Capitolo 2

La teoria piezoelettrica di Voigt

In questo capitolo viene illustrata la teoria di Voigt della piezoelettricità. Dapprima sono riportate le relazioni costitutive valide per un generico materiale piezoelettrico lineare, ricavate da considerazioni di carattere energetico: sono illustrate differenti espressioni del legame costitutivo, a seconda della scelta effettuata per le variabili indipendenti atte a descrivere lo stato del sistema. Il legame costitutivo è poi particolarizzato al caso di un materiale piezoelettrico trasversalmente isotropo; tale classe di simmetria è assunta per lo sviluppo delle teorie di piastra piezoelettrica e di laminato piezoelettrico riportate nei successivi capitoli.

Sono quindi riportate le equazioni di equilibrio statico e dinamico per un corpo costituito di materiale piezoelettrico lineare, nell'ambito dell'approssimazione di campo elettrico "quasi statico".

Infine il problema dell'equilibrio di un corpo piezoelettrico lineare viene riformulato in maniera variazionale; i differenti funzionali riportati in questo paragrafo sono impiegati nel seguito per dedurre differenti teorie di piastra piezoelettrica e di laminato piezoelettrico.

2.1 Notazioni generali

Vengono qui riportate le notazioni di carattere generale, adottate nell'intero lavoro. $\mathbf{R}$ è il campo dei numeri reali, $\mathcal{V}$ è lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale, Lin è lo spazio dei tensori lineari del secondo ordine su $\mathcal{V}$, Sym è lo spazio dei tensori simmetrici del secondo ordine su $\mathcal{V}$ e Orth è il gruppo dei tensori ortogonali su $\mathcal{V}$, ossia Orth:= $\{\mathbf{Q} \in \text{Lin} | \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}\}$, dove $\mathbf{I}$ è il tensore identico e un apice T denota trasposizione; inoltre sym denota la parte simmetrica di un tensore e tr la sua traccia.

Per la descrizione dello spazio euclideo tridimensionale, ove non sia specificato diversa-

mente, si utilizza il sistema di coordinate cartesiane ortonormali (O, x_1, x_1, x_1), di versori $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3)$.

Per quanto riguarda la rappresentazione degli operatori, $\cdot$ indica il prodotto scalare, $||\ ||$ la norma indotta dal prodotto scalare, $\times$ indica il prodotto cartesiano, $\oplus$ la somma diretta mentre $\otimes$ indica il prodotto tensoriale.

La derivata parziale di una generica funzione f rispetto alla coordinata x_i si indica con $f_{,x_i}$, la derivata rispetto al tempo si indica con $\dot{f}$, ∇ indica il gradiente, div è la divergenza, rot il rotore e Δ è il laplaciano. Nelle espressioni integrali, dv, da e dl indicano, rispettivamente, la misura di volume, la misura di superficie e la misura di linea.

Dove non diversamente specificato, gli indici latini variano tra 1 e 3 mentre quelli greci tra 1 e 2 ed è assunta la convenzione di somma sugli indici ripetuti.

2.2 L'elettrodinamica dei materiali piezoelettrici

La descrizione della dinamica di corpi piezoelettrici richiede la conoscenza dell'evoluzione delle grandezze di natura elettrica all'interno del materiale, in virtù dell'accoppiamento elettromeccanico presente nel materiale. Le variabili di natura elettrica sono legate tra loro dalle equazioni di Maxwell che per un dielettrico piezoelettrico, nel quale è nullo il vettore di magnetizzazione e di densità di corrente, nel sistema di Heaviside-Lorentz si scrivono come:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{h} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\mathbf{e} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{h} &= 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{d} &= \xi \end{aligned} \tag{2.1}$$

essendo $\mathbf{h}$ il vettore intensità del campo magnetico (coincidente con il vettore flusso magnetico essendo nulla la magnetizzazione), ξ la densità volumica di carica elettrica e c la velocità della luce. Essendo $\mathbf{h}$ solenoidale si può introdurre un potenziale vettore $\mathbf{a}$ tale che $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{h}$. Sostituendo tale espressione nella $(2.1)_2$ si ottiene:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.2}$$

In base alla (2.2) si può allora introdurre un potenziale scalare ϕ in modo che si abbia:

$$\nabla\phi = -\left(\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) \tag{2.3}$$

