto a x_3 ($d_p = x_3\, d$).

L'ipotesi iii'', qui riportata per uniformità di trattazione, non è essenziale in quanto è implicata dalla condizione a priori di stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a d_d, insieme con le (3.108) e la i''.

Formulazione variazionale

Applicando le ipotesi statiche e cinematiche di cui sopra, il funzionale $\mathcal{H}_f^r$ diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_f^r &= \frac{h^3}{24}\int_\Omega [2c_{66}||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \hat{c}_{12}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\,da + \frac{h}{2}\int_\Omega (-\frac{1}{c_{44}}||\boldsymbol{\tau}||^2 + 2\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)\,da + \\
&- \frac{h}{2}\int_\Omega [\overline{\varepsilon}_{11}(||\nabla\tilde{\eta}||^2 + \frac{1}{5}||\nabla\upsilon||^2) - 2d\,\upsilon]\,da + \frac{h^3}{24}\int_\Omega \frac{1}{\overline{\varepsilon}_{33}}d^2\,da + h\int_\Omega \left(\frac{e_{15}}{c_{44}}\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\tilde{\eta}\right)\,da + \\
&- \frac{h^3}{12}\int_\Omega \frac{\overline{e}_{31}}{\overline{\varepsilon}_{33}}d\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,da - \int_\Omega [h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\boldsymbol{\varphi} + 2p_p w - 2\omega_p(\tilde{\eta}+\upsilon)]\,da + \\
&+ \int_{\partial\Omega_\omega}(\psi^l\tilde{\eta} + \iota^l\upsilon)\,dl - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{m}^l\cdot\boldsymbol{\varphi} + q^l w)\,dl - \frac{h^2}{4}\int_{\partial\Omega_s}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}(w-w^l)\,dl + \\
&- \int_\Omega [\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\varphi} + qw - \psi\tilde{\eta} - \iota\upsilon]\,da
\end{aligned} \tag{3.109}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^l && \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
&\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^l \quad \upsilon = \upsilon^l && \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned} \tag{3.110}$$

dove $\boldsymbol{\varphi}^l$, $\tilde{\eta}^l$ e υ^l parametrizzano i vincoli laterali $\overline{\mathbf{s}}_d^l$ e ϕ_p^l secondo le equazioni:

$$\overline{\mathbf{s}}_d^l = x_3\boldsymbol{\varphi}^l(x_1,x_2), \qquad \phi_p^l = \tilde{\eta}^l(x_1,x_2) + [6(x_3/h)^2 - 1/2]\upsilon^l(x_1,x_2) \tag{3.111}$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{H}_f^r$ rispetto a $\boldsymbol{\tau}$ e rispetto a d si ottengono, rispettivamente, le relazioni:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau} = c_{44}(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w) + e_{15}\nabla\tilde{\eta} \\
&d = -\overline{e}_{31}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} + \frac{12\overline{\varepsilon}_{33}}{h^2}\upsilon
\end{aligned} \tag{3.112}$$

che sostituite nella (3.109) portano alla seguente espressione del funzionale dell'energia potenziale totale:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_f &= \frac{h^3}{24}\overline{c}_{11}\int_\Omega [(1-\overline{\nu})||\mathrm{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi}||^2 + \overline{\nu}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi})^2]\,da + \frac{h}{2}\int_\Omega (c_{44}||\boldsymbol{\varphi}+\nabla w||^2\,da + \\
&- \frac{h}{2}\int_\Omega [(\varepsilon_{11}||\nabla\tilde{\eta}||^2 + \frac{\overline{\varepsilon}_{11}}{5}||\nabla\upsilon||^2)]\,da - \int_\Omega \frac{6\overline{\varepsilon}_{33}}{h}\upsilon^2\,da + \\
&+ h\int_\Omega [\overline{e}_{31}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,\upsilon + e_{15}\nabla\tilde{\eta}\cdot(\boldsymbol{\varphi}+\nabla w)]\,da - \int_\Omega [h\overline{\mathbf{p}}_d\cdot\boldsymbol{\varphi} + 2p_p w - 2\omega_p(\tilde{\eta}+\upsilon)]\,da + \\
&+ \int_{\partial\Omega_\omega}(\psi^l\tilde{\eta} + \iota^l\upsilon)\,dl - \int_{\partial\Omega_f}(\mathbf{m}^l\cdot\boldsymbol{\varphi} + q^l w)\,dl + \\
&- \int_\Omega [\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\varphi} + qw - (\psi\tilde{\eta} + \iota\upsilon)]\,da
\end{aligned} \tag{3.113}$$