In termini dei potenziali $\mathbf{a}$ e ϕ le equazioni di Maxwell nei mezzi dielettrici si scrivono come:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \\ &\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{h} \\ &\mathbf{e} = -\left(\nabla\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) \\ &\operatorname{div}\mathbf{d} = \xi \end{aligned} \tag{2.4}$$

Considerando una soluzione in forma d'onda (onda elastica) di pulsazione ν per il sistema costituito dalle equazioni (2.4), risulta:

$$\frac{\nu}{c} << |\kappa| \tag{2.5}$$

dove κ è il numero d'onda relativo alla soluzione (di modulo inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda) mentre ν/c è l'inverso della lunghezza d'onda di un onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto con pulsazione ν; la (2.5) è conseguenza del fatto che, a parità di frequenza, la lunghezza d'onda di un'onda elettromagnetica è di circa cinque ordini di grandezza maggiore di quella di un'onda elastica. Dunque si ha:

$$\left|\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right| << |\nabla\phi| \tag{2.6}$$

essendo il termine a destra della (2.6) proporzionale a $|\kappa|$ mentre quello a sinistra proporzionale a ν/c. Di conseguenza la $(2.4)_3$ si può approssimare con

$$\mathbf{e} = -\nabla\phi \tag{2.7}$$

L'assunzione della (2.7) al posto della $(2.4)_3$ è detta approssimazione di campo elettrico quasi statico [89] ed è ritenuta valida nel seguito.

Alla $(2.4)_4$ è associata la condizione al contorno [46]:

$$[\mathbf{d}] \cdot \mathbf{n} = \omega \tag{2.8}$$

essendo ω la densità superficiale di carica elettrica e denotando con $[\mathbf{d}]$ la discontinuità di $\mathbf{d}$ attraverso il contorno di normale esterna $\mathbf{n}$. Poichè, a causa della differenza di

suscettività elettrica dei due mezzi, i valori ordinari di $\mathbf{d}$ nell'aria sono molto minori di quelli all'interno di un materiale piezoelettrico, in tutto ciò che segue la condizione al contorno (2.8) è sostituita dalla condizione al contorno:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = -\omega \tag{2.9}$$

Riepilogando, in un mezzo piezoelettrico e nell'ipotesi di campo elettrico quasi statico, il campo elettrico risulta disaccoppiato dal campo magnetico e valgono le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\nabla\phi \\ \operatorname{div}\mathbf{d} &= \xi \end{aligned} \tag{2.10}$$

insieme con la condizione al contorno (2.9).

2.3 Il legame costitutivo

Ipotizzando piccole deformazioni del materiale piezoelettrico e piccoli campi elettrici, il comportamento costitutivo del materiale è descritto da relazioni lineari tra le variabili $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{e}$ e $\mathbf{d}$ [46], essendo $\mathbf{T} \in \mathrm{Sym}$ e $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ il tensore delle tensioni e delle deformazioni, rispettivamente. Applicando il principio della conservazione dell'energia ad un corpo costituito di materiale piezoelettrico e postulando l'esistenza di una funzione di stato energia interna $\mathbf{U}$ definita positiva, il differenziale esatto $\mathrm{d}\,\mathbf{U}$ di quest'ultima risulta essere [89]:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{U}(\mathbf{S}, \mathbf{d}) = \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{S} + \mathbf{e} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{d} \tag{2.11}$$

dove le variabili indipendenti $\mathbf{S}$ e $\mathbf{d}$ sono variabili estensive mentre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{e}$ sono variabili intensive. Per ottenere un legame costitutivo, utilizzato poi nel seguito, in cui le variabili indipendenti sono $\mathbf{S}$ e $\mathbf{e}$, si introduce la funzione di stato entalpia $\mathbf{H}$, così definita:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} \tag{2.12}$$

il cui differenziale, tenendo conto della (2.11), risulta essere:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{H} = \mathrm{d}\,\mathbf{U} - \mathbf{e} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{e} = \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{S} - \mathbf{d} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{e} \tag{2.13}$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{S}, \mathbf{e}) \tag{2.14}$$

Differenziando la (2.14) si ricava:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{e}} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{e} \tag{2.15}$$

Costruendo $\mathbf{H}$ in modo che $\partial \mathbf{H}/\partial \mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ e confrontando la (2.15) con la (2.13) si ottiene:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{S}} \qquad\qquad \mathbf{d} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{e}} \tag{2.16}$$