definito sulla varietà:

$$
\begin{aligned}
w = w^l, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_s \\
\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^l, \quad \upsilon = \upsilon^l \quad \text{su} \quad \partial\Omega_\phi
\end{aligned}
\tag{3.114}
$$

dove w^l parametrizza il vincolo laterale s_p^l secondo l'equazione:

$$
s_p^l = w^l(x_1, x_2) \tag{3.115}
$$

Il primo integrale nella (3.113) è l'energia di deformazione flessionale, il secondo integrale è l'energia di deformazione per scorrimento, il terzo integrale ed il quarto integrale sono l'energia elettrostatica mentre il quinto integrale è l'energia dovuta all'accoppiamento elettromeccanico presente nel materiale piezoelettrico.

Si può osservare che la scelta di un potenziale quadratico e di un campo di spostamenti alla Reissner-Mindlin porta alla presenza di due termini di accoppiamento elettromeccanico nel funzionale dell'energia potenziale totale; il primo termine, legato al coefficiente e_{15}, è l'unico termine di accoppiamento che compare nella teoria esposta nel paragrafo 3.5.3 mentre il secondo termine, legato al coefficiente $\overline{e}_{31}$, è l'unico termine di accoppiamento presente nella teoria esposta nel paragrafo 3.4.5 dove $\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = -\Delta w$.

Equazioni di equilibrio

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a w si ottiene:

$$
-h\operatorname{div}\left[c_{44}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) + e_{15}\nabla\tilde{\eta}\right] = q + p^+ + p^- \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.116}
$$

Alla (3.116) è associata la seguente condizione al contorno:

$$
h[c_{44}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) + e_{15}\nabla\tilde{\eta}] \cdot \mathbf{n} = q^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.117}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a $\boldsymbol{\varphi}$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
- \quad & \frac{h^3\hat{c}_{11}}{12}\operatorname{div}\left[(1-\hat{\nu})\operatorname{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi} + \hat{\nu}\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\right] + h[c_{44}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w) + e_{15}\nabla\tilde{\eta} - \overline{e}_{31}\nabla\upsilon] = \\
= \quad & \mathbf{m} + \frac{h}{2}(\overline{\mathbf{p}}^+ - \overline{\mathbf{p}}^-) \qquad \text{in} \quad \Omega
\end{aligned}
\tag{3.118}
$$

Alla (3.118) è associata la seguente condizione al contorno:

$$
\frac{h^3\hat{c}_{11}}{12}[(1-\hat{\nu})\operatorname{sym}\nabla\boldsymbol{\varphi} + \hat{\nu}\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}][\mathbf{n}] + h\overline{e}_{31}\upsilon\mathbf{n} = \mathbf{m}^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_f \tag{3.119}
$$

Dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a $\tilde{\eta}$ si ottiene:

$$
-h\operatorname{div}\left[-\varepsilon_{11}\nabla\tilde{\eta} + e_{15}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w)\right] = -\psi - (\omega^+ + \omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.120}
$$

Alla (3.120) è associata la seguente condizione al contorno:

$$h[-\varepsilon_{11}\nabla\tilde{\eta} + e_{15}(\boldsymbol{\varphi} + \nabla w)] \cdot \mathbf{n} = -\psi^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.121}$$

Infine, dalla stazionarietà di $\mathcal{E}_f$ rispetto a υ si ottiene:

$$-\frac{h}{5}\text{div}\,(-\overline{\varepsilon}_{11}\nabla\upsilon) + h\overline{e}_{31}\text{div}\,\boldsymbol{\varphi} - \frac{12\overline{\varepsilon}_{33}}{h}\upsilon = -\iota - (\omega^+ + \omega^-) \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{3.122}$$

Alla (3.122) è associata la seguente condizione al contorno:

$$-\frac{h}{5}\overline{\varepsilon}_{11}\nabla\upsilon \cdot \mathbf{n} = -\iota^l \qquad \text{su} \quad \partial\Omega_\omega \tag{3.123}$$

3.6 Validazione dei modelli di piastra

Per comprendere le caratteristiche e le peculiarità dei modelli di piastra piezoelettrica prima esposti, si formula ora una serie di problemi campione di piastra piezoelettrica, la cui soluzione esatta nell'ambito della teoria della piezoelettricità di Voigt è nota [16]. Si ricava quindi la soluzione analitica di ciascun problema secondo le diverse teorie di piastra di cui sopra. Si confrontano infine i risultati, in termini di campo di spostamenti e potenziale elettrico, relativi alle soluzioni tridimensionali con quelli relativi a ciascuna teoria. In particolare è utile conoscere come un qualsiasi modello di piastra approssimi la soluzione esatta tridimensionale quando lo spessore della piastra tende a zero; a tale scopo le soluzioni analitiche relative a ciascun modello e la soluzione tridimensionale esatta sono sviluppate in serie di Taylor rispetto allo spessore h della piastra e sono quindi confrontati fra loro i termini di ordine più basso di ogni sviluppo. Le differenti teorie sono indicate con le seguenti sigle:

- KLM1: teoria membranale alla Kirchhoff-Love riportata nel paragrafo 3.4.1.
- KLM2: teoria membranale alla Kirchhoff-Love senza vincoli sulle tensioni riportata nel paragrafo 3.4.2.
- KLMS: teoria membranale arricchita alla Kirchhoff-Love riportata nel paragrafo 3.4.3.
- KLF1: teoria flessionale alla Kirchhoff-Love riportata nel paragrafo 3.4.4.
- KLF2: teoria flessionale arricchita alla Kirchhoff-Love riportata nel paragrafo 3.4.5.

- RMM1: teoria membranale alla Reissner-Mindlin riportata nel paragrafo 3.5.1.
- RMM2: teoria membranale alla Reissner-Mindlin riportata nel paragrafo 3.5.2.
- RMF1: teoria flessionale alla Reissner-Mindlin riportata nel paragrafo 3.5.3.
- RMF2: teoria flessionale alla Reissner-Mindlin senza vincoli sulle tensioni riportata nel paragrafo 3.5.4.
- RMFS: teoria flessionale arricchita alla Reissner-Mindlin riportata nel paragrafo 3.5.5.

3.6.1 Problemi campione

Con riferimento alla nomenclatura introdotta all'inizio di questo capitolo, si considera una piastra il cui piano medio Ω è un quadrato di lato L. La piastra è semplicemente appoggiata e collegata a terra sul contorno, cioè $s = 0$ e $\phi = 0$ su $\partial\Omega \times (-h/2, h/2)$. Le condizioni al contorno sono così assegnate in maniera più generale rispetto a quanto fatto finora nel dedurre i vari modelli di piastra. Si considerano ora condizioni al bordo generalizzate [51], quali quelle scelte per il modello di laminato presentato nel paragrafo 4.1. I carichi sul mantello e i carichi di volume sono nulli; i problemi si differenziano tra loro a seconda del tipo di carico assegnato sulle facce $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$.

Problemi membranali

Quattro differenti problemi di carattere membranale sono considerati assegnando le seguenti condizioni di carico:

a_m:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= \frac{p}{2}\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
\overline{\mathbf{p}}^- &= \frac{p}{2}\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
p^+ &= p^- = 0\\
\omega^+ &= \omega^- = 0
\end{aligned} \tag{3.124}$$

b_m:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= \frac{p}{2}\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, -\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
\overline{\mathbf{p}}^- &= \frac{p}{2}\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, -\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
p^+ &= p^- = 0\\
\omega^+ &= \omega^- = 0
\end{aligned} \tag{3.125}$$

c_m:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= \overline{\mathbf{p}}^- = 0\\
p^+ &= q\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}\\
p^- &= -q\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}\\
\omega^+ &= \omega^- = 0
\end{aligned} \tag{3.126}$$

d_m:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= \overline{\mathbf{p}}^- = 0\\
p^+ &= p^- = 0\\
\omega^+ &= \omega\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}\\
\omega^- &= -\omega\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Problemi flessionali