Nell'ambito di interazioni lineari tra variabili coniugate, si considera una espressione di $\mathbf{H}$ quadratica nelle variabili $\mathbf{S}$ e $\mathbf{e}$; si ha:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\left(S_{ij}\frac{\partial}{\partial S_{ij}} + e_n\frac{\partial}{\partial e_n}\right)\left(S_{hk}\frac{\partial}{\partial S_{hk}} + e_m\frac{\partial}{\partial e_m}\right)\mathbf{H} \tag{2.17}$$

Con le posizioni:

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial S_{ij}\partial S_{hk}}\right]_{\mathbf{e}} = \mathcal{C}^{\mathbf{e}}_{ijhk} \qquad\qquad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial S_{ij}\partial e_n}\right] = -E_{ijn} \qquad\qquad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial e_i\partial e_j}\right]_{\mathbf{S}} = -\varepsilon^{\mathbf{S}}_{ij} \tag{2.18}$$

ovvero:

$$\mathbf{H}(\mathbf{S},\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{\mathbf{e}}[\mathbf{S}]\cdot\mathbf{S} - \mathbf{E}[\mathbf{S}]\cdot\mathbf{e} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{S}}[\mathbf{e}]\cdot\mathbf{e} \tag{2.19}$$

e ricordando la (2.16) si ottiene il seguente legame costitutivo:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{S},\mathbf{e}) &= \mathcal{C}^{\mathbf{e}}[\mathbf{S}] - \mathbf{E}^T[\mathbf{e}] \\ \mathbf{d}(\mathbf{S},\mathbf{e}) &= \mathbf{E}[\mathbf{S}] + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{S}}[\mathbf{e}] \end{aligned} \tag{2.20}$$

Nelle (2.20) $\mathcal{C}^{\mathbf{e}}$ è un tensore del quarto ordine su Sym detto tensore di rigidezza a campo elettrico costante; $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{S}} \in \mathrm{Sym}$ é detto tensore di permeabilità dielettrica a deformazione costante; infine $\mathbf{E}$ è un tensore del terzo ordine detto tensore piezoelettrico ed agisce su elementi di Sym restituendo elementi di $\mathcal{V}$. Sostituendo le (2.20) nella (2.11) e integrando si ottiene:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{\mathbf{e}}[\mathbf{S}]\cdot\mathbf{S} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{S}}[\mathbf{e}]\cdot\mathbf{e} \tag{2.21}$$

La (2.21) insieme con il fatto che $\mathbf{U}$ è definita positiva implica che i tensori $\mathcal{C}^{\mathbf{e}}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{S}}$ sono entrambi definiti positivi. Di conseguenza l'entalpia $\mathbf{H}$ in (2.19) non ha un segno definito. La (2.21), grazie alle (2.20), si può riscrivere come:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{e}) \tag{2.22}$$

Sostituendo la (2.22) nella (2.12), si ottiene la seguente espressione dell'entalpia di un materiale piezoelettrico:

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{e}) = \frac{1}{2}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) \tag{2.23}$$

Il legame costitutivo (2.20) può essere espresso in altre tre differenti forme, ottenute scegliendo una diversa combinazione di variabili indipendenti. Tali differenti formulazioni possono essere ricavate a partire da differenti potenziali (ad esempio energia libera, entalpia libera), legati fra loro attraverso la trasformata di Legendre [56]; altresì si ottengono dalla (2.20) attraverso semplici manipolazioni algebriche. In particolare, in ciò che segue, oltre alla forma (2.20) è utilizzata la seguente forma di legame costitutivo:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathcal{S}^{\mathbf{d}}[\mathbf{T}] + \mathbf{G}^T[\mathbf{d}] \\ \mathbf{e} &= -\mathbf{G}[\mathbf{T}] + \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{T}}[\mathbf{d}] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nelle (2.24) $\mathcal{S}$ è il tensore di deformabilità a spostamento elettrico costante, $\boldsymbol{\theta}$ è il tensore di impermeabilità elettrica a tensione costante e $\mathbf{G}$ è un'altra forma del tensore piezoelettrico.