Quattro differenti problemi di carattere flessionale sono considerati assegnando le seguenti condizioni di carico:

a_f:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= p\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
\overline{\mathbf{p}}^- &= -p\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x_2}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
p^+ &= p^- = 0\\
\omega^+ &= \omega^- = 0
\end{aligned} \tag{3.128}$$

b_f:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= p\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}, -\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
\overline{\mathbf{p}}^- &= -p\left(\cos\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}, -\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right)\\
p^+ &= p^- = 0\\
\omega^+ &= \omega^- = 0
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

c_f:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= \overline{\mathbf{p}}^- = 0\\
p^+ &= \frac{q}{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}\\
p^- &= \frac{q}{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}\\
\omega^+ &= \omega^- = 0
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

d_f:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}^+ &= \overline{\mathbf{p}}^- = 0\\
p^+ &= p^- = 0\\
\omega^+ &= \omega\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}\\
\omega^- &= \omega\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{3.131}
$$

3.6.2 Soluzioni analitiche

Si descrivono qui, brevemente, le strategie utilizzate per ricavare la soluzione analitica tridimensionale e le soluzioni relative ai vari modelli di piastra considerati, per i differenti problemi elencati nel paragrafo 3.6.1.

Soluzione analitica tridimensionale

La soluzione del problema tridimensionale descritto dalle equazioni (2.32) e (2.33) per i problemi campione enunciati viene ricavata in [16], attraverso un metodo di separazione delle variabili. Più esattamente, si assume una soluzione della forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \left(s_1^0(x_3) \cos \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L}, s_2^0(x_3) \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \cos \frac{\pi x_2}{L} \right) \\
s_3 &= s_3^0(x_3) \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L} \\
\phi &= \phi^0(x_3) \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

Le (3.132) soddisfano automaticamente le condizioni al contorno (2.33) sul mantello dei problemi campione. Sostituendo le (3.132) nelle equazioni di campo (2.32) si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie nella variabile x_3 di sesto grado. Sostituendo le (3.132) nelle condizioni al contorno $(2.33)_{1,2}$ sulle facce $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$, si ottengono le appropriate condizioni al contorno per il sistema di equazioni differenziali ordinarie prima menzionato; la soluzione esatta è nota modulo la risoluzione dell'equazione algebrica di sesto grado caratteristica di tale sistema. Gli ordini inferiori degli sviluppi in serie di potenze rispetto a x_3 delle soluzioni analitiche tridimensionali, utilizzati più avanti nella validazione delle teorie di piastra considerate, sono ottenuti in [16] in forma chiusa.

Soluzione analitica dei modelli di piastra in comportamento membranale

Per trovare le soluzioni analitiche relative a ciascun modello di comportamento membranale di piastra prima considerato, si ipotizzano le seguenti forme funzionali per le incognite presenti nei modelli:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \left(u_1^0 \cos \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L}, u_2^0 \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \cos \frac{\pi x_2}{L} \right) \\
\boldsymbol{\beta} &= \left(\beta_1^0 \cos \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L}, \beta_2^0 \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \cos \frac{\pi x_2}{L} \right) \\
\alpha &= \alpha^0 \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L} \\
\chi &= \chi^0 \text{sen} \frac{\pi x_1}{L} \text{sen} \frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{3.133}
$$

Sostituendo le espressioni dei carichi esterni del problema campione membranale considerato e le rappresentazioni (3.133) delle grandezze incognite nelle equazioni di equilibrio relative alle differenti teorie di membrana piezoelettrica, si ottengono sistemi algebrici lineari nelle incognite $\mathbf{u}^0$, α^0 e χ^0; nelle teorie di membrana considerate, le condizioni al contorno relative ai problemi campione (3.6.1) risultano automaticamente soddisfatte dalla rappresentazione (3.133) adottata per le incognite del problema di membrana piezoelettrica.

Soluzione analitica dei modelli di piastra in comportamento flessionale

Per trovare le soluzioni analitiche relative a ciascun modello del comportamento flessionale di piastra trattato, si ipotizzano le seguenti forme funzionali per le incognite presenti nei modelli:

$$
\begin{aligned}
w &= w^0 \text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L} \\
\boldsymbol{\varphi} &= \left(\varphi_1^0 \cos\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}, \varphi_2^0 \text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right) \\
\eta &= \eta^0 \text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L} \\
\upsilon &= \upsilon^0 \text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{3.134}
$$

Sostituendo le espressioni dei carichi esterni del problema campione flessionale considerato e le rappresentazioni (3.134) delle grandezze incognite nelle equazioni di equilibrio relative alle differenti teorie di piastra piezoelettrica, si ottengono sistemi algebrici lineari nelle incognite w^0, $\boldsymbol{\phi}^0$, η^0 e υ^0; nelle teorie di piastra considerate, le condizioni al contorno relative ai problemi campione (3.6.1) risultano automaticamente soddisfatte dalla rappresentazione (3.134) adottata per le incognite del problema di piastra piezoelettrica in flessione.

3.6.3 Risultati del confronto

Omettendo i dettagli di calcolo, si riporta ora il confronto tra gli ordini inferiori degli sviluppi in serie del campo di spostamenti $\mathbf{s}$ e del potenziale elettrico ϕ soluzioni delle equazioni tridimensionali (2.32)-(2.33) e delle equazioni bidimensionali che descrivono i differenti modelli di piastra, in corrispondenza a ciascuno dei problemi campione considerati. Gli sviluppi troncati all'ordine inferiore delle soluzioni hanno, in generale, la seguente espressione:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{s}} &= \left((S_1(x_3) + o(h^{p_1}))\cos\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}, (S_2(x_3) + o(h^{p_1}))\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\cos\frac{\pi x_2}{L}\right) \\
s &= (S_3(x_3) + o(h^{p_2}))\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L} \\
\phi &= (\Phi(x_3) + o(h^{p_3}))\text{sen}\,\frac{\pi x_1}{L}\text{sen}\,\frac{\pi x_2}{L}
\end{aligned}
\tag{3.135}
$$

essendo p_1, p_2 e p_3 gli ordini inferiori di tali sviluppi. Il confronto viene organizzato in tabelle. In particolare per ogni problema campione si riporta una tabella avente un numero di righe pari al numero di teorie prese in considerazione nel confronto e tre colonne; nella

	$S_1 = S_2$	S_3	Φ
3D	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{-pL\overline{e}_{31}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
KLM1	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h\hat{c}_{11}}$	/	$-\dfrac{pL\overline{e}_{31}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
KLM2	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h(c_{11}+e_{31}^2/\varepsilon_{33})}$	/	$-\dfrac{pLe_{31}}{\pi h\varepsilon_{33}(c_{11}+e_{31}^2/\varepsilon_{33})}x_3$
KLMS	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{-pL\overline{e}_{31}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
RMM1	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{-pL\overline{e}_{31}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
RMM2	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$-\dfrac{pL\overline{e}_{31}}{\pi h\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$

Tabella 3.1: Comportamento delle differenti teorie di membrana per condizione di carico membranale a_m

prima colonna si riporta il valore di S_1 e S_2, nella seconda colonna si riporta il valore di S_3 ed infine, nella terza colonna si riporta il valore di Φ.

Dalle tabelle 3.1-3.4 risulta che le teorie di membrana KLMS, RMM1 e RMM2 riproducono, al primo ordine, tutti i risultati derivanti dalla teoria tridimensionale 3D per le quattro condizioni di carico membranale elencate nel paragrafo 3.6.1. In effetti tali teorie di membrana differiscono tra loro solo per quanto riguarda la modellazione degli scorrimenti; dato che nel funzionale dell'energia potenziale relativo a ciascuna di tali teorie i termini legati allo scorrimento sono proporzionali a potenze dello spessore h della piastra uguali o superiori a tre, essi non influenzano l'ordine più basso degli sviluppi in serie rispetto a h delle soluzioni. La teoria KLM1 riproduce, nella valutazione dello spostamento nel piano $\overline{\mathbf{s}}_p$ e del potenziale elettrico ϕ, tutti risultati relativi alla soluzione esatta tridimensionale; per come è stato scelto il campo di spostamento, essa non è in grado di modellare lo spostamento s in direzione trasversale ne è in grado di rispondere alla sollecitazione membranale di tipo c_m.