2.4 Classi di simmetria materiale

Per un generico materiale piezoelettrico, il tensore di rigidezza $\mathcal{C}$ dipende da 21 parametri, il tensore di permeabilità elettrica $\boldsymbol{\varepsilon}$ dipende da 6 parametri mentre il tensore piezoelettrico $\mathbf{E}$ dipende da 18 parametri. Il numero di parametri indipendenti da cui dipendono tali tensori diminuisce qualora sia presente un grado di simmetria nel materiale. Più specificamente, il gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ di un materiale piezoelettrico è definito come [63]:

$$\mathcal{G} := \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth} \,|\, \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{S}, \mathbf{e})\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{e}); \quad \mathbf{Q}\mathbf{d}(\mathbf{S}, \mathbf{e}) = \mathbf{d}(\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{e})\} \tag{2.25}$$

Assegnato il gruppo di simmetria del materiale, la (2.25) particolarizza i tensori $\mathcal{C}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\mathbf{E}$ riducendo il numero dei parametri indipendenti da cui dipendono. Il legame costitutivo usato nel seguito è quello relativo ad un materiale lineare piezoelettrico e trasversalmente isotropo (classe ∞mm). Il gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ di un materiale avente tale simmetria contiene tutte le rotazioni intorno ad un determinato asse, detto asse di trasversa isotropia, e le riflessioni su tutti i piani paralleli a tale asse; questo è il caso di massima simmetria possibile, compatibilmente con il fatto che il tensore piezoelettrico sia non identicamente

nullo. Utilizzando la notazione matriciale compressa [89, 56], il legame costitutivo in (2.20) si particolarizza al caso trasversalmente isotropo nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

con $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$, mentre quello in (2.24) si particolarizza come:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{31} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{31} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & g_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & g_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_{15} & 0 & \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{15} & 0 & 0 & 0 & \theta_{11} & 0 \\ -g_{31} & -g_{31} & -g_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

con $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$. La relazione tra i parametri relativi alle due formulazioni è data da:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -e_{31} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -e_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & -e_{33} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & g_{31} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & g_{31} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & g_{33} \\ -g_{31} & -g_{31} & -g_{33} & \theta_{33} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.28}$$

$$\begin{pmatrix} c_{44} & -e_{15} \\ e_{15} & \varepsilon_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{44} & g_{15} \\ -g_{15} & \theta_{11} \end{pmatrix}^{-1} \qquad c_{66} = s_{66}^{-1}$$

Le rappresentazioni viste valgono anche per materiali appartenenti alla classe $6\,mm$. Per una illustrazione dettagliata delle altre classi di simmetria si rimanda a [89, 56, 61].

2.5 L'equilibrio di un corpo piezoelettrico

In questo paragrafo è formulato il problema dell'equilibrio dinamico per un corpo costituito di materiale piezoelettrico lineare. In particolare il problema è formulato sia mediante la scrittura diretta delle equazioni di equilibrio che in forma variazionale.

Si considera dunque un corpo omogeneo di densità ρ, costituito di materiale lineare piezoelettrico ed occupante un regione $\mathcal{M}$ dello spazio euclideo tridimensionale; la frontiera di $\mathcal{M}$ è denotata con $\partial\mathcal{M}$. Si considerano poi i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}$: $\partial\mathcal{M}_f$, $\partial\mathcal{M}_s$, $\partial\mathcal{M}_\omega$ e $\partial\mathcal{M}_\phi$, con $\partial\mathcal{M} = \partial\mathcal{M}_f \cup \partial\mathcal{M}_s = \partial\mathcal{M}_\omega \cup \partial\mathcal{M}_\phi$ e $\partial\mathcal{M}_f \cap \partial\mathcal{M}_s = \partial\mathcal{M}_\omega \cap \partial\mathcal{M}_\phi = \emptyset$; su $\partial\mathcal{M}_f$ sono assegnate le forze superficiali $\mathbf{p}$, su $\partial\mathcal{M}_s$ sono imposti gli spostamenti $\mathbf{s}_0$, su $\partial\mathcal{M}_\omega$ è assegnata la densità superficiale di carica ω mentre su $\partial\mathcal{M}_\phi$ è imposto il potenziale elettrico ϕ_0. Inoltre $\mathbf{b}$ e ξ denotano le forze di volume e la densità volumica di carica elettrica, rispettivamente.

2.5.1 Equazioni di equilibrio statico e dinamico

Il problema dell'equilibrio statico è caratterizzato dalle seguenti equazioni:

- Equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} = \mathrm{sym}\nabla\mathbf{s} && \text{in} \quad \mathcal{M} \\ &\mathbf{e} = -\nabla\phi && \text{in} \quad \mathcal{M} \\ &\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 && \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_s \\ &\phi = \phi_0 && \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_\phi \end{aligned} \tag{2.29}$$

  essendo $\mathbf{s}$ il campo di spostamento.

- Equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} = \mathcal{C}[\mathbf{S}] - \mathbf{E}^T[\mathbf{e}] && \text{in} \quad \mathcal{M} \\ &\mathbf{d} = \mathbf{E}[\mathbf{S}] + \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{e}] && \text{in} \quad \mathcal{M} \end{aligned} \tag{2.30}$$

- Equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 && \text{in} \quad \mathcal{M} \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{d} - \xi = 0 && \text{in} \quad \mathcal{M} \\ &\mathbf{T}[\mathbf{n}] = \mathbf{p} && \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_f \\ &\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = -\omega && \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_\omega \end{aligned} \tag{2.31}$$

Sostituendo le $(2.29)_{1,2}$ e le (2.30) nelle $(2.31)_{1,2}$, il problema è formulato in termini delle sole variabili $\mathbf{s}$ e ϕ e si ha:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\left(\mathcal{C}^{\mathbf{e}}[\operatorname{sym}\nabla\mathbf{s}] + \mathbf{E}^T[\nabla\phi]\right) + \mathbf{b} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathcal{M} \\ &\operatorname{div}\left(\mathbf{E}[\operatorname{sym}\nabla\mathbf{s}] - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{S}}[\nabla\phi]\right) - \xi = 0 \qquad \text{in} \quad \mathcal{M} \end{aligned} \tag{2.32}$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{C}[\operatorname{sym}\nabla\mathbf{s}] + \mathbf{E}^T[\nabla\phi])[\mathbf{n}] = \mathbf{p} \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_f \\ &(\mathbf{E}[\operatorname{sym}\nabla\mathbf{s}] - \boldsymbol{\varepsilon}[\nabla\phi]) \cdot \mathbf{n} = -\omega \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_\omega \\ &\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_s \\ &\phi = \phi_0 \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_\phi \end{aligned} \tag{2.33}$$

Per ottenere le equazioni di equilibrio dinamico basta applicare il principio di D'Alembert, sostituendo $\mathbf{b}$ con $\mathbf{b} - \rho\,\ddot{\mathbf{s}}$ nelle equazioni $(2.31)_{1,2}$ o nelle (2.32).

2.5.2 Formulazioni variazionali per l'equilibrio statico e dinamico

Il problema descritto nel precedente paragrafo può essere riformulato mediante approccio variazionale; le equazioni (2.29), (2.30), (2.31) possono essere ottenute come condizioni di stazionarietà del funzionale di Hu-Washizu $\mathcal{W}(\mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{s}, \phi)$ [20] per materiali piezoelettrici, la cui espressione è:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \;=\; & \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} (\mathcal{C}[\mathbf{S}] \cdot \mathbf{S} - 2\mathbf{E}[\mathbf{S}] \cdot \mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{e}] \cdot \mathbf{e})\, dv - \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{e})\, dv + \\ + \; & \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{T} \cdot \operatorname{sym}\nabla\mathbf{s} + \mathbf{d} \cdot \nabla\phi)\, dv - \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{s} - \xi\,\phi)\, dv - \int_{\partial\mathcal{M}_f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}\, da + \\ + \; & \int_{\partial\mathcal{M}_\omega} \omega\,\phi\, da - \int_{\partial\mathcal{M}_s} \mathbf{T}[\mathbf{n}] \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)\, da - \int_{\partial\mathcal{M}_\phi} \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}(\phi - \phi_0)\, da \end{aligned} \tag{2.34}$$