La teoria KLM2, dove non sono imposti vincoli sulle tensioni e sullo spostamento elettrico, non fornisce mai risultati coincidenti al primo ordine con quelli relativi alla soluzione esatta, ad eccezione del caso di carico membranale di tipo b_m. Dunque l'ipotesi

	$S_1 = -S_2$	S_3	Φ
3D	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h c_{66}}$	0	0
KLM1	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h c_{66}}$	/	0
KLM2	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h c_{66}}$	/	0
KLMS	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h c_{66}}$	0	0
RMM1	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h c_{66}}$	0	0
RMM2	$\dfrac{pL^2}{2\pi^2 h c_{66}}$	0	0

Tabella 3.2: Comportamento delle differenti teorie di membrana per condizione di carico membranale b_m

	$S_1 = S_2$	S_3	Φ
3D	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{2\pi\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{q(c_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{q(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
KLM1	/	/	/
KLM2	/	/	/
KLMS	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{2\pi\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{q(c_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{q(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
RMM1	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{2\pi\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{q(c_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{q(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$
RMM2	$\dfrac{pL\hat{\varepsilon}_{33}}{2\pi\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}$	$\dfrac{q(c_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2)}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$	$\dfrac{q(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}}x_3$

Tabella 3.3: Comportamento delle differenti teorie di membrana per condizione di carico membranale c_m

	$S_1 = S_2$	S_3	Φ
3D	$\dfrac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}}$	$-\dfrac{\omega(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$	$\dfrac{\omega \overline{c}_{11}}{\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$
KLM1	$\dfrac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}}$	/	$\dfrac{\omega \overline{c}_{11}}{\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$
KLM2	$\dfrac{\omega L e_{31}}{2\pi \varepsilon_{33}(c_{11} + e_{31}^2/\varepsilon_{33})}$	/	$\dfrac{\omega c_{11}}{\overline{\varepsilon}_{33}(c_{11} + e_{31}^2/\overline{\varepsilon}_{33})} x_3$
KLMS	$\dfrac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}}$	$-\dfrac{\omega(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$	$\dfrac{\omega \overline{c}_{11}}{\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$
RMM1	$\dfrac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}}$	$-\dfrac{\omega(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$	$\dfrac{\omega \overline{c}_{11}}{\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$
RMM2	$\dfrac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}}$	$-\dfrac{\omega(e_{33}c_{11} - c_{13}e_{31})}{c_{33}\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$	$\dfrac{\omega \overline{c}_{11}}{\overline{\varepsilon}_{33}\hat{c}_{11}} x_3$

Tabella 3.4: Comportamento delle differenti teorie di membrana per condizione di carico membranale d_m

di assegnare su tensioni e spostamento elettrico lo stesso tipo di vincolo imposto sulle grandezze duali deformazioni e campo elettrico risulta ottimale da questo confronto.

Per quanto concerne i problemi di carattere flessionale la teoria di piastra arricchita indicata con RMFS riproduce al primo ordine tutti i risultati relativi alla soluzione tridimensionale esatta dei problemi di carattere flessionale descritti nel paragrafo 3.6.1. La teoria KLFS calcola in maniera esatta lo spostamento $\overline{\mathbf{s}}_d$ nel piano Ω al primo ordine tranne che per il problema flessionale b_f (vedi tabella 3.6) in quanto, per come è scelto il campo di spostamenti secondo tale teoria, non può rispondere alla condizione di carico b_f. Inoltre, in corrispondenza del carico flessionale di tipo c_f la teoria KLFS riesce a calcolare, al primo ordine, soltanto la parte a media nulla del potenziale elettrico (vedi tabella 3.7). Infine, in corrispondenza della condizione di carico flessionale d_f (tabella 3.8), lo spostamento trasversale s_p al primo ordine previsto dalla teoria KLFS contiene soltanto uno dei due termini relativi alla soluzione tridimensionale 3D. La teoria alla Reissner-Mindlin RMF1 calcola lo spostamento $\overline{\mathbf{s}}_d$ al primo ordine nel piano in maniera esatta in corrispondenza di tutte le condizioni di carico flessionale fatta eccezione della condizione di carico flessionale di tipo elettrico d_f, riportata in tabella 3.8. Sempre in corrispondenza di questa condizione di carico, calcola solo uno dei due termini che com-

pongono la soluzione al primo ordine per lo spostamento trasversale s_p; in particolare calcola il termine, legato allo scorrimento, che non determinato dalla teoria KLFS. In corrispondenza del carico meccanico trasversale c_f (vedi tabella 3.7) e della condizione di carico a_f la teoria RMF1 determina solo la media nello spessore del potenziale elettrico; in particolare prevede un potenziale al primo ordine nullo in corrispondenza della condizione di carico a_f, per la quale la soluzione tridimensionale evidenzia un potenziale elettrico al primo ordine quadratico e a media nulla nello spessore. La teoria alla Reissner-Mindlin RMF2, dove non sono imposti vincoli sulle tensioni e sullo spostamento elettrico, fornisce in genere valori di rigidezza errati rispetto a quelli relativi alla teoria tridimensionale 3D. Questo conferma nuovamente l'ottimalità della scelta di imporre nel funzionale misto di Hellinger-Prange-Reissner, sulle tensioni e sullo spostamento elettrico, lo stesso tipo di vincolo imposto sulle grandezze duali deformazioni e campo elettrico. Infine la teoria alla Kirchhoff-Love KLF1, nella quale il potenziale è costante nello spessore, non presenta, come già sottolineato nel paragrafo 3.4.4, accoppiamento tra le variabili meccaniche e le variabili elettriche. Come conseguenza, in corrispondenza della condizione di carico flessionale di tipo elettrico d_f prevede valori nulli per $\overline{\mathbf{s}}_d$ e s_p mentre in corrispondenza delle condizioni di carico flessionale di tipo meccanico a_f,b_f e c_f prevede un valore nullo del potenziale elettrico ϕ_p.

Riassumendo, la teoria RMF1, che porta in conto gli scorrimenti all'interno del materiale, e la teoria KLF2, che considera una variazione quadratica del potenziale nello spessore, sono egualmente efficienti nell'analisi delle piastre piezoelettriche in regime flessionale; tali due teorie infatti, per alcuni dei problemi campione di carattere flessionale considerati, colgono aspetti differenti della soluzione esatta tridimensionale al primo ordine mentre forniscono risultati coincidenti con quelli della soluzione tridimensionale per i rimanenti problemi campione. Dal punto di vista delle applicazioni la teoria alla Reissner-Mindlin RMF1 risulta più semplice da implementare per la soluzione agli elementi finiti rispetto ad una teoria alla Kirchhoff-Love quale la KLF2, come meglio spiegato nel capitolo successivo. La teoria RMFS risultata ottimale nel riprodurre al primo ordine la soluzione tridimensionale per spostamenti e potenziale elettrico; ha dunque il pregio di migliorare significativamente le prestazioni delle teorie RMF1 e KLF2 a prezzo dell'introduzione di una sola ulteriore incognita.