La stazionarietà di $\mathcal{W}$ rispetto a $\mathbf{S}$ e $\mathbf{e}$ fornisce le equazioni del legame costitutivo (2.30), la stazionarietà di $\mathcal{W}$ rispetto a $\mathbf{T}$ e $\mathbf{d}$ fornisce le equazioni di congruenza $(2.29)_{1,2}$ e le condizioni al contorno $(2.29)_{3,4}$; infine, la stazionarietà di $\mathcal{W}$ rispetto a $\mathbf{s}$ e ϕ fornisce le equazioni di equilibrio $(2.31)_{1,2}$ e le condizioni al contorno $(2.31)_{3,4}$. Imponendo a priori le condizioni di stazionarietà di $\mathcal{W}$ rispetto a $\mathbf{S}$ e $\mathbf{e}$ si ottiene il funzionale $\mathcal{H}(\mathbf{T}, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \phi)$ di Hellinger-Prange-Reissner per materiali piezoelettrici lineari, utilizzato nel prossimo

capitolo nella deduzione di differenti teorie di piastra piezoelettrica; tale funzionale ha la seguente espressione [20]:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}(-\mathcal{S}[\mathbf{T}]\cdot\mathbf{T} - 2\mathbf{G}[\mathbf{T}]\cdot\mathbf{d} + \boldsymbol{\theta}[\mathbf{d}]\cdot\mathbf{d})\,dv + \int_{\mathcal{M}}(\mathbf{T}\cdot\mathrm{sym}\nabla\mathbf{s} + \mathbf{d}\cdot\nabla\phi)\,dv + \\ &- \int_{\mathcal{M}}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{s} - \xi\,\phi)\,dv - \int_{\partial\mathcal{M}_f}\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}\,da + \int_{\partial\mathcal{M}_\omega}\omega\,\phi\,da + \\ &- \int_{\partial\mathcal{M}_s}\mathbf{T}[\mathbf{n}]\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0)\,da - \int_{\partial\mathcal{M}_\phi}\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}\,(\phi-\phi_0)\,da \end{aligned} \tag{2.35}$$

La stazionarietà di $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathbf{T}$ e $\mathbf{d}$ insieme con le condizioni di congruenza $(2.29)_{1,2}$ fornisce le equazioni del legame costitutivo nella forma (2.24) e le condizioni al contorno $(2.29)_{3,4}$ mentre la stazionarietà di $\mathcal{H}$ rispetto $\mathbf{s}$ e ϕ fornisce le equazioni di equilibrio $(2.31)_{1,2}$ e le condizioni al contorno $(2.31)_{3,4}$. Infine si riporta il funzionale dell'energia potenziale totale $\mathcal{E}(\mathbf{s},\phi)$. Tale funzionale si ottiene imponendo a priori le condizioni di stazionarietà di $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathbf{T}$ e $\mathbf{d}$ e si scrive come:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}[\mathrm{sym}\nabla\mathbf{s}]\cdot\mathrm{sym}\nabla\mathbf{s} + 2\mathbf{E}[\mathrm{sym}\nabla\mathbf{s}]\cdot\nabla\phi - \boldsymbol{\varepsilon}[\nabla\phi]\cdot\nabla\phi)\,dv + \\ &- \int_{\mathcal{M}}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{s} - \xi\,\phi)\,dv - \int_{\partial\mathcal{M}_f}\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}\,da + \int_{\partial\mathcal{M}_\omega}\omega\,\phi\,da \end{aligned} \tag{2.36}$$

definito sulla varietà:

$$\begin{aligned}\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \quad &\text{su} \quad \partial\mathcal{M}_s \\ \phi = \phi_0 \quad &\text{su} \quad \partial\mathcal{M}_\phi\end{aligned} \tag{2.37}$$

Le condizioni di stazionarietà di $\mathcal{E}$ rispetto a $\mathbf{s}$ e ϕ forniscono le equazioni di equilibrio (2.32) e le condizioni al contorno $(2.33)_{1,2}$.

Per ottenere una formulazione variazionale del problema dinamico si può applicare il principio di Hamilton per sistemi non conservativi [89]. In tal caso le condizioni di equilibrio si ottengono dalla stazionarietà del funzionale hamiltoniano $\mathcal{K}(\mathbf{s},\phi)$:

$$\mathcal{K} = \int_{t_0}^{t_f}(\mathcal{T} - \mathcal{E})\,dt \tag{2.38}$$

dove l'energia cinetica $\mathcal{T}$ ha la seguente espressione:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}\rho\dot{\mathbf{s}}^2\,dv \tag{2.39}$$

La stazionarietà di $\mathcal{K}$ si effettua sulla varietà:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{s},\ \phi = 0 \quad \text{per} \quad t = t_0 \quad \text{e} \quad t = t_f \\
&\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \qquad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_s \\
&\phi = \phi_0 \qquad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}_\phi
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$