	$S_1 = S_2$	S_3	Φ
3D	$\frac{6pL^2}{\pi^2 h^2 \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{6pL^3}{\pi^3 h^2 \hat{c}_{11}}$	$-\frac{pL\overline{e}_{31}}{\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} (6(x_3/h)^2 - 1/2)$
KLF1	$\frac{6pL^2}{\pi^2 h^2 \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{6pL^3}{\pi^3 h^2 \overline{c}_{11}}$	0
KLF2	$\frac{6pL^2}{\pi^2 h^2 \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{6pL^3}{\pi^3 h^2 \hat{c}_{11}}$	$-\frac{pL\overline{e}_{31}}{\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} (6(x_3/h)^2 - 1/2)$
RMF1	$\frac{6pL^2}{\pi^2 h^2 \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{6pL^3}{\pi^3 h^2 \hat{c}_{11}}$	0
RMF2	$\frac{6pL^2}{\pi^3 h^2 c_{11}} x_3$	$-\frac{6pL^3}{\pi^3 h^2 c_{11}}$	0
RMFS	$\frac{6pL^2}{\pi^2 h^2 \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{6pL^3}{\pi^3 h^2 \hat{c}_{11}}$	$-\frac{pL\overline{e}_{31}}{\pi \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} (6(x_3/h)^2 - 1/2)$

Tabella 3.5: Comportamento delle differenti teorie di piastra in flessione per condizione di carico flessionale a_f

	$S_1 = -S_2$	S_3	Φ
3D	$\frac{p}{c_{44}} x_3$	0	0
KLF1	0	0	0
KLF2	0	0	0
RMF1	$\frac{p}{c_{44}} x_3$	0	0
RMF2	$\frac{p}{c_{44}} x_3$	0	0
RMFS	$\frac{p}{c_{44}} x_3$	0	0

Tabella 3.6: Comportamento delle differenti teorie di piastra in flessione per condizione di carico flessionale b_f

	$S_1 = S_2$	S_3	Φ
3D	$-\frac{3qL^3}{\pi^3 h^3 \hat{c}_{11}} x_3$	$\frac{3qL^4}{\pi^4 h^3 \hat{c}_{11}}$	$\frac{qL^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}} + \frac{qL^2 \overline{e}_{31}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} (6(x_3/h)^2 - 1/2)$
KLF1	$-\frac{3qL^3}{\pi^3 h^3 \hat{c}_{11}} x_3$	$\frac{3qL^4}{\pi^4 h^3 \overline{c}_{11}}$	0
KLF2	$-\frac{3qL^3}{\pi^3 h^3 \hat{c}_{11}} x_3$	$\frac{3qL^4}{\pi^4 h^3 \hat{c}_{11}}$	$\frac{qL^2 \overline{e}_{31}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} (6(x_3/h)^2 - 1/2)$
RMF1	$-\frac{3qL^3}{\pi^3 h^3 \hat{c}_{11}} x_3$	$\frac{3qL^4}{\pi^4 h^3 \hat{c}_{11}}$	$\frac{qL^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}}$
RMF2	$-\frac{3qL^3}{\pi^3 h^3 c_{11}} x_3$	$\frac{3qL^4}{\pi^4 h^3 c_{11}}$	$\frac{qL^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}}$
RMFS	$-\frac{3qL^3}{\pi^3 h^3 \hat{c}_{11}} x_3$	$\frac{3qL^4}{\pi^4 h^3 \hat{c}_{11}}$	$\frac{qL^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}} + \frac{qL^2 \overline{e}_{31}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} (6(x_3/h)^2 - 1/2)$

Tabella 3.7: Comportamento delle differenti teorie di piastra in flessione per condizione di carico flessionale c_f

	$S_1 = S_2$	S_3	Φ
3D	$\frac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{\omega L^2 \overline{e}_{31}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} - \frac{\omega L^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}}$	$\frac{\omega L^2}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11}}$
KLF1	0	0	$\frac{\omega L^2}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11}}$
KLF2	$\frac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{\omega L^2 \overline{e}_{31}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}}$	$\frac{\omega L^2}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11}}$
RMF1	0	$-\frac{\omega L^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}}$	$\frac{\omega L^2}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11}}$
RMF2	0	$-\frac{\omega L^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}}$	$\frac{\omega L^2}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11}}$
RMFS	$\frac{\omega L \overline{e}_{31}}{2\pi h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} x_3$	$-\frac{\omega L^2 \overline{e}_{31}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11}} - \frac{\omega L^2 e_{15}}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11} c_{44}}$	$\frac{\omega L^2}{2\pi^2 h \overline{\varepsilon}_{11}}$

Tabella 3.8: Comportamento delle differenti teorie di piastra in flessione per condizione di carico flessionale d_f